Programación Numérica para Geofísica

PNG

Andrés Sepúlveda

Departamento de Geofísica
Universidad de Concepción

10/08/2020

Anuncios

- Dudas, consultas, quejas, alabanzas, . . .
- Hoy: **Regresión Lineal**

Regresión Lineal

Un Problema Inverso

- Versión simple: y = a*x + b (Regresión Lineal)
  ¿Cómo convertirlo a matrices?
- Si tenemos n mediciones

```
x_1, y_1
x_2, y_2
...
x_n, y_n
```

Regresión Lineal

- Buscamos a y b tales que se cumpla

```
y_1 = a*x_1 + b
y_2 = a*x_2 + b
...
y_n = a*x_n + b
```

de forma simultánea, con un mínimo error. ¿Cómo medimos el error? ¿Cuál es la incerteza de los a, b obtenidos?

Regresión Lineal

Matricialmente se puede escribir como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{M}$$

Regresión Lineal

- $$Y = XM$$
- $$XM = Y$$
- $$M = Y/X$$
  (¿dividir matrices?)
- $$X^{-1}XM = X^{-1}Y \rightarrow M = X^{-1}Y$$
  (¿invertir matrices?)
- $$X^TXM = X^TY$$
- $$(X^TX)^{-1}X^TXM = (X^TX)^{-1}X^TY$$
- $$M = (X^TX)^{-1}X^TY$$

Ejercicios: Problemas Lineales

- Resuelva el problema de tiro parabólico
  - La ecuación sigue siendo Y = X*M
  - Es, en esencia, un problema lineal ¿En qué sentido?
  - $$y = a + b * x + c * x^2$$
  -
  - Buscamos a, b, y c tales que se cumpla

$$\begin{aligned}
y_1 &= a + b * x_1 + c * x_1^2 \\
y_2 &= a + b * x_2 + c * x_1^2 \\
&\vdots \\
y_n &= a + b * x_n + c * x_n^2
\end{aligned}$$

Ejercicios: Problemas Lineales

- Resuelva el problema de tiro parabólico
- $$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{M}$$

Ejercicios: Problemas Lineales

- Resuelva el problema de ajustar la señal de marea
  - Nuestros datos son elevación del agua (y_i) en función del tiempo (t_i).
  - La ecuación sigue siendo Y = X*M
  - Es, en esencia, un problema lineal ¿En qué sentido?
  - $$y = A \sin(\omega t + \phi)$$
    $$y = A' \sin(\omega t) + B' \cos(\omega t)$$
    con ω la frecuencia de la marea, por ejemplo M2 (semidiurna)
  -
  - Buscamos A', y B' tales que se cumpla

$$\begin{aligned}
y_1 &= A' \sin(\omega t_1) + B' \cos(\omega t_1) \\
y_2 &= A' \sin(\omega t_2) + B' \cos(\omega t_2) \\
&\vdots \\
y_n &= A' \sin(\omega t_n) + B' \cos(\omega t_n)
\end{aligned}$$

Ejercicios: Problemas Lineales

- Resuelva el problema de ajustar la señal de marea
- $$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \sin(\omega t_2) & \cos(\omega t_2) \\ \vdots & \\ \sin(\omega t_n) & \cos(\omega t_n) \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}}_{M}$$

Polyfit

Matlab

- Lo anterior es equivalente a usar mínimos cuadrados.
- Se puede generalizar a mas que una ecuación lineal o polinomial.
- Es un método gaussiano, que tiene problemas con los valores extremos.

Polyfit

Matlab

- La solución integrada:

```
p=polyfit(x,y,n);  % n = 1
```

- La ecuación escrita:

```
polyout(p,'x')
```

- Los valores ajustados

```
polyval(p,x)
```

- ¿Qué falta?
- Algún criterio de **calidad**.

Polyfit

Matlab Criterios de Calidad

- Coeficiente de correlación de Pearson (r), cuyo rango es:
  -1 (correlación negativa)
  0 (sin correlación)
  +1 (correlación positiva) ¡Cuidado!

  `http://www.tylervigen.com/spurious-correlations`

- R^2 nos dice qué porcentaje de la variabilidad total de y puede ser explicado por la variable x (regresora).
- Residuos (valores y - recta ajustada)
  Ejemplo $y = sin(x) \approx x, x \ll 1$

Polyfit

Matlab **Curve Fitting Toolbox**

- Ajuste paramétrico lineal y no-lineal:
  mínimos cuadrados estándar,
  mínimos cuadrados no–lineales,
  mínimos cuadrados ponderados,
  mínimos cuadrados con constricciones,
  ajustes robustos.
- Ajuste no-paramétrico.
- Determinación estadística de la bondad del ajuste.
- Extrapolación, diferenciación, e integración.
- Etc...