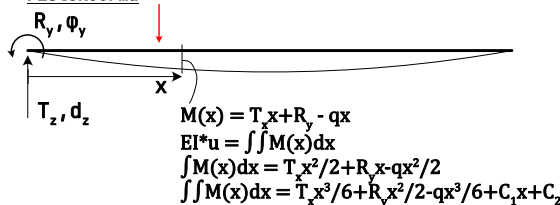


# Taipuman laskenta integroimalla momentin funktio toiseen kertaan

Ville PekkaLa, 25.2.2025

## Pistekuorma



$$M(x) = T_z x + R_y - q x$$

$$EI u''(x) = M(x)$$

$$EI u' = \int M(x) dx$$

$$\int M(x) dx = T_z x^2/2 + R_y x - qx^2/2$$

$$\int \int M(x) dx = T_z x^3/6 + R_y x^2/2 - qx^3/6 + C_1 x + C_2$$

Taipuman arvo pisteessä x

$$EI u''(x) = M(x)$$

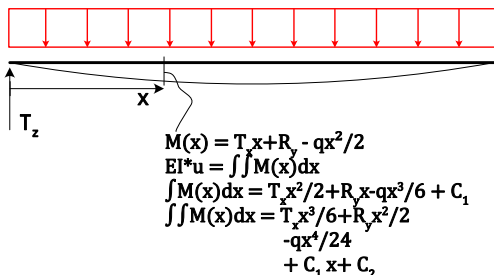
$$EI u' = \int M(x) dx \quad (C_1 = \text{kiertymä } \varphi, EI u = \text{siirtymä } d_z)$$

Kiertymän arvo pisteessä x

$$EI u'(x) = M(x)$$

$$EI u = \int M(x) dx \quad (C_1 = \text{kiertymä } \varphi, EI u = \text{siirtymä } d_z)$$

## Viivakuorma koko palkin pituudella



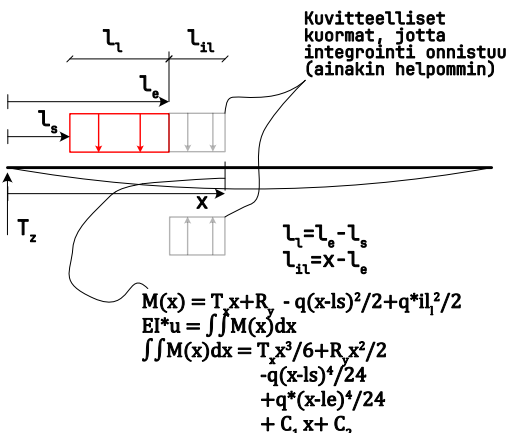
$$M(x) = T_z x + R_y - qx^2/2$$

$$EI u''(x) = M(x)$$

$$\int M(x) dx = T_z x^2/2 + R_y x - qx^3/6 + C_1$$

$$\int \int M(x) dx = T_z x^3/6 + R_y x^2/2 - qx^4/24 + C_1 x + C_2$$

## Viivakuorma, jossa kuorma ei ala elementin alusta ja loppuu ennen pistettä x



Kuvitteelliset kuormat, jotta integrointi onnistuu (ainakin helpommin)

$$L_1 = l_e - l_s$$

$$L_{i1} = x - l_e$$

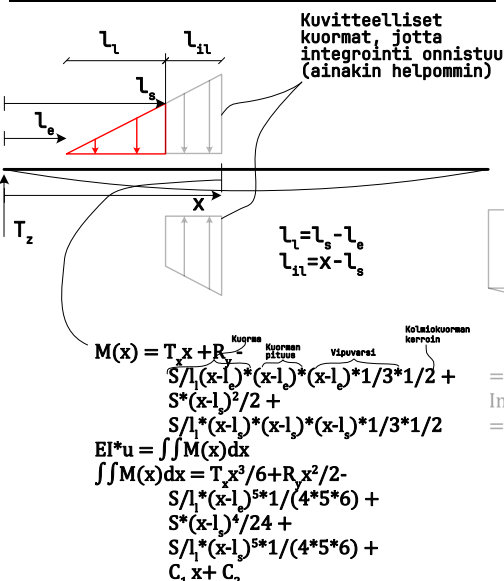
$$M(x) = T_z x + R_y - q(x-l_s)^2/2 + q l_1^2/2$$

$$EI u''(x) = M(x)$$

$$\int M(x) dx = T_z x^2/2 + R_y x - q(x-l_s)^3/6 + q l_1^2 x/2$$

$$\int \int M(x) dx = T_z x^3/6 + R_y x^2/2 - q(x-l_s)^4/24 + q l_1^2 x^2/2 + C_1 x + C_2$$

## Kolmiokuorma, kuorma kasvaa x-suuntaan



Kuvitteelliset kuormat, jotta integrointi onnistuu (ainakin helpommin)

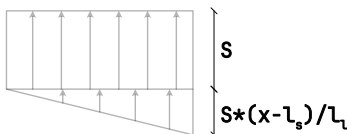
$$L_1 = l_e - l_s$$

$$L_{i1} = x - l_s$$

$$M(x) = T_z x + R_y - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^3}{6} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^2}{2} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)}{3} + \frac{S}{l_1} \frac{l_1^3}{6}$$

$$EI u''(x) = M(x)$$

$$\int M(x) dx = T_z x^2/2 + R_y x - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^4}{24} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^3}{6} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^2}{4} + \frac{S}{l_1} \frac{l_1^3}{6} + C_1 x + C_2$$



$$S$$

$$S \cdot (x-l_s)/L_1$$

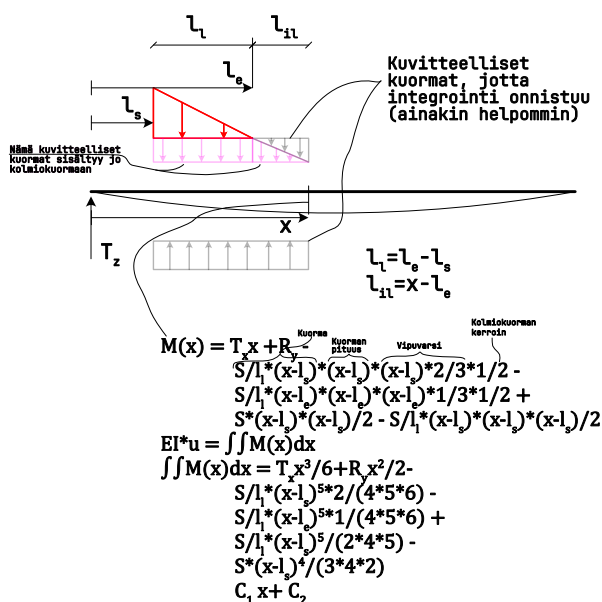
$$\Rightarrow S/l_1 \cdot (x-l_s)^3/6, \text{ kuorma}$$

$$\text{Imaginäärikuorma, tasainen kuorma}$$

$$\Rightarrow S/l_1 \cdot (x-l_s)^3/6, \text{ imaginäärikuorma, kolmiokuorma}$$

## Kolmiokuorma, kuorma pienenee x-suuntaan

Kuorma, joka loppuu pistettä x jälkeen



Kuvitteelliset kuormat, jotta integrointi onnistuu (ainakin helpommin)

$$L_1 = l_e - l_s$$

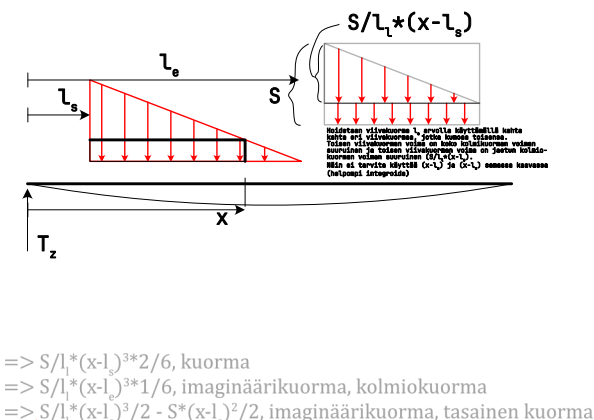
$$L_{i1} = x - l_e$$

$$M(x) = T_z x + R_y - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^3}{6} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^2}{2} - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)}{3} + \frac{S}{l_1} \frac{l_1^3}{6}$$

$$EI u''(x) = M(x)$$

$$\int M(x) dx = T_z x^2/2 + R_y x - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^4}{24} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^3}{6} - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^2}{4} + \frac{S}{l_1} \frac{l_1^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Kuorma, joka loppuu pisteen x jälkeen



Kuvitteelliset kuormat, jotta integrointi onnistuu (ainakin helpommin)

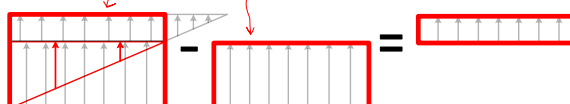
$$L_1 = l_e - l_s$$

$$L_{i1} = x - l_e$$

$$M(x) = T_z x + R_y - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^3}{6} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^2}{2} - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)}{3} + \frac{S}{l_1} \frac{l_1^3}{6}$$

$$EI u''(x) = M(x)$$

$$\int M(x) dx = T_z x^2/2 + R_y x - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^4}{24} + \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^3}{6} - \frac{S}{l_1} \frac{(x-l_s)^2}{4} + \frac{S}{l_1} \frac{l_1^3}{6} + C_1 x + C_2$$



$$\Rightarrow S/l_1 \cdot (x-l_s)^3/6, \text{ kuorma}$$

$$\Rightarrow S/l_1 \cdot (x-l_s)^3/6, \text{ imaginäärikuorma, kolmiokuorma}$$

$$\Rightarrow S/l_1 \cdot (x-l_s)^3/6 - S \cdot (x-l_s)^2/2, \text{ imaginäärikuorma, tasainen kuorma}$$