Trabalho de P.O.: Problema da Designação

Gustavo Alovisi e Vilmar Boff
Pesquisa Operacional I

13 de Agosto de 2020

1 O Problema

O problema em questão passa-se numa empresa real de consultoria que realiza projetos na área de economia. Como toda organização, houve um processo seletivo e alguns trainees foram aprovados para realizar esses empreendimentos dentro da empresa. No momento da realização deste estudo, estão sendo realizados os Projetos A, B, C e D, os quais demandam a inclusão de 2, 2, 3 e 3 consultores, respectivamente.

Porém, cada projeto requer diferentes combinações de habilidades de um candidato. Dessa forma, podemos interpretar essa situação como um *Problema de Designação* ao levarmos os trainees aos projetos os quais são mais capacitados, como ilustra o grafo na figura 1 abaixo:

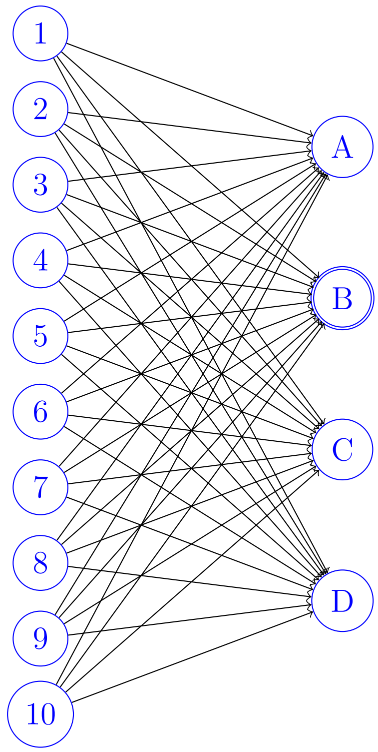

Figura 1: Problema de Designação em questão

Um questionário em relação à diferentes habilidades percebidas por cada candidato foi aplicado para 10 interessados nas vagas. Cada candidato realizou uma auto-avaliação conforme seu nível em cada habilidade (H), entre 1 (mais baixo) e 5 (mais alto). Os resultados podem ser conferidos na Tabela 1.

Trainee	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10	H11
1	5	3	3	4	3	5	5	5	4	5	4
2	5	3	4	4	3	5	5	3	4	5	4
3	5	4	5	3	2	4	5	4	5	5	2
4	5	4	5	4	3	2	2	3	3	4	3
5	4	5	4	4	3	5	2	5	5	5	4
6	4	3	5	4	2	2	2	1	3	5	3
7	4	5	3	4	5	5	4	5	5	5	2
8	5	5	4	4	3	4	4	5	4	5	3
9	4	4	5	3	5	5	3	3	4	5	3
10	3	4	4	4	3	3	5	4	5	5	1

Tabela 1: Resultado do questionário sobre habilidades aplicado para cada trainee

Após coletados os resultados, foi atribuído uma média de cada candidato em relação à sua aptidão para cada projeto, conforme as habilidades necessárias para os mesmos. Os resultados podem ser conferidos na Tabela 2.

Trainee	ProjetoA	ProjetoB	ProjetoC	ProjetoD
1	4,25	3,8	4,8	4,2
2	4,25	4	4,4	4
3	3,25	3,6	4,2	4,4
4	2,5	3,2	3,6	3,6
5	3,5	4,2	4,6	4,8
6	2	3	3,8	3,8
7	4	4	4,6	4,6
8	3,5	3,6	4,6	4,6
9	4	4,4	4	4,4
10	3	3,2	3,8	4

Tabela 2: Dados para o problema de designação

2 Especificação do Modelo

A partir destas habilidades médias calculadas, queremos maximizar a função de aptidão total dos trainees. O programa linear em sua forma canônica é dada pelo seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{4} h_{ij}\, x_{ij} & & \\
\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, & & i = 1, ..., 10 \\
\sum_{i=1}^{10} x_{i1} = 2, & & \\
\sum_{i=1}^{10} x_{i2} = 2, & & \\
\sum_{i=1}^{10} x_{i3} = 3, & & \\
\sum_{i=1}^{10} x_{i4} = 3, & & \\
x_{ij} \quad \text{int}, & & i = 1, ..., 10, \quad j = 1, ..., 4 \\
x_{ij} \geq 0 & & i = 1, ..., 10, \quad j = 1, ..., 4
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde $h_{i,j}$ é a aptidão do candidato i para o projeto j e x_{ij} indica a quantidade de mão-de-obra do candidato i a ser utilizada no projeto j.

Note que cada candidato será alocado a somente um projeto, uma vez que as primeiras 10 restrições limitam superiormente em 1 a soma das capacidades produtivas (quantidades máximas) de cada trainee e a restrição da variável ser do tipo *integer* e maior igual a zero define que x_{ij} ou é 0 ou é 1. Logo, teremos somente duas opções: ou o indivíduo está alocado em algum projeto, ou não está.

As 4 últimas restrições restringem o número de candidatos alocados para cada projeto j, como já mencionado na descrição do problema.

Para a resolução do programa, será utilizado o algoritmo de branch-in-bound, uma vez que é um problema de programação inteira, e o solver CPLEX com o software AMPL.

3 Resultados

3.1 Resultado da Otimização

Após rodarmos o problema de otimização via branch-in-bound, a atribuição de cada trainee para cada projeto pode ser verificada na Tabela 3.

Trainee	Designação PA	Designação PB	Designação PC	Designação PD
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	1
4	0	1	0	0
5	0	0	0	1
6	0	0	1	0
7	0	0	1	0
8	0	0	1	0
9	0	1	0	0
10	0	0	0	1

Tabela 3: Resultado do Problema de Designação

A solução ótima inteira retornou uma função objetivo com o valor de 42.3. Podemos observar na tabela 3 que todos os trainees foram atribuídos para um projeto, respeitando a restrição de que cada trainee pode apenas ser atribuído para um único projeto e de que os projetos possuem diferentes demandas de trainees.

3.2 Análise de Sensibilidade

É útil em um problema de otimização termos informações como os preços-sombra das variáveis, o valor das variáveis de folga adicionadas no problema ou quanto os valores das restrições podem mudar sem alterar o resultado ótimo encontrado. Para obter estes dados, é necessário fazer uma Análise de Sensibilidade da solução.

Sendo assim, para as 40 variáveis em questão, a Tabela 4 exibe o valor da variável após a otimização, seu custo reduzido, se ela pertence a base e os limites inferior e superior para que permaneça ou saia da base.

Variável	Valor	Custo Reduzido	Status	Limite Inferior	Limite Superior
x[1,1]	1	0	bas	4.2	4.65
x[1,2]	0	-0.6	low	-10^{20}	4.4
x[1,3]	0	0	bas	4.4	4.85
x[1,4]	0	-0.6	low	-10^{20}	4.8
x[2,1]	1	0	bas	3.85	10^{20}
x[2,2]	0	-0.4	low	-10^{20}	4.4
x[2,3]	0	-0.4	low	-10^{20}	4.8
x[2,4]	0	-0.8	low	-10^{20}	4.8
x[3,1]	0	-0.6	low	-10^{20}	3.85
x[3,2]	0	-0.4	low	-10^{20}	4
x[3,3]	0	-0.2	low	-10^{20}	4.4
x[3,4]	1	0	bas	4.2	10^{20}
x[4,1]	0	-0.55	low	-10^{20}	3.05
x[4,2]	1	0	bas	3	3.45
x[4,3]	0	0	bas	3.4	3.6
x[4,4]	0	0	bas	3.6	3.8
x[5,1]	0	-0.75	low	-10^{20}	4.25
x[5,2]	0	-0.2	low	-10^{20}	4.4
x[5,3]	0	-0.2	low	-10^{20}	4.8
x[5,4]	1	0	bas	4.6	10^{20}
x[6,1]	0	-1.25	low	-10^{20}	3.25
x[6,2]	0	-0.4	low	-10^{20}	3.4
x[6,3]	1	0	bas	3.8	10^{20}
x[6,4]	0	0	low	-10^{20}	3.8
x[7,1]	0	-0.05	low	-10^{20}	4.05
x[7,2]	0	-0.2	low	-10^{20}	4.2
x[7,3]	1	0	bas	4.6	10^{20}
x[7,4]	0	0	low	-10^{20}	4.6
x[8,1]	0	-0.55	low	-10^{20}	4.05
x[8,2]	0	-0.6	low	-10^{20}	4.2
x[8,3]	1	0	bas	4.6	10^{20}
x[8,4]	0	0	low	-10^{20}	4.6
x[9,1]	0	-0.25	low	-10^{20}	4.25
x[9,2]	1	$-4.44 * 10^{-16}$	bas	4.15	10^{20}
x[9,3]	0	-0.8	low	-10^{20}	4.8
x[9,4]	0	-0.4	low	-10^{20}	4.8
x[10,1]	0	-0.45	low	-10^{20}	3.45
x[10,2]	0	-0.4	low	-10^{20}	3.6
x[10,3]	0	-0.2	low	-10^{20}	4
x[10,4]	1	0	bas	3.8	10^{20}

Tabela 4: Análise de Sensibilidade nas variáveis

Na tabela, a coluna *status* informa que as variáveis do tipo *low* estão fora da base e as com o tipo *bas* estão na base.

Uma primeira observação na nossa análise é a de que todas as variáveis básicas têm limite inferior superior a 1, revelando que essas variáveis estão subutilizadas até os valores descritos na tabela. Na prática, isso nos diz que estamos subutilizando o potencial dos membros quando limitamos sua capacidade produtiva em no máximo 1!

Outra constatação é a de que não temos nenhum custo reduzido positivo - em geral, eles são todos não-positivos. Isso nos informa que, dadas as restrições do problema, ou não alteraremos a otimalidade da função objetivo ou aumentamos o seu valor a medida que alocamos mais membros nos projetos.

Porém, há um caso especial de custo reduzido na variável x_{92}, com custo reduzido muito negativo. Salvo que não há nenhum erro na implementação ou mesmo no software utilizado, seus compiladores, etc., temos que há um custo muito alto em deixar essa variável fora da base.

Outro caso a se evidenciar é o da variável x_{61}, que apresenta o menor dos custos reduzidos que estão fora da base. Caso houvesse espaço para entrada de uma nova variável na base ela seria forte candidata a essa entrada. Ainda nesse caso, vale notar que o custo reduzido de x_{63} é 0, inferindo que não há ganho de otimalidade em colocar o trainee 6 para executar o projeto C, ao mesmo tempo que há um custo reduzido de -1.25 em x_{61}, o que indica que esse consultor estaria melhor se executasse o Projeto A. Porém, por falta de vagas (restrições do problema) ele teve de ser alocado para o Projeto C.

Passamos agora a analisar as restrições. A tabela abaixo é o resultado da Análise de Sensibilidade das restrições do problema, realizada no AMPL:

Restrição	Folga na Restrição	Limites Inferiores	Limites Superiores	Preço Sombra	Status
Capacidade 1	0	1	1	1	equ
Capacidade 2	0	1	1	1	equ
Capacidade 3	0	1	1	1	equ
Capacidade 4	0	1	1	1	equ
Capacidade 5	0	1	1	1	equ
Capacidade 6	0	1	1	1	equ
Capacidade 7	0	1	1	1	equ
Capacidade 8	0	1	1	1	equ
Capacidade 9	0	1	1	1	equ
Capacidade 10	0	1	1	1	equ
Demanda 1	0	2	2	2	equ
Demanda 2	0	2	2	2	equ
Demanda 3	0	3	3	3	bas
Demanda 4	0	3	3	3	equ

Tabela 5: Análise de Sensibilidade nas restrições

Da tabela, conclui-se a folga em todas as restrições é 0. Isso implica que qualquer mudança em alguma variável fará entrar ou sair da base, como visto nos custos positivos.

Um outro modo de ver isso está nos limites superiores sendo iguais os limites inferiores, fazendo com que qualquer relaxamento nas restrições altere a base de soluções.

Outra informação advinda da tabela é o *status bas* da Demanda 3, o que sugere que há uma variável artificial nessa restrição (segundo documentação do AMPL), que pode ser x_{63}, analisada anteriormente. O tipo *equ* significa que podemos melhorar a solução aumentando as demandas ou capacidades de membros.

4 Considerações Finais

Dado o exposto, a otimização em questão torna-se viável para a aplicação em termos práticos na empresa citada. Ademais, concluímos que com o ganho de experiência e o consecutivo aumento da capacidade produtiva dos membros, podemos alocá-los de forma a fazer dois ou mais projetos simultaneamente. Segundo a Análise de Sensibilidade, há espaço para essa iniciativa gerar ganhos na produção da organização.

Salientamos que a solução já fora implementada na prática (realidade) e segundo *feedback* dos consultores seus interresses foram ligados de forma satisfatória com os Projetos as quais foram distribuídas. Um fato que contribuiu para isso foi saber que a própria pessoa escolheu o projeto que gostaria de entrar, não sendo uma ordem de alguém acima na hierarquia da organização.

5 Apêndice

5.1 Codigo .mod

```
set pessoas;
set tarefas;
param Capacidade{pessoas};
param Demanda{tarefas};
param interesse{pessoas, tarefas};

var x{pessoas, tarefas} integer >=0;

maximize
FO : sum{i in pessoas, j in tarefas} interesse[i,j] * x[i,j];

# Capacidade
subject to cap1: sum{j in tarefas} x[1,j] = Capacidade[1];
subject to cap2: sum{j in tarefas} x[2,j] = Capacidade[2];
subject to cap3: sum{j in tarefas} x[3,j] = Capacidade[3];
subject to cap4: sum{j in tarefas} x[4,j] = Capacidade[4];
subject to cap5: sum{j in tarefas} x[5,j] = Capacidade[5];
subject to cap6: sum{j in tarefas} x[6,j] = Capacidade[6];
subject to cap7: sum{j in tarefas} x[7,j] = Capacidade[7];
subject to cap8: sum{j in tarefas} x[8,j] = Capacidade[8];
subject to cap9: sum{j in tarefas} x[9,j] = Capacidade[9];
subject to cap10: sum{j in tarefas} x[10,j] = Capacidade[10];

# Demanda
subject to dem1: sum{i in pessoas} x[i,1] = Demanda[1];
subject to dem2: sum{i in pessoas} x[i,2] = Demanda[2];
subject to dem3: sum{i in pessoas} x[i,3] = Demanda[3];
subject to dem4: sum{i in pessoas} x[i,4] = Demanda[4];
```

5.2 Codigo .dat

```
set pessoas := 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10;
set tarefas := 1 2 3 4;

param Capacidade :=
1 1
2 1
3 1
```

```
4 1
5 1
6 1
7 1
8 1
9 1
10 1;

param Demanda:=
1 2
2 2
3 3
4 3;

param interesse: 1 2 3 4:=
1 4.25 3.8 4.8 4.2
2 4.25 4 4.4 4
3 3.25 3.6 4.2 4.4
4 2.5 3.2 3.6 3.6
5 3.5 4.2 4.6 4.8
6 2     3 3.8 3.8
7 4     4 4.6 4.6
8 3.5 3.6 4.6 4.6
9 4     4.4     4 4.4
10 3 3.2 3.8 4
```

5.3 Codigo .run

```
reset;
model trainees_proj.mod;
data trainees_proj.dat;
option solver cplex;
option cplex_options 'sensitivity';
solve;
display FO, x;
print "Analise de sensibilidade";

printf "N      Var     Valor   Custo_Red     Status     Limit.Inf
Limit_Sup \n";
display _varname, _var, _var.rc, _var.status, _var.down, _var.up;
printf "N   Restr.  Var_Folga  Limit_Inf Limit_Sup  P_Sombra   Status \n";
display _conname, _con.slack, _con.down, _con.up, _con.current, _con.status;
```