UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Polje realnih i komplesnih brojeva

Lekcija 04

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 04

POLJE REALNIH I KOMPLESNIH BROJEVA

Uvod

UVOD

Skup prirodnih, celih, racionalnih i realnih brojeva.

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova i on se u matematici ne definiše (predstavlja osnovni pojam), ali se proučavaju svojstva brojeva i operacije s njima.

Brojevni skupovi i uvedene operacije s njima predstavljaju jedan od osnovnih matematičkih aparata. Znanja usvojene o brojevnim skupovima omogućavaju nesmetano praćenje izlaganja u daljim lekcijama. U ovoj lekciji će biti obnovljenje najvažnije činjenice vezane za brojne skupove i to

- Skup realnih brojeva.
- Skup kompleksnih brojeva.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Realni brojevi

SKUP IRACIONALNIH BROJEVA. PRIMER

Skupovi racionalnih i iracionalnih brojeva čine skup realnih brojeva.

Ovako uvedeni racionalni brojevi daju mogućnost rešavanja mnogih matematičkih zadataka i jednačina. Međutim, jedan problem sa kojim su se suočili, još, Stari Grci pokazuje da u skupu racionalnih brojeva, ipak nije moguće rešavanje svih matematičkih problema.

Naime, postavlja se pitanje (primenom čuvene Pitagorine teoreme $a^2 + b^2 = c^2$), kolika je dužina dijagonale kvadrata, ako je dužina te stranice jednaka 1 (tj. jednoj mernoj jedinici). Tada, dobijamo da je kvadrat dužine dijagonale d jednak 2, tj. $d^2 = 2$. Može se pokazati da ne postoji racionalan broj čiji je kvadrat jednak 2. Dakle, jednačina oblika $x^2 = a$, gde je a pozitivan racionalan broj, nema uvek rešenja u skupa $\mathbb{Q}$ To nas dovodi do skupa iracionalnih brojeva koji označavamo sa $\mathbb{I}$ i koji zajedno sa skupom racionalnih brojeva izgradjuje skup realnih brojeva. Skup iracionalnih brojeva je gusto uređen skup.

Primer. Brojevi $\sqrt{2} = 1,4142136\ldots, \sqrt{3} = 1,7320508\ldots, \pi = 3,1415927\ldots, e = 2,7182818\ldots$ predstavljaju iracionalne brojeve.

Napomena. Svaki racionalan ili iracionalan broj koji zadovoljava ma koju algebarsku jednačinu n -tog reda:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0),$$

čiji su keoficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ nazivamo algebarski broj. Međutim, svi racionalni brojevi jesu i algebarski, ali nisu svi iracionalni brojevi takvi. Na primer, broj π ili e nije rešenje nijedne algebarske jednačine. Takve brojeve nazivamo transcedentni iracionalni brojevi.

Skup iracionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{I}$. O decimalnom zapisu racionalnog broja smo već govorili. Sada ćemo govoriti o decimalnom zapisu iracionalnog broja.

DECIMALNI ZAPIS IRACIONALNOG BROJA

Iracionalni brojevi imaju beskonačan neperiodičan decimalan zapis. Zato se u praksi ovakav broj aproksimira, tj. njegova približna vrednost se usvaja za njegovu vrednost.

Primer. Poznato je da se broj $\sqrt{2}$ može predstaviti na brojevnoj pravoj. To znači da je $\sqrt{2}$ broj. Međutim, koliko iznosi vrednost ovog broja i kako je zapisati? Ono što je sigurno, kako $\sqrt{2}$ nije racionalan broj (što smo ranije dokazali), tada on ima beskonačan neperiodičan decimalni zapis. Takođe, znamo da je $1 < \sqrt{2} < 2$. Dalje, iz $1,4^2 = 1,96$ i $1,5^2 = 2,25$ je

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5, \quad \text{odnosno} \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,4 + \frac{1}{10}.$$

Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo da je

$$\begin{array}{ccccc} 1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,42, \\ 1,414 & < & \sqrt{2} & < & 1,415, \\ 1,4142 & < & \sqrt{2} & < & 1,4143, \end{array} \quad \text{odnosno,} \quad \begin{array}{ccccc} 1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,41 + \frac{1}{100} \\ 1,414 & < & \sqrt{2} & < & 1,414 + \frac{1}{1000}, \\ 1,4142 & < & \sqrt{2} & < & 1,4142 + \frac{1}{10000}, \end{array}$$

i tako redom. Ako se umesto broja $\sqrt{2}$, uzme $1,4$, ili $1,41$, ili $1,414$, ili $1,4142$, i tako redom, kažemo da je on aproksimiran odozdo pomenutim decimalnim brojevima. Greška koju pravimo nije veća od $\frac{1}{10}$ ako aproksimaciju vršimo brojem $1,4$, nije veća od $\frac{1}{100}$ ako aproksimaciju vršimo brojem $1,41$ i tako redom.

Analogno, ako se umesto broja $\sqrt{2}$, uzme $1,5$, ili $1,42$, ili $1,415$, ili $1,4143$, i tako redom, kažemo da je on aproksimiran odozgo pomenutim racionalnim brojevima. Greška koju pravimo nije veća od $\frac{1}{10}$ ako aproksimaciju vršimo brojem $1,5$, nije veća od $\frac{1}{100}$ ako aproksimaciju vršimo brojem $1,42$ i tako redom. Generalno, ako aproksimaciju (bilo odozdo, bilo odozgo) posmatramo na n decimala, greška nije veća od $\frac{1}{10^n}$.
Aproksimaciju iracionalnog broja koju usvajamo za njegovu vrednost naziva se približna vrednost iracionalnog broja. Da smo neki iracionalan broj zamenili nekom njegovom približnom vrednošću označavamo sa $\approx$ i čitamo *približno je jednak* .

Prethodno izloženim postupkom, možemo da odredimo približnu vrednost za $\sqrt{2}$ na bilo koju decimalu. Tako, na primer, imamo da je $\sqrt{2} \approx 1,414$, pri čemu greška aproksimacija nije veća od $\frac{1}{10^3}$. Slično, imamo da je $\sqrt{3} \approx 1,73205$, kao i $\sqrt{5} \approx 2,23607$, pri čemu greška ovakvih aproksimacija nije veća od $\frac{1}{10^5}$.

Unija skupa racionalnih i iracionalnih brojeva izgrađuje skup realnih brojeva, koji označavamo sa $\mathbb{R}$, tj. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, gde je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$. Veoma važna osobina skupa $\mathbb{R}$ jeste da se dužina bilo koje duži može predstaviti pomoću tačno jednog realnog broja. Ona se naziva osobina kompletnosti skupa $\mathbb{R}$. Skup $\mathbb{Q}$ ne poseduje ovu osobinu. O ovoj osobini ćemo kasnije ponovo govoriti.

O BROJU π

Arhimed je dokazao da broj π predstavlja odnos obima i prečnika proizvoljnog kruga.

Jedan od najvažnijih konstanti u matematici i fizici jeste broj π, za koji je sredinom 18. veka dokazano da je iracionalan broj. Smatra se da je bio poznat još u 20. veku p.n.e. Arhimed je dokazao da broj π predstavlja odnos obima i prečnika kruga i dao je za njega sledeću procenu

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Broj π je poznat pod imenom Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj. Za razliku od broja $\sqrt{2}$, broj π se ne može izračunati prethodno opisanim postupkom. Danas, uz pomoć računara i primenu složenih algoritama može da se proračuna preko milijardu decimala broja π. U praksi se koristi njegov približna vrednost. Možemo uzeti, na primer, da je $\pi \approx 3,1415927$, pri čemu greška ovakve aproksimacije nije veća od $\frac{1}{10^7}$.

Arhimed je procenu broja π izložio u radu O merenju kruga. Da bi procenio njegovu vrednost, Arhimed je oko kruga poluprečnika 1 opisao i upisao pravilne mnogouglove. Površina traženog kruga, tj. vrednost broja π se nalazila između površine opisanog i upisanog mnogougla u krug. S povećavanjem broja stranica tako upisanih i opisanih mnogouglova, dobijena procena broja π je bila sve tačnija i tačnija. Složenim matematičkim računom za to vreme, određivao je površine ovih figura, oslanjajući se na rezultate iz Euklidovih Elemenata. Procenu da važi $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ je dobio posmatranjem kruga oko koga je opisan i u njega upisan pravilni mnogougao sa 96 strana. Arhimed je za procenu broja π koristio metodu koja se naziva metod iscrpljivanja ili metod ekshaustije. Otkriće ove metode koju je koristio Arhimed, pripisuje se starogrčkog filozofu Eudoksu iz Knida.

NEKI PODSKUPOVI SKUPA REALNIH BROJEVA

Zatvoren interval je onaj kome pripridaju obe krajnje tačke, poluotvoren je ako jedna pripada, a druga ne. Otvorenom intervalu krajnje tačke ne pripadaju.

Često se koriste podskupovi skupa realnih brojeva koje se nazivaju intervali i razlikuju se sledeći intervali:

1. zatvoren interval ili segment ili odsečak, u oznaci $[a,b]$, jeste skup realnih brojeva x definisan sa $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}, (a < b)$;

2. otvoren interval, u oznaci $[a,b]$, jeste skup realnih brojeva x definisan sa $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}, (a < b)$;

3. poluotvoren interval ili poluzatvoren interval jeste skup realnih brojeva kome pripada samo jedan od njegovih krajeva. Postoje dva slučaja $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a < b)$ i $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}, (a < b)$.

Umesto oznake $\mathbb{R}$ za skup realnih brojeva koristi se i oznaka $(-\infty, +\infty)$. Pored pomenutih intervala, mogu se definisati i sledeći podskupovi skupa realnih brojeva

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\},\ \ [a,+\infty)=\{x \mid a\leq x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\},\ \ (-\infty,b]=\{x \mid x\leq b\}.$$

Intervali $(-\infty,b)$ i $(-\infty,b]$ su skupovi koji su ograničeni odozgo. Intervali $(a,+\infty)$ i $[a,+\infty)$ su skupovi koji su ograničeni odozdo.

Skupovi (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ i $[a,b]$ su ograničeni skupovi, za sve $a,b\in\mathbb{R}, a<b$.

SUPREMUM I INFIMUM

Supremum (infimum) brojevnog skupa, ako postoji, je najmanji (najmanji) broj od svih onih od kojih su manji (veći) svi elementi tog skupa, a on sam mu ne pripada.

Definicija. Broj M se naziva supremum skupa $X\subset R$ ako važi:
$(\forall x\in X)\ x\leq M,$
$(\forall\varepsilon>0)(\exists x\in X)\ x>M-\varepsilon.$

Ako takav konačan broj postoji tada pišemo da je, $\sup X=M$, a u suprotnom pišemo po definiciji da je $\sup X=+\infty$.

Definicija. Broj m se naziva infimum skupa $X\subset R$ ako važi:
$(\forall x\in X)\ x\geq m,$
$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x\in X)x<m+\varepsilon.$

Ako takav konačan broj postoji tada pišemo da je $\inf X=m$, a u suprotnom pišemo po definiciji da je $\inf X=-\infty$.

POLJE REALNIH BROJEVA

Algebarska struktura $(\mathbb{R},+,\cdot)$ se naziva polje realnih brojeva.

Strogo zasnivanje realnih brojeva ovde nećemo izlagati. Ovde ćemo navesti samo jedan skup aksioma koji ćemo podeliti u tri dela.

Algebarska struktura $(\mathbb{R},+,\cdot)$ zadovoljava sledeće zahteve:

- $(\mathbb{R},+)$ je komutativna grupa, gde je 0 neutralni element za sabiranje realnih brojeva,
- $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ je komutativna grupa, gde je 1 neutralni element za množenje realnih brojeva,
- važe levi i desni distributivni zakoni, tj. važi

$$(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) \;\; a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c,$$
$$(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) \;\; (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a.$$

Algebarska struktura $(\mathbb{R},+,\,\cdot\,)$ se naziva polje realnih brojeva.

Drugi deo aksioma se odnosi na uvođenje uređenja tj, relacije $<$ u skup $\mathbb{R}$:

- Zakon trihotomije : Za proizvoljno $a \in \mathbb{R}$ tačno jedno od sledeća tri tvrđenja važi: $a > 0$ ili $a = 0$ ili $a < 0$,
- Ako je $a, b > 0$ tada je $a + b > 0$ i $a \cdot b > 0$,
- Ako je $a > b$, tada za bilo koji realan broj c važi da je $a + c > b + c$.

Treći deo predstavlja Aksioma kompletnosti i ona glasi

- Svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{R}$ ograničen odozgo ima najmanje gornje ograničenje.

Smisao prethodne aksiome ćemo objasniti na narednom primeru.

Primer. Ukazali smo ranije na donje aproksimacije broja $\sqrt{2}$ i videli da važi

$$1 < 1,4 < 1,414 < 1,4142 < \ldots < \sqrt{2}.$$

Posmatrajmo skup svih ovih brojeva koji je beskonačan. Svi brojevi koji su veći od svakog broja iz posmatranog skupa su njegova gornja ograničenja tj. majorante. Možemo uočiti da je posmatrani skup ograničen odozgo brojevima 2, ili $1,5$. Postavlja se pitanje da li ovaj skup ima najmanje od svih gornjih ograničenja tj. supremum? U skupu $\mathbb{Q}$ supremum posmatranog skupa ne postoji, dok je u skupu $\mathbb{R}$ to broj $\sqrt{2}$.

Napomena. Aksioma kompletnosti se može iskazati i na sledeći način: Svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{R}$ ograničen odozdo ima najveće donje ograničenje.

Napomena. Prethodno datim aksiomama mogu se dokazati mnoge osobine koje važe za operacije i relacije koje su definisane u skupu realnih brojeva.

Poglavlje 2

Kardinalnost skupova

UPOREĐIVANJE BROJA ELEMENATA KONAČNIH SKUPOVA. PRIMER

Uporedivanje broja elemenata konačnih skupova je u bliskoj vezi sa postojanjem injekcija, sirjekcija ili bijekcija izmedu tih skupova.

Ako skup A ima konačan broj elemenata ili kako se to kraće kaže ako je konačan skup, tada je sa $n(A)$ ili $card(A)$ označen broj elemenata ovog skupa ili kardinalnost skupa A ili brojnost skupa A. Svakako, važi da je $n(A)$ prirodan broj. Ako je i B neki konačan skup, tada se prirodni brojevi $n(A)$ i $n(B)$ mogu upoređivati, tj. može se upoređivati koji skup sadrži više elemenata. Svakako važi da je $n(A) < n(B)$, ili $n(A) = n(B)$, ili $n(A) > n(B)$.

Važno je pomenuti da se kardinalnost konačnih skupova može upoređivati i na osnovu odgovarajućih preslikavanja koja se mogu uspostaviti između njih. Preciznije rečeno, ako se između njih mogu uspostaviti sirjektivno, injektivno i bijektivno preslikavanje, tada možemo izvoditi zaključke o kardinalnosti tih skupova.

Tako, ako su A i B konačni skupovi i preslikavanje $f : A \mapsto B$ je injekcija, koje nije bijekcija, tada je $n(A) < n(B)$. Važi i obrnuto.

S druge strane, ako su A i B konačni skupovi i preslikavanje $f : A \mapsto B$ je sirjekcija, koje nije bijekcija, tada je $n(A) > n(B)$. Važi i obrnuto.

Od posebnog interesa u matematici je sledeći stav.

Stav. Neka su A i B konačni skupovi. Tada je $n(A) = n(B)$ ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \mapsto B$.

Skupovi iste kardinalnost se nazivaju ekvivalentni skupovi.

Primer. Skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b, c\}$ su ekvivalentni jer se može definisati bijekcija $f : A \mapsto B$ npr. na sledeći način

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $n(A) = n(B) = 3$.

Na osnovu svega rečenog možemo zaključiti da za konačne skupove A i B očigledno važi da je $A \subseteq B$ ako i samo ako je $n(A) \leq n(B)$.

UPOREĐIVANJE BROJA ELEMENATA BESKONAČNIH SKUPOVA. PRIMER

Dva skupa su ekvivalentna ako postoji preslikavanje jednog skupa na drugi koje je bijekcija.

Postavlja se pitanje, da li rečeno za konačne skupove važi i za skupove sa beskonačnim brojem elemenata? Na primer, ako sa E označimo skup parnih brojeva, i znamo da je $E \subset \mathbb{N}$, da li to znači da je $n(E) < n(\mathbb{N})$? Slično, da li iz $[0,1] \subset \mathbb{R}$ važi da je $card([0,1]) < card(\mathbb{R})$? Takođe, može se postaviti pitanje da li se svi beskonačni skupovi mogu upoređivati ovom relacijom? Na primer, da li ima više racionalnih ili iracionalnih brojeva? Generalno govoreći, ključnu ulogu u davanju odgovora na postavljena pitanja daje prethodno dati stav. To ilustrujemo narednim primerima.

$\mathbf{Primer.}$ Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i skup parnih brojeva E koji je njegov podskup, su ekvivalentni, jer se može definisati bijekcija $f : \mathbb{N} \mapsto E$ datu sa $f(n) = 2n$, za svako $n \in \mathbb{N}$ ili zapisanu u obliku

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \end{pmatrix}.$$

Dakle, skupovi $\mathbb{N}$ i E su iste kardinalnosti. Slično se može pokazati da su skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ iste kardinalnosti, iako je $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$\mathbf{Primer.}$Skupovi $(0,1)$ i $\mathbb{R}$ su ekvivalentni.
Zaista, skup $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je ekvivalentan skupu $(0,1)$ jer postoji funkcija $g : (0,1) \mapsto \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, definisana sa $g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$. Skup $\mathbb{R}$ je ekvivalentan sa skupom $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dovoljno je samo posmatrati funkciju $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \mathbb{R}$ definisanu sa $f(x) = \operatorname{tg} x$. Dakle, funkcija $f \circ g : (0,1) \mapsto \mathbb{R}$ je bijekcija, kao kompozicija dve bijekcije, pa su skupovi $(0,1)$ i $\mathbb{R}$ ekvivalentni.

Na osnovu prethodnih primera, ima smisla uvesti sledeću definiciju.

$\mathbf{Definicija.}$Za skup A kažemo da je beskonačan ako je ekvivalentan sa svojim pravim podskupom.

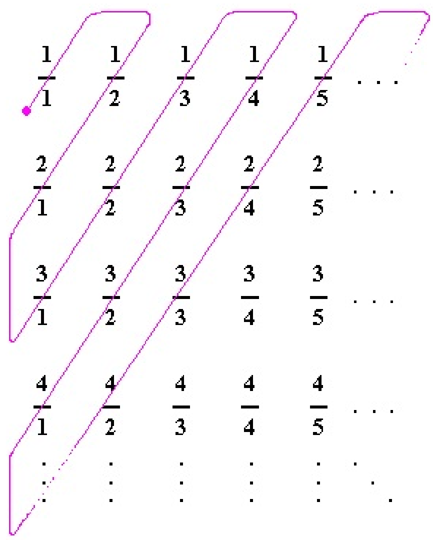
Skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ su beskonačni skupovi. Za ove brojevne skupove njihova kardinalnost se označava posebnim slovima. Tako je $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ ($\aleph_0$ se čita "alef nula"), dok je $card(\mathbb{R}) = c$ (c se čita "kontinuum").Dakle, skup prirodnih brojeva je kardinalnosti alef nula, dok skup realnih brojeva ima kardinalnost kontinuuma.

PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI. PRIMER

Prebrojivi skupovi imaju kardinalni broj jednak $\aleph_0$ i oni se mogu poređati u niz, dok se skupovi koji imaju kardinalni broj c ne mogu poređati u niz.

Definicija. Za skup A kažemo da je prebrojiv, ako je ekvivalentan skupu $\mathbb{N}$. Akoje skup konačan ili prebrojiv, tada kažemo da je najviše prebrojiv. Beskonačni skupovi koji nisu ekvivalentni sa $\mathbb{N}$ nazivaju se neprebrojivi. Prebrojivi skupovi imaju kardinalni broj jednak $\aleph_0$ i oni se mogu poređati u niz, dok se skupovi koji imaju kardinalni broj c ne mogu poređati u niz. Zaključujemo da je $\aleph_0 \neq c$, tj. $\aleph_0 < c$.

Primer. Skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ su prebrojivi skupovi, odnosno njihova kardinalnost je jednaka kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. Na slici je dat prikaz kako sve pozitivne racionalne brojeve možemo poređati u niz.



Slika 2.1 Postupak dijagonalizacije (izvor Autor).

Zaista, sa slike se može uočiti da je između prirodnih i pozitivnih racionalnih brojeva moguće uspostaviti sledeću bijekciju

$$1 \to \frac{1}{1},\ 2 \to \frac{1}{2},\ 3 \to \frac{2}{1},\ 4 \to \frac{3}{1},\ 5 \to \frac{1}{3},\ 6 \to \frac{1}{4},\ 7 \to \frac{2}{3},\ 8 \to \frac{3}{2}, \ldots$$

Upoređivanjem slike i prethodnog zapisa može se uočiti da se u zapisu ne javlja razlomak $\frac{2}{2}$. Naime, on se izostavlja jer se njegov redukovani razlomak (a to je $\frac{1}{1}$) već javlja. Za svaka takva ponavljanja odgovarajući razlomci će se izostavljati. Ovaj postupak dokazivanja da je skup pozitivnih racionalnih brojeva prebrojiv se naziva Kantorova dijagonalizacija. Svakako, ovo se lako može proširiti i na čitav skup $\mathbb{Q}$.

S druge strane, skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv. Zapravo, između skupa prirodnih u skupa realnih brojeva se ne može definisati bijekcija, pa su oni različite kardinalnosti. Samim tim je i svaki podskup skupa realnih brojeva, na primer interval $(0, 1)$ neprebrojiv skup.

Svakako, pored $\aleph_0$ i c postoje i drugi beskonačni kardinalni brojevi. Takvih kardinalnih brojeva ima beskonačno mnogo. Za beskonačne kardinalne brojeve važe neuobičajene jednakosti. Na primer, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ili $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, za $n \in \mathbb{N}$.

Poglavlje 3

Polje kompleksnih brojeva

OPERACIJE SA UREĐENIM PAROVIMA

Koren parnog stepena iz negativnih brojeva nema rešenja u skupu R. Zato se javlja potreba za proširenjem ovog skupa. Skup kompleksnih brojeva uvodimo preko uređenih parova.

Koren parnog stepena iz negativnih brojeva nema rešenja u skupu realnih brojeva. Tako, na primer, jednačina $x^2+1=0$ nema rešenja u skupu realnih brojeva. Zato se javlja potreba za proširenjem ovog skupa brojeva, do skupa čiji će skup realnih brojeva biti samo specijalan podskup.

Sada će biti definisane operacije množenja uređenog para skalarom,sabiranje, oduzimanje i množenje dva uređena para u skupu $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

Množenje realnim skalarom α uređenog para (x,y) definiše se nasledeći način $\alpha \cdot (x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$.

Sabiranje, oduzimanje i množenje dva uređena para (x_1,y_1) i (x_2,y_2) definišu se na sledeći način

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\ \ (x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-y_1,x_2-y_2),$$
$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_2y_1+x_1y_2).$$

Dalje, za ovako definisane operacije važe komutativni, asocijativni i distrubutivni zakon za sabiranje i množenje uređenih parova i dokaz ovog tvrđenja se svodi na važenje ovih zakona u skupu realnih brojeva. Ovde će biti samo navedeni ti zakoni

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_2,y_2)+(x_1,y_1),\ \ \text{komutativnost sabiranja},$$
$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1),\ \ \text{komutativnost množenja},$$
$$(x_1,y_1)+\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)=\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)+(x_3,y_3),$$
$$\text{asocijativnost sabiranja},$$
$$(x_1,y_1)\cdot\big((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)\big)=\big((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\big)\cdot(x_3,y_3),$$
$$\text{asocijativnost množenja},$$
$$\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)\cdot(x_3,y_3)=(x_1,y_1)\cdot(x_3,y_3)+(x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3),$$
$$\text{desni distributivni zakon},$$
$$(x_3,y_3)\cdot\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)=(x_3,y_3)\cdot(x_1,y_1)+(x_3,y_3)\cdot(x_2,y_2),$$
$$\text{levi distributivni zakon}.$$

ODREĐIVANJE NEUTRALNOG I INVERZNOG ELEMENTA U ODNOSU NA SABIRANJE UREĐENIH PAROVA

Neutralni element za sabiranje uređenih parova je uređeni par $(0,0)$, dok je inverzni element element uređenom paru (x,y), uređeni par $(-x,-y)=-(x,y)$.

Za uređeni par (x, y) postoji par $(0, 0)$ tako da je on neutralni element za sabiranje uređenih parova, tj. važi:

$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y).$

Dalje, za svaki uređeni par (x, y) postoji uređeni par (u, v) tako da je:

$(x, y) + (u, v) = (u, v) + (x, y) = (0, 0), \quad \text{tj.} \quad (x + u, y + v) = (0, 0).$

Dakle, $u = -x$, $v = -y$, pa svaki uređeni par (x, y) ima svoj inverzni (suprotni) uređeni par $(-x, -y) = -(x, y)$ u odnosu na operaciju sabiranja uređenih parova.

ODREĐIVANJE NEUTRALNOG ELEMENTA U ODNOSU NA OPERACIJU MNOŽENJE UREĐENIH PAROVA

Neutralni element za množenje uređenih parova (osim za uređeni par (0,0)) je uređeni par (1,0).

Za svaki uređeni par $(x, y) \neq (0, 0)$ postoji uređeni par (a, b) tako da je

$(x, y) \cdot (a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (ax - by, bx + ay) = (x, y).$

Odavde dobijamo sistem:

$ax - by = x,$

$bx + ay = y,$

koji treba rešiti po nepoznatim a i b. Množeći prvu jednačinu sa x, drugu sa y i sabiranjem ovih jednačina dobija se da je:

$ax^2 + ay^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow a\left(x^2 + y^2\right) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow a = 1.$

Napomena. Skraćivanje sa $x^2 + y^2$ je dozvoljeno jer je pretpostavka da važi $(x, y) \neq (0, 0)$, pa mora biti $x^2 + y^2 \neq 0$.

Vraćajući ovu vrednost u polazni sistem dobija se $b = 0$. Dakle, uređeni par je $(1, 0)$ je jedinični element za množenje uređenih parova (osim za par $(0, 0)$).

ODREĐIVANJE INVERZNOG ELEMENTA U ODNOSU NA OPERACIJU MNOŽENJA UREĐENIH PAROVA

Inverzni element za uređeni par $(x,y) \neq (0,0)$ je uređeni par $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Takođe postoji i inverzni element u odnosu na množenje uređenih parova, tj. za svaki uređeni par $(x, y) \neq (0, 0)$ postoji samo jedan uređeni par (m, n) tako da je:

$(x, y) \cdot (m, n) = (1, 0)$.

Sličnim postupkom kao prilikom određivanja neutralnog elementa za sabiranje uređenih parova, dobija se da je:

$m = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad n = -\frac{y}{x^2+y^2}.$

Dakle, uređeni par

$(m, n) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \quad -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

predstavlja inverzni, odnosno recipročni, kako se još kaže kada je operacija množenja u pitanju, uređeni par paru (x, y) i označava se sa $\left(m, n\right) = (x, y)^{-1}$.

Na ovaj način u može se definisati operacija deljenje uređenih parova $\left(x_1, y_1\right)$ i $\left(x_2, y_2\right)$ na sledeći način:

$\left(x_1, y_1\right) : \left(x_2, y_2\right) = \left(x_1, y_1\right) \cdot \left(x_2, y_2\right)^{-1}$.

DEFINISANJE KOMPLEKSNOG BROJA

Preko pojma uređenog para i definisanih operacija sa njima može se uvesti kompleksan broj.

Posebno će, sada, biti reči o uređenom paru $(0,1)$. Svaki uređeni par može se predstaviti na sledeći način:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0).$$

Ako uvedemo oznaku $i = (0,1)$ i ako se uređeni parovi kojima je druga koordinata nula indentifikuju sa odgovarajućim realnim brojevima (tj. ako se umesto $(x,0)$ piše x i umesto $(y,0)$ piše y) dobija se

$$(x,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + i \cdot y.$$

Ovaj uređeni par se naziva kompleksan broj i označava se sa $z = x + i \cdot y$. Skup kompleksnih brojeva se označava sa $\mathbb{C}$. Veličina i se naziva imaginarna jedinica i za nju važi da je

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

Na osnovu navedene notacije imamo da je $i^2=-1$. Uređeni par $(0,0)$, tj. $z=0$ se naziva kompleksna nula.

Na osnovu svega prethodno iznetog može se zaključiti dastruktura $(\mathbb{C},+,\cdot)$ predstavlja polje kompleksnih brojeva.

OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

Kompleksan broj z zadat u oblika $z=x+iy$ kaže se da ima algebarski oblik

Za kompleksan broj z zadat u obliku $z=x+iy$ se kaže da ima algebarski oblik. Realni broj x se naziva realni deo kompleksnog broja z i označava se sa $Re\,z$, ,dok se realan broj y naziva imaginarni deo kompleksnog broja z i označava sa $Im\,z$. U slučaju da je $Im\,z=0$, tada se kompleksan broj svodi na realan broj, a u slučaju da je $Re\,z=0$ za kompleksan broj z kaže da je čisto imaginaran. Prema tome, kompleksan broj predstavlja linearnu kombinaciju jednog realnog i jednog imaginarnog broja.

Za dva kompleksna broja $z_1=x_1+iy+1$i $z_2=x_2+iy_2$važi da je

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1\cdot y_1-x_2\cdot y_2)+i(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)$$

$$z_1^{-1}=\frac{x_1-iy_1}{x_1^2+y_1^2},\quad z_2^{-1}=\frac{x_2-iy_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$z_1:z_2=z_1\cdot z_2^{-1}=(x_1+iy_1)\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

KONJUGOVANO-KOMPLEKSAN BROJ. OSOBINE

Kompleksan broj oblika $x-iy$ se naziva konjugovano-kompleksan broj, broju $x+iy$.

Neka je dat kompleksan broj $z=x+iy$. Kompleksan broj $\bar{z}=x-iy$ naziva se konjugovano–kompleksan broj kompleksnom broju z. Važe sledeće formule

1. $\bar{\bar{z}}=z$,

2. $Re\,z=\frac{z+\bar{z}}{2}$,

3. $Im\, z = \frac{z - \overline{z}}{2}$.

Za dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ važi da je

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

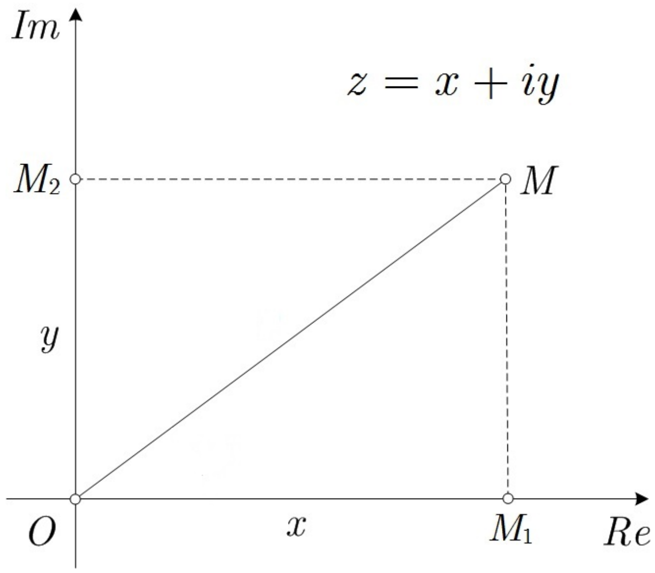
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

PREDSTAVLJANJE KOMPLEKSNOG BROJA U RAVNI

Kompleksni brojevi su parovi realnih brojeva, pa se mogu predstaviti u Dekartovom koordinatnom sistemu u ravni.

Dok se realni brojevi mogu predstaviti tačkama jedne prave, kod kompleksnih brojeva to nije moguće. Kompleksni brojevi su parovi realnih brojeva, pa se mogu predstaviti u Dekartovom koordinatnom sistemu u ravni. U ovom slučaju Ox-osa se naziva realna osa, a Oy-osa se naziva imaginarna osa, dok se cela ravan naziva kompleksna ravan.
Sa date slike se vidi da je realni deo x kompleksnog broja z jednak dužini duži OM_1, gde je tačka M_1 ortogonalna projekcija tačke M na realnu osu, a imaginarni deo y kompleksnog broja z je jednak dužini duži OM_2, gde je tačka M_2 ortogonalna projekcija tačke M na imaginarnu osu.

Konjugovano-kompleksan broj $\overline{z} = x - iy$ datom kompleksnom broju $z = x + iy$ predstavlja tačku u kompleksnom ravni koja je simetrična tački M sa slike u odnosu na realnu osu.

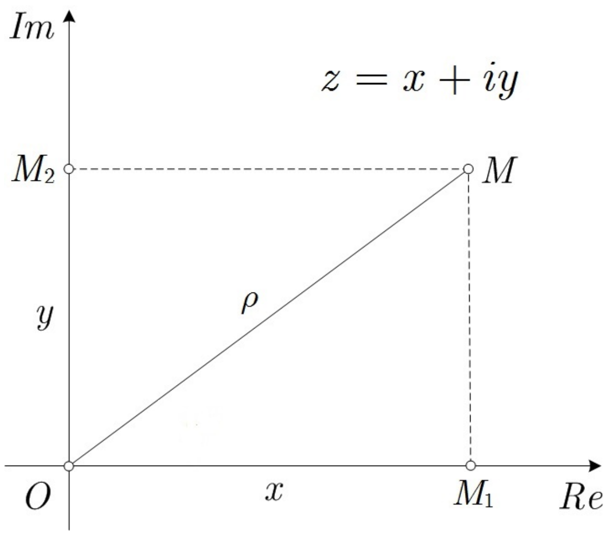


Slika 3.1 Predstavljanje kompleksnog broja u ravni (izvor Autor).

DEFINICIJA MODULA. OSOBINE. PRIMER

Moduo kompleksnog broja geometrijski predstavlja rastojanje kompleksnog broja predstavljenog u kompleksnoj ravni od koordinatnog početka.

Moduo kompleksnog broja $z = x + iy$ je realan nenegativan broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ i označava se sa $|z|$ ili sa ρ i ovde ćemo ravnopravno koristiti obe oznake. Sa date slike se vidi da je moduo kompleksnog broja z jednak dužini duži OM.



Slika 3.2 Moduo kompleksnog broja (izvor Autor),

Za dva kompleksna broja z_1 i z_2 važi:

- $\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,

Za moduo komplesnog broja važi takođe:

$|z|^2 = z \cdot \ \overline{z}$.

Primer. Odrediti moduo kompleksnog broja $z = 1 + i$.

Rešenje. Imamo da je:

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

POJAM ARGUMENTA. OSOBINE

Argument kompleksnog broja predstavlja ugao između potega ρ i pozitivnog dela realne ose.

Kompleksan broj dat u algebarskom obliku $z = x + iy$ može se zapisati na sledeći način

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right),$$

gde je $|z|$ moduo kompleksnog broja z . Kako važi da je

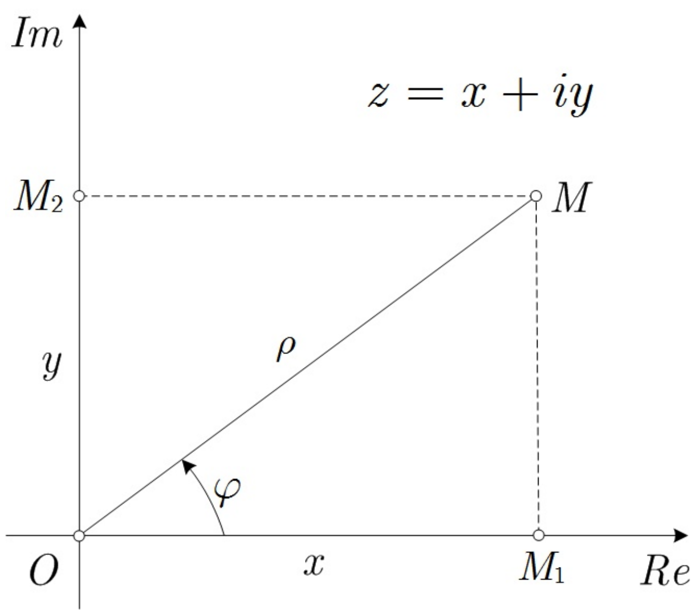
$$\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \in \mathbb{R}, \ \left|\frac{x}{|z|}\right| < 1, \left|\frac{y}{|z|}\right| < 1, \ \left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1,$$

može se odrediti realan broj φ takav da je

$$\frac{x}{|z|} = \cos\varphi \ \text{ i } \ \frac{x}{|z|} = \sin\varphi.$$

Realan broj φ koji je određen prethodnim jednakostima naziva se argument kompleksnog broja z i označava se sa $Argz$. Ako pored prethodnih jednakosti, broj φ zadovoljava iuslov $-\pi < \varphi < \pi$ (ili $0 < \varphi < 2\pi$), tada se naziva glavni argument kompleksnog broja z i označava se sa $\arg z$. Ovde, kada se govori o φ, smatraće se da se radi o glavnom argumentu kompleksnog broja z.

Geometrijski on predstavlja ugao između potega ρ i pozitivnog dela realne ose (videti sliku).



Slika 3.3 Argument kompleksnog broja (izvor Autor).

Argument kompleksnog broja $z = 0$ se ne definiše.

Za glavni argument kompleksnog broja važe sledeće osobine:

$\arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right),$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right).$

GLAVNI ARGUMENT. PRIMER

Glavni argument uzima vrednosti iz intervala $-\pi < \varphi < \pi$ (ili $0 < \varphi < 2\pi$).

Glavni argument nekog kompleksnog broja $z = x + iy$, u oznaci φ, određuje se tako što se, najpre, odredi veličina

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left|\frac{y}{x}\right|,$$

pri čemu je $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tada važi

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0, & (x > 0, y > 0), \\ \pi - \varphi_0, & (x < 0, y > 0), \\ -\pi + \varphi_0, & (x < 0, y < 0), \\ -\varphi_0, & (x > 0, y < 0). \end{cases}$$

Postoje i četiri specijalna slučaja

$$\varphi = \begin{cases} 0, & (x > 0, y = 0), \\ \pi, & (x < 0, y = 0), \\ \frac{\pi}{2}, & (x = 0, y > 0), \\ -\frac{\pi}{2}, & (x = 0, y < 0). \end{cases}$$

Primer. Odrediti glavni argument kompleksnog broja $z = -1 + i$.

Rešenje. U ovom slučaju je:

$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{-1}\right| = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$

Kako je $x = -1 < 0$, a $y = 1 > 0$, tada prema datom važi da je:

$\varphi = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$

Poglavlje 4

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

POJAM

Koristeći moduo i glavni argument kompleksnog broja može se sa algebarskog oblika preći na trigonometrijski oblik, kao i obrnuto.

Kompleksan broj dat u algebarskom obliku $z = x + iy$, može se zapisati i u obliku:

$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$,

koji se naziva *trigonometrijski oblik kompleksnog broja* z, gde je $|z|$ moduo kompleksnog broja z, a φ glavni argument kompleksnog broja z.

Primer. Prebaci kompleksan broj $z = -1 + i \cdot \sqrt{3}$ u trigonometrijski oblik.

Rešenje. Najpre, treba odrediti moduo kompleksnog broja:

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$

Sada, treba odrediti glavni argument kompleksnog broja:

$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$

Kako je $x < -1, \quad y > 0$, tada je:

$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Tada trigonometrijski oblik kompleksnog broja glasi:

$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right).$

Konjugovano-kompleksan broj $\bar{z} = x - iy$, za kompleksan broj $z = x + iy$, u trigometrijskom obliku glasi:

$\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = |z|(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi).$

MNOŽENJE I DELJENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA ZADATIH U TRIGONOMETRIJSKOM OBLIKU

Polazeći od poznatih trigonometrijskih indentiteta mogu se, za dva kompleksna broja koja su data u trigonometrijskom obliku, izvesti formule za proizvod i količnik tih brojeva.

Neka su data dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1\right) \qquad i \qquad z_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2\right).$$

Tada važi da je:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

i

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right), \quad z_2 \neq 0.$$

Formula za proizvod od dva kompleksna broja se može uopštiti za proizvod od n ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnih brojeva. Neka su dati komplesni brojevi:

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1\right), \quad z_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2\right), \quad \ldots, z_n = \rho_n\left(\cos\varphi_n + i \cdot \sin\varphi_n\right).$$

Tada imamo da je:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cdots \cdot \rho_n \cdot \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n\right)\right).$$

Trigonometrijski oblik je pogodan za stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva, o čemu govorimo u nastavku.

STEPENOVANJE IMAGINARNE JEDINICE

Vrednosti koje se stepenovanjem imaginarne jedinice mogu dobiti su $1, -1, i$ *i* $-i$.

Najpre, će biti navedeno kako se vrši stepenovanje imaginarne jedinice. Važi da je

$$\begin{array}{llll} i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = i^2 \cdot i = -i, & i^4 = i^3 \cdot i = 1, \\ i^5 = i^4 \cdot i = i, & i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, & i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i, & i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1. \end{array}$$

Iz prethodnog se može primetiti da se vrednosti periodično ponavljaju nakon četiri broja. Na taj način se može izvesti sledeće pravilo:

$$i^n = \begin{cases} i, & n = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1, & n = 4k+2,\ k \in \mathbb{Z} \\ -i, & n = 4k+3,\ k \in \mathbb{Z} \\ 1, & n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

STEPENOVANJE KOMPLEKSNOG BROJA

Stepenovanje kompleksnog broja se vrši iz njegovog trigonometrijskog oblika.

Neka je dat kompleksan broj u svom trigonometrijskom obliku

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Primenom formule za prozvoda kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku važi

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n} = \underbrace{\rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{n}(\cos(\underbrace{\varphi + \ldots + \varphi}_{n}) + i \cdot \sin(\underbrace{\varphi + \ldots + \varphi})), n \in \mathbb{N}.$$

Odavde dobijamo formulu $z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)), n \in \mathbb{N},$ koja se naziva Muavrova formula.

Specijalno, iz prethodne formule se može izvesti još jedna važna formula

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi), n \in \mathbb{N}.$$

Prethodne dve formule ostaju na snazi i ako je $n \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$z^{-1} = \big(\rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\big)^{-1} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} \cdot \frac{\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi}{cos\varphi - i \cdot sin\varphi} =$$
$$= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi}{\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi} = \rho^{-1}\big(\cos(-\varphi) + i \cdot sin(-\varphi)\big).$$

pri čemu smo u imeniocu poslednjeg razlomka iskoristili da je $\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$Dakle, dobijamo da važi

$$z^{-1} = \rho^{-1}(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^{-1}.$$

Stepenujući prethodnu formula sa n $(n \in \mathbb{N})$ i označavajući $(z^{-1})^n$ sa z^{-n} dobija se

$$z^{-n} = \rho^{-n}(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^{-n}, n \in \mathbb{N}.$$

KORENOVANJE KOMPLEKSNOG BROJA

Korenovanje kompleksnog broja se vrši iz njegovog trigonometrijskog oblika.

Neka je dat kompleksan broj

$z = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$.

Ako sa $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, označimo rešenje jednačine $\omega^n = z$ po ω. Tada je:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\quad k = 0, 1, 2, 3, \ \dots, n-1.$

Ono što je neophodno odmah primetiti iz prethodne formule jeste jedna osobenost kompleksnih brojeva, koja ne važi za realne brojeve. Naime, kada određujemo koren nekog reda iz realnog broja, tada dobijamo striktno jednu vrednost, dok kod korenovanja kompleksnog broja dobijamo onoliko vrednosti, kog je reda taj koren.

Na primer, kada tražimo $\sqrt[3]{-8}$ u skupu realnih brojeva znamo da postoji samo jedna takva vrednost i to je broj -2 (koji je takođe i kompleksan broj, jer važi) $-2 = -2 + i\cdot 0$). Međutim, u skupu kompleksnih brojeva, iz prethodne formule vidimo da treba da postoje tri kompleksna broja, koja će, kada ih stepenujemo sa 3, dati vrednost -8. Jedan od njih je, svakako, broj -2. Iz prethodnog primera smo videli da važi da je $(1 + i\sqrt{3})^3 = -8$, kao i $(1 - i\sqrt{3})^3 = -8$. Dakle, prema prethodno rečenom, zapravo, brojevi $\omega_0 = -2$, $\omega_1 = 1 + i\sqrt{3}$ i $\omega_2 = 1 - i\sqrt{3}$ predstavljaju rešenje jednačine $\omega^3 = -8$, odnosno vrednosti za $\sqrt[3]{-8}$.

U opštem slučaju, ovakva rešenja se traže prema prethodno datoj formuli i njome se određuju sva rešenja odgovarajuće jednačine. Geometrijski gledano, sva ta rešenje se nalaze na centralnom kružnici (kružnici sa centrom u (0,0)) u kompleksnoj ravni sa poluprečnikom jednakim $\sqrt[n]{\rho}$, pri čemu su ona tako raspoređena da čine pravilan n-tougao, za $n = 3, 4, 5, \ \dots$.

Napomena Formula za određivanje korena iz kompleksnog broja takođe potiče od Muavra.

PRIMER 1

Korenovanje kompleksnog broja.

Odrediti $\sqrt[4]{-1}$.

Rešenje. Određivanje datog korena je isto što i rešavanje jednačine $\omega^4 = -1$, po ω u skupu kompleksnih brojeva. Prvo, treba kompleksan broj $z = -1 + i\cdot 0$ prebaciti u trigonometrijski oblik, koji glasi:

$z = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Dakle, $\rho = 1$ i $\varphi = \pi$.

Tada imamo da je

$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right),\quad k = 0, 1, 2, 3,$

pa je:

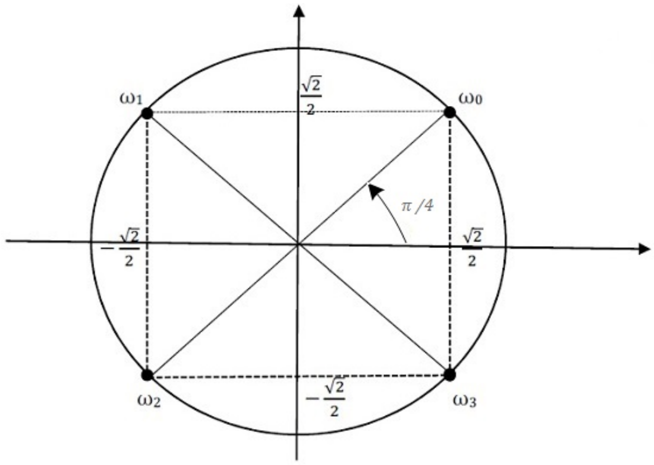
$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dobijena rešenja predstavimo u kompleksnoj ravni:



Slika 4.1 Predstavljanje rešenja u kompleksnoj ravni (izvor Autor).

Dakle, teme ω_0, ω_1, ω_2 i ω_3 čine temena kvadrata.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Stepenovanje i korenovanje kompleksnog broja.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

OJLEROVA FORMULA. PRIMER

Ojlerova formula predstavlja jedan od najvažnijih rezultata u matematici. Ovaj indentitet povezuje pet važnih konstanti i to su $i, e, \pi, 1$ i 0.

Ojlerova formula, koja glasi:

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

predstavlja jednu od najvažnijih formula u matematici.

Ako u ovoj formuli stavimo da je $\varphi = \pi$ dobijamo Ojlerov indentitet

$$e^{i\cdot\pi} + 1 = 0.$$

Ovaj indentitet u matematici povezuje pet važnih konstanti i to su $i, e, \pi, 1$ i 0.

Koristeći Ojlerovu formulu, možemo za kompleksan broj $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ zadat u trigonometrijskom obliku, definisati eksponencijalni oblik kompleksnog broja

$$z = \rho \cdot e^{i\cdot\varphi}.$$

Važi da je:

$$\overline{z} = \rho \cdot e^{-i\varphi}.$$

Za eksponencijalni oblik kompleksnog broja mogu se analogno definisati sve računske operacije, kao i za trigonometrijski oblik.

Ako su data dva kompleksna broja u eksponencijalnom obliku $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, tada imamo da je:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{i} \quad \frac{z1}{z2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \; z_2 \neq 0,$$

zatim

$$z_1^n = \rho_1^n \cdot e^{in\varphi_1}, \quad \text{kao i} \quad \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}}.$$

$\mathbf{Primer.}$ Videli smo u jednom od prethodnih primera da kompleksan broj $z=1+i\sqrt{3}$ dat u algebarskom obliku, ima trigonometrijski oblik $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ .Njegov eksponencijalni oblik je $z=2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Dokaz Ojlerove formule.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Pokazna vežba

1. ZADATAK (8 MINUTA)

Određivanje realnog i imaginarnog dela kompleksnog broja.

Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja

a) $z = i^2 + 3i^{16} - 2i^{14}$

b) $z = \dfrac{1+2i}{i-2} \cdot i^6$

Rešenje.

a) $z = i^2 + 3i^{16} - 2i^{14} = -1 + 3 + 2 = 4, \quad Re(z) = 4, Im(z) = 0$

b)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+2i}{i-2} \cdot i^6 = \frac{1+2i}{2-i} \cdot (-1) = \frac{1+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{4-i^2} \\ &= \frac{2+i+4i+2i^2}{5} = \frac{2+5i-2}{5} = i. \end{aligned}$$

Zbog toga je $Re\, z = 0$ i $Im\, z = 1$.

2. ZADATAK (10 MINUTA)

Operacije sa kompleksnim brojevima zadatim u algebarskom obliku.

Izračunati

$$\frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i} + \frac{10+7i}{5i}.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned}\frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i}+\frac{10+7i}{5i} &= \frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i}+\frac{(10+7i)\cdot i}{5i\cdot i}\\ &= \frac{-2(3-4i)(12+5i)}{1+3i}+\frac{7-10i}{5}\\ &= \frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}+\frac{7-10i}{5}\\ &= \frac{-2(-43-201i)}{10}+\frac{7-10i}{5}\\ &= \frac{50-191i}{5}\\ &= 10+\frac{191}{5}i\end{aligned}$$

Izračunati $z_1 = \dfrac{z+\overline{z}}{2z+3}$ ako je $z = \dfrac{i-1}{2}$.

Rešenje.

$$z_1 = \frac{z+\overline{z}}{2z+3} = \frac{\frac{i-1}{2}+\frac{-i-1}{2}}{2\frac{i-1}{2}+3} = \frac{\frac{-2}{2}}{i-1+3} = \frac{-1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{i-2}{4-i^2} = \frac{i-2}{5}.$$

3. ZADATAK (6 MINUTA)

Određivanje traženog kompleksnog broja u algebarski oblik.

Odrediti kompleksan broj z ako je

$$|z| - \overline{z} = 1 + 2i.$$

Rešenje. Važi da je $z = a + bi$, pri čemu realne brojeve a i b treba da odredimo. Zamenom ovoga u datoj jednačini, dobijamo

$$\sqrt{a^2+b^2} - a + bi = 1 + 2i.$$

Dva kompleksna broja su jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni delovi. Zbog toga je

$$\sqrt{a^2+b^2} - a = 1 \quad \text{i} \quad b = 2.$$

Ako u prvu jednačinu stavimo da je $b = 2$, dobijamo

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+4} = 1 + a\\ &a^2 + 4 = 1 + 2a + a^2\\ &2a = 3\\ &a = \frac{3}{2}\\ &z = \frac{3}{2} + 2i\end{aligned}$$

4. ZADATAK (6 MINUTA)

Određivanje traženih parametara.

Odrediti realne brojeve a i b tako da važi $a-1+\frac{b}{1-i}=2$.

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} a-i+\frac{b}{1-i} &= a-i+\frac{b}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} \\ &= a-i+\frac{b+bi}{2} \\ &= a+\frac{b}{2}+i\Big(\frac{b}{2}-1\Big) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je $a+\dfrac{b}{2}=2$ i $\dfrac{b}{2}-1=0$, tj. $b=2$ i $a=1$.

5. ZADATAK (7 MINUTA)

Određivanje trigonometrijskog oblik kompleksnog broja, kada je dat u algebraskom.

Odrediti trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z=-\sqrt{3}+i$.

Rešenje. Imamo da je

$$|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2.$$

Odatle sledi da je odgovarajući ugao jednak

$$\varphi_0=\operatorname{arctg}\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right|=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$$

Kako je $x<0$ i $y>0$, imamo da je $\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Stoga je traženo rešenje

$$z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

6. ZADATAK (8 MINUTA)

Stepenovanje kompleksnog broja zadatog u algebarkom obliku. Potreban je prelazak najpre na trigonometrijski oblik.

Odrediti z^{10} ako je $z = 1 + i$.

Rešenje. Da bismo izvršili naznačeno stepenovanje, prebacićemo broj z u trigonometrijski oblik. Stoga, imamo da je

$$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{1}\right| = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Kako je $x > 0$ i $y > 0$ važi da je $\varphi = \frac{\pi}{4}$, pa dobijamo

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Po Moavrovoj formuli

$$z^n = \rho^n\Big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\Big),$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned} z^{10} &= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) \\ &= 32\cdot(0 + 1\cdot i) = 32i. \end{aligned}$$

7. ZADATAK – 1. DEO (20 MINUTA)

Stepenovanje kompleksnog broja - određivanje modula i glavnog argumenta.

Odrediti $(z_1 z_2)^6$ ako je $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Rešenje. Prebacićemo brojeve z_1 i z_2 u trigonemtrijski oblik. Za broj z_1 važi da je

$$\rho_1 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \qquad \varphi_{0_1} = \operatorname{arctg}\left|\frac{-1}{1}\right| = \frac{\pi}{4}$$

Kako je $x > 0$ i $y < 0$ važi da je $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$.

Slično, za broj z_2 imamo da je

$$\rho_2 = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \qquad \varphi_{0_2} = \operatorname{arctg}\left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\pi}{6}$$

Kako je $x > 0$ i $y < 0$ važi da je $\varphi_2 = -\frac{\pi}{6}$.

Ukupno, imamo da je

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$
$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

7. ZADATAK – 2. DEO

Stepenovanje kompleksnog broja po Muavrovoj formuli.

Sada je

$$\begin{aligned}
(z_1z_2)^6 &= (\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3})^6 \cdot \left(\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right)\right)^6 \\
&= (2\sqrt{6})^6 \cdot \left(\cos(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})\right)^6 \\
&= 2^6 \cdot 6^3\left(\cos(-\frac{5}{12}\pi) + i\sin(-\frac{5}{12}\pi)\right)^6 \\
&= 2^6 \cdot 6^3\left(\cos\left(6\cdot(-\frac{5}{12}\pi)\right) + i\sin\left(6\cdot(-\frac{5}{12}\pi)\right)\right) \\
&= 2^6 \cdot 6^3\left(\cos(-\frac{5\pi}{2}) + i\sin(-\frac{5\pi}{2})\right) \\
&= 2^6 \cdot 6^3\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) \\
&= 2^6 \cdot 6^3(0 - 1i) = -2^6 \cdot 6^3 i.
\end{aligned}$$

8. ZADATAK (15 MINUTA)

Stepenovanje kompleksnog broja.

Primer. Odrediti $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^6$.

Rešenje. Najpre, treba kompleksan broj $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ treba prebaciti u trigonometrijski oblik. Važi da je:

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

što se ostavlja da student pokaže za vežbu.

Tada je:

$$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^6 = \left[2\left[\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right]\right]^6 = 2^6\cdot(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 64.$$

Napomena. U nekim specijalni slučajevima stepenovanje se može izvršiti i direktno iz algebarskog oblika i to u situacijama kada je pod stepenom takav oblik kompleksnog broja, da pri stepenovanju nekim brojem od njega ostaje samo realan ili imaginarni deo. Na primer, lako je uočiti da je:

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

Tada je, na primer $(1+i)^{51} = (1+i)^{50} \cdot (1+i) = \left((1+i)^2\right)^{25} \cdot (1+i) = (2i)^{25} \cdot (1+i) = 2^{25} \cdot i^{25} \cdot (1+i)$. Iz stepenovanja imaginarne jedinice, o kome smo govorili, imamo da je $i^{25} = i$, pa je:

$(1+i)^{51} = 2^{25} \cdot i \cdot (1+i) = 2^{25} \cdot (-1+i)$.

Slično, primenom formule za kub binoma, možemo pokazati da važi:

$(1 \pm i\sqrt{3})^3 = -8, \quad (-1 \pm i\sqrt{3})^3 = 8,$

Prethodni primer mogao bi biti rešen i primenom ovakvog pristupa.

9. ZADATAK (10 MINUTA)

Korenovanje kompleksnog broja

Naći sve treće korene kompleksnog broja $z = -4$.

Rešenje. Imamo da je

$$\rho = |z| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4,$$
$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\frac{0}{-4}) = 0 \quad x < 0,\ y = 0 \quad \varphi = \pi.$$

Odatle sledi da je

$$z = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Po formuli $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n})\Big), k = 0, 1, \dots, n-1$, imamo da su treći koreni kompleksnog broja $z = -4$:

za $k = 0$,

$$\omega_0 = \sqrt[3]{4}\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = \sqrt[3]{4}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

za $k = 1$,

$$\omega_1 = \sqrt[3]{4}\Big(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\Big) = \sqrt[3]{4}\Big(-1 + i \cdot 0\Big) = -\sqrt[3]{4}.$$

za $k = 2$,

$$\omega_2 = \sqrt[3]{4}\Big(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\Big) = \sqrt[3]{4}\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

10. ZADATAK - 1. DEO (20 MINUTA)

Korenovanje kompleksnog broja - određivanje modula i glavnog argumenta.

Naći sve četvrte korene kompleksnog broja $z = \dfrac{2}{-1+i\sqrt{3}}$.

Rešenje. Važe sledeće jednakosti:

$$z = \frac{2}{-1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{-1\cdot 3-1} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Imamo da je

$$\rho = |z| = \sqrt{\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2} = 1,$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Kako je $x < 0$ i $y < 0$ važi da je $\varphi = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$,pa je

$$z = \cos\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big).$$

Po formuli $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, dobijamo da je

$$\sqrt[4]{z} = \cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}.$$

10. ZADATAK – 2. DEO

Korenovanje kompleksnog broja - određivanje rešenja.

Za $k = 0$ imamo

$$\omega_0 = \cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Za $k = 1$ imamo

$$\omega_1 = \cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Za $k = 2$ imamo

$$\omega_2 = \cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Za $k = 3$ imamo

$$\omega_3 = \cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. ZADATAK (15 MINUTA)

Određivanje geometrijskog mesta tačaka u kompleksnoj ravni.

Odrediti geometrijsko mesto tačaka z u kompleksnoj ravni ako je:

$$a)\ z - \overline{z} + 2i = 0; \qquad b)\ Im\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1; \qquad c)\ arg z = arg(-3 + i\sqrt{3}).$$

Rešenje. a) Posmatrajmo kompleksni broj z u algebarskom obliku $z = x + iy$. Tada je $\overline{z} = x - iy$, pa je

$$z - \overline{z} + 2i = x + iy - (x - iy) + 2i = 2i \cdot (y + 1) = 0$$

za $y = -1$. U kompleksnoj ravni ovo predstavlja pravu $Imz = -1$ koja prolazi kroz tačku $-i$ i koja je paralelna realnoj osi.

b) Kako je

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{x+iy-1} = \frac{1}{(x-1)+iy} \cdot \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} =$$
$$= \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}.$$

Iz uslova da je $Im\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1$ dobijamo da je

$$\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} = 1,$$

tj. $(x-1)^2 + y^2 = -y$, tj. $(x-1)^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, tj. $(x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. U kompleksnoj ravni ovom relacijom je zadat krug $|z - (1 - \frac{i}{2})| = \frac{1}{4}$, čiji je centar u tački $1 - \frac{i}{2}$ i poluprečnikom $\frac{1}{2}$.

c) Ako kompleksni broj predstavimo u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, tada je $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, tj. $arg z = -\theta$. S druge strane, za kompleksan broj $-3 + i\sqrt{3}$ imamo da je

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left|\frac{\sqrt{3}}{-3}\right| = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Kako je $x = -3 < 0$ i $y = \sqrt{3} > 0$ imamo da je

$$arg(-3 + i\sqrt{3}) = \varphi = \pi - \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}.$$

Dakle, dobijamo da je $-\theta = 5\pi/6$, tj. $\theta = -5\pi/6$. U kompleksnoj ravni $argz = -5\pi/6$ predstavlja polupravu sa početkom u tački 0 koja sa realnom osom zaklapa ugao $-5\pi/6$, a iz koje je isključena početna tačka. Tačka $z = 0$ ne zadovoljava navedeni uslov, jer $arg0$ nije definisan.

12. ZADATAK (10 MINUTA)

Rešavanje jednačina sa kompleksnom promenljivom.

Rešiti jednačine:

$$a)\ e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot z = -1 - i\sqrt{3}; \qquad b)\ z = (-1 - i\sqrt{3})^3$$

Rešenje. a) Kako je $e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot z = -1 - i\sqrt{3}$, množenjem sa $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ovu jednačinu dobijamo da je $z = (-1 - i\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Sada ćemo kompleksan broj $\omega - 1 - i\sqrt{3}$ prevaciti u trigonometrijski oblik i iskoristiti Ojlerovu formulu. Imamo da je $|\omega| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. S druge strane, važi da je $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \frac{\pi}{3}$. Tada je $\varphi = -\pi - \varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$. Dakle, imamo da je $\omega = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Tada je

$$z = (-1 - i\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Kako je $e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, konačno dobijamo da je $z = -\sqrt{3} - i$.

b) Koristeći da je $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ imamo da je

$$z = (-1 - i\sqrt{3})^3 = \left[2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^3.$$

Primenom Muavrove formule dobijamo da je

$$z = 8(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) = 8(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = 8.$$

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koji se ostavljaju studentu za samostalan rad.

Zadatak 1. Odrediti x u izrazu $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ ako je treći član razvoja 240 .

Rezultat. $x=2$.

Zadatak 2. U razvoju binoma $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ binomni koeficijenti petog i desetog člana su jednaki. Odrediti onaj član razvoja koji ne sadrži x .

Rezultat. $k=7$, pa je traženi član $\binom{13}{7}=1716$.

Zadatak 3. Odrediti kompleksan broj $z=x+iy$ ako je $\left|\frac{16z+1}{4\bar{z}}\right|=4$ i $Re\left(\frac{2z}{\bar{z}}\right)=1$. Zatim izračunati sve vrednosti $\sqrt[4]{z}$.

Rezultat. $z_1=-\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}$ ili $z_2=-\frac{1}{32}-\frac{i\sqrt{3}}{32}$. Vrednosti $\sqrt[4]{z_1}$ su: $\pm\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\pm\frac{1}{4}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$. Vrednosti $\sqrt[4]{z_2}$ su: $\pm\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-i\right)$, $\pm\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Zadatak 4. Izračunati:

a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$,

b) $\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{10}-1}}$.

Rezultat.
a) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)\right)k\in\{0,1,2,3,4,5\}$;

b) $\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k\in\{0,1,2,3\}$.

Vreme izrade:

Zadatak 1. 20 minuta

Zadatak 2. 20 minuta

Zadatak 3. 20 minuta

Zadatak 4. 30 minuta (15 + 15)

VIDEO KLIP - ZADATAK ZA DODATNI RAD (5 MINUTA)

Snimak sa Youtube-a: Princip matematičke indukcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Zaključak za lekciju 04

BROJEVNI SKUPOVI

Skup prirodnih, celih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva. Matematička indukcija, Bernulijeva jednakost i Binomni obrazac.

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova i on se u matematici ne definiše, ali se proučavaju svojstva brojeva i operacije sa njima.

Brojni skupovi i uvedene operacije sa njima predstavljaju jedan od osnovnih matematičkih aparata. Znanja usvojene o brojevnim skupovima omogućavaju nesmetano praćenje izlaganja u daljim lekcijama.
Kompleksan broj se može predstaviti u algebarskom, trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku. Algebarski oblik je pogodniji za primenu osnovnim računskih operacija sa kompleksnim brojevima, dok je trigonometrijski oblik pogodniji za stepenovanje I korenovanje kompleksnog broja. Veza između eksponencijalnog i trigonometrijskog oblika kompleksnog broja se izražena preko čuvene Ojlerove formule.
Kompleksni brojevi se primenjuju u algebarskoj i analitičkoj teoriji brojeva, realnoj analizi (teoriji brojevnih i stepenih redova, nesvojstvenih integrala,...), teoriji funkcija kompleksne promenljive, kao i u primenama matematike, kao što su: teorija upravljanja, dinamika fluida, elektromagnetizam, signalna analiza, kvantna mehanika i dr.

Literatura:

1. Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje.
2. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
3. Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
4. M.Petrović, Osnovi nastave matematike (Matematička logika, Skupovi, Algebarske strukture, Realni brojevi), Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, Učiteljski fakultet, Jagodina, 1998.
5. Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.