UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

MATEMATIČKA INDUKCIJA

Lekcija 07

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 07

MATEMATIČKA INDUKCIJA

Copyright © 2017 – UNIVERZITET METROPOLITAN, Beograd. Sva prava zadržana. Bez prethodne pismene dozvole od strane Univerziteta METROPOLITAN zabranjena je reprodukcija, transfer, distribucija ili memorisanje nekog dela ili čitavih sadržaja ovog dokumenta., kopiranjem, snimanjem, elektronskim putem, skeniranjem ili na bilo koji drugi način.

Copyright © 2017 BELGRADE METROPOLITAN UNIVERSITY. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning or otherwise, without the prior written permission of Belgrade Metropolitan University.

UVOD

Fokus ove lekcije će biti na osobinama celih brojeva.

U ovoj glavi izučavamo osnovne osobine skupa prirodnih brojeva

$\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Skup prirodnih brojeva ili pozitivnih celih brojeva je tesno povezan sa skupom celih brojeva

$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbf{N}) = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$

Celi brojevi su fundamentalni matematički objekti koji se pojavljuju u različitim izračunavanjima, a izučavaju se u aritmetici.

Na ovom predavanju izučavamo osnovne osobine celih brojeva. Obrađujemo sledeće teme:

- uređenje i nejednakosti
- apsolutna vrednost
- matematička indukcija
- algoritam deljenja
- deljivost
- proste brojeve
- najveći zajednički delioc
- Euklidov algoritam

Poglavlje 1

UVOD U MATEMATIČKU INDUKCIJU

MATEMATIČKA INDUKCIJA

Ako znamo da je tvrdnja P(n) tačna za neki prirodan broj n i ako možemo pokazati da iz toga sledi da je tvrdnja P(n+1) takođe tačna, tada možemo zaključiti da je P(n) tačno

Matematička indukcija je važna tehnika dokazivanja u matematici koja se često koristi za potvrdu tvrdnji o prirodnim brojevima. Da bismo shvatili kako funkcioniše, možemo upotrebiti analogiju s beskonačnim merdevinama. Pretpostavimo da imamo beskonačne merdevine i želimo da znamo da li možemo da dođemo do svakog njenog koraka. Znamo dva ključna elementa:

1. Možemo da dođemo do prvog koraka merdevine.
2. Ako možemo da dođemo do određenog koraka na merdevinama, tada možemo doći i do sljedećeg koraka.

Pitanje je možemo li zaključiti da možemo doći do svake lestvice na merdevinama. Počinjemo s prvim korakom jer znamo da do njega možemo doći (prema prvom elementu). Zatim, koristeći drugi element, zaključujemo da možemo doći i do drugog koraka, jer možemo doći do prvog i zatim koristiti pravilo da možemo doći do sledećeg. Nastavljamo ovaj postupak, korak po korak, koristeći pravilo (2) svaki put.

Matematička indukcija radi na sličan način. Ako znamo da je tvrdnja P(n) tačna za neki prirodan broj n (naš analogon koraka lestvice na merdevini), i ako možemo pokazati da iz toga sledi da je tvrdnja P(n+1) takođe tačna, tada možemo zaključiti da je P(n) tačno za sve prirodne brojeve. Ovo je srž matematičke indukcije. U kontekstu merdevina, P(n) bi bila tvrdnja da možemo doći do n-tog koraka. Ako možemo pokazati da iz toga sledi da možemo doći i do n+1 koraka, onda matematičkom indukcijom možemo tvrditi da možemo doći do svakog koraka na beskonačnim merdevinama. Ova tehnika dokazivanja široko se koristi u matematici, posebno za tvrdnje o prirodnim brojevima.

VALIDNOST MATEMATIČKE INDUKCIJE

Prema svojstvu dobro uređenosti, skup S ima najmanji element, koji ćemo označiti sa m.

Validnost matematičke indukcije proizlazi iz svojstva dobre uređenosti, kao aksioma za skup pozitivnih brojeva, koje tvrdi da svaki neprazan podskup skupa pozitivnih brojeva ima najmanji element. Dakle, pretpostavimo da znamo da je P(1) tačno i da je tvrdnja P(k) → P(k + 1) tačna za sve pozitivne brojeve k. Da bismo pokazali da mora biti tačno da je P(n) za sve pozitivne brojeve n, pretpostavimo da postoji barem jedan pozitivan broj za koji je P(n) netačno. Tada je skup S pozitivnih brojeva za koje je P(n) netačno neprazan.

Dakle, prema svojstvu dobro uređenosti, skup S ima najmanji element, koji ćemo označiti sa m. Znamo da m ne može biti 1, jer je P(1) tačno. Pošto je m pozitivan i veći od 1, m - 1 je takođe pozitivan broj. Osim toga, pošto je m - 1 manje od m, nije u skupu S, pa mora biti tačno da je P(m - 1) istinito. Pošto je i uslovna izjava P(m - 1) → P(m) takođe tačna, mora biti slučaj da je P(m) tačno. Ovo je u suprotnosti sa izborom m. Dakle, P(n) mora biti tačno za svaki pozitivan broj n.

Poglavlje 2

MATEMATIČKA INDUKCIJA

PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE

Princip matematičke indukcije koji je iskazan niže u biti tvrdi da prirodni brojevi počinju sa 1 i da se ostali brojevi mogu dobiti sukcesivnim dodavanjem 1.

Princip matematičke indukcije sastoji se iz dva koraka: *početnog koraka*, gde pokazujemo da je P(1) tačno, i *induktivnog koraka*, gde pokazujemo da za sve pozitivne brojeve k, ako je P(k) tačno, onda je i P(k + 1) tačno.

PRINCIPI MATMATIČKE INDUKCIJE: Da bismo dokazali da je iskaz P(n) tačan za sve pozitivne brojeve n, primenjujemo sledeća dva koraka:

POČETNI KORAK: Verifikujemo da je P(1) tačno.

INDUKTIVNI KORAK: Pokazujemo da je uslovni iskaz P(k) → P(k + 1) tačna za sve pozitivne brojeve k.

Princip Matematičke Indukcije I

Neka je P tvrđenje definisano na skupu $\mathbb{N}$ takvo da

(i) P (1) je tačno;

(ii) P (n + 1) je tačno, kad god je P (n) tačno. Tada je P (n) tačno za svako n $\in \mathbb{N}$.

Princip Matematičke Indukcije II

Neka je P tvrđenje definisano na skupu $\in \mathbb{N}$ sa sledećim osobinama

(i) P (1) je tačno;

(ii) P (n + 1) je tačno, kad god je P (k) tačno za 1 ≤ k ≤ n.

Tada je P (n) tačno za svako n $\in \mathbb{N}$.

Nekad želimo da pokažemo da neko tvrdjenje A važi za skup celih brojeva oblika {m, m + 1, m + 2, . . . } za dato m $\in \mathbb{Z}$. Ovo se može uraditi zamenom 1 sa m u bilo kom od gornjih principa matematičke indukcije.

PRIMERI DOKAZA MATEMATIČKOM INDUKCIJOM

Primeri dokaza matematičkom indukcijom obuhvataju mnoge teoreme koje tvrde da je P(n) tačno za sve pozitivne brojeve n, gde je P(n) tvrđenje

Primeri dokaza matematičkom indukcijom obuhvataju mnoge teoreme koje tvrde da je P(n) tačno za sve pozitivne brojeve n, gde je P(n) tvrđenje. Matematička indukcija je tehnika za dokazivanje teorema ovog tipa. Drugim rečima, matematička indukcija može se koristiti za dokazivanje tvrdnji oblika ∀n P(n), gde je domen skup pozitivnih brojeva. Ova tehnika može se primeniti na dokazivanje izuzetno raznovrsnih teorema, pri čemu svaka tvrdnja ima oblik ∀n P(n). Na primer, tvrdnja "ako je n pozitivan broj, tada je n⊃3; - n deljiv sa 3" je jedan od primera. Eksplicitno izražavanje implicitnog univerzalnog kvantifikatora daje tvrdnju "za svaki pozitivan broj n, n⊃3; - n je deljiv sa 3". Primere dokaza matematičkom indukcijom koristićemo kako bismo ilustrovali kako se teoreme dokazuju.

Teoreme koje ćemo dokazivati uključuju formule za zbir, nejednakosti, identitete za kombinacije skupova, rezultate o deljivosti, teoreme o algoritmima i još neke kreativne rezultate. Kroz ovu sekciju i naredne, koristićemo matematičku indukciju da dokažemo mnoge druge vrste rezultata, uključujući i ispravnost računarskih programa i algoritama. Matematička indukcija može se primeniti na dokazivanje širokog spektra teorema, ne samo formula za zbir, nejednakosti i drugih vrsta primera koje ovde ilustrujemo. Važno je napomenuti da postoji mnogo prilika za greške u indukcionim dokazima.

VIDEO - PRIMER 1

Izrada primera matematičke indukcije

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO - PRIMER 2

Proof by Mathematical Induction - How to do a Mathematical Induction Proof

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

DOKAZIVANJE SUMA

DOKAZIVANJE FORMULA ZA ZBIR

Koristeći matematičkuGlavna mana korišćenja matematičke indukcije za dokazivanje formule za zbir jeste što je ne možete koristiti kako biste izveli tu formulu. indukciju obaviti dokaz

Počinjemo korišćenjem matematičke indukcije kako bismo dokazali nekoliko formula za zbir . Kako ćemo videti, matematička indukcija posebno je pogodna za dokazivanje validnosti ovakvih formula. Ipak, formule za zbir mogu se dokazati i na druge načine. To nije iznenađujuće jer često postoje različiti načini dokazivanja teorema. Glavna mana korišćenja matematičke indukcije za dokazivanje formule za zbir jeste što je ne možete koristiti kako biste izveli tu formulu. Drugim rečima, morate već imati formulu pre nego što pokušate da je dokažete matematičkom indukcijom.

Prvu formulu za zbir koju ćemo dokazati matematičkom indukcijom, predstavlja zatvorena formula za zbir najmanjih n pozitivnih celih brojeva.

Dokazati da ako je n pozitivan ceo broj tada

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ispitajmo prvo da li je P(1) tačno.

P(1) je tačno zato što

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

Pretpostavimo da je P(k) tačno, odnosno

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Pod ovom pretpostavkom treba da pokažemo i da je P(k + 1) tačno, odnosno

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Dodajemo (k + 1) na obe strane jednačine od P(k). Tada dobijamo

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Ovi smo pokazali da kada je P(k) tačno , tada je i P (k+1) tačno.

ZBIR PRVIH N NEPARNIH POZITIVNIH CELIH BROJEVA

Koristeći matematičku indukciju dokazati da je zbir prvih n neparnih pozitivnih celih brojeva jednak kvadratu n.

Primer

Koristeći matematičku indukciju dokazati da je zbir prvih n neparnih pozitivnih celih brojeva jednak n^2.

Rešenje:

Neka je P(n) iskaz koji tvrdi da je prvih n neparnih pozitivnih celih brojeva jednak n^2.
Prvo pokažimo da je P(1) tačno, a zatim pokažimo da je P(n + 1) tačno kada pretpostavimo da je P(n) tačno.
Korak 1:
P (1) tvrdi da je zbir prvog neparnog pozitivnog broja 1^2.
P (1) = 1^2.
Tako da možemo zaključiti da je P (1) tačno.

Korak 2:

Pretpostavimo da važi za n=k, tako da

P(k) = 1 + 3 + 5 + . . . + (2k - 1) = k^2

Korak 3:

Pokažimo da je P(n + 1) tačno.

P(n + 1) = 1 + 3 + 5 + . . . + (2n - 1) + (2n + 1) = $(n + 1)^2$

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= [1+3+5+\ldots+(2n-1)]+(2n+1)\\
&= n^2+(2n+1)\\
&= n^2+2n+1\\
&= (n+1)^2
\end{aligned}
$$

Ovo pokazuje da P(n + 1) sledi iz P(n).

Pošto je iskaz (1) tačan i implikacija da P(n + 1) sledi iz P(n), tada možemo zaključiti da je početno tvrđenje P(n) tačno.

FORMULA ZA NENEGATIVNE CELE BROJEVE

Koristeći matematičku indukciju dokazati iskaz

Primer

Koristeći matematičku indukciju dokazati

$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

za sve ne-negativne cele brojeve n.

Rešenje:

Neka je P(n) iskaz koji je tačan za ceo broj n.

Korak 1:

P (0) je tačno pošto je $2^0 = 1 = 2^1 - 1$

Korak 2:

Pretpostavimo da je P(n) tačno

Korak 3:

Pokažimo da je P(n + 1) tačno.

$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

$$\begin{aligned} P(n+1) = 1+2+2^2+...+2^n+2^{n+1} &= [1+2+2^2+...+2^n]+2^{n+1} \\ &= [2^{n+1}-1]+2^{n+1} \\ &= 2\cdot 2^{n+1}-1 \\ &= 2^{n+2}-1 \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je P(n +1) tačno.

GEOMETRIJSKA PROGRESIJA

Primena funkcije modulo u računarskim naukama

Dokazati matematičkom indukcijom geometrijsku progresiju

$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$

Korak 1:

Pokazati da je P(0) tačno.

P(0) je tačno pošto

$a = \frac{ar-a}{r-1}$

Korak 2:

Pretpostavimo da je P(n) tačno.

$a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$

Korak 3 :

Pokazati da je P(n + 1) je tačno. Dodati sa obe strane iskaza ar^{n+1}

$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} + ar^{n+1}$

Ako preuredimo desnu stranu iskaza dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}+ar^{n+1} &= \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}+\frac{ar^{n+2}-ar^{n+1}}{r-1} \\
&= \frac{ar^{n+2}-a}{r-1}
\end{aligned}
$$

Kombinovanjem ovih iskaza dobijamo

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+2}-a}{r-1}$

Ovim smo pokazali da kada je P(n) tačno tada je i P(n + 1) tačno.

Poglavlje 4

DOKAZIVANJE NEJEDNAKOSTI

DOKAZIVANJE NEJEDNAKOSTI ZA POZITIVNE CELE BROJEVE

Matematička indukcija može se koristiti kako bi se dokazale različite nejednakosti koje važe za sve pozitivne brojeve veće od određenog pozitivnog broja.

Primer

Dokazati sledeće tvrđenje matematičkom indukcijom

$\mathbf{n < 2^n \text{ za sve } n \geq 1}$

Rešenje:

Neka je P(n) sledeći iskaz

$P(n) : \mathbf{n < 2^n}$

Korak 1:

P(1) je tačno, jer je $1 < 2^{1} = 2$. Time se završava osnovni korak.

Korak 2:

Prvo pretpostavljamo induktivnu hipotezu da je P(k) tačno za proizvoljan pozitivan ceo broj k. Drugim rečima, induktivna hipoteza P(k) je tvrđenje da je $k < 2^{k}$.

Korak 3:

Da bismo završili induktivni korak, trebamo da pokažemo da ako je P(k) tačno, tada je tačno i P(k + 1), odnosno tvrđenje da je $k + 1 < 2^{k+1}$. Drugim rečima, trebamo da pokažemo da ako je $k < 2^{k}$, onda je i $k + 1 < 2^{k+1}$. Kako bismo pokazali da je ovaj iskaz tačna za pozitivan ceo broj k, prvo dodajemo 1 na obe strane k < 2k, a zatim primetimo da je $1 \leq 2^{k}$. Ovo nam govori da je: $k+1<2^{k}+1\leq 2^{k}+2^{k}=2\cdot 2^{k}=2^{k+1}$.

Ovo pokazuje da je P(k + 1) tačno, odnosno, $k + 1 < 2^{k+1}$, zasnovano na pretpostavci da je P(k) tačno. Induktivni korak je kompletno obavljen. Dakle, po principu matematičke indukcije, jer smo završili i osnovni korak i induktivni korak, pokazali smo da je $n < 2^{n}$ tačno za sve pozitivne cele brojeve n.

PRIMER MATEMATIČKE INDUKCIJE ZA DOKAZIVANJE NEJEDNAKOSTI

Dokazati da ako tvrđenje važi za neko n≥ 5 onda važi i za n + 1.

Primer

Dokazati sledeće tvrđenje matematičkom indukcijom

$\mathbf{n^2 < 2^n \text{ za sve } n \geq 5}$

Rešenje:

Dokazujemo tvrdjenje za n=5

Imamo $5^2 = 2^5 < 3^2 = 2^5$, to jest tvrđenje važi za n = 5.

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za neko n ≥ 5.

Onda za n > 5 > 1 sledi:

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < \ n^2 + 2n + n = n^2 + 3n$

$n^2 + 3n < n^2 + n^2 = 2n^2$

$2n^2 < 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Tako smo pokazali da, ako tvrđenje važi za neko n≥ 5 onda važi i za n + 1.

PRIMER DOKAZIVANJA NEJEDNAKOSTI

Koristeći matematičku indukciju dokazati da je $2^n < n!$ za svaki ceo broj n tako da je $n \geq 4$

Primer

Koristeći matematičku indukciju dokazati da je $2^n < n!$ za svaki ceo broj n tako da je $n \geq 4$. (Napomena: Ova nejednakost nije tačna za $n = 1, 2$ i 3 .)

Rešenje:

Neka je $P(n)$ tvrđenje da je $2^n < n!$.

Korak 1: Da bismo dokazali nejednakost za $n \geq 4$, potrebno je da osnovni korak bude $P(4)$. Napomenimo da je $P(4)$ tačno, jer je $2^4 = 16 < 4! = 24$.

Korak 2:

Za induktivni korak, pretpostavljamo da je $P(k)$ tačno za proizvoljan ceo broj k sa $k \geq 4$. Drugim rečima, pretpostavljamo da je $2^k < k!$ za pozitivan ceo broj k sa $k \geq 4$.

Korak 3: Moramo pokazati da pod ovom pretpostavkom, $P(k+1)$ takođe važi. Drugim rečima, moramo pokazati da ako je $2k < k!$ za proizvoljan pozitivan ceo broj k sa $k \geq 4$, onda je $2k + 1 < (k+1)!$. Imamo:

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ (po definiciji eksponencijalne funkcije)

$< 2 \cdot k!$ (rema induktivnoj pretpostavci)

$< (k+1)k!$ (jer j $2 < k + 1$)

$= (k+1)!$ (po definiciji faktorijel funkcije)

Ovo pokazuje da je $P(k+1)$ tačno kada je $P(k)$ tačno. Time je završen induktivni korak dokaza.

Dakle, po principu matematičke indukcije, $P(n)$ je tačno za sve cele brojeve n sa $n \geq 4$. Drugim rečima, dokazali smo da je \$2 ^n < n! $tačnozasvecelebrojeve$ n sa n \geq 4\$.

Poglavlje 5

DOKAZIVANJE REZULTATA DELJIVOSTI

DOKAZIVANJE REZULTATA O DELJIVOSTI CELIH BROJEVA

Matematička indukcija može se koristiti kako bi se dokazali rezultati o deljivosti celih brojeva.

Matematička indukcija može se koristiti kako bi se dokazali rezultati o deljivosti celih brojeva. Iako su takvi rezultati često lakši za dokazivanje korišćenjem osnovnih rezultata u teoriji brojeva, poučno je videti kako dokazati ove rezultate korišćenjem matematičke indukcije.

Primer

Korišćenjem matematičke indukcije dokazati da je $n^3 - n$ deljivo sa 3 kad god je n pozitivan ceo broj.

Rešenje:

Da bismo konstruisali dokaz, neka je $P(n)$ tvrđenje: "n^3 - n je deljivo sa 3."

Korak 1: Tvrđenje $P(1)$ je tačno jer je $1^3 - 1 = 0$ deljivo sa 3. Time je završen osnovni korak.

Korak 2: Za induktivnu hipotezu pretpostavljamo da je $P(k)$ tačno; tj. pretpostavljamo da je $k^3 - k$ deljivo sa 3 za proizvoljan pozitivan ceo broj k .

Korak 3:

Da bismo završili induktivni korak, moramo pokazati da, kada pretpostavimo induktivnu hipotezu, sledi da je $P(k+1)$, tvrđenje da je $(k+1)^3 - (k+1)$ deljivo sa 3, takođe tačno. Drugim rečima, moramo pokazati da je

$(k+1)^3 - (k+1)$ deljivo sa 3.

Primetimo da je $(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) = (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$. Korišćenjem induktivne hipoteze zaključujemo da je prvi član $k^3 - k$ deljiv sa 3. Drugi član je deljiv sa 3 jer je 3 puta ceo broj. Dakle, znamo da je $(k+1)^3 - (k+1)$ takođe deljivo sa 3. Time je završen induktivni korak.

Pošto smo završili i osnovni korak i induktivni korak, po principu matematičke indukcije znamo da je $n^3 - n$ deljivo sa 3 kad god je n pozitivan ceo broj.

PRIMER

Složeniji primer dokazivanja rezultata deljivosti celih brojeva

Primer
Korišćenjem matematičke indukcije dokazati da je izraz $7^{n+2}+8^{2n+1}$ deljiv sa 57 za svaki ne-negativan ceo broj n.

Rešenje:

Da bismo konstruisali dokaz, neka je $P(n)$ tvrđenje: "Izraz $7^{n+2}+8^{2n+1}$ je deljiv sa 57."

Korak 1:

Da bismo završili osnovni korak, moramo pokazati da je $P(0)$ tačno, jer želimo da dokažemo da je $P(n)$ tačno za svaki ne-negativan ceo broj. Vidimo da je $P(0)$ tačno jer je $7^{0+2}+8^{2\cdot 0+1}=7^2+8^1=57$deljivo sa 57. Time je završen osnovni korak.

Korak 2:

Za induktivnu hipotezu pretpostavljamo da je $P(k)$ tačno za proizvoljan ne-negativan ceo broj k ; tj. pretpostavljamo da je $7^{k+2}+8^{2k+1}$ deljivo sa 57.

Korak 3: Da bismo završili induktivni korak, moramo da pokžemo da kada pretpostavimo da je induktivna hipoteza $P(k)$ tačna, sledi da je $P(k+1)$, tvrđenje da je $7^{(k+1)+2}+8^{2(k+1)+1}$ deljivo sa 57, takođe tačno. Teži deo dokaza je videti kako se koristi induktivna hipoteza. Kako bismo iskoristili induktivnu hipotezu, koristimo sledeće korake:

$7^{(k+1)+2}+8^{2(k+1)+1}=7^{k+3}+8^{2k+3}$

$=7\cdot 7^{k+2}+8^{2}\cdot 8^{2k+1}$

$=7\cdot 7^{k+2}+64\cdot 8^{2k+1}$

$=7(7^{k+2}+8^{2k+1})+57\cdot 8^{2k+1}$.

Sada možemo koristiti induktivnu hipotezu, koja tvrdi da je $7^{k+2}+8^{2k+1}$ deljivo sa 57. Zaključujemo da je prvi član u ovoj poslednjoj sumi, $7(7^{k+2}+8^{2k+1})$, deljiv sa 57. Drugi član u ovoj sumi, $57\cdot 8^{2k+1}$, deljiv je sa 57. Stoga zaključujemo da je $7(7^{k+2}+8^{2k+1})+57\cdot 8^{2k+1}=7^{k+3}+8^{2k+3}$deljivo sa 57. Time je završen induktivni korak. Pošto smo završili i osnovni korak i induktivni korak, po principu matematičke indukcije, zaključujemo da je $7(7^{k+2}+8^{2k+1})+57\cdot 8^{2k+1}=7^{k+3}+8^{2k+3}$deljivo sa 57 za svaki ne-negativan ceo broj n.

VIDEO PRIMER

Matematička indukcija i deljvost

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

DOKAZIVANJE REZULTATA O ALGORITMIMA

POHLEPNI ALGORITAM

Da bismo dokazali optimalnost ovog algoritma, koristimo matematičku indukciju na promenljivu n, broj predavanja koje algoritam zakazuje

Proučimo primer koji ilustruje jedan od mnogih načina na koji se matematička indukcija koristi u proučavanju algoritama . Pokazaćemo kako se matematička indukcija može koristiti da bi se dokazalo da "pohlepni" (engl. greedy) algoritam uvek daje optimalno rešenje.

Ako razmotrimo primer algoritma za zakazivanje predavanja, ulaz u ovaj algoritam je grupa od m predloženih predavanja sa unapred određenim početnim i završnim vremenima. Cilj je da se zakazuju što više ovih predavanja u glavnoj sali predavanja tako da se nijedna dva predavanja ne preklapaju. Pretpostavimo da predavanje t_j počinje u vremenu s_j i završava u vremenu e_j . (Nijedna dva predavanja ne mogu se održavati u glavnoj sali u isto vreme, ali predavanje u ovoj sali može početi istovremeno kada i drugo završi.)

Bez gubitka opštosti, pretpostavljamo da su predavanja navedena u redosledu neopadajućih vremena završetka, tako da važi $e_1 \leq e_2 \leq ... \leq e_m$. Pohlepni algoritam postupa tako što bira u svakoj fazi predavanje sa najranijim završetkom među svim predavanjima koja počinju najranije posle završetka poslednjeg predavanja zakazanog u glavnoj sali. Pokazaćemo da je ovaj pohlepni algoritam optimalan, u smislu da uvek zakazuje najveći mogući broj predavanja u glavnoj sali. Da bismo dokazali optimalnost ovog algoritma, koristimo matematičku indukciju na promenljivu n, broj predavanja koje algoritam zakazuje. Neka je $P(n)$ tvrđenje da ako pohlepni algoritam zakazuje n predavanja u glavnoj sali, tada nije moguće zakazati više od n predavanja u ovoj sali.

Osnovni korak: Pretpostavimo da je pohlepni algoritam uspeo da zakazuje samo jedno predavanje, t_1 , u glavnoj sali. To znači da nijedno drugo predavanje ne može početi ili posle e_1 , vremena završetka t_1 . Inače, prvo takvo predavanje koje naiđemo kako prolazimo kroz predavanja u redosledu neopadajućih vremena završetka moglo bi se dodati. Dakle, svako od preostalih predavanja mora koristiti glavnu salu u vremenu e_1 , jer sva počinju pre e_1 i završavaju se nakon e_1 . Iz toga sledi da nijedno dva predavanja ne mogu biti zakazana jer oba moraju koristiti glavnu salu u vremenu e_1 . Ovo pokazuje da je $P(1)$ tačno i završava osnovni korak.

Induktivan korak: Induktivna hipoteza je da je $P(k)$ tačno, gde je k proizvoljan pozitivan ceo broj, odnosno da pohlepni algoritam uvek zakazuje najveći mogući broj predavanja kada izabere k predavanja, gde je k pozitivan ceo broj, za bilo koji skup predavanja, bez obzira na broj predavanja. Trebamo pokazati da P(k + 1) sledi iz pretpostavke da je P(k) tačno, odnosno trebamo pokazati da pod pretpostavkom P(k), pohlepni algoritam uvek zakazuje najveći mogući broj predavanja kada izabere k + 1 predavanje.

POHLEPNI ALGORITAM INDUKTIVNI KORAK

Kada pohlepni algoritam zakazuje n predavanja, gde je n pozitivan ceo broj, nije moguće zakazati više od n predavanja.

Pretpostavimo sada da je pohlepni algoritam izabrao k + 1 predavanja. Naš prvi korak u završetku induktivnog koraka je da pokažemo da postoji raspored koji uključuje najviše moguće predavanja, a koji sadrži predavanje t1 sa najranijim vremenom završetka. Ovo je lako videti jer raspored koji počinje predavanjem ti iz liste, gde je i > 1, može biti promenjen tako da se predavanje t1 zameni predavanjem ti. Da bismo to videli, primetimo da, zato što važi $e_1 \leq e_i$, sva predavanja koja su zakazana nakon predavanja ti i dalje mogu biti zakazana. Jednom kada smo uključili predavanje t1, zakazivanje predavanja kako bi se zakazalo što više predavanja sada se svodi na zakazivanje što više predavanja koja počinju ili nakon vremena e_1. Dakle, ako smo zakazali što je više moguće predavanja, raspored predavanja osim predavanja t_1 je optimalan raspored originalnih predavanja koja počinju nakon završetka predavanja t_1. Pošto pohlepni algoritam zakazuje k predavanja prilikom kreiranja ovog rasporeda, možemo primeniti induktivnu hipotezu da zakazuje najviše moguće predavanja. Iz toga sledi da je pohlepni algoritam zakazao najveći mogući broj predavanja, k + 1, kada je kreirao raspored sa k + 1 predavanja, pa je P(k + 1) tačno. Ovo završava induktivni korak. Završili smo osnovni korak i induktivni korak. Dakle, pomoću matematičke indukcije znamo da je P(n) tačno za sve pozitivne ceo brojeve n. Ovo završava dokaz o optimalnosti. Drugim rečima, dokazali smo da kada pohlepni algoritam zakazuje n predavanja, gde je n pozitivan ceo broj, nije moguće zakazati više od n predavanja.

Poglavlje 7

VEŽBA – MATEMATIČKA INDUKCIJA

ZADATAK 1

Naredni primer se odnosi na matematičku indukciju

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta
Korišćenjem matematičke indukcije pokazati da je an prirodan broj za svako $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}, n \in \mathbb{N}$$

REŠENJE:
n=1

$$a_1 = 1/6 + 1/2 + 1/3 = 1, 1 \in \mathbb{N}$$

pretpostavimo da važi za n
ispitati da li važi i za n +1

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{6} + \frac{n^2+2n+1}{2} + \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3}$$

$$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2n}{2} + \frac{3n+3n^2}{3}$$

$$a_n + 1 + 2n + n^2$$

$$a_n + (n+1)^2 \in \mathbb{N}$$

ZADATAK 2

Korišćenjem matematičke indukcije pokazati da je iskaz deljiv sa x+y

Neka su x, y ∈ N. Korišćenjem matematičke indukcije pokazati da je

$a_n = x^{2n-1} + y^{2n-1}$ (n∈N)

deljivo sa x + y.

REŠENJE:

n=1

$a_1=x^{2*1-1} + y^{2*1-1}$

$a_1=x+y$

a_1 je deljivo sa (x+y)

pretpostavimo da važi za n

ispitati da li važi i za n+1

$a_n=q_n(x+y)$, za $q_n \in N$

$a_{n+1}=x^{2n+1}+y^{2n+1}=x^{2n-1}x^2+y^{2n-1}y^2+y^2x^{2n-1}-y^2x^{2n-1}$

$=x^{2n-1}(x^2-y^2) + y^2(x^{2n-1}+y^{2n-1})=x^{2n-1}(x-y)(x+y) + y^2a_n$

$=x^{2n-1}(x-y)(x+y) + y^2q_n(x+y)=(x+y)(x^{2n-1}(x-y) + y^2q_n)$

deljivo je sa (x+y)

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

ZADATAK 3

Za Fibonačijev niz pokazati da $F^k \leq (5/3)^k$ za svako k≥0.

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

$$Neka\ F_k\ označava\ niz\ Fibonačijevih\ brojeva\ tako\ da$$
$$F_k = k\ za\ k = 0,1$$
$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}\ za\ k \geq 2$$
$$Pokazati\ da$$
$$F_k \leq (5/3)^k\ za\ svako\ k \geq 0$$
$$REŠENJE:$$
$$k = 0$$
$$F_0 = 0 \leq (\tfrac{5}{3})^0 = 1$$
$$F_1 = 0 \leq (\tfrac{5}{3})^1 = \tfrac{5}{3}$$
$$pretpostavimo\ da\ važi\ za\ k$$
$$Pokažimo\ da\ važi\ i\ za\ k+1$$
$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq (\tfrac{5}{3})^k + (\tfrac{5}{3})^{k-1} \leq (\tfrac{5}{3})^{k-1}((\tfrac{5}{3}) + (\tfrac{5}{3})^2)$$
$$\leq (\tfrac{5}{3})^{k+1}(\tfrac{24}{24}) \leq (\tfrac{5}{3})^{k+1}$$

važi za k+1

ZADATAK 4

Pomoću matematičke indukcije pokazati da 6 deli P(n)

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Pomoću matematičke indukcije pokazati da 6 deli P(n) gde je

$\mathbf{P(n) = n^3 - n}$

REŠENJE:

n=0

P(0)=0: *deljivo je sa 6*

pretpostavimo da važi za n=k

$P(k+1) = (k+1)^3 - (k+1)$
$= k^3 + 3^2 + 3k + 1 - k - 1$
$= k^3 + 3^2 + 3k - k$
$= (k^3 - k) + 3k(k+1)$
$= P(k) + 3k(k+1)$

P(k) je deljivo sa 6

3k(k+1) predstavlja dva sekvencijalna broja k i k+1 čiji je proizvod uvek paran broj. Paran broj pomnožen sa 3 je uvek deljiv sa 6.

ZADATAK 5

Pomoću matematičke indukcije pokazati da 9 deli zbir kubova tri uzastopna broja

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Pomoću matematičke indukcije pokazati da 9 deli zbir kubova tri uzastopna broja.

REŠENJE:
$(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$n=0
$(0) = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$deljivo sa 9
pretpostavimo da važi za n=k

$$P(k+1) = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$$

$$= k^3 + 27 + 3 * 3k^2 + 27k + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

$$= (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9k^2 + 27(k+1)$$

$$= P(k) + 9k^2 + 27(k+1)$$

pošto su svi elementi deljivi sa 9, deljiv je i P(k+1)

ZADATAK 6

Pomoću matematičke indukcije pokazati da 2 deli P(n)

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta
Pomoću matematičke indukcije pokazati da 2 deli P(n) gde je

$$P(n) = (n^2 - 1)(n + 2)$$

REŠENJE:
n=1
P(1)=0•3=0; Deljivo sa 2
pretpostaviti sa važi za n=k

$$P(k+1) = ((k+1)^2 - 1)(k+1+2) = ((k+1)+1)((k+1)-1) * (k+3)$$
$$= ((k+2)k(k+3) = (k^2+3k)(k+2)$$

$$= (k^2+1-1+3k)(k+2) = ((k+1)(k-1)+3k+1)(k+2)$$
$$= (k+2)(k+1)(k-1) + (k+2)(3k+1)$$

$$= (k^2-1)(k+2) + (3k+1)(k+2) = P(k) + (3k+1)(k+2)$$

$P(k)$ je po pretpostavci deljivo sa 2
$(3k+1)(k+2)$ je deljivo sa dva jer jedan uvek paran.

Poglavlje 8

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta
Pomoću matematičke indukcije pokazati da 6 deli P(n) za n ≥1 gde je
P(n) = n^3 + 5n

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Matematičkom indukcijom dokazati 6| n (n^2+5), za svako $n \in \mathbb{N}$

Zadatak 3 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Pomoću matematičke indukcije pokazati da 6 deli P(n) za $n \leq 1$ gde je P(n) = n^3 + 5n

ZAKLJUČAK

ZAKLJUČAK

U ovoj lekciji su objašnjene osobine celih brojeva. Naveden je princip matemtičke indukcije i kroz primere pokazano kao se primenjuje. Takođe, student je upoznat sa pojmom aposlutne vrednosti, najmanjeg zajedničkog sadržaoca i najvećeg zajedničkog delioca.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.

[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.