UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Polinomi i racionalne funkcije

Lekcija 05

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 05

POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE

Uvod

UVOD

Polinomi i racionalne funkcije.

U ovoj lekciji ćemo obraditi polinome koji predstavljaju funkcije koje se izgrađuju od stepenih funkcija i konstanti primenom operacija sabiranja i množenje na njih. Ovde ćemo se baviti polinomima jedne nezavisno promenljive.

Istorijski gledano, prvi spisi u kojima se javljaju matematički problemi koje bismo mogli shvatiti kao polinome datiraju iz Kine drugog veka pre nove ere. Arapski matematičari su u ranom srednjem veku izučavali polinome. U to vreme nije postojala matematička notacija koju danas poznajemo, tako da su oni zapisivali polinome kao rečenice koje opisuju polinom koji se zadaje. To je dosta otežavalo rad sa polinomima.

Rezultati do kojih su arapski matematičari došli u vezi sa polinomima, su preneti u Evropu u 14. i 15. veku. Tada počinje sistematično izučavanje polinoma. Do značajnih rezultata u ovoj oblasti dolaze italijanski matematičari Tartalja i Kardano.

Racionalne funkcije predstavljaju količnik dva polinoma.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Operacije sa polinomima

DEFINICIJA POLINOMA

Polinomi su jedni od najvažnijih funkcija u matematici. Polinom prvog reda se naziva linearna funkcija, polinom drugog reda se naziva kvadratna, a trećeg reda kubna funkcija.

Funkcija oblika

$$P_n(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{1}$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}, (a_n \neq 0)$ naziva se kompleksni polinom stepena n ili polinom stepena n nad poljem kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. Ako su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, (a_n \neq 0)$ realni brojevi, tada se polinom (1) naziva realni polinom stepena n ili polinom stepena n nad poljem realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. Slično, ako su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, (a_n \neq 0)$ racionalni brojevi, tada se polinom (1) naziva racionalni polinom stepena n ili polinom stepena n nad poljem racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$.

Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se nazivaju koeficijenti polinoma. U slučaju da je $a_n = 1$ tada se polinom (1) naziva normiran polinom. Specijalno, ako važi $a_1 = \ldots, a_{n-1} = a_n = 0$ i $a_0 \neq 0$, tada je $P_0(x) = a_0$ polinom nultog stepena ili polinom konstanta. Ako u polinomu nultog stepena važi da je $a_0 = 0$, tada takav polinom nazivamo nula polinom.

U opštem slučaju, ako je $(S, +, \cdot)$ polje, tada se

$$P_n(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in S, (a_n \neq 0)$naziva polinom stepena n nad poljem $(S, +, \cdot)$. Polje $(S, +, \cdot)$ se naziva polje skalara. Shodno prethodno rečenom, ako je $S = \mathbb{C}$ govorimo o kompleksnim polinomima, ako je $S = \mathbb{R}$ o realnim polinomima, a ako je $S = \mathbb{Q}$ o racionalnim polinomima.

PRIMER 1

Linearna funkcija je polinom prvog stepena, kvadratna funkcija je polinom drugog stepena, kubna funkcija je polinom trećeg stepena.

U dosadašnjem školovanju ste se susreli sa sledećim polinomima.

Polinom prvog stepena je oblika

$$P_1(x) = a_1x + a_0, \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ (a_1 \neq 0).$$

i se naziva linearna funkcija.

Polinom drugog stepena je oblika

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ (a_2 \neq 0).$$

i naziva se kvadratna funkcija.

Polinom trećeg stepena je oblika

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ (a_3 \neq 0).$$

i naziva se kubna funkcija.

Napomena. Prethodno pomenuti polinomi se mogu posmatrati, u najopštijem slučaju, nad poljem $(S, +, \cdot)$. Međutim, oni se u srednjoj školi izučavaju kada je $S = \mathbb{R}$.

RELACIJE I OPERACIJE SA POLINOMIMA

U skupu svih polinoma mogu se uvesti operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, ali ne i deljenja dva polinoma. Takođe se može uvesti relacija jednakosti dva polinoma.

Označimo sa $\mathbb{P}$ skup svih polinoma na poljem $(S, +, \cdot)$. U ovakvom skupu može se uvesti relacija jednakosti polinoma. O tome govori sledeći stav.
Stav. Neka su $P_n(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{S}, (a_n \neq 0)$ i $Q_m(z) = b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1z + b_0$, gde su $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m \in \mathbb{S}, (b_m \neq 0)$ dva polinoma nad poljem $(S, +, \cdot)$. Tada je $P_n(z) = Q_m(z)$ ako i samo ako je $m = n$ i $a_i = b_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$.

Takođe, skup $\mathbb{P}$ mogu se uvesti i operacije sabiranja i množenja polinoma. Nula polinom je neutralni element za sabiranje polinoma, a neutralni element za množenje polinoma je jedinični polinom. Nije teško uočiti da važi sledeće:
1. Struktura $(\mathbb{P}, +)$, gde je $+$ operacija sabiranja polinoma, je Abelova (komutativna) grupa,

2. Struktura $(\mathbb{P}, \cdot)$, gde je $\cdot$ operacija množenja polinoma, je semigrupa (polugrupa),

3. Važi distributivnost operacije množenja polinoma, prema operaciji sabiranja dva polinoma.

Iz prethodnog, možemo zaključiti da je struktura $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ prsten. Kako je operacija množenja matrica komutativna i jedinični polinom pripada skupu $\mathbb{P}$, struktura $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ je i komutativni prsten sa jedinicom.

Poznato vam je iz ranijeg školovanja da se za polinome može uvesti i operacija oduzimanja dva polinoma. Naime, kako je struktura $(\mathbb{P},+)$ grupa, to znači da svaki polinom ima svoj suprotni polinom (koji se od njega razlikuje po znaku ispred svakog koeficijenta). Dakle, oduzimanje polinoma se uvodi preko njihovog sabiranja. S druge strane, kako struktura $(\mathbb{P},\cdot)$ nije grupa, tada svaki polinom ne može imati svoj inverzni polinom, tako da se deljenje polinoma u opštem slučaju ne može uvesti kao operacija u skup svih polinoma. O tome, govori sledeći stav.

Stav. Za proizvoljne nenula polinome $P(x)$ i $S(x)$ postoje jedinstveni polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ takvi da važi

$$P(x) = S(x)\cdot Q(x) + R(x). \tag{3}$$

gde je $R(x)$ ili nula polinom ili je stepena nižeg od stepena polinoma $S(x)$. Jedinstveni polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ za koje važi (3) nazivaju se tim redom količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $S(x)$.

U slučaju da je $R(x)=0$, tj. da važi $P(x)=S(x)\cdot Q(x)$ kažemo da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $S(x)$ ili da se polinom $S(x)$ sadrži u polinomu $P(x)$. To označavamo sa $S\,|P$. Osobine ove relacije date su u narednom stavu.
Stav. Za proizvoljne polinome $P(x), S(x)$ i $T(x)$ važi da je:
i) $P|P$,
ii) ako $P|S$ i $S|P$, tada važi $P(x)=a\cdot S(x)$, gde je $a\in\mathbb{R}$,
iii) ako $P|S$ i $S|T$, tada $P|T$.

PRIMER 2

Zbir ili razlika dva polinoma je polinom. Skup svih polinoma i operacija sabiranja je Abelova grupa, dok sa operacijom množenja čini semigrupu sa jediničnim elementom.

Primer. Za date polinome

$$P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5 \quad \text{i} \quad Q_2(x) = 5x^2 - 7x + 6$$

odrediti njihov zbir i razliku.

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} P_3(x)+Q_2(x) &= (3x^3-4x^2+x-5)+(5x^2-7x+6) = \\ &= 3x^3+x^2-6x+1, \\ P_3(x)-Q_2(x) &= (3x^3-4x^2+x-5)-(5x^2-7x+6) = \\ &= 3x^3-9x^2+8x-11. \end{aligned}$$

Primer. Za date polinome

$$P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5 \quad \text{i} \quad Q_2(x) = 5x^2 - 7x + 6$$

odrediti njihov proizvod.

Rešenje. Proizvod ovih polinoma je polinom petog stepena

$$\begin{aligned} T_5(x) = P_3(x) \cdot Q_2(x) &= (3x^3 - 4x^2 + x - 5) \cdot (5x^2 - 7x + 6) = \\ &= 3 \cdot 5x^5 + \big(3 \cdot (-7) + (-4) \cdot 5\big)x^4 + \big(3 \cdot 6 + (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5\big)x^3 + \\ &+ \big((-4) \cdot 6 + 1 \cdot (-7) + (-5) \cdot 5\big)x^2 + \big(1 \cdot 6 + (-5) \cdot (-7)\big)x + (-5) \cdot 6 \\ &= 15x^5 - 41x^4 - 5x^3 - 56x^2 + 41x - 30. \end{aligned}$$

PRIMER 3

Operacija deljenja polinoma nije zatvorena u skupu svih polinoma.

Primer. Podelimo polinom $P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ polinomom $Q_2(x) = x^2 - 2x + 3$.

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{array}{cccccc} (& 3x^3 & -4x^2 & +2x & -1 &) \quad : (x^2 - 2x + 3) = 3x + 2 \\ & 3x^3 & -6x^2 & +9x & & \\ \hline & 2x^2 & 7x & -1 & & \\ & 2x^2 & -4x & +6 & & \\ \hline & & -3x & -7 & & \end{array}$$

Dakle, kao što smo rekli, prilikom deljenjem dva polinoma pored količnika u opštem slučaju može se javiti i ostatak. U ovom slučaju je količnik $Q(x) = 3x + 2$, dok je ostatak $R(x) = -3x - 7$.

EUKLIDOV ALGORITAM ZA POLINOME

Slično kao i kod celih brojeva, može se definisati Euklidov algoritam za određivanje NZD-a za dva polinoma.

Stav. Za bilo koja dva ne nula polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ postoji njihov najveći zajednički delilac. On je jedinstveno određen sa tačnošću do na multiplikativnu konstantu.

Euklidov algoritam za određivanje NZD -a za dva polinoma se izvršava u naredna tri koraka

1. delimo polinom $P(x)$ sa polinomom $Q(x)$, zatim,

2. sve dok ostatak nije nula, delimo delilac sa ostatkom

3. poslednji nenula ostatak jednak je $NZD\big(P(x), Q(x)\big)$.

Zapravo, slično Euklidovom algoritmu za cele brojeve, možemo sprovesti sledeći niz koraka

$$
\begin{aligned}
P(x) &= Q(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x), \\
Q(x) &= R_1(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x), \\
R_1(x) &= R_2(x) \cdot Q_3(x) + R_3(x), \\
&\vdots \\
R_{n-2}(x) &= R_{n-1}(x) \cdot Q_n(x) + R_n(x), \\
R_{n-1}(x) &= R_n(x) \cdot Q_{n+1}.
\end{aligned}
$$

PRIMER 4

Primena Euklidovog algoritma za određivanje NZD -a dva polinoma.

Naći NZD za polinome $x^3 + 1$ i $x^5 + 1$.

Rešenje. Imamo da je

$$
\begin{aligned}
x^5 + 1 &= (x^3 + 1) \cdot x^2 + (-x^2 + 1), \\
x^3 + 1 &= (-x^2 + 1) \cdot (-x) + (x + 1), \\
-x^2 + 1 &= (x + 1) \cdot (-x + 1).
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo da je $NZD(x^3 + 1, x^5 + 1) = x + 1$.

Poglavlje 2

Osnovne osobine polinoma

ALGEBARSKA JEDNAČINA STEPENA n . LINEARNA, KVADRATNA I KUBNA JEDNAČINA.

Linearna, kvadratna i kubna jednačina spadaju u algebarske jednačine.

Neka je dat polinom

$$P_n(z) \; = \; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{S}$,nad poljem $(S, +, \cdot)$. Tada se jednačina oblika

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

naziva se algebarska jednačina stepena n.

Specijalno, za $n = 1$ dobijamo algebarsku jednačinu prvog stepena $a_1 x + a_0 = 0, \; (a_1 \neq 0)$koja se naziva linearna jednačina.

Specijalno, za $n = 2$ dobijamo algebarsku jednačinu drugog stepena je $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \; (a_2 \neq 0)$koja se naziva kvadratna jednačina.

Specijalno, za $n = 3$ dobijamo algebarsku jednačinu trećeg stepena $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \; (a_3 \neq 0)$koja se naziva kubna jednačina.

Određivanje svih rešenja neke jednačina (ne samo algebarske) predstavlja jedan od osnovnih problema u matematici. Naime, u mnogim slučajevima nije moguće eksplicitno, analitički odrediti njena rešenja. Kao alternativa tome se, najpre, proverava da li ta jednačina, uopšte, ima rešenja. Dakle, ispituje se egzistencija njenih rešenja. Za one jednačine za koje se ustanovi da imaju rešenja, tada se mogu tražiti neka njena specifična rešenja (npr. ona koja ispunjavaju neki unapred zadati uslov), ili se, pak, pribegava njihovom približnom određivanju primenom metoda numeričke matematike.
U slučaju algebarskih jednačina do stepena četvrtog reda njihova rešenja zavise od koeficijenata koji se javljaju u njima. Kako se rešenja linearne i kvadratne jednačine određuju učili ste u srednjoj školi. Zaista, njihova rešenja se određuju konačnom primenom operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja njenih koeficijenata, tj. kako se kaže preko ona se određuju preko radikala.
Za algebarske jednačine petog i višeg stepena norveški matematičar Nils Abel je dokazao da u opštem slučaju nije moguće odrediti preko radikala. Dakle, u matematici za ovakve jednačine u opštem slučaju nije još uvek poznat postupak kako se njihova rešenja mogu odrediti. Ono što je Abel pokazao jeste da se to ne može uraditi preko radikala.

NULA POLINOMA. BEZUOV STAV

Rešenje algebarske jednačine se naziva nula polinoma. Korišćenjem nula polinoma možemo vršiti faktorisanje polinoma. O tome govori Osnovni stav algebre.

Iz prethodno rečenog možemo zaključiti da je rešenje neke algebarske jednačine, zapravo vrednost za koju će odgovarajući polinom imati vrednost nula. S tim u vezi uvodimo sledeću definiciju.

Vrednost $z_0 \in S$ se naziva nula polinoma ili koren polinoma

$$P_n(z) \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\; (a_n \neq 0)$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{S}$,ako je $P_n(z_0) = 0$.

Ostatak pri deljenju nekog polinoma polinomom prvog stepena može se odrediti primenom narednog stava.

Stav[Bezuov stav]. Ostatak pri deljenju polinoma $P(z)$ nad poljem $(S, +, \cdot)$ polinomom $z - z_0, z_0 \in S$ je $P(z_0)$.

Prema Bezuovog stava ako je $P(z_0) = 0$, za neku vrednost $z_0 \in S$, shodno prethodnoj definiciji, tada je ona nula posmatranog polinoma (a samim tim i rešenje odgovarajuće algebarske jednačine).

OSNOVNI STAV ALGEBRE. FAKTORIZACIJA POLINOMA

Nule polinoma nam omogućavaju faktorizaciju polinoma.

U teoriji kompleksnih polinoma veoma je važan sledeći stav koji se naziva Osnovni stav algebre.

Stav [Osnovni stav algebre]. Svaki kompleksni polinom stepena većeg od 1 ili jednakog 1, ima barem jednu nulu.

Stav. Ako je z_0 nula polinoma $P_n(z)$, tada je $P_n(z)$ deljiv polinomom $z - z_0$.

Na osnovu prethodnog stava postoji kompleksni polinom $Q_{n-1}(z)$ stepena $n - 1$, tako da važi

$$P_n(z) \;=\; (z - z_0) \cdot Q_{n-1}(z).$$

Primenom Osnovnog stava algebre i Bezuovog stava, može se dokazati naredni stav.

Stav. Neka je $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\ (a_n \neq 0)$ kompleksni polinom stepena n. Tada postoje kompleksni brojevi $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ za koje važi

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot\ldots\cdot(z - z_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(z - z_i).$$

Prethodnom formulom je izvršena faktorizacija polinoma $P_n(z)$.

Napomena. Faktorizacija nekog polinoma je jedinstvena.
Definicija. Kompleksan broj z_0 je nula kompleksnog polinoma $P_n(z)$ reda (višestrukosti) $1 < k \leq n$ ako i samo ako se z_0 javlja tačno k puta kao nula polinoma $P_n(z)$.

Na osnovu definicije i prethodno datih stavova, važi da je

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z).$$

Stav. Ako komplekan polinom $P_n(z)$ ima različite nule $z_1, z_2, \ldots, z_r$ $(r \leq n)$ respektivno reda (višestrukosti) $k_1, k_2, \ldots, k_r$, gde je $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, tada se taj polinom može na jedinstven način prikazati u obliku

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z - z_r)^{k_r} = a_n\prod_{i=1}^{r}(z - z_i)^{k_i}.$$

Stav. Neka su $P_n(z)$ i $Q_n(z)$ kompleksni polinomi stepena $n \geq 1$ i neka su im koeficijenti uz najstariji član jednaki. Tada je $P_n(z) = Q_n(z)$ za svako $z \in \mathbb{C}$ ako i samo ako je svaka nula polinoma $P_n(z)$ reda $r \geq 1$ ujedno i nula polinoma $Q_n(z)$ istog reda.

Stav. Neka su $P_n(z)$ i $Q_m(z)$ kompleksni polinomi, pri čemu je $n, m \geq 1$ i $m > n$. Tada važi $P_n(z) \mid Q_m(z)$ ako i samo ako je svaka nula polinoma $P_n(z)$ ujedno i nula polinoma $Q_m(z)$.

VIJETOVE FORMULE. PRIMER

Vijetovim formulama je zadata veza između rešenja polinoma i njegovih koeficijenata.

Stav. Neka je $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\quad (a_n \neq 0)$ gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$ kompleksan polinom stepena n i neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ njegove nule polinoma (među kojima može biti jednakih). Tada važi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Prethodno date formule se nazivaju Vijetove formule .

Primer. Vijetove formule za kvadratnu jednačinu

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

za $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ (a_2 \neq 0)$,glase

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2}, \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Vijetove formule za kubnu jednačinu

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

za $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ (a_3 \neq 0)$glase

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

PRIMER

Primena Vijetovih formula na određivanje polinoma trećeg stepena.

Neka su x_1 , x_2 i x_3 nule polinoma $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$. Odrediti polinom $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ čije su nule $x_1 + 2$, $x_2 + 2$ i $x_3 + 2$.

Rešenje. Vietove formule za polinom $P(x)$ su

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -3, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 4, \\ x_1x_2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Tada za polinom $Q(x)$, primenom Vietovih formula, važi da je

$$\begin{aligned} (x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) &= -a, \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) + (x_1 + 2)(x_3 + 2) + (x_2 + 2)(x_3 + 2) &= b, \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2)(x_3 + 2) &= -c. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine prethodnog sistema imamo da je

$$-a = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{-3} + 6.$$

Tada je $a = -3$.

Dalje, iz druge jednačine prethodnog sistema imamo da je

$$\begin{aligned} b &= (x_1+2)(x_2+2)+(x_1+2)(x_3+2)+(x_2+2)(x_3+2) = \\ &= \underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{4} + 4(\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{-3}) + 12 = \\ &= 4. \end{aligned}$$

Konačno, iz treće jednačine imamo da je

$$\begin{aligned} -c &= (x_1+2)(x_2+2)(x_3+2) = \\ &= \underbrace{x_1x_2x_3}_{5} + 2(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{4}) + 4(\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{-3}) + 8 = \\ &= 9. \end{aligned}$$

Dakle, $c=-9$. Tada je $Q(x)=x^3-3x^2+4x-9$.

Poglavlje 3

Neke osobine realnih polinoma

LINEARNO-KVADRATNA FAKTORIZACIJA

Za svaki realni polinom može se dobiti njegova linearno-kvadratna faktorizacija.

Sada ćemo posmatrati realni polinom, tj. polinom

$$P_n(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, (a_n \neq 0)$. Napomenimo, da sve prethodno rečeno za kompleksne polinome, važi i za realne. Međutim, s obzirom da ćemo u daljem radu uglavnom sretati realne polinome, ukazaćemo na neke specifičnosti realnog polinoma u vezi sa njegovom faktorizacijom i određivanjem nula. Najpre, govorimo o faktorizaciji realnog polinoma.

Stav. Ako je kompleksan broj z nula reda k realnog polinoma $P_n(x)$, tada je i njegov konjugovano-kompleksan broj $\overline{z}$ nula istog reda k tog polinoma.

Na osnovu prethodnog stava imamo da ako je $a+ib,\ a,b \in \mathbb{R}$kompleksna nula reda k nekog polinoma, tada je $a-ib$ nula tog polinoma reda k. S druge strane, važi da je

$$\big(x-(a+ib)\big)^k \cdot \big(x-(a-ib)\big)^k = \big(x^2 - 2ax + (a^2+b^2)\big)^k = \big(x^2 - px + q)\big)^k,$$
$$(p = 2a,\ q = a^2 + b^2,\ a,b \in \mathbb{R}).$$

Na osnovu svega prethodno rečenog realni polinom $P_n(x)$ može se na jedinstven način zapisati u obliku sledećeg prozvoda

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_r)^{m_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \qquad (*)$$

gde za prirodne brojeve $m_j\,(j = 1,\ldots,r)$ i prirodne brojeve $l_k\,(k = 1,\ldots,s)$ važi

$$n \;=\; m_1 + \cdots + m_r + 2(l_1 + \cdots + l_s).$$

U datoj faktorizaciji realne nule $x_j\,(j = 1,\ldots,r)$ su međusobno različite nule polinoma $P_n(x)$ reda $m_j\,(j = 1,\ldots,r)$, dok su nule kvadratnih trinoma $x^2 + p_kx + q_k\,(k = 1,\ldots,s)$ konjugovano-kompleksne nule polinoma $P_n(x)$. Prethodno uvedena faktorizacija se naziva linearno-kvadratna faktorizacija , s obzirom da se u faktorizaciji (*) javljaju linearni članovi $(x-x_i),\ (i = 1,\ldots,r)$ kao i kvadratni trinomi $x^2 + p_kx + q_k\,(k = 1,\ldots,s)$.

RACIONALNE NULE REALNOG POLINOMA SA CELOBROJNIM KOEFICIJENTIMA

Da bismo mogli da odredimo linearno kvadratnu faktorizaciju relanog polinoma, potrebno je da odredimo nule tog polinoma. Postoji postupak za određivanje racionalnih rešenja.

Za određivanje linearnokvadratne faktorizacije relanog polinoma, potrebno je da odrediti nule tog polinoma. Nalaženje realnih nula polinoma

$$P_n(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, (a_n \neq 0)$je, u opštem slučaju, složeno.

Za određivanje nula polinoma može se, kao što smo to već rekli, posmatrati odgovarajuća algebarska jednačina i naći njena rešenja. Poznati su vam iz ranijeg školovanja postupci za rešavanje linearne i kvadratne jednačine. Postoje postupci za rešavanje algebarske jednačine trećeg reda, kao i četvrtog reda (Kardanov, odnosno Ferarijev postupak tim redom), o kojima ovde neće biti reči. U svim ovim postupcima se rešenja izražavaju preko radikala. Za algebarske jednačine stepena višeg od četiri je pokazano da to nije moguće. Zato je u matematici i danas otvoren problem pronalaženja metoda za rešavanja ovakvih algebarskih jednačina. Zbog toga je od interesa imati neki postupak za proveru da li je neka vrednost nula nekog polinoma ili ne. O tome govorimo u nastavku.

Za određivanja racionalnih nula realnog polinoma $P_n(x)$, uz dodatni uslov da su svi koeficijenti $a_j \; (j = 0, 1, \ldots, n)$ celi brojevi, važi sledeći stav.

Stav. Neka je dat polinom $P_n(x)$ čiji su svi koeficijenti celi brojevi. Ako je razlomak p/q nula polinoma $P_n(x)$, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi (tj. $NZD(p,q) = 1$), tada je imenilac p činilac slobodnog člana a_0, a brojilac q je činilac koeficijenta a_n.

Primer. Odrediti racionalne nule polinoma $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12.$

Rešenje. Kako je $a_n = a_3 = 1,$ za dati polinom posmatrajmo samo delitelje broja $12,$ jer je $a_0 = 12.$ To su brojevi $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12.$ Na osnovu prethodnog stava, ovi celi brojevi su i jedine moguće racionalne nule datog polinoma. Sada, treba proveriti da li one to zaista i jesu. Proveru ćemo vršiti primenom Bezuovog stava. Važi da je:
1. $P_3(1) = -12,$ pa $x = 1$ nije nula datog polinom.
2. Kako je $P_3(-1) = -6$ ni $x = -1$ nije nula polinom.
3. Kako je $P_3(2) = 0,$ tada je $x = 2$ nula polinoma.
4. Kako je $P_3(-2) = 0,$ tada je $x = -2$ nula polinoma.
5. Kako je $P_3(3) = 30,$ tada je $x = 3$ nije nula polinoma.
6. Kako je $P_3(-3) = 0,$ tada je $x = -3$ nula polinoma.
Kako polinom trećeg stepena ima tačno tri nule, prekidamo dalju proveru. Tada je njegova linearno-kvadratna faktorizacija $P_3(x) = (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3).$

Napomena.U praksi je moguće da za neki polinom nijedna njegova potencijalna racionalna nula, nakon provere, ne bude zaista njegova nula. To znači da takav polinom kao rešenja ima ili realne brojeve koji nisu racionalni (tj. iracionalni su) ili su ona konjugovano-kompleksni brojevi.

HORNEROVA SHEMA

Hornerova shema predstavlja postupak za deljenje polinoma $P_n(x)$ polinomom $x - x_0$.

Na osnovu Osnovnog stava algebre za neki polinom $P_n(x)$ važi da je

$$P_n(x) \;=\; (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x),$$

gde je $x = x_0$ jedna njegova nula. Postupak koji omogućava da se odrede koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ polinoma $Q_{n-1}(x)$ (tj. odredi količnik pri deljenju polinoma $P_n(x)$ polinomom $x - x_0$) i proveri da li su potencijalne vrednosti zaista njegove nule, naziva se Hornerova shema. Objasnićemo u opštem slučaju ovaj postupak.

Neka je $x = x_0$ moguća racionalna nula datog polinoma, određena na osnovu prethodnog stava, (tj. x_0 je faktor izraza $\frac{a_0}{a_n}$), tada imamo

$$b_{n-1} = a_n,\; b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots,\; b_0 = x_0 b_1 + a_1.$$

Osim toga, neka je $r = x_0 b_0 + a_0$.

Sada postoje dve mogućnosti:
i) ako je $r = 0$, tada je $x = x_0$ nula posmatranog polinoma;
ii) ako je $r \neq 0$, tada $x = x_0$ nije nula posmatranog polinoma.

U praksi se provera vrši tako što se, najpre, ispišu svi koeficijenti datog polinoma, uključujući i one koji su jednaki nuli. Na osnovu gornjih jednakosti za koeficijente $b_k, (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ i broj r pravi se sledeća shema:

$$\begin{array}{ccccccc|cc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_k & \ldots & a_0 & & x = x_0 \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_k & \ldots & b_0 & r & \end{array}$$

i primeni gornja analiza u zavisnosti da li je $r = 0$ ili $r \neq 0$.
Hormerova shema predstavlja jedan postupak za deljenje polinoma $P_n(x)$ polinomom $x - x_0$. Ako broj x_0 nije nula tog polinoma, tada postoji ostatak pri ovom deljenju i to je polinom stepena nižeg od $x - x_0$, tj. ostatak je broj. U Hornerovoj shemi veličina r predstavlja taj ostatak.

PRIMER

Postupak primene Hornerove sheme - celobrojna i različita rešenja.

Odrediti racionalne nule polinoma $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12.$

Rešenje. Za dati polinom posmatrajmo delitelje broja 12, jer je $a_0 = 12$. To su brojevi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$
Kako je $a_n = a_3 = 1,$ to su ovi celi brojevi i jedine moguće racionalne nule datog polinoma. Ispitaćemo da li je $x = 1$ nula posmatranog polinoma

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -4 & -12 & | & & x=1 \\ & 1 & 4 & 0 & | & -12. & \end{array}$$

Napomenimo da je drugi red u prethodnoj shemi dobijen u skladu sa Hornerovom shemom, tj. prvi broj u drugom redu, 1, se prepiše iz prvog reda i upiše u drugu kolonu. Zatim se nalaze brojevi $4 = 1 \cdot 1 + 3$, $1 \cdot 4 + (-4) = 0$ i konačno se dobija ostatak $1 \cdot 0 + (-12) = -12$. Kako je poslednja cifra u drugom redu -12 (tj. $r = -12$, to $x = 1$ nije nula datog polinoma.

Ispitaćemo da li je $x = 2$ nula posmatranog polinoma:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -4 & -12 & | & & x=2 \\ & 1 & 5 & 6 & | & 0. & \end{array}$$

Kako je poslednja cifra u drugom redu 0, (tj. $r = 0$) to je $x = 2$ nula datog polinoma. Prema tome možemo pisati

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x^2 + 5x + 6).$$

Postupak se dalje nastavlja, tako što je sada dovoljno tražiti nule novog polinoma drugog stepena. To se sada može uraditi ili rešavanjem kvadratne jednačine:

$$x^2 + 5x + 6 = 0,$$

ili, kao što ćemo mi uraditi, ponovo pomoću Hornerove sheme.

Ako proverimo da li je $x = -2$ nula polinoma $Q_2(x)$, tada imamo

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 6 & | & & x=-2 \\ & 1 & 3 & | & 0, & \end{array}$$

što znači da je druga nula polinoma $P_3(x)$, broj $x = -2$. Tablica takodje pokazuje da je treća nula -3. Prema tome, možemo pisati

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x+2)(x+3).$$

VIDEO KLIP

Primeri faktorizacije polinoma sa YouTube-a - interesantna metoda

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DODATNE OSOBINE POLINOMA ZA ODREĐIVANJE NJIHOVIH NULA

Višestrukost realnih nula polinoma se može proveriti primenom izvoda.

Da se podsetimo, broj x_0 je realna nula m -tog reda polinoma $P_n(x),$ ako postoji polinom sa realnim koeficijentima $R_{n-m}(x),$ stepena $n-m,$ takav da je $R_{n-m}(x_0) \neq 0$ i važi

$$P_n(x) = (x-x_0)^m R_{n-m}(x).$$

Može se pokazati da ako je x_0 nula m -tog reda tada važi da je

$$P(x_0)=0,\ P'(x_0)=0,\ P''(x_0)=0,\ldots,\ P^{(m-1)}(x_0)=0.$$

Poglavlje 4

Racionalne funkcije

UVOD

Racionalna funkcija predstavlja količnik dva polinoma.

Racionalna funkcija predstavlja količnik dva polinoma

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}. \tag{racio1}$$

U slučaju da je polinom u imeniocu racionalne funkcije nultog reda, tada se one svode na polinome, pa se polinomi nazivaju i cele racionalne funkcije. Oblast definisanosti racionalne funkcije je skup svih realnih brojeva različitih od realnih korena imenioca, tj. različitih od realnih rešenja jednačine

$$Q_n(x) = a_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0.$$

Posebno značajni primeri racionalnih funkcija su elementarne racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-a)^j},\ j \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k},\ k \in \mathbb{N}, \tag{racio2}$$

gde su nule polinoma $x^2 + bx + c$ konjugovano--kompleksne.

Stav. Racionalna funkcija oblika (racio1) se može na jedinstven način napisati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija oblika (racio2) i u slučaju da je $m \geq n$, još jednog polinoma stepena $n - m$.

Metoda pomoću koje se može racionalna funkcija predstaviti u obliku zbira elementarnih racionalnih funkcija oblika (racio2) je metoda neodređenih koeficijenata.

4.1 Metod neodređenih koeficijenata

POSTUPAK DEKOMPOZICIJE

Racionalnu funkciju je moguće jedinstveno razložiti na zbir više elementarnih racionalnih funkcija.

Ako je dat racionalna funkcija oblika $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ova metoda se direktno primenjuje kada je $n > m$. U suprotnom prvo je potrebno podeliti ova dva polinoma. Tada se početna racionalna funkcija razlaže na zbir jednog polinom i racionalne funkcije kod koje važi da je $n > m$. Dakle, u nastavku ćemo pretpostavljati da je $n > m$. Već smo govorili o tome da se neki polinom, pa i polinom $Q_n(x)$ može rastaviti na sledeći način:

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_p)^{\alpha_p}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}.$$

gde su $a_1,\ldots,a_p$ realni koreni polinoma $Q_n(x)$, a koreni kvadratnih trinoma $x^2+b_1x+c_1,\ldots,x^2+b_qx+c_q$ su konjugovano--kompleksni brojevi i važi

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_p+2(\beta_1+\ldots+\beta_q)=n.$$

Za racionalnu funkciju $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $(n>m)$, metodom neodredjenih koeficijenata, tada imamo sledeću dekompoziciju:

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\ldots+\frac{A_{p\alpha_p}}{(x-a_p)^{\alpha_p}}+\ldots\\ &+\frac{B_{11}+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\\ &+\ldots+\frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{B_{q1}+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\ldots+\frac{B_{q\beta_q}+C_{q\beta_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}}.\end{aligned}$$

Primenu ove metode ilustrujemo narednim primerima.

PRIMER 1

Metod neodređenih koeficijenata - polinom u imeniocu ima dva realna i različita rešenja.

Rastaviti na elementarne racionalne funkcije, racionalnu funkciju $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$.

Rešenje. Nule polinoma u imeniocu, x^2-1, su $x=1$ i $x=-1$, pa prema prethodnom stavu, datu racionalnu funkciju možemo rastaviti na zbir sledećih parcijalnih razlomaka

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Iz ove jednakosti dobijamo konstante A i B tako što se prvo saberu poslednja dva razlomka

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$$

i brojilac dobijenog razlomka izjednači sa brojiocem početnog (datog) razlomka. Tako dobijamo

$$2=(A+B)x+(A-B),$$

odnosno sistem jednačina

$$\begin{aligned} x &: A+B=0, \\ x^0 &: A-B=2, \end{aligned}$$

sa rešenjima $A=1$ i $B=-1$, što znači da je

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

PRIMER 2

Metod neodređenih koeficijenata - polinom u imeniocu ima tri realna i jednaka rešenja.

Rastaviti na elementarne racionalne funkcije, racionalnu funkciju $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}$.

Rešenje. Broj 1 je trostruka nula imenioca. Zbog toga, data racionalna funkcija se može pisati kao

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}= \\ &= \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C}{(x-1)^3}, \end{aligned}$$

odakle se posle sredjivanja dobija sistem jednačina $A=1,\ -2A+B=0,\ A-B+C=1$,čija su rešenja $A=1,\ B=2$ i $C=2$. Tako dobijamo jednakost:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

PRIMER 3

Metod neodređenih koeficijenata - polinom u imeniocu ima jedno realno i dva konjugovano-kompleksna rešenja.

Rastaviti na elementarne racionalne funkcije, racionalnu funkciju $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}$.

Rešenje. Polinom u imeniocu se može napisati kao $x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$, pa postoje konstante A, B i C takve da važi:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \\ &= \frac{x+1}{(x-2)(x^2+1)} \\ &= \frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Tada je:

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{(A+B)x^2+(C-2B)x+A-2C}{x^3-2x^2+x-2}.$$

Izjednačavanjem brojilaca dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} x^2 &: A+B=0, \\ x &: -2B+C=1, \\ x^0 &: A-2C=1, \end{aligned}$$

odakle je $A = 3/5,\ B = -3/5$ i $C = -1/5$, pa je konačno:

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{3}{5(x-2)} - \frac{3x+1}{5(x^2+1)}.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Metod neodređenih koeficijenata - primeri

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Određivanje polinoma koji je deljiv datim polinomom.

Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da polinom $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ bude deljiv polinomom $Q(x) = x^2 - x + b$.

Rešenje. Deljenjem polinoma $P(x)$ sa $Q(x)$ dobijamo količnik $S(x) = 6x^2 - x + (a - 6b - 1)$ i ostatak $R(x) = (a - 5b + 2)x + 2 - b(a - 6b - 1)$. Da bi polinom $P(x)$ bio deljiv sa $Q(x)$ potrebno je da $R(x)$ bude nula-polinom, odakle dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a - 5b + 2 &= 0, \\ 2 - b(a - 6b - 1) &= 0, \end{aligned}$$

Prethodni sistem rešavamo metodom zamene. Iz prve jednačine sistema imamo da je $a = 5b - 2$. Zamenom ovoga u drugoj jednačini sistema dobijamo

$$2 - b(5b - 2 - 6b - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - b(-b - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 3b + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ b_1 = -2 \vee b_2 = -1.$$

Rešenja datog sistema jednačina su $a_1 = -12, b_1 = -2$ ili $a_2 = -7, b_2 = -1$.

To znači da je polinom $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ bude deljiv polinomom $Q(x) = x^2 - x - 2$, kao i da je polinom $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ deljiv polinomom $Q(x) = x^2 - x - 1$.

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Određivanje ostatka pri deljenju polinoma.

Ako je ostatak deljenja polinoma $P(x)$ stepena $n \geq 2$ binomom $x + 1$ jednak -3, a ostatak deljenja binomom $x - 6$ jednak 4, odrediti ostatak deljenja polinoma $P(x)$ polinomom $(x + 1)(x - 6)$.

Rešenje. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $(x + 1)(x - 6)$ mora biti polinom oblika $R(x) = ax + b$. Tada je

$$P(x) = (x + 1)(x - 6)Q(x) + ax + b, \qquad (*)$$

gde je nepoznati polinom $Q(x)$ stepena $n-2$.

Prema Bezuovom stavu je $P(-1)=-3$ i $P(6)=4$. S druge strane, ako u jednačinu (*) stavimo da je $x=-1$, odnosno $x=6$ dobijamo da je $P(-1)=-a+b$ i $P(6)=6a+b$.

Ukupno, sada dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} -a+b&=-3, \\ 6a+b&=4, \end{aligned}$$

čije je rešenje $a=1$ i $b=-2$. Dakle, traženi ostatak je $R(x)=x-2$.

ZADATAK 3 (10 MINUTA)

Određivanje polinoma koji ima komplesno rešenje i poznat je ostatak pri deljenju polinomom prvog reda.

Odrediti koeficijente $a,b,c\in\mathbb{R}$ tako da polinom $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ bude deljiv polinomom $x+2i$, a pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 5.

Rešenje. Kako $x+2i$ deli polinom $P(x)$, na osnovu Bezuovog stava imamo da je $P(-2i)=0$. Tada imamo da je

$$P(-2i)=0 \Leftrightarrow (-2i)^3+a(-2i)^2+b(-2i)+c=0 \Leftrightarrow 8i+4a-2bi+c=0 \Leftrightarrow 4a \\ +c+(8-2b)i=0$$

Odavde imamo da je $b=4$ i $4a+c=0$.

Kako je ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x-1$ jednak 5, na osnovu Bezuovog stava imamo $P(1)=5 \Leftrightarrow 1+a+4+c=5$,tj. $a+c=0$.

Iz sistema $a+c=0$ i $4a+c=0$ dobijamo da je $a=c=0$.

Polinom $P(x)$, tada glasi

$$P(x)=x^3+4x.$$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Određivanje polinoma koji zadovoljava određene osobine.

Odrediti polinom $P(x)$ petog stepena sa realnim koeficiijentima koji ima trostruku realnu nulu -1, kompleksnu nulu $-2i$ i za koji važi $P(1)=80$.

Rešenje. Po uslovima zadatka imamo da je $x_{1/2/3}=-1$, $x_4=-2i$ i $x_5=2i$. Tada traženi polinom možemo predstaviti, s obzirom da znamo sve njegove nule, na osnovu stava o faktorizaciji polinoma u sledećem obliku:

$$P(x) = a \cdot (x+1)^3 \cdot (x+2i) \cdot (x-2i) = a \cdot (x^3+3x^2+3x+1) \cdot (x^2+4) =$$
$$P(x) = a \cdot (x^5+3x^4+7x^3+13x^3+12x+4).$$

Dakle, potrebno je samo još odrediti koeficijent a. Kako je, po uslovu zadatka, $P(1) = 80$ imamo da je

$$P(1) = a \cdot (1+3+7+13+12+4) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 40a = 80 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$$

Konačno dobijamo da je

$$P(x) = 2x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 26x^3 + 24x + 8.$$

ZADATAK 5 (5 MINUTA)

Određivanje NZD za dva polinoma.

Naći NZD za polinome $x^4 - x^3 - x^2 + 1$i $x^3 - 1$.

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - x^2 + 1 &= (x^3-1)(x-1) + (-x^2+x), \\ x^3 - 1 &= (-x^2+x)(-x-1) + (x-1) \\ -x^2 + x &= (x-1)(-x). \end{aligned}$$

Dakle, imamo da je $NZD(x^4 - x^3 - x^2 + 1, x^3 - 1) = x - 1$.

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Postupak primene Hornerove sheme - rešenja jednaka i celobrojna, a ima i konjugovano-kompleksnih.

Odrediti racionalne nule polinoma $P_5(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$.

Rešenje. U ovom slučaju moguće racionalne nule polinoma su 1 i -1, pa je

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & & x=1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & x=-1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & x=-1 \\ & & & 1 & -1 & 1 & | & 0. & \end{array}$$

Prema tome je

$$P_5(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1 = (x+1)^2(x-1)(x^2-x+1).$$

Posmatrani polinom nema drugih racionalnih nula. Ostale dve nule su konjugovano -- kompleksni brojevi.

ZADATAK 7(15 MINUTA)

Hornerova shema - slučaj kada polinom ima sve racionalne nule.

Odrediti racionalne nule polinoma $P_4(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6.$

Rešenje. Za ovaj polinom posmatramo delitelje broja 6 . To su $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6.$ Delitelji broja 2 su brojevi $\pm1, \pm2,$ pa su moguće racionalne nule datog polinoma

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

Ispitaćemo da li su $x = 1$, $x = 2$ i $x = 3$ nule posmatranog polinoma:

$$\begin{array}{cccccc|cc} 2 & -13 & 28 & -23 & 6 & & & x=1 \\ & 2 & -11 & 17 & -6 & & 0 & x=2 \\ & & 2 & -7 & 3 & & 0 & x=3 \\ & & & 2 & -1 & & 0. & \end{array}$$

Primetimo da je u ovom slučaju Hornerova shema bila primenjena tri puta: prvi put na dati polinom $P_4(x)$ za $x = 1,$ pa za polinom $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ za $x = 2,$ i konačno na polinom $2x^2 - 7x + 3$ za $x = 3.$

Kako je poslednja cifra u drugom, trećem i četvrtom redu $0,$ (tj. odgovarajuće $r = 0$) to znači da su ova tri pretpostavljena broja zaista nule posmatranog polinoma.

Dalje, poslednja vrsta gornje sheme pokazuje da je četvrta nula posmatranog polinoma broj $x = 1/2.$ Znači, važi

$$2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6 = (x-1)(x-2)(x-3)(2x-1).$$

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Hornerova shema - slučaj kada polinom ima jednu racionalnu nulu, a ostale su konjugovano-kompleksne.

Odrediti racionalne nule polinoma $P_7(x) = x^7 + 6x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 4x - 5.$

Rešenje. Moguće racionalne nule polinoma $P_7(x)$ su ±1 i $\pm5,$ pa je

$$\begin{array}{cccccccc|cc} 1 & 0 & 6 & -5 & 9 & -10 & 4 & -5 & & x=1 \\ & 1 & 1 & 7 & 2 & 11 & 1 & 5 & 0 & x=1 \\ & & 1 & 2 & 9 & 11 & 22 & 23 & 28. & \end{array}$$

Znači $x = 1$ je samo jednostruka nula (nije dvostruka), jer je u trećem redu poslednje tablice zadnji broj $28.$ Ostavljamo studentu da pokaže da vrednosti $x = -1$, $x = 5$ i $x = -5$ nisu nule datog polinoma, što znači da drugih racionalnih nula ovaj polinom nema. U stvari, polinom $P_7(x)$ drugih realnih nula i nema i važi sledeća faktorizacija

$$P_7(x) = x^7 + 6x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x^2+x+5)(x^2+1)^2.$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Metod neodređenih koeficijenata - situacija kada treba deliti polinome, polinom u brojiocu ima realna i različita rešenja.

Rastaviti na elementarne racionalne funkcije, racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15}.$$

Rešenje. Stepen brojioca je veći od stepena imenioca, pa se prvo moraju izvršiti sledeće transformacije:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{x^3 - 2x^2 - 15x + 2x^2 + 13x - 35}{x^2 - 2x - 15} = \\ &= \frac{x(x^2 - 2x - 15) + 2x^2 + 13x - 35}{x^2 - 2x - 15} = \\ &= x + \frac{2x^2 + 13x - 35}{x^2 - 2x - 15} = \\ &= x + 2 + \frac{17x - 5}{x^2 - 2x - 15}. \end{aligned}$$

Napomenimo da prethodno izvedene transformacije zapravo predstavljaju deljenje polinoma $x^3 - 2x - 35$ polinomom $x^2 - 2x - 15$.

Dalje je:

$$\frac{17x - 5}{x^2 - 2x - 15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-5)}{x^2 - 2x - 15},$$

odakle se dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} x &: A + B = 17, \\ x^0 &: 3A - 5B = -5 \end{aligned}$$

pa je $A = 10,\ B = 7$. Prema tome je

$$\frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} = x + 2 + \frac{10}{x-5} + \frac{7}{x+3}.$$

ZADATAK 10 (10 MINUTA)

Metod neodređenih koeficijenata - polinom u imeniocu ima četiri realna i različita rešenja.

Rastaviti na elementarne racionalne funkcije, racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{x+3}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Rešenje. Vrednosti $x = 1, x = 2, x = -1$ i $x = -2$ su nule polinoma koji se nalazi u imeniocu, pa je:

$$\frac{x+3}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2},$$

što znači da posle sredjivanja data racionalna funkcija ima oblik:

$$\frac{x+3}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{(A+B+C+D)x^3 + (A-B+2C-2D)x^2}{x^4 - 5x^2 + 4} + \frac{-(4A+4B+C+D)x - 4A + 4B - 2C + 2D}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Na osnovu toga se dobija sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x^3 &: A+B+C+D = 0, \\ x^2 &: A-B+2C-2D = 0, \\ x &: -(4A+4B+C+D) = 1, \\ x^0 &: -4A+4B-2C+2D = 3. \end{aligned}$$

sa rešenjima $A = -2/3, B = 1/3, C = 5/12$ i $D = -1/12.$

Prema tome, može se pisati

$$\frac{x+3}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{-2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{12(x-2)} - \frac{1}{12(x+2)}.$$

ZADATAK 11 (15 MINUTA)

Metod neodređenih koeficijenata - polinom u imeniocu ima četiri realna rešenja i to dve dvostruke nule.

Rastaviti na elementarne racionalne funkcije, racionalnu funkciju $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}.$

Rešenje. U ovom slučaju su vrednosti $x = 1$ i $x = 2$ dvostruke nule polinoma koji se nalazi u imeniocu, pa se može pisati

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{(A+C)x^3+(-5A+B-4C+D)x^2}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} + \\ &+ \frac{(8A-4B+5C-2D)x}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} + \\ &+ \frac{-4A+4B-2C+D}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}.\end{aligned}$$

Odavde se dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} x^3 &: A+C=0,\\ x^2 &: -5A+B-4C+D=2,\\ x &: 8A-4B+5C-2D=-4,\\ x^0 &: -4A+4B-2C+D=3.\end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su $A=2, B=1, C=-2$ i $D=3$, pa imamo:

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} = \frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}.$$

ZADATAK 12 (15 MIINUTA)

Određivanje koeficijenata jednačine, ako su poznata njena rešenja, primenom Vijetovih formula.

Odrediti bar jednu jednačinu

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0, \quad a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R},\ (a_3\neq 0)$$

čija su rešenja

$$x_1 = -\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right)$$

i

$$x_{2/3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right)$$

Rešenje. Najpre, možemo polaznu jednačnu napisati u obliku

$$x^3+\frac{a_2}{a_3}x^2+\frac{a_1}{a_3}x+\frac{a_0}{a_3}=0,\ (a_3\neq 0).$$

Iz Vietovih formula za kubnu jednačinu imamo da je

$$x_1+x_2+x_3=0=-\frac{a_2}{a_3} \ \Rightarrow\ a_2=0.$$

Dalje, dobija se da je

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -8, \quad \text{(pokazati za vežbu)}.$$

Takodje, važi da je

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1\underbrace{(x_2 + x_3)}_{-x_1} + x_2x_3 = -x_1^2 + x_2x_3,$$

jer iz $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,važi da je $x_2 + x_3 = -x_1$.Dalje je

$$-x_1^2 + x_2x_3 = -6 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \text{(pokazati za vežbu)}.$$

Dakle, iz

$$-\frac{a_0}{a_3} = -8 \quad \text{i} \quad \frac{a_1}{a_3} = -6,$$

za $a_3 = 1$ dobijamo da je $a_1 = -6$ i $a_0 = 8$, tako da jedna od mogućih traženih algebarskih jednačina trećeg stepena glasi

$$x^3 - 6x + 8 = 0.$$

Napomena. Svakako, postoji beskonačno mnogo algebarskih jednačina trećeg stepena čija su rešenja date vrednosti, s obzirom da je $a_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Poglavlje 6

Zadaci za samostalni rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju radi utvrđivanja gradiva.

Zadatak 1. Dat je polinom $P(x)=3x^4+px^3+qx^2+4x-2 (p;q\in\mathbb{R})$. Odrediti p i q tako da je $x_1=1+i$ jedna nula polinoma $P(x)$.
Rezultat. $p=-3, q=3.$

Zadatak 2. Odrediti $a\in\mathbb{R}$ tako da za polinom

$$P(x)=x^3+ax^2-11x+5$$

važi da je $x_1\cdot x_2=-1,$ a zatim predstaviti $P(x)$ u faktorisanom obliku.
Rezultat. $a=-3.$

Zadatak 3. Odrediti polinom $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ čije su nule $x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3,$ gde su x_1, x_2 i x_3 nule polinoma $Q(x)=x^3-2x^2-3.$
Rezultat. $P(x)=x^3-4x^2+4x+3.$

Vreme izrade:

Zadatak 1. 15 minuta

Zadatak 2. 15 minuta

Zadatak 3. 15 minuta

Odgledati video materijale u nastavku - ukupna dužina trajanja je oko 50 minuta. U njima ćete videti kako je rešavanje algebarskih jednačina dovelo do uvođenja kompleksnih brojeva.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: uvod o kompleksnim brojevima.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: istorijski pregled.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 3

Snimak sa Youtube-a: Kardanov problem.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 4

Snimak sa Youtube-a: Bombelijevo rešenje.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 5

Snimak sa Youtube-a: brojevi su dvodimenzionalni.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 6

Snimak sa Youtube-a: kompleksna ravan.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 7

Snimak sa Youtube-a: kompleksno množenje.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 8

Snimak sa Youtube-a: matematička čarolija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 9

Snimak sa Youtube-a: priča o svim brojevima.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 10

Snimak sa Youtube-a: uvod u kompleksne funkcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Zaključak

ZAKLJUČAK

Polinomi i racionalne funkcije.

U ovoj lekciji smo obraditi polinome jedne nezavisno promenljive koji predstavljaju funkcije koje se izgrađuju od stepenih funkcija i konstanti primenom operacija sabiranja i množenja na njih.

Racionalne funkcije predstavljaju količnik dva polinoma. Veoma važna metoda za rastavljanje racionalnih funkcija jeste metod neodređenih koeficijenata. Njega ćemo koristiti kada budemo učili integralni račun.

Literatura (nastavni materijal):

Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
M.Petrović, Osnovi nastave matematike (Matematička logika, Skupovi, Algebarske strukture, Realni brojevi), Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, Učiteljski fakultet, Jagodina, 1998.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.