UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Uzajamni položaj prave i ravni. Ortogonalne projekcije

Lekcija 15

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 15

UZAJAMNI POLOŽAJ PRAVE I RAVNI. ORTOGONALNE PROJEKCIJE

Uvod

ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\mathbb{E}^3$

Uzajamni odnos prave i ravni, ortogonalna projecija tačke u ravan, ortogonalna projekcija tačke na pravu, ortogonalna projekcija preve u ravan.

Kao što smo i ranije naglasili, izučavamo analitičku geometriju u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa uočenom kananskom bazom i uočenim euklidskim skalarnim proizvodom, tj. u prostoru $\mathbb{E}^3$.

U ovoj lekciji ćemo se baviti uzajamnim odnosom prave i ravni, kao ortogonalnom projekcijom tačke u ravan, tačke na pravu, kao i prave u ravan.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Uzajamni položaj prave i ravni

USLOVI DA PRAVA I RAVAN BUDU PARALELNE. PRIMER

Prava i ravan su paralelne ako je vektor pravca prave normalan na vektor normale ravni i ako nijedna tačka te prave ne pripada posmatranoj ravni.

Neka su dati prava $p: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\pi: Ax+By+Cz+D=0,$gde je $P(x_0, y_0, z_0)$ tačka sa prave p, $\vec{p}=(l,m,n)$ vektor pravca prave p, a $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale ravni π.

Prava p je paralelna ravni π ako je vektor normale $\vec{n}$ ravni π normalan na vektor pravca $\vec{p}$ prave p i ako nijedna tačka sa prave p ne pripada ravni π, tj.

$$\vec{n} \circ \vec{p} = 0 \quad \text{i} \quad P \notin p,$$

tj.

$$A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0 \quad \text{i} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

Primer. Da li su prava $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z+2}{5}$ i ravan $\pi: -5x+2y+2z+13=0$ paralelne?

Rešenje. Jedna tačka sa prave p je $P(1,3-2)$, vektor pravca te prave je $\vec{p}=(2,0,5)$ i vektor normale ravni π je i $\vec{n}=(-5,2,2)$. Tada je

$$\vec{n} \circ \vec{p} = 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 0.$$

Takođe, važi da je

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = -5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 13 = 10 \neq 0.$$

Zaključujemo da su prava p i ravan π paralelne.

USLOVI DA SE PRAVA SADRŽI U RAVNI. PRIMER

Prava se sadrži u ravni ako je vektor pravca prave normalan na vektor normale ravni i ako sve tačke te prave pripadaju posmatranoj ravni.

Neka su dati prava $p: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, gde je $P(x_0,y_0,z_0)$ tačka sa prave p, $\vec{p}=(l,m,n)$ vektor pravca prave p, a $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale ravni π.

Prava p se sadrži u ravni π ako je vektor normale $\vec{n}$ ravni π normalan na vektor pravca $\vec{p}$ prave p i ako svaka tačka sa prave p pripada ravni π, tj.

$$\vec{n}\circ\vec{p}=0 \quad \text{i} \quad P\in p,$$

tj.

$$A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n = 0 \quad \text{i} \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Primer. Da li se prava $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z+2}{5}$ sadrži u ravni $\pi: -5x+2y+2z+3=0$?

Rešenje. Jedna tačka sa prave p je $P(1,3-2)$, vektor pravca te prave je $\vec{p}=(2,0,5)$ i vektor normale ravni π je i $\vec{n}=(-5,2,2)$. Tada je

$$\vec{n}\circ\vec{p} = 2\cdot(-5)+0\cdot 2+5\cdot 2 = 0.$$

Takođe, važi da je

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D = -5\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot(-2)+3=0.$$

Zaključujemo da se prava p sadrži u ravni π.

USLOV DA PRAVA PRODIRE RAVAN. ODREĐIVANJE PRODORNE TAČKE

Prava prodire ravan ako vektor pravca te prave nije normalan na vektor normale ravni.

Neka su dati prava $p: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, gde je $\vec{p}=(l,m,n)$ vektor pravca prave p i $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale ravni π.

Prava p prodire ravan π ako vektor normale $\vec{n}$ ravni π nije normalan na vektor pravca $\vec{p}$ prave p, tj.

$$\vec{n}\circ\vec{p}\neq 0, \qquad \text{tj.} \qquad A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n\neq 0.$$

Tada se može postaviti pitanje određivanja prodorne tačke date prave kroz datu ravan. Ako se sa $A(x_A,y_A,z_A)$ označi prodorna tačka, tada treba odrediti njene koordinate. Tačka A pripada pravoj p i ravni π, jer je njihov presek. Kako tačka A pripada pravoj p ona zadovoljava jednačinu te prave, pa važi

$$\frac{x_A-x_0}{l} = \frac{y_A-y_0}{m} = \frac{z_A-z_0}{n} = t \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_A &= l\cdot t + x_0, \\ y_A &= m\cdot t + y_0, \\ z_A &= n\cdot t + z_0, \end{aligned}\right\} t\in\mathbb{R}$$

gde je t nepoznata veličina koju treba odrediti. Kada bude određena, ta ćemo znati i koordinate tačke A. Veličina t se određuje iz uslova da tačka A pripada ravni π. tj. njene koordinate date sa prethodnim jednačinama zadovoljavaju jednačinu ravni π. Dakle,

$$Ax_A + By_A + Cz_A + D = 0 \quad \Rightarrow \quad A(l \cdot t + x_0) + B(m \cdot t + y_0) + C(n \cdot t + z_0) + D = 0 \quad Ax + By + Cz + D + t(Al + Bm + Cn) = 0.$$

Izražavanjem veličine t odavde imamo da je

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

PRIMER

Određivanje prodora prave kroz ravan i određivanje prodorne tačke.

Primer. Dokazati da prava $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ prodire ravan $\pi : 2x + 3y - z + 13 = 0$. Odrediti tačku A koja je prodor prave p kroz ravan α.

Rešenje. Vektor pravca prave p je $\vec{p} = (1, 3, 1)$, a $\vec{n} = \left(2, 3, -1\right)$ vektor normale ravni π. Kako je

$$\vec{n} \circ \vec{p} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 10 \neq 0,$$

Zaključujemo da prava p prodire ravan π.

Da bismo odredili tačku prodora, potrebno je preći na parametarski oblik jednačine prave

$$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} = t \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} x = t + 2 \\ y = 3t + 2 \\ z = t + 3 \end{array}\right\}, t \in \mathbb{R} \setminus .$$

Svaka tačka sa prave p, pa i tačka tražena tačka A ima ove koordinate, tj . A($t + 2, 3t + 2, t + 3$). Kako tačka A pripada i ravni, π, ona zadovoljava jednačinu te ravni, pa važi da je:

$$2(t + 2) + 3(3t + 2) - (t + 3) + 13 = 0 \Longrightarrow 10t = -20 \Longrightarrow t = -2.$$

Tada tačka A ima koordinate A($0, -4, 1$).

AUTORSKI VIDEO KLIP

Prodor prave kroz ravan.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

UGAO IZMEĐU PRAVE I RAVNI

Formula za određivanje ugla između prave i ravni.

Ugao između prave p i ravni π je ugao između te prave i njene ortogonalne prokcije na tu ravan. Ako se sa θ označi traženi ugao, tada je ugao između vektora normale ravni π i vektora pravca prave $\vec{p}$ jednak $\frac{\pi}{2}-\theta$. Tada je

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\vec{n}\circ\vec{p}}{||\vec{n}||\cdot||\vec{p}||} = \frac{A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Specijalno, ako je prava p ortogonalna na ravan π, tada su vektor pravca prave p i vektor normale ravni π kolinearni. Dakle, uslov ortogonalnosti glasi

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

Poglavlje 2

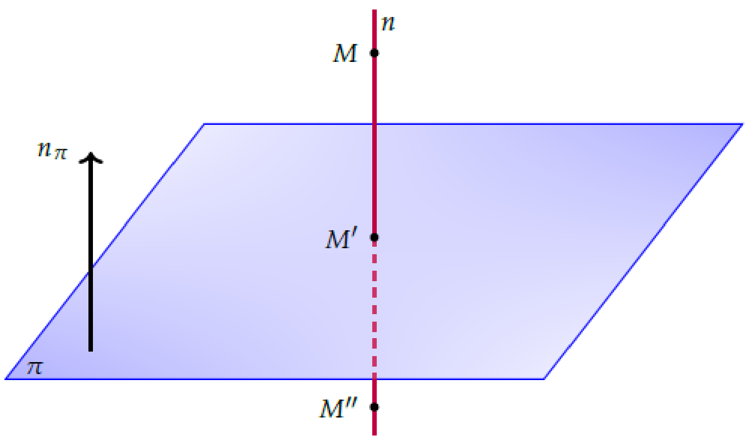
Ortogonalna projekcija tačke u ravan

ORTOGONALNA PROJEKCIJE DATE TAČKE U DATU RAVAN. SIMETRIČNA TAČKA DATOJ U ODNOSU NA DATU RAVAN.

Ortogonalna projekcija date tačke na datu ravan je tačka M' u kojoj normala iz tačke na ravan prodire ovu ravan.

Ortogonalana projekcija je metoda putem koje se geometrijski objekti u prostoru predstavljaju odgovarajućom slikom u ravni. Sve tačke objekta u prostoru se ortogonalno (pod pravim uglom) projektuju na jednu ravan.

Ortogonalna projekcija date tačke $M(x_M, y_M, z_M)$ na datu ravan $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$je tačka M' u kojoj normala n iz tačke M na ravan π prodire ovu ravan (slika 1). Odredimo koordinate tačke M'.



Slika 2.1 Projekcija tačke u ravan, kao i njena simetrična tačka u odnosu na tu ravan (Izvor: Autor).

Odredimo najpre jednačinu normale n. Važi da je vektor pravca normale $\vec{n}$ kolinearan sa vektorom normale $\overrightarrow{n_\pi} = (A, B, C)$, tj. $\vec{n} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_\pi}$, za $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako stavimo da je $\lambda = 1$, tada je $\vec{n} = (A, B, C)$. Kako $M \in n$, tada jednačina normale glasi

$$n : \frac{x - x_M}{A} = \frac{y - y_M}{B} = \frac{z - z_M}{C}.$$

Kako je M' prodorna tačka prave n kroz ravan π i treba primeniti ranije opisani postupak za njeno određivanje.

U vezi sa ovom problematikom može se javiti pitanje i određivanje tačke M'' koja je simetrična tački M u odnosu na ravan π. To je tačka, koja se nalazi na normali n na istoj udaljenosti od ravni π, kao i tačka M, samo sa druge strane ove ravni u odnosu na tačku M. Dakle, tačka M' je središte duži $\overline{MM''}$. Ako su koordinate tačke $M'(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'})$, tada koordinate tačke M'' glase

$$x_{M''} = 2x_{M'} - x_M,\ y_{M''} = 2y_{M'} - y_M,\ z_{M''} = 2z_{M'} - z_M.$$

PRIMER

Određivanje simetrične tačke, datoj tački, u odnosu na datu ravan.

Odrediti simetričnu tačku, Q, tački $P(5, 2, -1)$ u odnosu na ravan $\alpha: 2x - y + 3z + 23 = 0$.

Rešenje. Kako bismo našli tačku Q potrebno je kroz tačku P postaviti normalu p na ravan α i odrediti prodornu tačku S normale kroz ovu ravan. Tačka S je središte duži PQ i koordinate tačke Q će se određivati iz formule za određivanje koordinata središta duži.

Jednačina normale kroz tačku P na ravan α ima vektor pravca koji je kolinearan sa vektorom normale ravni α. Tada imamo da je, $\vec{p} = \lambda \vec{n_\alpha}$, pa za $\lambda = 1$ imamo da $\vec{p} = (2, -1, 3)$. Tada jednačina normale glasi:

$$p: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Sada ćemo naći koordinate tačke S. Zbog toga ćemo preći na parametarski oblik jednačine prave p:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 2t+5 \\ y & = & -t+2 \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right\}, t \in \mathbb{R}.$$

Kako tačka S pripada pravoj p tada važi $S(2t+5, -t+2, 3t-1)$. Kako ova tačka pripada i ravni α, ona zadovoljava njenu jednačinu, tj. $2(2t+5) - (-t+2) + 3(3t-1) + 23 = 0$, tj. imamo da je $t = -2$, pa su koordinate tačke $S(1, 4, -7)$.

Važi da je:

$$x_S = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_S = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_S = \frac{z_P + z_Q}{2}.$$

Tada je:

$$x_Q = 2x_S - x_P = 2 \cdot 1 - 5 = -3, \quad y_Q = 2y_S - y_P = 2 \cdot 4 - 2 = 6, \quad z_Q = 2z_S - z_P = 2 \cdot (-7) - (-1) = -13.$$

pa je $Q(-3, 6, -13)$.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Simetrična tačka datoj tački u odnosu na datu ravan.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Ortogonalna projekcija tačke na pravu

ORTOGONALNA PROJEKCIJA TAČKE NA PRAVU. SIMETRIČNA TAČKA DATOJ U ODNOSU NA DATU PRAVU

Ortogonalna projekcija date tačke na datu pravu je tačka u kojoj ta prava prodore ravan koja sadrži datu tačku i normalna je na nju.

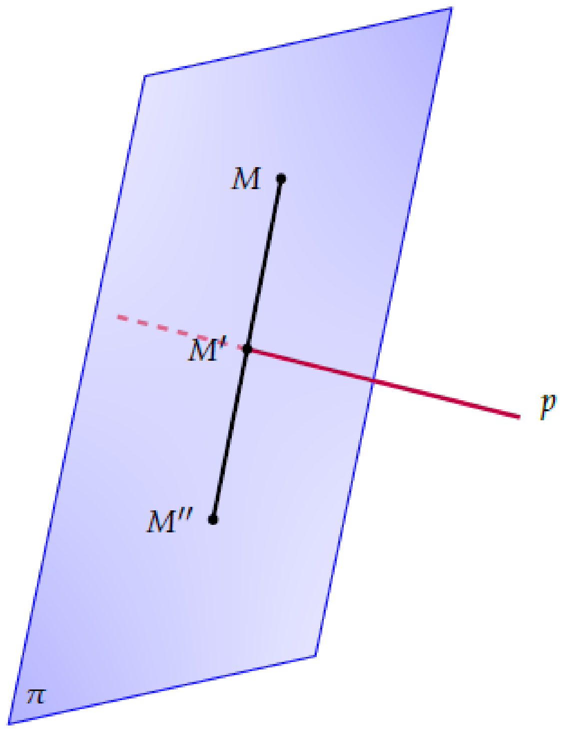
Ortogonalna projekcija date tačke $M(x_M, y_M, z_M)$ na datu pravu $p: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ je tačka M' u kojoj prava p prodore ravan π koja sadrži tačku M i normalna je na nju (slika 1). Da bismo odredili koordinate tačke M' potrebno je najpre odrediti jednačinu ravni π. Kako je prava p normalna na ravan π, tada je njen vektor pravca $\vec{p} = (l, m, n)$ kolinearan sa vektorom normale $\vec{n}_\pi$ ravni π, pa možemo uzeti da je $\vec{n}_\pi = \vec{p} = (l, m, n)$. Kako $M \in \pi$, tada je

$$\pi : l \cdot (x - x_M) + m \cdot (y - y_M) + n \cdot (z - z_0) = 0 \quad \text{tj.} \quad \pi : lx + my + nz + D = 0,$$

gde je $D = -l \cdot x_M - m \cdot y_M - n \cdot z_M$Kako je M' prodorna tačka prave p kroz ravan π i treba primeniti ranije opisani postupak za njeno određivanje.

U vezi sa ovom problematikom može se javiti pitanje i određivanje tačke M'' koja je simetrična tački M u odnosu na pravu p. To je tačka, koja se nalazi u ravni π na istoj udaljenosti od prave p, kao i tačka M, samo sa druge strane ove prave u odnosu na tačku M. Dakle, tačka M' je središte duži $\overline{MM''}$. Ako su koordinate tačke $M'(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'})$, tada koordinate tačke M'' glase

$$x_{M''} = 2x_{M'} - x_M, \; y_{M''} = 2y_{M'} - y_M, \; z_{M''} = 2z_{M'} - z_M.$$



Slika 3.1 Ortogonalna projekcija tačke na pravu. Simetrična tačka u odnosu na pravu (Izvor: Autor).

PRIMER

Određivanje simetrične tačke, datoj tački, u odnosu na datu pravu.

Odrediti simetričnu tačku, Q, tački $P(2,\ -1,3)$ u odnosu na pravu p datu u parametarskom obliku $\left.\begin{array}{lcc} x & = & 3t \\ y & = & 5t-7 \\ z & = & 2t+2 \end{array}\right\},\ t\in\mathbb{R}.$

Rešenje. Kako bismo našli tačku Q potrebno je kroz tačku P postaviti ravan α normalnu na pravu p i odrediti prodornu tačku S prave p kroz ovu ravan. Tačka S je središte duži PQ i koordinate tačke Q će se određivati iz formule za određivanje koordinata središta duži.

Jednačina ravni α kroz tačku P na pravu p ima vektor normale koji je kolinearan sa vektorom pravca prave, p, koji glasi $\vec{p}=(3,5,2)$. Tada imamo da je, $\vec{n_\alpha}=\lambda\cdot\vec{p}$, pa za $\lambda=1$ imamo da $\vec{n_\alpha}=(3,5,2)$. Tada jednačina ravni α glasi:

$\alpha: 3(x-2)+5(y+1)+2(z-3)=0,$ tj. $\alpha: 3x+5y+2z-7=0$

Sada ćemo naći koordinate tačke S. Kako tačka S pripada pravoj p tada važi $S(3t,5t-7,\ 2t+2)$. Kako ova tačka pripada i ravni α, ona zadovoljava njenu jednačinu, tj $3(3t)+5(5t-7)+2(2t+2)-7=0$, tj. imamo da je $t=1$, pa su koordinate tačke $S(3,\ -2,4)$.

Važi da je:

$x_S = \frac{x_P + x_Q}{2}$, $y_S = \frac{y_P + y_Q}{2}$, $z_S = \frac{z_P + z_Q}{2}$.

Tada je:

$x_Q = 2x_S - x_P = 2 \cdot 3 - 2 = 4,\quad y_Q = 2y_S - y_P = 2 \cdot (-2) + 1 = -3,\quad z_Q = 2z_S - z_P = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$

pa je $Q(4, -3, 5)$.

Poglavlje 4

Ortogonalna projekcija prave u ravan

ORTOGONALNA PROJEKCIJA PRAVE U RAVAN SA KOJOM JE PARALELNA. SIMETRIČNA PRAVA DATOJ PRAVI U ODNOSU NA DATU RAVAN

Ortogonalna projekcija prave u ravan je prava koja se dobija kao presek date ravni i ravni koja je na nju normalna, a u kojoj se data prava sadrži.

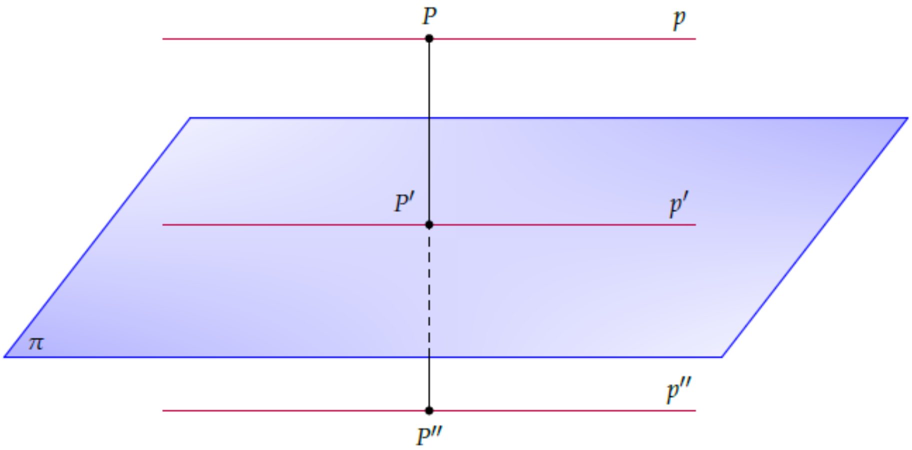
Ortogonalna projekcija prave u ravan je prava koja se dobija kao presek date ravni i ravni koja je na nju normalna, a u kojoj se data prava sadrži. Prilikom određivanje ove ortogonalne projekcije, mogu se razlikovati dva slučaja - da je prava paralelna sa ravni u koju se projektuje, ili da je prodire. Najpre ćemo razmotriti prvi slučaj.

Neka su dati prava $p: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\pi: Ax+By+Cz+D=0,$gde je $P(x_0,y_0,z_0)$ tačka sa prave p, $\vec{p}=(l,m,n)$ vektor pravca prave p, a $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale ravni π. Prava p je paralelna ravni π ako je ispunjeno

$$A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0 \quad \text{i} \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.$$

Označimo traženu pravu sa p'. U ovom slučaju je vektor pravca prave p' kolinearan, tj. isti kao i vektor pravca prave p. Dakle, da bismo odredili ortogonalnu projekciju prave p treba u ovom slučaju odrediti ortogonalnu projekciju jedne tačke s nje u datu ravan o čemu smo već govorili. To može da bude tačka P čije koordinate već poznajemo iz kanonskog oblika jednačine prave.

U vezi sa ovom problematikom može se postaviti pitanje i određivanje simetrične prave pravoj p , u odnosu na ravan π. U ovom slučaju dovoljno je naći tačku koja je simetrična tački P u odnosu na ravan π, jer tražena prava ima vektor pravca koji je kolinearan vektoru pravca prave p.



Slika 4.1 Ortogonalna projekcija prave u ravan. Simetrična prava u odnosu na ravan (Izvor: Autor).

ORTOGONALNA PROJEKCIJA PRAVE U RAVAN KOJU PRODIRE. SIMETRIČNA PRAVA DATOJ PRAVI U ODNOSU NA DATU RAVAN

U slučaju ortogonalne projekcije prave koja prodire ravan, tada je potrebno s te prave izabrati dve tačke i ortogonalno ih projektovati ravan.

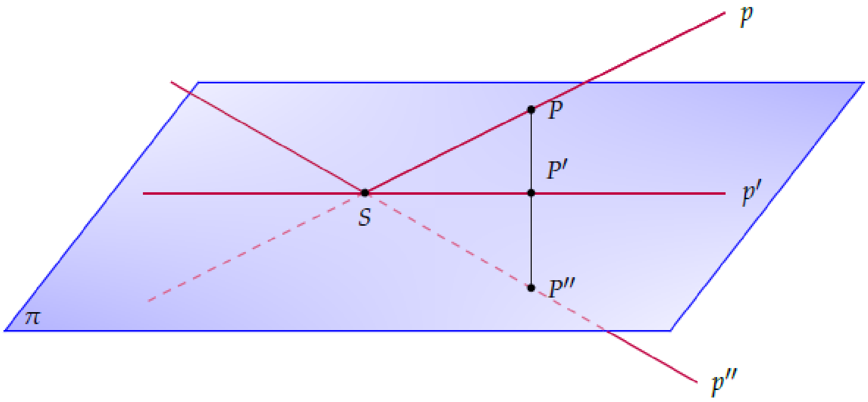
Razmotrimo sada slučaj da prava prodire ravan. Neka su dati prava $p: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, gde je $P(x_0,y_0,z_0)$ tačka sa prave p, $\vec{p}=(l,m,n)$ vektor pravca prave p, a $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale ravni π. Prava p prodire ravan π ako je ispunjeno

$$A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n \neq 0.$$

Da bismo odredili pravu koja je ortogonalna projekcija prave p, u oznaci p', treba ortogonalno projektovati dve tačke s nje u datu ravan. O tome kako se ovo radi već smo govorili. Ove tačke se mogu dobiti prelaskom na parametarski oblik jednačine prave p i dodeljivanjem parametru $t \in \mathbb{R}$ dve proizvoljne vrednosti.

Napomena. Jedna od tačaka koja se projektuje može da bude i tačka P čije koordinate već poznajemo iz kanonskog oblika jednačine prave. Druga tačka može da bude prodorna tačka prave p kroz ravan π, u oznaci S. Ta tačka pripada, kako ravni π, tako i pravoj p' , pa u ovom slučaju nema ortogonalnog projektovanja.

U vezi sa ovom problematikom može se postaviti pitanje i određivanje simetrične prave pravoj p , u odnosu na ravan π, u oznaci p''. U ovom slučaju dovoljno bi bilo naći tačku koja je simetrična tački P u odnosu na ravan π i iskoristiti tačku S, koja takođe pripada pravoj p''. Koristeći jednačinu prave kroz dve tačke, možemo dobiti jednačinu prave p''. Specijalno, može se desiti da se prilikom zadavanja prave p tačka $P(x_0,y_0,z_0)$ bude ujedno i prodorna tačka prave p kroz ravan π. Tada se prelaskom na parametarski oblik jednačine prave p može generisati još jedna tačka te prave.



Slika 4.2 Ortogonalna projekcija prave u ravan. Simetrična prava u odnosu na ravan (Izvor: Autor).

PRIMER

Simetrična prava, datoj pravoj, u odnosi na datu ravan.

U odnosu na ravan $\alpha: x+y+2z-7=0$ naći simetričnu pravu pravoj $p: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Rešenje. Proverimo najpre uzajamni odnos između prave p i ravni π. Kako je $\vec{p}=(-1,-1,1)$, $P(-1,2,0)$ i $\vec{n}_\pi=(1,1,2)$, tada je

$$(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 2=0 \quad \text{i} \quad 1\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 0\neq 0,$$

pa prava p je paralelna ravni π. Da bismo odredili, simetričnu pravu, pravoj p, u oznaci p'', potrebno je uzeti jednu tačku sa prave p, na primer $P(-1,2,0)$ i naći joj simetričnu tačku u odnosu na ravan π. Prvo odredimo ortogonalnu projekciju tačke P u ravan π. Da bismo to uradili odredimo jednačinu normale n na ravan π, kojoj pripada tačka P. Tada je

$$n: \frac{x-x_P}{A}=\frac{y-y_P}{B}=\frac{z-z_P}{C}, \quad \text{tj.} \quad n: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}=t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Pređimo na parametarski oblik jednačine prave n. Tada je

$$n: \begin{cases} x=t-1, \\ y=t+2, \\ z=2t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Odredimo njen prodor kroz ravan π.

Tada je

$$(t-1)+(t+2)+2\cdot(2t)-7=0 \quad \text{tj.} \quad t=1.$$

Ortogonalna projekcija tačke P u ravni π je tačka P' čije koordinate dobijamo kada u parametarski oblik jednačine n ubacimo da je $t=1$. Tada je $P'(0,3,2)$. Odredimo, sada koordinate tačke P'' koja je simetrična tački P u odnosu na ravan π. Naime, tačka P' je središte duži PP''. Tada je

$$x_{P''} = 2x_{P'} - x_P = 1,\ y_{P''} = 2y_{P'} - y_P = 4,\ z_{P''} = 2z_{P'} - z_P = 4.$$

Tražena prava p'' će imati kolinearan (tj. isti) vektor pravca sa vektorom pravca date prave p. Konačno, jednačina prave p'' glasi

$$p'' : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{1}.$$

Poglavlje 5

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (5 MINUTA)

Uslov ortogonalnosti prave i ravni.

Odrediti realne parametre A i B u ravni $Ax + By + 2z - 1 = 0$ tako da bude normalna na pravu $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Rešenje. Iz uslova normalnosti prave i ravni dobijamo jednačinu:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{2}{-1}.$$

Iz jednakosti $\dfrac{A}{1} = \dfrac{2}{-1}$ dobijamo da je $A = -2$. Iz jednakosti $\dfrac{B}{2} = \dfrac{2}{-1}$ dobijamo da je $B = -4$. Jednačina tražene ravni glasi

$$-2x - 4y + 2z - 1 = 0.$$

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Ravan određena pravom i tačkom van nje.

Napisati jednačinu ravni π koja sadrži tačku $M_1(-3, 1, 4)$ i pravu $p : \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

Rešenje. Da bismo odredili jednačinu ravni π, potrebno je odrediti vektor normale $\overrightarrow{n_\pi}$. Stoga ćemo uočiti vektor pravca prave p, tj. $\vec{p} = (0, -1, 3)$. Takođe, uočimo i jednu tačku prave p, tj. $P(1, -1, 2)$. Fromirajmo sada vektor $\overrightarrow{PM_1} = (-4, 2, 2)$. Kako $\overrightarrow{PM_1} \subset \pi$ i $\vec{p} \subset \pi$, tada je $\overrightarrow{n_\pi} = \lambda\left(\overrightarrow{PM_1} \times \vec{p}\right)$, za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj.

$$\overrightarrow{n_\pi} = \lambda\left(\overrightarrow{PM_1} \times \vec{p}\right) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(6\vec{i} + 4\vec{k} + 2\vec{i} + 12\vec{j}) = \lambda(8, 12, 4).$$

Ako uzmemo da je $\lambda = \dfrac{1}{4}$, tada je $\overrightarrow{n_\pi} = (2, 3, 1)$. Tada je jednačina ravni π jednaka

$$\pi : 2(x+3) + 3(y-1) + (z-4) = 0, \quad \text{tj.} \quad \pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

Napomena. Ovaj zadatak se može rešiti i na još nekoliko načine. Na primer, sa prave p se mogu odabrati dve tačke i odrediti jednačinu ravni π kroz tri nekolinearne tačke (treća tačka je M_1).

Napomena. Mi smo u dosadašnjem izlaganju u vezi sa analitičkom geometrijom u ravni, ukazali na to kako se sve može dobiti analitički zapis jednačine ravni, a shodno poznatim aksiomama i teorema iz geometrije. Ovde smo pokazali da ovo može uraditi i u slučaju kada je poznata pravom i tačka van nje.

ZADATAK 3 (15 MINUTA)

Određivanje prodorne tačke prave kroz ravan.

Odrediti prodornu tačku prave $p:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-3}$,i sledećih ravni

a) $\alpha: x-y+2z-3=0,$

b) $\beta: x-y-z-1=0,$

c) $\gamma: x-y-z=0.$

$\mathbf{Rešenje.}$a) Jednačina prave p u parametarskom obliku glasi

$$p:\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-1, \\ z=-t+2, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Dakle, svaka tačka ove prave, pa i prodorna tačka imaju korodinate $(2t+1,3t-1,-t+2), t\in\mathbb{R}.$ Zamenom ovih vrednosti u jednačini ravni α dobijamo

$$(2t+1)-(3t-1)+2(-t+2)-3=0,\ \text{tj. } t=1.$$

Prodorna tačka prave p kroz ravan α glasi $(3,2,1)$.
b) Kao i u prethodnom slučaju, zamenimo odgovorajućih parametarskih jednačina date prave u jednačini ravni, imamo da je

$$(2t+1)-(3t-1)-(-t+2)-1=0,\ \text{tj. } o\cdot t=1,$$

što je kontradikcija. Ovo znači da prodorna tačka prave p i ravni β ne postoji. Odavde možemo zaključiti da je prava p paralelna ravni β.

c) U ovom slučaju, zamenom odgovorajućih parametarskih jednačina prave p u jednačini ravni γ, dobijamo da je

$$(2t+1)-(3t-1)-(-t+2)=0,\ \text{tj. } o\cdot t=0,$$

što je ispunjeno za svako $t\in\mathbb{R}$. Odavde možemo zaključiti da se prava p sadrži u ravni γ, jer je svaka tačka te prave ujedno i tačka koja pripada ravni γ.

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Određivanje ugla između prave i ravni.

Odrediti ugao uzmeđu prave $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{\sqrt{6}}$ i ravni $\pi : x - y + 2z - 3 = 0.$

Rešenje. Ugao između prave p i ravni π je ugao između te prave i njene ortogonalne prokcije na tu ravan. Ako sa θ označimo traženi ugao, tada je ugao između vektora normale ravni π i vektora pravca prave $\vec{p}$ jednak $\frac{\pi}{2} - \theta$. Tada je

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overrightarrow{n_\pi} \circ \vec{p}}{||\vec{n}|| \cdot ||\vec{p}||} = \frac{A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

U našem slučaju je $\vec{p} = (1, 1, \sqrt{6})$ i $\overrightarrow{n_\pi} = (1, -1, 2)$. Tada je

$$\sin\theta = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{6})^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Konačno, dobijamo da je $\theta = \frac{\pi}{4}$.

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Određivanje simetrične tačke datoj, u odnosu na datu pravu.

Date su tačke $A(-1, -1, 1)$, $B(-1, 0, 2)$ i $C(2, -1, 5)$. Odrediti tačku C_1 koja je simetrična tački C u odnosu na pravu određenu tačkama A i B.

Rešenje. Odredimo, najpre, jednačinu prave određene tačkama $A(-1, -1, 1)$, $B(-1, 0, 2)$. Tada je

$$AB : \frac{x+1}{-1+1} = \frac{y-0}{-1-0} = \frac{z-2}{1-2} \quad \text{tj.} \quad AB : \frac{x+1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Odredimo sada projekciju tačke C na pravu AB. Označimo je sa C'. Na predavanjima je pokazano kako se koordinate tačke C' mogu naći određivanjem ravni koja sadrži tačku C i normalna je na pravu AB. Ovde ćemo pokazati još jedna način. Pređimo, najpre, na parametarski oblik jednačine prave AB. Tada je

$$AB : \begin{cases} x = -1, \\ y = -t, \\ z = -t + 2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Naime, kako tačka $C' \in AB$, tada ona koordinate $C'(-1, -t, t+2)$, za neko $t \in \mathbb{R}$. Takođe, važi da je $\overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{AB}$, pa je $\overrightarrow{CC'} \circ \overrightarrow{AB} = 0$. Kako je $\overrightarrow{AB} = (0, -1, -1)$ i $\overrightarrow{CC'} = (-3, -t + 1, -t - 3)$ tada važi

$$(-3, -t+1, -t-3) \circ (0, -1, -1) = 0 \quad \text{tj.} \quad t = -1.$$

Tada je $C'(-1, 1, 3)$.

Odredimo, sada, koordinate tačke C_1. Tada je

$$\begin{aligned} x_{C_1} &= 2x_{C'} - x_C = -2 - 2 = -4, \\ y_{C_1} &= 2y_{C'} - y_C = 2 + 1 = 3, \\ z_{C_1} &= 2z_{C'} - z_C = 6 - 5 = 1. \end{aligned}$$

Dakle, važi da je $C_1(-4, 3, 1)$.

ZADATAK 6 (15 MINUTA)

Određivanje simetrične tačke datoj, u odnosu na datu ravan.

Date su tačke $A(-1,-1,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(1,1,4)$ i $D(1,2,3)$. Odrediti tačku D_1 koja je simetrična tački D u odnosu na ravan α određenu tačkama A, B i C.

Rešenje. Odredimo, najpre, jednačinu ravni α. Koristimo formulu za određivanje jednačinu ravni kroz tri nekolinearne tačke. Tada je

$$\alpha : \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-1 \\ -1+1 & 0+1 & 2-1 \\ 1+1 & 1+1 & 4-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{tj.}$$
$$\alpha : x + 2y - 2z + 5 = 0.$$

Odredimo sada tačku D' koja je ortogonalna projekcija tačke D u ravan α. Formirajmo, stoga, normalu n koja sadrži tačku D i prodire ravan α. Vektor pravca prave n , u oznaci $\vec{n}$ je kolinearan sa vektorom normale ravni α. Mi ćemo uteti da su jednaki, tj. da je $\vec{n} = (1, 2, -2)$. S obzirom da $D \in n$, tada jednačina prave n glasi

$$n : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}.$$

Da bismo odredili koordinate tačke D' pređimo na parametarski oblik jednačine prave n. Tada je

$$n : \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kako važi da je $D' \in n$, tada je $D'(t+1, 2t+2, -2t+3)$, za neko $t \in \mathbb{R}$. S druge strane, kako je $D' \in \alpha$, tada je

$$t + 1 + 2(2t+2) - 2(-2t+3) + 5 = 0 \quad \text{tj.} \quad t = -\frac{4}{9}.$$

Dobili smo da je $D'\left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{35}{9}\right)$ .Odredimo sada koordinate tačke D_1

$$
\begin{aligned}
x_{D_1} &= 2x_{D'} - x_D = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9},\\
y_{D_1} &= 2y_{D'} - y_D = \frac{20}{9} - 2 = \frac{2}{9},\\
z_{D_1} &= 2z_{D'} - z_D = \frac{70}{9} - 3 = \frac{43}{9}.
\end{aligned}
$$

Dakle, važi da je $D_1\left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{43}{9}\right)$.

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Ortogonalna projekcija date prave u datu ravan.

Naći ortogonalnu projekciju prave $p: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ u ravan $\alpha: x+y+2z-7=0$.

Rešenje. Proverimo najpre uzajamni odnos između prave p i ravni π. Kako je $\vec{p} = (-1,-1,1)$, $P(-1,2,0)$ i $\vec{n}_\pi = (1,1,2)$, tada je

$$(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0 \quad \text{i} \quad 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 2\cdot 0 \neq 0,$$

pa prava p je paralelna ravni π. Da bismo odredili ortogonalnu projekciju prave p u ravan π, u oznaci p'', potrebno je uzeti jednu tačku sa prave p, na primer $P(-1,2,0)$ i naći njenu ortogonalnu projekciju u ravan π. Da bismo to uradili odredimo jednačinu normale n na ravan π, kojoj pripada tačka P. Tada je

$$n: \frac{x-x_P}{A} = \frac{y-y_P}{B} = \frac{z-z_P}{C}, \quad \text{tj.} \quad n: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2} = t, \ t\in\mathbb{R}.$$

Pređimo na parametarski oblik jednačine prave n. Tada je

$$n: \begin{cases} x = t-1,\\ y = t+2,\\ z = 2t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Odredimo njen prodor kroz ravan π.

Tada je

$$(t-1) + (t+2) + 2\cdot(2t) - 7 = 0 \quad \text{tj.} \quad t = 1.$$

Ortogonalna projekcija tačke P u ravni π je tačka P' čije koordinate dobijamo kada u parametarski oblik jednačine n ubacimo da je $t=1$. Tada je $P'(0,3,2)$. Tražena prava p' će imati kolinearan (tj. isti) vektor pravca sa vektorom pravca date prave p. Konačno, jednačina prave p' glasi

$$p': \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

ZADATAK 8 - 1. DEO (20 MINUTA)

Simetrična prava, datoj pravoj, u odnosi na datu ravan.

U odnosu na ravan

$$\alpha : x + y + 2z - 11 = 0,$$

naći simetričnu pravu, pravoj

$$q : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

Rešenje. Imamo da je $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,2)$, da je $\vec{q} = (1,0,1)$. Proverom uzajamnog odnosa između prave q i ravni α vidi se da prava prodire ravan jer je $\vec{q} \circ \overrightarrow{n_\alpha} = 3 \neq 0$. Da bismo odredili, simetričnu pravu, datoj pravoj q, potrebno je uzeti dve tačke sa prave q i naći njima simetrične tačke u odnosu na ravan α. Tada je

$$q : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t + 1 \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dakle, svaka tačka prave q ima koordinate $(t, 0, t+1)$. Za $t = 1$ i $t = 2$ dobijamo dve tačke prave q i to $A(1,0,2)$ i $B(2,0,3)$, tim redom. Odredimo sada projekcije ovih tačaka u ravan α.

Ortogonalna projekcija tačke $A(1,0,2)$ na ravan α je tačka A' u kojoj normala n_1 iz tačke A na ravan α prodire ovu ravan. Odredimo koordinate tačke A'. Da bismo odredili ovu tačku, potrebno je,najpre, odrediti jednačinu normale n_1. Važi da je vektor pravca normale $\overrightarrow{n_1}$ kolinearan sa vektorom normale $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,2)$, tj. $\overrightarrow{n_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_\alpha}$,za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ako stavimo da je $\lambda = 1$, tada je $\overrightarrow{n_1} = (1,1,2)$. Kako $A \in n_1$, tada jednačina normale glasi

$$n_1 : \frac{x - x_A}{A} = \frac{y - y_A}{B} = \frac{z - z_A}{C} \quad \text{tj.} \quad n_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

Odredimo sada prodor prave n_1 kroz ravan α. Zato, pređimo na paranetarski oblik jednačine prave n_1. Tada je

$$n_1 : \begin{cases} x = s + 1 \\ y = s \\ z = 2s + 2, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Svaka tačka prave n_1 ima koordinate $(s+1, s, 2s+2)$, $s \in \mathbb{R}$. Odredimo onu tačku prave n_1 koja pripada ravni α. Tada je

$$s + 1 + s + 2 \cdot (2s + 2) - 11 = 0 \quad \text{tj.} \quad s = 1.$$

Dakle, odredili smo tačku $A'(2,1,4)$. Odredimo sada i tačku simetričnu tački A, u oznaci A'', u odnosu na ravan α. Tada koordinate tačke A'' glase

$$x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = 3,\ y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = 2,\ z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = 6.$$

ZADATAK 8 - 2. DEO

Određivanje druge simetrične tačke preve q i određivanje tražene prave.

Ortogonalna projekcija tačke $B(2,0,3)$ na ravan α je tačka B' u kojoj normala n_2 iz tačke B na ravan α prodire ovu ravan. Odredimo koordinate tačke B'. Da bismo odredili ovu tačku, potrebno je,najpre, odrediti jednačinu normale n_2. Važi da je vektor pravca normale $\overrightarrow{n_2}$ kolinearan sa vektorom normale $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,2)$, tj. $\overrightarrow{n_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_\alpha}$,za $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako stavimo da je $\lambda = 1$, tada je $\overrightarrow{n_2} = (1,1,2)$. Kako $B \in n_2$, tada jednačina normale glasi

$$n_2 : \frac{x - x_B}{A} = \frac{y - y_B}{B} = \frac{z - z_B}{C} \quad \text{tj.} \quad n_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

Odredimo sada prodor prave n_2 kroz ravan α. Zato, pređimo na paranetarski oblik jednačine prave n_2. Tada je

$$n_2 : \begin{cases} x = u + 2 \\ y = u \\ z = 2u + 3, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Svaka tačka prave n_2 ima koordinate $(u+2, u, 2u+3)$, $u \in \mathbb{R}$. Odredimo onu tačku prave n_2 koja pripada ravni α. Tada je

$$u + 2 + u + 2 \cdot (2u+3) - 11 = 0 \quad \text{tj.} \quad u = \frac{1}{2}.$$

Dakle, odredili smo tačku $B'\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 4\right)$. Odredimo sada i tačku simetričnu tački B, u oznaci B'', u odnosu na ravan α. Tada koordinate tačke B'' glase

$$x_{B''} = 2x_{B'} - x_B = 3,\ y_{B''} = 2y_{B'} - y_B = 1,\ z_{B''} = 2z_{B'} - z_B = 5.$$

Odredimo sada jednačinu prave q'' simetrične pravoj q. Kako pravoj q'' pripadaju tačke $A''(3,2,6)$ i $B''(3,1,5)$, tada njena jednačina glasi

$$q'' : \frac{x - x_{A''}}{x_{B''} - x_{A''}} = \frac{y - y_{A''}}{y_{B''} - y_{A''}} = \frac{z - z_{A''}}{z_{B''} - z_{A''}},$$

tj.

$$q'' : \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-6}{-1}.$$

ZADATAK 9 - 1. DEO (25 MINUTA)

Određivanje ravni koja je podjednako udaljena od od datih pravih.

Odrediti jednačinu ravni π koja je podjednako udaljena od pravih $a: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ i prave $b: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$.

Rešenje. Proverimo, najpre, uzajamni odnos pravih a i b. Da bismo to uradili, uočimo vektor pravca prave a i prave b, kao i po jednu tačku sa ovih pravih. Tada je $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=(3,-2,2)$, kao i $A(1,-2,-2)\in a$ i $B(2,0,-2)\in b$. Uočimo sada $\overrightarrow{AB}=(1,2,0)$ i odredimo mešoviti proizvod vektora $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=(3,-2,2)$ i $\overrightarrow{AB}=(1,2,0)$. Tada je

$$\left[\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=16\neq 0.$$

Dakle, prave a i b su mimoilazne. Da bismo odredili traženu ravan, odredimo zajedničku normalu ovih mimoilaznih pravih, tj. presečne tačke ove prave s pravama a i b. Središte duži određene ovim tačkama pripada traženoj ravni. Takođe, ova ravan ima vektor normale koji je kolinearan, tj. jednak vektoru pravce te normale. Na osonovu ovih podataka možemo formirati jednačinu ravni π.

S toga, pređimo na parametarski oblik jednačina pravih a i b. Tada je

$$a:\begin{cases}x=t+1,\\ y=2t-2,\\ z=2t-2, \quad t\in\mathbb{R}.\end{cases}\qquad b:\begin{cases}x=3s+2,\\ y=-2s,\\ z=2s-2, \quad s\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Svaka tačka prave a ima koordinate $(t+1,2t-2,2t-2), t\in\mathbb{R}$, dok svaka tačka prave b ima koordinate $(3s+2,-2s,2s-2), s\in\mathbb{R}$. Ako sa N označimo tačku u kojoj zajednička normala seče pravu a, tada i ona ima koordinate $N(t+1,2t-2,2t-2)$ za neko $t\in\mathbb{R}$. Slično, ako sa M označimo tačku u kojoj zajednička normala seče pravu b, tada i ona ima koordinate $M(3s+2,-2s,2s-2)$ za neko $s\in\mathbb{R}$. Formirajmo vektor $\overrightarrow{MN}=(t-3s-1,2t+2s-2,2t-2s)$. Takođe važi da je $\overrightarrow{MN}\perp\vec{a}$ i $\overrightarrow{MN}\perp\vec{b}$. Tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\circ\vec{a}&=0\\ \overrightarrow{MN}\circ\vec{b}&=0\end{aligned}\quad \text{tj.}\quad \begin{aligned}(t-3s-1,2t+2s-2,2t-2s)\circ(1,2,2)&=0\\ (t-3s-1,2t+2s-2,2t-2s)\circ(3,-2,2)&=0\end{aligned}$$

Konačno, dobijamo da je

$$\begin{aligned}9t-3s&=5\\ 3t-17s&=-1\end{aligned}$$

Rešenje sistema je $t=\frac{11}{18}$ i $s=\frac{1}{6}$, pa je $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\right)$ .Vektor normale tražene ravni π je kolinearan sa vektorom $\overrightarrow{MN}$, tj. važi da je $\overrightarrow{n_\pi}=\lambda\cdot\overrightarrow{MN}$, za $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ako uzmemo da je $\lambda=\frac{9}{4}$, tada je $\overrightarrow{n_\pi}=(2,1,-2)$.

ZADATAK 9 - 2. DEO

Određivanje tačke koju sadrži tražena ravan.

Tačka P koju će tražena ravan π sadržati jeste središte duži $\overline{MN}$. Tada je

$$x_P=\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{t+3s+3}{2},\ y_P=\frac{y_M+y_N}{2}=t-s-1,\ z_P=\frac{z_M+z_N}{2}=t+s-2.$$

Za $t=\frac{11}{18}$ i $s=\frac{1}{6}$ dobijamo da je $P\left(\frac{37}{18},\frac{10}{18},-\frac{22}{18}\right)$ .Tada jednačina ravni π glasi

$$\pi:\ 2\cdot\left(x-\frac{37}{18}\right)+y-\frac{10}{18}-2\cdot\left(z+\frac{22}{18}\right)=0,$$

tj.

$$\pi:\ 2x+y-2z-6=0.$$

ZADATAK 10 (15 MINUTA)

Odnos dve prave, odnos prave i ravni.

Date su prave

$$p:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}\quad \text{i}\quad q:\begin{cases}x-2y=1\\ x-4z=1\end{cases}$$

Odrediti kanonsku jednačinu prave q, a zatim i presek ove dve prave. Odrediti jednačinu ravni π , paralelne pravama p i q koja prolazi kroz koordinatni početak.

Rešenje. Parametarski oblik prave p je

$$p:\begin{cases}x=2t+1,\\ y=3t+2,\\ z=4t+3, \quad t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Da bismo odredili parametarski oblik prave q , rešimo sistem jednačina kojim je ona zadata. Ovaj sistem ima dve jednačine, a tri promenjive, pa ga ima beskonačno mnogo rešenja. Ako promenljivu x proglasimo za slobodnu promenljivu, tj. $x=s,\ s\in\mathbb{R}$, tada je zadata sistemom

$$q: \begin{cases} x = s, \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{s}{2}, \\ z = -\frac{1}{4} + \frac{s}{4}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prava q ima kanonsku jednačinu

$$q: \frac{x}{1} = \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \quad \text{tj.} \quad q: \frac{x}{4} = \frac{y + \frac{1}{2}}{2} = \frac{z + \frac{1}{4}}{1}$$

Ako se prave p i q seku, tada za koordinate presečne tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ važi

$$\begin{aligned} x_0 &= 2t + 1, \\ y_0 &= 3t + 2, \\ z_0 &= 4t + 3, \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} x_0 &= s, \\ y_0 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{s}{2}, \\ z_0 &= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{s}{4}. \end{aligned}$$

za neko $t \in \mathbb{R}$ i neko $s \in \mathbb{R}$ .tj.

$$\begin{aligned} s - 2t &= 1, \\ s - 6t &= 5, \\ s - 16t &= 13 \end{aligned}$$

Ovaj sistem je nemoguć (proveriti za vežbu), tj. date prave se ne seku. Ove prave su mimoilazne (proveriti za vežbu).

Tražena ravan π , zbog paralelnosti sa pravama p i q ima vektor normale $\vec{n}_\pi$ takav da je normalan na vektor pravca $\vec{p} = (2, 3, 4)$ prave p i vektor pravca $\vec{q} = (4, 2, 1)$ prave q, tj. $\vec{n}_\pi \perp \vec{p}$ i $\vec{n}_\pi \perp \vec{q}$. Tada je vektor $\vec{n}_\pi$ kolinearan sa vektorom koji predstavlja vektorski proizvod ovih vektora, tj. važi

$$\vec{n}_\pi = \lambda \cdot ||\vec{p} \times \vec{q}|| \overset{za\ \lambda=1}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 14\vec{j} - 8\vec{k} = (-5, 14, -8).$$

Na kraju, kako ova ravan prolazi koordinatni početak, imamo da je

$$\pi: -5x + 14y - 8z = 0.$$

Poglavlje 6

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU (25 MINUTA+10 MINUTA+20MINUTA)

Razni zadaci za vežbu

Zadatak 1. Date su prava a i ravan α u prostoru:

$$a : \begin{cases} x + y - z & = \quad 0 \\ -x - 2y + 2z - 2 & = \quad 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \alpha : 2x + 2y + z + 9 = 0.$$

a) Odrediti vektor pravca prave a i vektor normale ravni α.
b) Odrediti proizvoljne tačke $A \in a$ i $B \in \alpha$.
c) Odrediti međusobni odnos prave a i ravni α.
d) Ukoliko prava a prodire ravan α odrediti ugao između njih, kao i presečnu tačku M, a ukoliko se ne seku odrediti rastojanje između prave a i ravni α.
Rezultat.
a) Vektor pravca prave a : $\vec{a} = (0, 1, 1)$, a vektor normale ravni α : $\vec{n}_\alpha = (2, 2, 1)$.
b) Na primer $A(2, -2, 0)$ i $B(0, 0, -9)$.
c) Prava prodire ravan.
d) Prava a prodire ravan α pod uglom od 45°. Prodorna tačka $M(2, -5, -3)$.

Zadatak 2. Odrediti jednačinu ravni π kojoj pripadaju paralelne prave $p_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ i $p_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$.
Rezultat. $\pi : x + 2y - 2z - 1 = 0.$

Zadatak 3. U odnosu na ravan $\alpha : x + 2y + z - 3 = 0$ naći simetričnu pravu pravoj $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{-5}$.
Rezultat. Tražena prava glasi $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-8}{-20}$.

Zaključak za lekciju 09

ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\mathbb{E}^3$

Jednačina ravni, jednačina prave, uzajamni odnos prave i ravni.

Analitička geometrija se može proučavati u bilo kom vektorskom prostoru sa uočenim skalarnim proizvodom, a ovde je ona izučavana u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa uočenom kananskom bazom i uočenim euklidskim skalarnim proizvodom, tj. u prostoru. E^3.

Pojmovi prava i ravan koji predstavljaju geometrijske objekte ovde su dobili svoj analitički oblik (zapis), odakle i ova oblast nosi naziv. Na taj način su stvoreni uslovi za diskusiju odnosa između dva istorodna objekta ili između prave i ravni.

Literatura (nastavni materijal):
Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.