UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Uvod u verovatnoću

Lekcija 01

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 01

UVOD U VEROVATNOĆU

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo se najpre upoznati sa tehnikama za prebrojavanje. Nakon toga uvešćemo pojmove slučajni događaj i verovatnoća.

Za neki skup s konačnim brojem elemenata postoji više mogućnosti da od tih elemenata, nižući ih na razne načine, dobijemo neke nove skupove. Kombinovati elemente tog skupa, znači ređati ih po nekom pravilu jedne uz druge. Takođe, kombinovati može značiti i praviti podskupove od elemenata datog skupa i formirati nove skupove kombinovanjem elemenata više datih skupova. Pri tome nas, naročito, zanima koliko članova će imati ti novi skupovi i kako će tačno, u opštem slučaju, broj članova tog novog skupa zavisiti od broja elemenata polaznog skupa. Ovde nas interesuju elementi onih skupova koji se međusobno razlikuju samo svojim rasporedom, a prirodu tih skupova apstrahujemo (zanemarujemo). Iz ovako uočenih skupova i njihovih podskupova, proizilaze izvesne osobine. Proučavanjem tih osobina bavi se posebna oblast matematike koja se naziva Kombinatorika.

Jedan od glavnih problema u kombinatorici je određivanje broja različitih kombinatornih objekata koji se može formirati. Prilikom rešavanja ovog problema veoma često se koriste sledeći elementarni principi:

- Princip jednakosti,
- Princip zbira,
- Princip množenja,
- Princip uključenja - isključenja.

Ovde ćemo izložiti neke tehnike za određivanje, bez direktnog brojanja, broja mogućih ishoda konkretnog eksperimenta ili događaja ili broja elemenata u datom skupu, što će nam biti od presudne važnosti u verovatnoći. Ovakvo sofisticirano prebrojavanje zove se kombinatorna analiza.

U teoriji verovatnoća elementi kombinatorike su bitni jer se koriste u vezi s pojmom verovatnoće slučajnog događaja. Ovde ćemo se baviti permutacijama sa i bez ponavljanja, kao i kombinacijama bez ponavljanja. U ovoj lekciji ćemo se upoznati sa pojmom slučajnog događaja, kao i operacijama i relacija koje se mogu izvršavati sa njim. Uvešćemo pojam kao realne funkcije, sa određenim osobinama, kao i geometrijsku verovatnoću.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Tehnike za prebrojavanja

UVOD

Tehnike za prebrojavanje koje će ovde biti obrađene su pravilo zbira, pravilo množenja, kombinatorika – kombinacije bez ponavljanja, Dirihleov princip.

Za neki skup s konačnim brojem elemenata postoji više mogućnosti da od tih elemenata, nižući ih na razne načine, dobijemo neke nove skupove. Kombinovati elemente tog skupa, znači ređati ih po nekom pravilu jedne uz druge. Takođe, kombinovati može značiti i praviti podskupove od elemenata datog skupa i formirati nove skupove kombinovanjem elemenata više datih skupova. Pri tome nas, naročito, zanima koliko članova će imati ti novi skupovi i kako će tačno, u opštem slučaju, broj članova tog novog skupa zavisiti od broja elemenata polaznog skupa. Ovde nas interesuju elementi onih skupova koji se međusobno razlikuju samo svojim rasporedom, a prirodu tih skupova apstrahujemo (zanemarujemo). Iz ovako uočenih skupova i njihovih podskupova, proizilaze izvesne osobine. Proučavanjem tih osobina bavi se posebna oblast matematike koja se naziva Kombinatorika.

Jedan od glavnih problema u kombinatorici je određivanje broja različitih kombinatornih objekata koji se može formirati. Prilikom rešavanja ovog problema veoma često se koriste sledeći elementarni principi:

- Princip jednakosti,
- Princip zbira,
- Princip množenja,
- Princip uključenja - isključenja.

Ovde ćemo izložiti neke tehnike za određivanje, bez direktnog brojanja, broja mogućih ishoda konkretnog eksperimenta ili događaja ili broja elemenata u datom skupu, što će nam biti od presudne važnosti u verovatnoći. Ovakvo sofisticirano prebrojavanje zove se kombinatorna analiza.

U teoriji verovatnoća elementi kombinatorike su bitni jer se koriste u vezi s pojmom verovatnoće slučajnog događaja. Ovde ćemo se baviti permutacijama sa i bez ponavljanja, kao i kombinacijama bez ponavljanja. S tim u vezi, obnovićemo o pojmu faktorijel i binomni koeficijent.

Takođe, obradićemo i Dirihleov princip (Princip ptičjeg gnezda) kao veoma važnu tehniku za prebrojavanje.

1.1 Osnovni principi za prebrojavanje

PRINCIP JEDNAKOSTI

Ako izmežđu dva skupa s konačnim brojem elemenata postoji bijekcija, tada ti skupovi imaju isti broj elemenata.

Kada smo u Matematici 1 učili o kardinalnosti skupova pomenuli smo Princip jednakosti, mada mu tada nismo dali ovakav naziv, jer smo ga koristili u druge svrhe. O njemu govorimo u nastavku.

Stav. Ako izmežđu dva skupa s konačnim brojem elemenata postoji bijekcija, tada ti skupovi imaju isti broj elemenata.

Primer. Zamislite da se nalazite na autobuskoj stanici čiji su peroni označeni brojevima od 1 do 36. Ako vas neko pita koliko ima autobusa na stanici, a vi primetite da su svi peroni zauzeti, za tačan odgovor nije neophodno da prebrojite autobuse. Znaćete da na peronima ima 36 autobusa.

U praksi se za određivanje broja elemenata nekog skupa uspostavlja bijekcija sa nekim podskupom skupa prirodnih brojeva. Ovo opažanje je suština principa jednakosti. U prethodnom primeru smo za elemenata skupa autobusi parkirani na autobuskoj stanici bijektivno preslikali na skup $\{1, 2, 3, \ldots, 36\}$ i na taj način odredili broj autobusa.

Vratimo se na prethodni primer. Ovaj princip se može primeniti i u sledećoj situaciji. Ako vas neko pita koliko ima autobusa na stanici, a vi primetite da su tri perona nisu zauzeta, za tačan odgovor nije neophodno da prebrojite autobuse. Znaćete da na peronima ima 33 autobusa.

PRINCIP ZBIRA

Ako su A i B disjunktni skupovi, tada je broj načina da se izabere jedan elemenat iz skupa A ili iz skupa B jednak $m+n$.

Neka skupovi A i B imaju m i n elemenata. To ćemo zapisivati na sledeći način $n(A) = n$ i $n(B) = m$.

Princip zbira. Ako su A i B disjunktni skupovi, tada je broj načina da se izabere jedan elemenat iz skupa A ili iz skupa B jednak $m+n$.

Shodno prethodno uvedenoj notaciji, prethodno rečeno možemo zapisati na sledeći način

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = n + m.$$

Ovim principom utvrđujemo na koliko načina se jedan element iz skupa $A \cup B$ može izabrati. Ovaj princip se može uopštiti na više od dva skupa. Ako su dati disjunktni skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_k$,pri čemu je $n(A_1) = n_1, n(A_2) = n_2, \ldots n(A_k) = n_k$,tada važi

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

PRINCIP PROIZVODA

Broj načina da se izabere jedan element iz skupa A i jedan element iz skupa B je $m \cdot n$.

Princip proizvoda. Broj načina da se izabere jedan elemenat iz skupa A i jedan elemenat iz skupa B je $m \cdot n$.

Prethodnim principom biramo jedan elemenat iz skupa $A \times B$, jer se izborom jednog elementa iz skupa A i jednog elementa iz skupa B određuje jedan uređen par iz skupa $A \times B$. Kako svaki elemenat iz skupa A može da se kombinuje sa svakim elementom iz skupa B, da bi se dobio jedan uređen par, sledi da je

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = n \cdot m.$$

Ovaj princip se može uopštiti na više od dva skupa. Ako su dati skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pri čemu je $n(A_1) = n_1, n(A_2) = n_2, \ldots n(A_k) = n_k$,tada važi

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdots n(A_k) = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

PRIMER 1

Primena Principa zbira i Principa proizvoda.

● Na sastanaku ima 5 muškaraca i 8 žena od kojih jedna osoba treba da bude izabrana za predsedavajućeg. Tada postoji $5 + 8 = 13$ mogućih izbora (primenjeno Pravilo zbira).

● Ako u knjižari ima 3 različita kriminalistička romana, 5 ljubavnih romana i 4 avanturistička romana, onda ima $3 + 5 + 4 = 12$ načina da se izabere jedan roman (primenjeno Pravilo zbira).

● Ako restoran ima 3 različita predjela i 4 različita jela, onda postoji $3 \cdot 4 = 12$ različitih načina da se izabere jelo i predjelo (primenjeno Pravilo proizvoda).

● Neka AirSerbia ima tri, a Lufthansa dva povratna leta dnevno na relaciji Beograd-Frankfurta-Beograd. Tada postoji $3 \cdot 3 = 9$ načina da se leti prevoznikom AirSerbia, $2 \cdot 2 = 4$ načina da se leti prevoznikom Lufthansa, a na primer $3 \cdot 2 = 6$ načina da se leti prevoznikom AirSerbia od Beograda do Frankfurta, a nazad do Beograda Lufthansom. Konačno, ako ne preciziramo prevoznika, postoji $5 \cdot 5 = 25$ načina da se leti od Beograda do Frankfurta i nazad (primenjeno Pravilo proizvoda).

● Neka na fakultetu ima 3 različita kursa iz istorije, 4 različita kursa iz književnosti i 2 različita kursa iz prirodnih nauka. Ako student mora da izabere po jedan kurs od svake vrste, onda ima $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ načina da to uradi (primenjeno Pravilo proizvoda). Ako student treba da izabere jedan kurs, od svih ponuđenih, tada ima $3 + 4 + 2 = 9$ načina da to uradi (primenjeno Pravilo zbira).

● Koliko postoji različitih nizova bitova 0 i 1 dužine 8?

Rešenje. Na svakoj poziciji u tom nizu može da dođe znak 0 ili 1, pa prema principu proizvoda postoji ukupno $2^8 = 256$ različitih nizova bitova dužine 8.

● Koja će biti vrednost za k nakon izvršenja sledećeg koda?

```
k := 0
for i_1 := 1 to 2
    for i_2 := 1 to 3
        ⋮
        for i_10 := 1 to 11
            k := k + 1
        end for
        ⋮
    end for
end for
```

Rešenje. Prema principu proizvoda važi da je

$$k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 = 11!.$$

PRINCIP UKLJUČENJA - ISKLJUČENJA

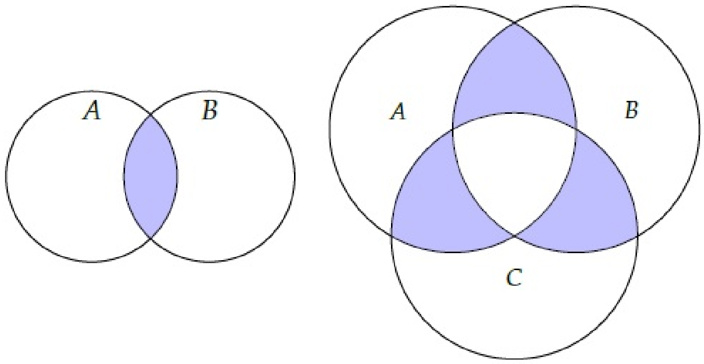
Princip zbira se može uopštiti do slučaja kada posmatrani skupovi nisu disjunktni.

Ako u Principu zbira posmatramo skupove s konačno mnogo elemenata koji nisu disjunktni, tada dolazimo do sledeće formule

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Prethodna formula se može uopštiti za slučajeve sa više od dva skupa. U slučaju tri skupa A, B i C s konačno mnogo elemenata tada važi

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$



Slika 1.1.1 Principu uključenja - isključenja za slučaj dva (slika levo) i tri skupa (slika desno) [Izvor: Autor]

Stav. Za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k$ s konačno mnogo elemenata važi da je

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le k}^{k} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i \le j \le l \le k}^{k} n(A_i \cap A_j \cap A_l)$$
$$- \ldots + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

Napomena. Prethodnom formulom je dat Princip uključenja isključenja u svom najopštijem obliku. Prve dve formule su slučaj ovog principa za dva, odnosno tri skupa.

PRIMER 2

Određivanje koliko skup ima elemanta primenom Principa uključenja - isključenja.

Odrediti koliko ima dvocifrenih brojeva koji su deljivi sa 2 ili sa 3.

Rešenje. Označimo sledeće skupove

A - skup svih dvocifrenih brojeva koji su deljivi sa 2

B - skup svih dvocifrenih brojeva koji su deljivi sa 3.

Treba da odredimo $n(A \cup B)$. Kako je $A \cap B \neq \varnothing$, primenićemo Princip uključenja - isključenja. Tada je

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Konstatujmo, prvo, da ima 90 dvocifrenih brojeva. Formula za određivanje koliko između dva prirodna broja a i b $a < b$ ima brojeva deljivih sa k, u oznaci d_k iznosi

$$d_k = \frac{m-n}{k} + 1,$$

gde su $n, m \in [a, b]$ tim redom najmanji, odnosno najveći brojevi iz ovog intervala deljivi sa k. U našem slučaju je

$$d_2 = \frac{98 - 10}{2} + 1 = 45,$$

tj. $n(A) = 45$. Slično, imamo da je

$$d_3 = \frac{99 - 12}{3} + 1 = 30,$$

tj. $n(B) = 30$.

Međutim, među ovim brojevima smo dva puta brojali one koje su deljivi i sa 2 i sa 3. Stoga treba odrediti koliko ima takvih brojeva. Brojevi koji su deljivi i sa 2 i sa 3 su brojevi koji su deljivi sa 6. Tada je

$$d_6 = \frac{96 - 12}{6} + 1 = 15,$$

tj. $n(A \cup B) = 15$. Konačno je

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 45 + 30 - 15 = 60.$$

VIDEO KLIP

Youtube snimak: Principi uključenja - isključenja.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

1.2 Permutacije i kombinacije

FAKTORIJEL, BINOMNI KOEFICIJENT I BINOMNI OBRAZAC. PRIMERI

Binomni koeficijent se zadaje primenom faktorijela. Binomnom formulom se zadaje pravilo kako se prirodnim brojem stepenuje binom. U njegovo zadavanju se koristi binomni koeficijent.

Definicija. Faktorijel, u oznaci $n!$, uvodimo na sledeći način

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Iz definicije vidimo da je faktorijel funkcija. Koristeći definiciju faktorijela, možemo uvesti pojam binomnog koeficijenta.

Definicija. Binomni koeficijent prirodnog broja n i nenetivnog broja r, u oznaci $\binom{n}{r}$, (čita se n *nad* n) uvodimo na sledeći način

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}, \text{ ili } \binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}.$$

za $n \geq r$, dok je

$$\binom{n}{r} = 0$$

za $n < r$. Za binomne koeficijente važe sledeće osobine

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Primer. Važi da je

$$0! = 1, \ \ 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 = 120$$

$$\binom{15}{0} = 1, \ \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2!} = 4950.$$

Binomni koeficijenti se koriste prilikom zadavanja formule pod nazivom Binomna formula (zbog koje i nose takvo ime) koja glasi

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r,$$

koja važi za svako $n \in \mathbb{N}$ i za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

U nastavku ćemo, koristeći faktorijel i binomni koeficijent uvesti važne tehnike za prebrojavanje: permutacije i kombinacije. S druge strane, Binomna formula će nam omogućiti da uvedemo određene raspodele u verovatnoći.

PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

U situaciji kada se posmatra broj mogućih razmeštaja svih posmatranih elemenata, od kojih se svaki od njih pojavljuje tačno jednom govorimo o permutacijama bez ponavljanja.

U kombinatorici permutacija (od latinske reči permutatio što znači premeštanje, zamena) za uočeni skup S , predstavlja niz elemenata tog skupa, koji sadrži tačno po jednom svaki njegov element. Napomenimo, da kada koristimo termin niz to podrazumeva da je redosled elemenata u njemu tačno određen tj. zna se koji element je u njemu prvi, koji drugi i tako redom.

Red permutacije predstavlja broj elemenata iz skupa S koji učestvuje u ovim razmeštajima. Permutacije ćemo dogovorno pisati u malim zagradama. Na primer, permutacija (a_1, a_2) je drugog reda i ona se razlikuje od permutacije (a_2, a_1), jer raspored elemenata nije isti.

Permutacija (a_2, a_1, a_3, a_4)je permutacija četvrtog reda. Sada se postavlja pitanje, za izabrane elemente skupa S, koliko postoji njihovih permutacija.

Ovde ćemo neformalno pokazati koliko ima permutacija reda k. Ako iz skupa S izaberemo k prvih elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i želimo da izbrojimo sve moguće permutacije od njih, postupamo na sledeći način:
i) pri konstruisanju permutacije postoji k mogućih izbora koji će element da bude stavljen na prvo mesto,

ii) kada prvi element izaberemo preostalo je $k-1$ elementa koji mogu da se stave na drugo mesto što za izbor prva dva člana daje $k \cdot (k-1)$ mogućih permutacija,

iii) za izbor trećeg člana permutacije nam je preostalo $k-2$ elemenata, što za prva tri člana daje ukupno $k \cdot (k-1) \cdot (k-2)$ mogućih permutacija,
iv) nastavljajući na sličan način sve dok ne ostanu 2 elementa, kada postoje, naravno, samo 2 izbora, što za $k-1$ elemenata daje $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots 2$, mogućih permutacija

v) poslednji izbor je sada iznuđen jer je preostao samo jedan element.

Dakle, ukupan broj permutacija bez ponavljanja od k elemenata (tj. reda k) skupa S, u oznaci P_k, iznosi:

$$P_k = k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1.$$

PERMUTACIJE SA PONAVLJANJEM

U situaciji kada se posmatra broj mogućih razmeštaja svih posmatranih elemenata, od kojih se svaki od kojih se neki pojavljuju više puta govorimo o permutacijama sa ponavljanja.

Kao što smo rekli, permutacije se koriste u slučaju kada želimo da prebrojimo na koliko načina možemo razmestiti sve posmatrane elemente. Međutim, u praksi se može desiti da se neki od posmatranih elemenata ponavljaju. Tada govorimo o permutacijama sa ponavljanjem. U ovom slučaju ćemo imati očigledno manji broj permutacija, nego kada su svi elementi različiti.

U slučaju da su u skupu od n elemenata, njih r međusobno jednaki, tada se broj permutacija od n elemenata sa ponavljanjem r elemenata u oznaci P_n^r, izračunava po sledećoj formuli

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{r!}.$$

Prethodno rečeno se može generalizovati do situacije da je među n elemenata r_1 međusobno jednakih, zatim r_2 međusobno jednakih elemenata i tako redom do r_k, gde je $k = 2, 3, 4, 5 \ldots$ Tada se broj permutacija sa ponavljanjem izračunava po formuli

$$P_n^{(r_1, r_2, \ldots r_k)} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!} \quad (r_1 + r_2 + \ldots r_k \leq n,\ n, k \in \mathbb{N}, n > k).$$

Specijalno, ako u skupu od n elemenata imamo dva podskupa međusobno istih elementi i ako u jednom od njih imamo r, a u drugom imamo $n-r$ elemenata, tada je broj permutacija sa ponavljanjem jednak

$$P_n^{r,n-r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}.$$

U mnogim problemima u kombinatorici (među kojima je i prethodni slučaj) javljaju se situacije da pravimo razmeštaje elemenata koji se ponavljaju. Skup, koji sadrži takve elemente se naziva multiskup. Pojam multiskupa je sličan pojmu skupa, s tim što se kod multiskupa, kao što smo već rekli, elementi ponavljaju. Multiskupovi se označavaju kao i skupovi.

Tako, multiskup A u kome se element a_1 ponavlja n_1 puta, element a_2 se ponavlja n_2 puta i tako dalje, element a_k se ponavlja n_k puta $(k\in\mathbb{N})$ označavaćemo sa

$$A=\{\underbrace{a_1,a_1,\dots,a_1}_{n_1\text{ puta}},\underbrace{a_2,a_2,\dots,a_2}_{n_2\text{ puta}},\dots,\underbrace{a_k,a_k,\dots,a_k}_{n_k\text{ puta}}\}.$$

Da li će se u praksi prilikom rešavanja nekog problema kretati od skupa ili multiskupa, biće određeno samim problemom koji razmatramo. Na primer, nekada ćemo praviti razmeštaje cifara tako da dobijemo određene prirodne brojeve, pri čemu se sve te cifre mogu međusobom razlikovati, ali se može desiti da se neke i ponavljaju. To svakako utiče na broj prirodnih brojeva koje možemo dobiti u takvim razmeštajima. Zbog toga se i uvode razne tehnike za prebrojavanje na skupovima i multiskupovima, kako bi se svi takvi slučajevi mogli razmatrati.

PRIMER 1

Permutacije bez ponavljanja i sa ponavljanjem.

Koliko se permutacija može obrazovati od elemenata $1,2,3,4,5$? Koliko permutacija počinje sa 24 i koje su to permutacije? Kako glasi pedeseta permutacija?

Rešenje. Imamo ukupno $P_5=5!=120$ permutacija.

Broj permutacija koje počinju sa 24 podrazumeva da na preostala tri mesta permutuju cifre $1,3\ \ 5,$ tako da broj tih permutacija iznosi $3!=6.$ To su permutacije $24135,24153,24315,24351,24513$ i $24531.$

Na kraju, odredimo $50.$ permutaciju. Kada tražimo neku od permutacija podrazumevamo da su one poređane u rastući niz prema ciframa koje u njima figurišu. Onih permutacija koje počinju sa 1 ima $4!=24,$ dok onih koje počinju sa 2 ima takođe $24.$ Dakle, tražena permutacija počinje sa cifrom 3 i to je druga od tih permutacija u posmatranom rastućem nizu. Stoga, $49.$ permutacija glasi $31245,$ dok $50.$ permutacija glasi $31254.$

Koliko se šestocifrenih brojeva može obrazovati od cifara $3,3,3,4,4$ i $5?$

Rešenje.Ovde se radi o permutacijama sa ponavljanjem. Broj 3 se javlja tri puta, broj 4 dva puta i broj 5 jedanput. Tada je

$$P_6^{(3,2,1)} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{720}{12} = 60.$$

Napomena.Primetimo da u ovom slučaju radimo na razmeštajima elemenata multiskupa $\{3,3,3,4,4,5\}$.

AUTORSKI VIDEO KLIP 1

Permutacija

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

KOMBINACIJE BEZ PONAVLJANJA

Način za izračunavanje kombinacija bez ponavljanja.

Neka je U skup koji ima n elemenata i neka je postavljen zadatak da se prebroje svi podskupovi skupa U koji imaju tačno r elemenata, a da se ti elementi ne ponavljaju i da su svrstani u njihovom leksikografskom poretku (npr. po abecednom redu, ili po rastućem indeksu koji označava te elemente). Na ovakav način dobijamo kombinacije bez ponavljanja od n elemenata klase (ili reda) r. Na primer, ako je dat skup $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ zapisi ili kako se još nazivaju kompleksi $a_1a_2a_3a_4, a_1a_2a_3a_5, a_1a_2a_4a_5, a_1a_3a_4a_5 a_2a_3a_4a_5$ predstavljaju kombinacije četvrte klase bez ponavljanja. Naglasimo da za svaku ovakvu kombinaciju nije važno kako su u njoj elementi raspoređeni nego od koji je elemenata sastavljena. To znači da sve kombinacije koje sadrže iste elemente (u ma kom poretku) su međusobno jednake (zato se uzima samo leksikografski poredak).

Očigledno je da se od n različitih elemenata nekog skupa može sastaviti onoliko kombinacija prve klase koliko ima elemenata. Taj broj ćemo označiti sa C_1^n i važi da je

$$C_1^n = \binom{n}{1} = n.$$

Dokazaćemo da je broj kombinacija od n elemenata klase r bez ponavljanja, u oznaci C_r^n jednako $\binom{n}{r}$. Njega ćemo izvesti primenom matematičke indukcije. Na osnovu prethodne relacije pretpostavka za $n=1$ važi (ovo je induktivna baza).

Indukcijska hipoteza glasi

$$C_r^n = \binom{n}{r}.$$

Sve kombinacije klase $r+1$ dobijamo na taj način što svako od $\binom{n}{r}$ kombinacija klase r kombinujemo sa svakim od $n-r$ elemenata, kojih nema u toj kombinaciji. Prema tome, svaku kombinaciju klase $r+1$, dobijamo $r+1$ puta, pa je zato broj svih različitih kombinacija klase $r+1$ od n elemenata jednak:

$$C^n_{r+1} = \binom{n}{r} \cdot \frac{n-r}{r+1} = \binom{n}{r+1}.$$

Na osnovu Principa matematičke indukcije indukcijska hipoteza važi, za $1 \leq r \leq n$, i $r, n \in \mathbb{N}$.

PRIMER 2

Primena kombinacije bez ponavljanja, pravila zbira i proizvoda za prebrojavanje.

Od članova nekog odbora, koji se sastoji od 7 muškara i 5 žena potrebno je izabrati

a) delagaciju od tri člana;

b) delegaciju tako da u njoj budu 3 žene;

c) delegaciju tako da u njoj budu 2 muškarca i jedna žena;

d) delegaciju od tri člana tako da u njoj bude barem dve žene.

Na koliko načina se mogu izvršiti ovakvi izbori.
Rešenje. Ovde se očigledno radi o kombinacijama bez ponavljanja. Sada je

a)

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220;$$

b)

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10;$$

c) Odvojeno posmatramo skup koji čine muškarci, od skupa koji čine žene. Za određivanje broja mogućnosti da u delegaciji bude dva muškarci, odnosno jedna žena koriste se permutacije bez ponavaljanja. Uupan broj delegacija koje se sastoji od dva muškarca i jedne žene određuje primenom Pravila proizvoda. Tada je

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot 5 = 105.$$

d) Postoje dve mogućnosti za izbor ove delegacije. Prva, da su u njoj dve žene i jedan muškarac i druga da su u njoj sve tri žene. Broj delegacija za svaku od ovih mogućnosti se određuje analogno delu pod c). Ukupan broj delegacija se određuje primenom Pravila zbira, jer su ove mogućnosti disjunktne. Tada je

$$\binom{7}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{7}{0}\cdot\binom{5}{3}=7\cdot\frac{5\cdot 4}{2!}+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}=70+10=80.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP 2

Kombinacije bez ponavljanja.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

1.3 Dirihleov princip

ISKAZ DIRIHLEOVOG PRINCIPA. PRIMERI

Dirihleov princip predstavlja tehniku dokazivanja koja se često koristi kod metoda za prebrojavanja i dokazivanje.

Sada uvodimo još jednu tehniku dokazivanja koja se često koristi kod metoda prebrojavanja - Dirihleov princip. On se u engleskoj terminologija naziva The Pigeon Hole Principle.

Stav. (Dirihleov princip) Neka je n golubova smešteno u m gnezda i neka je $m < n$. Tada su u bar jednom gnezdu dva ili više goluba.

Ovaj stav se jednostavno primenjuje i ima neočekivanu moć u dokazivanju interesantnih posledica.

Primer. Ako se na bilo koji način izabere 8 osoba iz neke grupe, bar dvoje od njih je rođeno istog dana u nedelji.

Rešenje. Ovde je svaka osoba (golub) pridružena danu u sedmici (gnezdo) kada je rođena. Kako ima 8 osoba, a 7 dana u nedelji, po Dirihleovom principu, bar 2 osobe moraju biti rođene istog dana.
Primer. Dokazati da ako se izabere 5 brojeva od 1 do 8, onda bar dva od njih u zbiru daju 9.

Dokaz. Primetimo da postoji 4 različita skupa po dva broja koja u zbiru daju 9 i to su: $A_1=\{1,8\}$, $A_2=\{2,7\}$, $A_3=\{3,6\}$ i $A_4=\{4,5\}$. Svaki od 5 brojeva koji se biraju mora pripadati jednom od ova 4 skupa, a po Dirihleovom principu, dva izabrana broja pripadaju istom skupu. Ti brojevi u zbiru daju 9.

Primer. U basketaškom takmičenju učestvuje 20 igrača koji nose dresove označene brojevima od 1 do 20. Kada se bilo koja 3 igrača izaberu da budu jedan tim, tada se tom timu dodeljuje kodni broj koji se sastoji iz sume brojeva koje oni nose na dresu. Dokazati da ako se izabere 8 od ovih 20 igrača, tada se od njih mogu formirati bar dva različita tima koji imaju isti kodni broj.

Dokaz. Od 8 igrača se može formirati $n = \binom{8}{3} = 56$ timova, od po 3 člana. Oni će igrati ulogu golubova. Najveći kodni broj je $57 (= 18 + 19 + 20)$, a najmanji $6 = (1 + 2 + 3)$. Tako je moguće imati $57 - 6 + 1 = 54$ kodnih brojeva (gnezda). Po Dirihleovom principu, bar dva tima će imati isti kodni broj.

VIDEO KLIP

Youtube snimak: Dirihleov princip.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Skup svih ishoda. Slučajan događaj

EKSPERIMENT. SKUP SVIH ISHODA. SLUČAJAN DOGAĐAJ

Slučajni događaj se realizuje pri nekom eksperimentu ako i samo ako se realizuje jedan od elementarnih događaja koji se u njemu sadrže.

Osnovni model Teorije verovatnoće jeste eksperiment (pojava, opit) kod koga ostvarivanje određenih uslova ne dovodi do jednoznačnog (determinističkog) rezultata.

Primer. Eksperiment bi bio bacanje kockice za jamb i posmatranje koji broj se pojavio na gornjoj strani kocke. Pritom, ovaj broj ne mora biti uvek isti, tj. eksperiment može imati više mogućih rezultata (ishoda). Pod eksperimentom možemo smatrati bacanje novčića i posmatranje šta je palo (da li je palo pismo ili glava), zatim izvlačenje jedne karte (ili više karata) iz špila karata, pri čemu opet rezultat/ishod eksperimenta nije jednoznačan i dr.

Elementarni ishod ili kraće ishod je jedna od mogućnost koja može da se realizuje prilikom izvođenja eksperimenta. Njega označavamo sa ω. Dakle, kao rezultat realizacije nekog eksperimenta mi dobijamo neki elementarni ishod. Za svaki od eksperiment je veoma bitno odrediti od koliko i kojih elementarnih ishoda se sastoji, tj. da se odredi njegov skup svih ishoda. Njega označavamo sa Ω. Ovaj skup za neke eksperimente može biti konačan, dok za neke ne.

Podskupove skupa svih ishoda nazivamo slučajni događaji. Njih dobijamo tako što zahtevamo da elementarni ishodi iz skupa Ω ispune dodatni zahtev (ili dodatne zahteve). Označavamo ih sa $A, B, C, \ldots$ Realizacija nekog događaj A pri izvođenju posmatranog eksperimenta je određena realizacijom jednog od elementarnih ishoda ω koji im pripada.
Ceo skup Ω je događaj koji se realizuje uvek. Zato ćemo Ω zvati izvestan ili siguran događaj . Prazan skup $\varnothing$ je nemoguć događaj.

Prethodno rečeno ilustrujemo primerima.

- Eksperiment se sastoji u bacanju kockica i registrovanju broja koji je pao. Skup svih mogućih ishoda $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ako kažemo da je događaj A : pao je broj deljiv sa 3. Tada je $A = \{3, 6\}$. Dakle, događaj A će se realizovati u sledeća dva slučaja: ako padne broj 3 ili ako padne broj 6. Događaj B : pao je broj manji od 7 bi bio primer sigurnog događaja. S druge strane, događaj C : pao je broj deljiv sa 9, bi bio primer nemogućeg događaja.

- Eksperiment se sastoji u bacanju novčića četiri puta i registrovanju koliko je puta palo “pismo”. Skup svih mogućih ishoda je $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ako kažemo da je događaj A :

nijednom nije palo pismo. Tada je $A = \{0\}$.

- Eksperiment se sastoji u tome da se iz kutije koja sadrži 10 artikala od kojih su 3 oštećena, oni izvlače jedan za drugim (bez vraćanja u kutiju), sve dok se i poslednji oštećeni ne izvuče. Skup svih ishoda predstavlja broj izvučenih artikala i imamo da je $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ako kažemo da je događaj A : izvučeni broj artikala je paran. Tada je $A = \{4, 6, 8, 10\}$.

PRIMER

Određivanje skupa svih ishoda za date eksperimente i određivanje onih ishoda koji pripadaju datim slučajnih događaja.

Primer 2. Strelac gađa metu dva puta, a onda još onoliko puta koliko je pogodaka postigao u prvoj seriji. Opisati skup svih ishoda i sledeće događaje:

A – da strelac gađa cilj ne manje od četiri puta,

B – da gađanje započne pogotkom,

C – da je u trećem gađanju postignut pogodak,

D – da strelac pogodi metu ne više od jedanput.

Rešenje. Označimo sa 0 da je cilj promašen, a sa 1 da je cilj pogođen. Tada je skup svih ishoda, shodno definisanom eksperimentu sledeći skup

$$\Omega = \{00, 010, 011, 100, 101, 1100, 1101, 1110, 1111\}.$$

Tada je:

$$A = \{1100, 1101, 1110, 1111\},$$

$$B = \{100, 101, 1100, 1101, 1110, 1111\},$$

$$C = \{011, 101, 1110, 1111\},$$

$$D = \{00, 010, 100\}.$$

Poglavlje 3

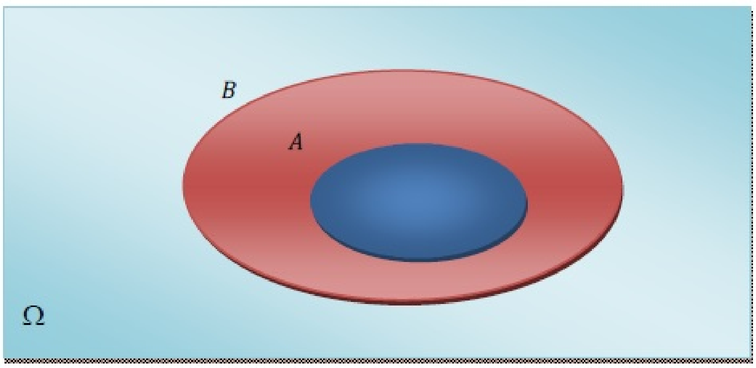
Relacije i operacije sa događajima

RELACIJA IMPLIKACIJE

Relacija implikacije događaja A i B u oznaci $A \subseteq B$, (čita se A implicira B,) se realizuje ako i samo ako kada se realizuje događaj A realizuje se i događaj B.

Lako je uočiti da se rad sa događajima, zapravo odnosi na rad sa skupovima, pri čemu u ovom slučaju, postoji univerzalni skup koji sadrži sve takve događaje. To je skup Ω. Stoga, posmatrajući događaje kao podskupove skupa Ω koji se sastoje od elementarnih događaja možemo poznate relacije i operacije među skupovima tumačiti u terminima realizacije događaja.

Relaciju $biti\ podskup$, u oznaci $\subseteq$ među skupovima, uvešćemo sada za događaje. Kažemo da događaj A implicira događaj B, u oznaci $A \subseteq B$, ako i samo ako kada se realizuje događaj A realizuje se i događaj B (videti sliku).

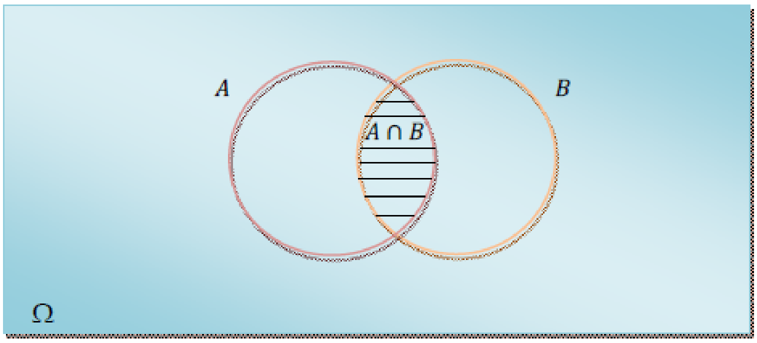


Slika 3.1 Relacija implikacije za slučajne događaje [Izvor: Autor].

PRESEK I UNIJA DVA DOGAĐAJA

Definicije preseka i unije dva događaja

Operacija presek ili proizvoda dva događaja A i B, u oznaci $A \cap B$ (ili $A \cdot B$ ili samo AB) je događaj koji se realizuje, ako se realizuju i događaj A i događaj B (slika 2). Ako je $AB = \emptyset$ tj. ako se događaji A i B ne mogu realizovati istovremeno, tada događaje A i B nazivamo disjunktni događaji.



Slika 3.2 Operacija presek dva događaja [Izvor: Autor].

Operacija unija dva događaja *A* i *B*, u oznaci *A* ∪ *B* je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja *A* ili *B*. Za disjunktne skupove opearciju ∪ zamenjujemo sa $+$.

Operacije presek i unija se jednostavno proširuju na konačan skup događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tako $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ predstavlja događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje svaki od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dok $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ predstavlja događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

KOMPLEMENT

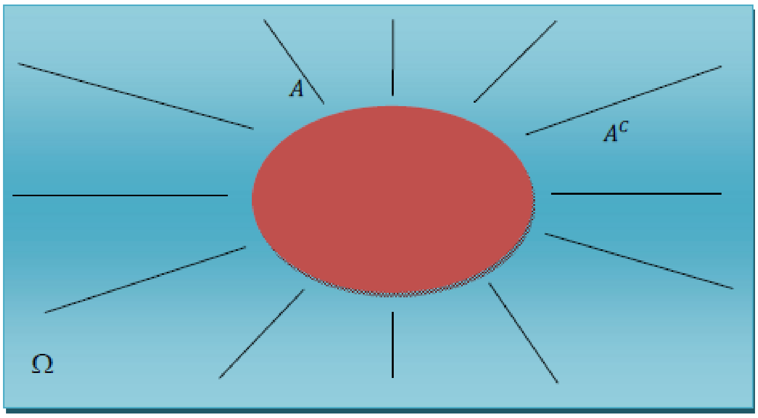
Operacija komplementiranja podskupa u skupu svih ishoda je operacija dobijanja suprotnog događaja, datom događaju.

Komplement nekog događaja A u Ω je suprotan događaj događaju A, u oznaci $\overline{A}$ ili (A^C). Događaj $\overline{A}$ se realizuje ako i samo ako kada ne realizuje se događaj A. Dakle, svi elementarni događaji koji se ne nalaze u događaju A, nalaze se u događaju A^C (videti sliku). Na osnovu teorije skupova, za događaj A i $\overline{A}$, možemo pisati

1) $A \cup \overline{A} = \Omega$,

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Primer. Ako kažemo da je prilikom bacanja kockice, definišemo događaj A : pao je broj deljiv sa 3, tada je $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$. Ako prilikom četiri bacanja kockice, definišemo događaj A : nijednom nije palo pismo, tada je $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.



Slika 3.3 Operacija komplement [Izvor: Autor].

Svakako, i u ovom slučaju za dva događaja $A, B \subseteq \Omega$ važe De Morganovi zakoni

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{i} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

PREBROJIVA UNIJA I PRESEK DOGAĐAJA

Uvođenje pojma klase događaja i polja događaja

Operacije presek i unija se jednostavno proširuju na konačan skup događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tako $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ predstavlja događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje svaki od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dok $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ predstavlja događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Međutim, u Teoriji verovatnoće potrebno je razmotriti i prebrojive preseke događaja i prebrojive unije događaja

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid (\forall i)\, \omega \in A_i\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid (\exists i)\, \omega \in A_i\}.$$

Prirodno je zahtevati da je klasa $\mathscr{F}$ događaja $A, B, C, \ldots$ koji se posmatraju kod nekog opita sa skupom ishoda Ω, zatvorena u odnosu na operaciju komplementa i prebrojive unije i preseka. Taj zahtev formulisaćemo sledećom aksiomom.

Aksioma 1. Klasa $\mathscr{F}$ događaja, koji se posmatraju kod jednog opita, sa slučajnim ishodima čine σ-polje ili σ-algebru ako važi:

1. $\Omega \in \mathscr{F}$,

2. ako $A \in \mathscr{F}$, tada $\overline{A} \in \mathscr{F}$,

3. ako $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots$, tada $\bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{F}$.

Može se dokazati da ako $\emptyset \in \mathscr{F}$ i $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots,$tada $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{F}$. Ovako definisana klasa $\mathfrak{F}$ se naziva polje događaja.

Poglavlje 4

Pojam verovatnoće

STATISTIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Posmatramo opite koje možemo ponavljati proizvoljno mnogo puta n $(n \in \mathbb{N})$ i u svakom ponavljanju registrujemo da li se neki događaj $A \in \mathscr{F}$ realizovao ili nije.

Sada ćemo posmatrati samo opite kod kojih događaji iz σ -polja $\mathscr{F}$ poseduju statističku homogenost (ili stabilnost). Radi se o tome da zamišljamo da opit o kome je reč možemo ponavljati proizvoljno mnogo puta n $(n \in \mathbb{N})$ i u svakom ponavljanju da registrujemo da li se neki događaj $A \in \mathscr{F}$ realizovao ili nije. Neka je $n(A)$ $(0 \leq n(A) \leq n)$ broj realizacija događaja A u n ponovljenih opita. Tada je relativna učestalost (frekvencija) događaja A u tih n ponovljenih opita broj $\frac{n(A)}{n}$. Intuitivno se može uvideti da se sa uvećanjem broja opita $(n \to +\infty)$ relativna učestalost $\frac{n(A)}{n}$ događaja A sve više "grupiše"oko fiksiranog broja $P(A)$ koji ćemo zvati verovatnoća događaja A.

Događaje sa ovakvim svojstvom statističke homogenosti zvaćemo slučajni događaji. U formalnoj definiciji verovatnoće zahtevaćemo da ona zadovoljava ona svojstva koja proističu iz predstave o verovatnoći nekog događaja kao broju oko koga se "grupišu" relativne učestalosti. Pre svega ako je $\frac{n(A)}{n} \geq 0$, za svako $A \in \mathscr{F}$, zahtevaćemo da je $P(A) \geq 0$. Dalje, kako je $\frac{n(\Omega)}{n} = 1$, zahtevaćemo da je $P(\Omega) = 1$. Ako su A i B disjunktni događaji tada iz $n(A+B) = n(A) + n(B)$ sledi da je $\frac{n(A+B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}$, pa ćemo zahtevati da važi $P(A+B) = P(A) + P(B)$. Ovaj poslednji uslov proširićemo u uslov prebrojive ili σ -aditivnosti.

KLASIČNA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Verovatnoća je realna funkcija definisana nad σ -poljem događaja $\mathscr{F}$ koja zadovoljava tri osobine: nenegativnost, normiranost i σ -aditivnost.

Formalizacijom prethodno pomenutih uslova, dolazimo do definicija verovatnoće koja potiče od ruskog matematičara Kolmogorova.

Definicija 1. Verovatnoća $P(.)$ je realna funkcija definisana nad σ -poljem događaja $\mathscr{F}$ koja ima sledeće osobine:

1. nenegativnost : $(\forall A \in \mathscr{F})P(A) \geq 0$,

2. normiranost : $P(\Omega) = 1$,

3. σ-aditivnost : ako su $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots$ uzajamno disjunktni događaji (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$,za $i \neq j$ ($i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$), tada

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

OSOBINE VEROVATNOĆE

Iz prethodne definicije proizilaze osobine verovatnoće koje će intezivno biti korišćene u prilikom rešavanja raznih problema.

Stav 1. Verovatnoća $P(.)$ ima sledeće osobine:

1. $P(\emptyset) = 0$,

2. ako $A \subseteq B$ onda $P(A) \leq P(B)$,

3. $(\forall A \in \mathscr{F})\ 0 \leq P(A) \leq 1$,

4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

5. $(\forall A, B \in \mathscr{F})\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

6. konačna aditivnost :

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai).$$

Dokaz. Dokazaćemo prve četiri osobine.

1. Kako je za svaki događaj A zadovoljeno da je $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ i pri istom eksperimentu je $A \cap \emptyset = A \cap \emptyset = \emptyset$, tada na osnovu definicije verovatnoće pod 3) imamo $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A + \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$ odakle je $P(\emptyset) = 0$.

2. Kako za skupove A i B važi $A \subseteq B$, tada je $B = A \cup (B \cap A^C)$, gde su skupovi A i $B \cap A^C$ disjunktni skupovi. Tada za događaje A i B imamo

$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^C)) = P(A + (BA^C)) = P(A) + P(BA^C).$$

Odavde imamo da je očigledno $P(B) \geq P(A)$.

3. Očigledno je da važi $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$. Tada na osnovu osobine pod 1. i 2., kao i $P(\Omega) = 1$ (iz definicije verovatnoće) dobijamo da važi

$$(\forall A \in \mathscr{F})\ 0 \leq P(A) \leq 1.$$

4. Kako važi da je $A \cup A^C = \Omega$ i $A \cap A^C = \emptyset$ imamo da je $P(A + A^C) = P(\Omega)$, tj. dobijamo da je $P(A) + P(A^C) = 1$, odnosno $P(A^C) = 1 - P(A)$.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: događaji koji su disjunktni

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

LAPLASOVA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Ova "definicija" je primenljiva samo na slučaj kada je broj ishoda konačan i kada se smatra da su ishodi jednakoverovatni.

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ gde je N konačan broj i neka su $p_1, p_2, \ldots, p_N$ brojevi koji zadavoljavaju uslov $p_i \geq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, za $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$, gde je

Ako je $\mathscr{F}$ je skup svih podskupova od Ω, tada se verovatnoća P se može definisati na sledeći način:

$$(\forall A \in F)\ P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i.$$

Ako stavimo da je $P(\omega_i) = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \ldots, N$ dobija se Laplasova definicija verovatnoće koja se odnosi samo na konačan prostor i u kojoj su realizacije elemenarnih ishoda jednakoverovatni (to su ω_1, ω_2, ..., ω_N). Tada se verovatnoća nekog događaja definiše

$$P(A) = \frac{\text{broj } \omega_i \text{ u } A}{N}$$

ili kako se često kaže: verovatnoća događaja A je odnos broja povoljnih ishoda prema broju svih ishoda. Dakle, ovakva "definicija" verovatnoće je primenljiva samo na slučaj kada je broj ishoda konačan i kada se smatra da su ishodi jednakoverovatni.

Primer. Ako posmatramo eksperiment gde se kockica baca jednom, već smo konstatovali da je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i da je doga]aj A : pao jebroj deljiv sa 3. Tada je $A = \{3, 6\}$. Ako želimo da odredimo kolika je verovatnoća da se realizujedogadjaj A, tada, najpre, treba uvideti da je padanje bilo kog odbrojeva 1,2,3,4,5 ili 6 prilikom bacanja kockice je jednakoverovatno i kako je $N = 6$ važi da je

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Kako ukupno ima 6 elementarnih ishoda imamo da je, a događaj A se sastoji od 2 elementarna ishoda, tada imamo da je $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

PRIMER 1

Pravilo za verovatnoću od unije dva događaja.

Odrediti verovatnoću da slučajno izabrani dvocifren bude deljiv sa 2 ili sa 3.

Rešenje. Označimo sledeće događaje

A - izvučeni dvocifreni broj je deljiv sa 2

B - izvučeni dvocifreni broj je deljiv sa 3.

Nama treba da odredimo $P(A \cup B)$. Na osnovu osobine verovatnoće koja je data pod 5) u prethodnom stavu, imamo da je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Konstatujmo, prvo, da ima 90 dvocifrenih brojeva.

Formula za određivanje koliko između dva prirodna broja a i b $(a < b)$ ima brojeva deljivih sa k, u oznaci d_k iznosi

$$d_k = \frac{m-n}{k} + 1,$$

gde su $n, m \in [a, b]$ tim redom najmanji, odnosno najveći brojevi iz ovog intervala deljivi sa k. U našem slučaju je

$$d_2 = \frac{98-10}{2} + 1 = 45.$$

Tada je $P(A) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$.

S druge strane, imamo da je

$$d_3 = \frac{99-12}{3} + 1 = 30.$$

Tada je $P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Međutim, među ovim brojevima smo dva puta brojali one koje su deljivi i sa 2 i sa 3. Stoga treba odrediti koliko ima takvih brojeva. Brojevi koji su deljivi i sa 2 i sa 3 su brojevi koji su deljivi sa 6. Tada je

$$d_6 = \frac{96-12}{6} + 1 = 15.$$

Sada je $P(AB) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

Konačno je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

VIDEO KLIP 2

Youtube snimak: Primeri.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Geometrijska verovatnoća

POJAM GEOMETRIJSKE VEROVATNOĆE

Geometrijska verovatnoća predstavlja količnik povoljnih ishoda i svih mogućih ishoda. Oni su iskazani preko mere zatvorene oblasti u kojima se vrši posmatranje.

Pretpostavimo da je S zatvorena oblast u nekom od prostora $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$ i da slučajno bačena tačka može pasti u ma koju od tačaka iz oblasti S. Ako sa S_1 označimo neku oblast koja je sadržana u oblasti S može se postaviti pitanje kolika je verovatnoća da slučajno bačena tačka u oblast S padne u oblast S_1 ?

Pretpostavićemo da ova verovatnoća zavisi samo od mere oblasti S_1, u oznaci $m(S_1)$, koja je dužina u prostoru $\mathbb{R}$, površina u prostoru $\mathbb{R}^2$ ili zapremina u prostoru $\mathbb{R}^3$. Tada imamo da je

$$P(D) = \frac{m(S_1)}{m(S)}.$$

gde je D događaj koji je realizuje kada slučajno bačena tačka padne u oblast S_1. Ovakav način izračunavanja verovatnoće se naziva geometrijska verovatnoća.

Napomena. U izvesnom smislu između formula za izračunavanje klasične verovatnoće i geometrijske verovatnoće postoji sličnost jer se u slučaju obe definicije verovatnoća posmatra kao količnik povoljnih ishoda i svih mogućih ishoda. Primetimo da se u oba slučaja javlja nedostatak koji se ogleda u zasnivanju pomenutih definicija na pojmu jednakoverovatnih događaja. Kod geometrijske definicije verovatnoće unapred se usvaja uslov nezavisnosti izbora tačke od oblika i položaja oblasti, tj. pretpostavlja se jednaka mogućnost (jednakoverovatnost) izbora bilo koje tačke oblasti. Uprkos ovom nedostatku, geometrijska verovatnoća u mnogim slučajevima daje dobre procene ,,šanse" za realizaciju nekog slučajnog događaja.

PRIMER – I DEO

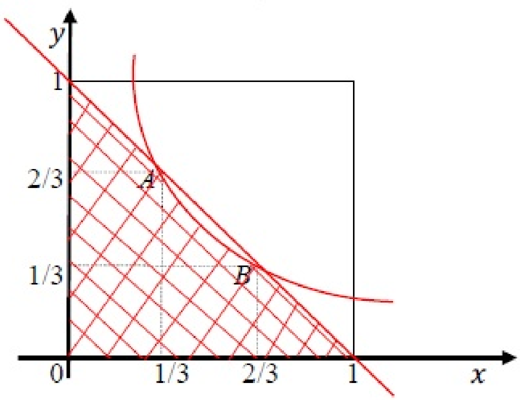
Određivanje oblasti na osnovu datih uslova i skiciranje slike.

Primer 5. Neka se eksperiment sastoji u slučajnom izboru dva broja x i y iz segmenta $[0, 1]$. Kolika je verovatnoća izbora tačaka x i y, tako da one zadovoljavaju uslove $x + y < 1$ i $xy \leq \frac{2}{9}$?

Rešenje. Skup mogućih vrednosti za tačke x i y je kvadrat $0 \leq x, y \leq 1$ (oblast S), pri čemu važi za te tačke da je $x + y < 1$ i $xy \leq \frac{2}{9}$ (oblast S_1). Presečne tačke prave $x + y = 1$ i hiperbole $xy = \frac{2}{9}$ sa dobijaju rešavanjem odgovarajućeg sistema

$$\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ xy = \frac{2}{9} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 1 - x \\ xy = \frac{2}{9} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 1 - x \\ x(1 - x) = \frac{2}{9} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 1 - x \\ x_1 = \frac{2}{3} \vee x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = \frac{1}{3} \vee y_2 = \frac{2}{3} \\ x_1 = \frac{2}{3} \vee x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$$

i to su tačke $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i $B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.



Slika 5.1 Grafički prikaz problerma [Izvor: Autor].

PRIMER – II DEO

Izračunavanje geometrijske verovatnoće primenom određene integracije.

Šrafirani deo na slici 4 predstavlja skup tačaka iz pomenutog kvadrata čije koordinate zadovoljavaju nejednakosti $x + y < 1$ i $xy \leq \frac{2}{9}$.

Površinu šrafirane oblasti S_1 na slici 4 ćemo izračunati kao površina trougla umanjena za površinu oblasti ograničene parabolom i pravom. Tada imamo:

$$m(S_1) = \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(1 - x - \frac{2}{9x}\right) dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$$

Tada je tražena verovatnoća

$$P(D) = \frac{m(S_1)}{m(S)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2}{1} = 0,487.$$

gde je D dogadjaj koji je realizuje kada slučajno bačena tačka padne u oblast S_1.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: geometrijska verovatnoća.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Pokazna vežba

1. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje skupa svih ishoda i pojedinih događaja u njimu.

Tri igrača A, B i C igraju turnir na sledeći način: prvu partiju igraju A i B, a igrač C je slobodan. Drugu partiju igra C sa pobednikom prve partije i tako dalje, sve dok jedan od igrača ne postigne dve pobede zaredom. Registruje se rezultati partija. Opisati skup ishoda i događaje:

D – da je u trećoj partiji pobedio igrač C,

E – da se turnir završio za manje od 5 partija,

F – da je odigran paran broj partija.

Rešenje. Označimo sa A_i pobedu igrača A u i-toj partiji, sa B_i pobedu igrača B u i-toj partiji i sa C_i pobedu igrača C u i-toj partiji $(i = 1, 2, 3, \ \dots)$.

Prostor svih ishoda je u ovom slučaju beskonačan i imamo da je:

$\Omega = \left\{A_1A_2, \ B_1B_2, \ A_1C_2C_3, \ B_1C_2C_3, \ A_1C_2B_3B_4, \ B_1C_2A_3A_4, \ \dots\right\}.$

Sada imamo da je:

$D = \left\{A_1C_2C_3, \ B_1C_2C_3\right\},$

$E = \left\{A_1A_2, \ B_1B_2, \ A_1C_2C_3, \ B_1C_2C_3, \ A_1C_2B_3B_4, \ A_1C_2A_3A_4\right\},$

$F = \left\{A_1A_2, \ B_1B_2, \ A_1C_2B_3B_4, \ C_1C_2A_3A_4, \ \dots\right\}.$

2. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena definicije verovatnoće.

Naći verovatnoću da prilikom bacanja dve pravilne kocke zbir tačaka na njihovim gornjim stranama bude 8.

Rešenje. Skup svih ishoda u ovom slučaju glasi:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} \{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\} \\ \{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\} \\ \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\} \\ \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,3\}, \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\} \\ \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, \{5,5\}, \{5,6\} \\ \{6,1\}, \{6,2\}, \{6,3\}, \{6,4\}, \{6,5\}, (6,6) \end{matrix}\right\}$$

S druge strane, događaj A koji predstavlja da zbir tačaka bude 8 ima sledeće elementarne ishode:

$$A = \{\{2,6\}, \{3,5\}, \{4,4\}, \{5,3\}, \{6,2\}\}$$

Dakle, imamo da je

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{5}{36} \approx 0,139.$$

3. ZADATAK (10 MINUTA)

Tehnika za prebrojavanje – kombinacija bez ponavljanja i izračunavanje verovatnoće.

Kupac je pazario 7 sijalica od 40W, 5 sijalica od 60W i 3 sijalice od 100W. Usput je razbio tri sijalice. Kolika je verovatnoća da razbijene sijalice imaju ukupno 180W?

Rešenje. Ukupan broj mogućnosti da su rabijene tri sijalice iznosi

$$n = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455.$$

S druge strane, ako sa A označimo dogadjaj da su rabijene tri sijalice koje imaju 180W, tada se on sastojiod sledećih mogućnosti:

Razbijene su 3 sijalice po 60W,

Razbijena je 1 sijalica od 100W i 2 sijalice po 40W.

Tada imamo da je:

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{3}{1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 10 + 63 = 73.$$

Tražena verovatnoća tada je:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{73}{455} \approx 0,16.$$

4. ZADATAK (5 MINUTA)

Ponovljeni eksperimenti. Primer rešavanja zadatka određivanjem verovatnoće suprotnog događaja, datom događaju i primena osobine verovatnoće.

Ako se pravilna kocka baca četiri puta, kolika je verovatnoća će bar jedanput pasti šestica?

Rešenje. Ako sa A označimo dogadjaj pala je bar jednom šestica, tada ćemo uočiti suprotan dogadjaj $\overline{A}$. Prilikom jednog bacanja verovatnoća da padne šestica iznosi $\frac{1}{6}$ (kao i za ostale brojeve), dok je verovatnoća da ne padne šestica u jednom bacanju iznosi $\frac{5}{6}$. Tada, verovatnoća da nijednom ne padne šestica u četiri bacanja iznosi:

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Tada je $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

5. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje verovatnoće primenom definicije verovatnoće. Primena osobine verovatnoće za određivanje verovatnoće složenijih događaja.

Jedna kuglica je izvučena iz kutije koja sadrži 6 crvenih, 4 bele i 5 plavih kuglica. Odrediti verovatnoću da je izvučena:

1. Crvena kuglica
2. Bela kuglica
3. Plava kuglica
4. Kuglica koja nije crvena
5. Crvena ili bela.

Rešenje. Označimo sa

A – događaj izvlačenja jedne crvene kuglice, B – događaj izvlačenja jedne bele kuglice, C – događaj izvlačenja jedne plave kuglice.

1. $P(A) = \frac{6}{6+4+5} = \frac{2}{5}$.
2. $P(B) = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}$.
3. $P(C) = \frac{5}{6+4+5} = \frac{1}{3}$.
4. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{6}{6+4+5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
5. $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3} = P\left(\overline{C}\right)$.

6. ZADATAK – I DEO (15 MINUTA)

Primer primene geometrijske verovatnoće – određivanje uslova i slika oblasti.

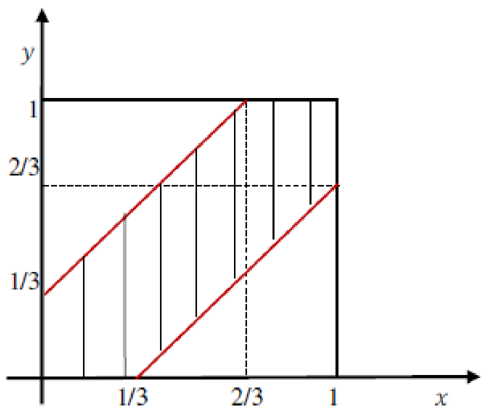
Sastanak dve osobe je zakazak izmedju 12h i 13h na odredjenom mestu, uz obavezu čekanja 20 minuta. Kolika je verovatnoća susreta ako je dolazak svake od osoba nezavisan i jednako moguć u proizvoljnom momentu naznačenog vremena?

Rešenje.

Ovaj zadatak se odnosi na geometrijsku verovatnoću. Označimo sa x moment dolaska prve osobe, a sa y moment dolaska druge osobe. Sve se odigrava u okviru jednog sata, pa je $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$

Kako je dozvoljeno vreme čekanja 20 minuta, odnosno $\frac{1}{3}$ sata tada imamo da je $|x-y| < \frac{1}{3}$. Odavde imamo da su granične prave (na slici označene crvenom bojom) šrafirane oblasti

$$|x-y| = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x-y=\frac{1}{3} \quad \vee \quad x-y= -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y=x-\frac{1}{3} \quad \vee \quad y=x+\frac{1}{3}.$$



Slika 6.1 Grafički prikaz problema [Izvor: Autor].

6. ZADATAK – II DEO

Izračunavanje geometrijske verovatnoće.

Tražena verovatnoća predstavlja količnik površine šrafirane oblasti i površine kvadrata. Označimo sa S_1 površinu šrafirane oblasti. Tada je

$$m(S_1) = 1 - 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Ako sa S označimo jedinični kvadrat, tada je $m(S) = 1$ i imamo

$$P(A) = \frac{m(S_1)}{m(S)} = \frac{5}{9}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - geometrijska verovatnoća

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

7. ZADATAK (5 MINUTA)

Izračunavanje verovatnoće korišćenjem tehnika za prebrojavanje – kombinacija bez ponavljanja.

Naći verovatnoću da pri slučajnom izboru slova iz reči *matematika* dobijaju slova od kojih se može sastaviti reč *tema*.

Rešenje. Izbor 4 slova od 10 kojih ima u reči *matematika* može da se izvede na $\binom{10}{4}$ načina.

S druge strane, broj povoljnih ishoda iznosi $\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}=12,$ jer se slovo t može izabrati na dva načina, slovo e na jedan način, slovo m na dva načina i slovo a na jedan način. Ako sa A označimo događaj da se izvuku tražena slova, tada je verovatnoća da se to desi:

$$P(A)=\frac{12}{\binom{10}{4}}=\frac{12}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}}=\frac{12}{35}.$$

8. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena kombinacija bez ponavljanja za dobijanje traženje verovatnoće.

U kutiji su 3 bele, 5 žutih i 6 plavih kuglica. Izvlače se dve kuglice odjednom. Odrediti verovatnoću da:

1. Obe izvučene kuglice budu plave,
2. Da obe izvučene kuglice budu žute ili 1 bela i 1 plava,
3. Nijedna od izvučenih kuglicane ne bude plava.

Rešenje.

1. Ako sa A označimo dogadjaj da budu izvučene dve plave kuglice, tada je tražena verovatnoća:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}}.$$

2. Ako sa B označimo dogadjaj da budu izvučene dve žute, ili jedna bela i jedna plava kuglica tada je tražena verovatnoća:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{3}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{14}{2}}.$$

3. Ako sa C označimo dogadjaj da nijedna od izvučenih ne bude plava, on je suprotan dogadjaj dogadjaju A, tj.

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}}.$$

9. ZADATAK – I DEO (15 MINUTA)

Postavka i grafički prikaz problema.

U jednoj firmi od 100 zaposlenih njih 40 zna ruski jezik, 30 engleski jezik, 21 francuski jezik. Dalje, 15 zaposlenih zna ruski i engleski jezik, 10 ruski i francuski jezik, 5 engleski i francuski, a 3 sva tri jezika. Ako se bira delegacija od tri člana, kolika je verovatnoća da:

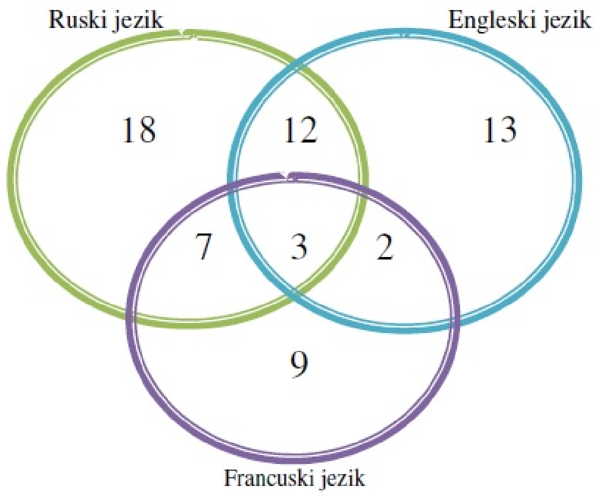
a) Nijedan od članova ne zna strane jezike,

b) Sva tri člana znaju ruski jezik,

c) Sva tri člana zna samo engleski jezik,

d) Dva člana znaju neki od stranih jezika, a treći ne zna nijedan?

Rešenje.



Slika 6.2 Grafički prikaz problema [Izvor: Autor].

9. ZADATAK – II DEO

Izračunavanje verovatnoće korišćenjem kombinacija bez ponavljanja.

Ukupan broj načina na koju je moguće formirati delegaciju od tri člana iznosi

$n = \binom{100}{3}$.

a) Prema datoj slici može se uvideti da ukupan broj zaposlenih koji govori neki strani jezik iznosi $100 - 64 = 36$. Tada imamo da je: $P(A) = \frac{\binom{36}{3}}{\binom{100}{3}}$, gde je A dogadjaj da budu izabrana tri člana koja ne znaju strani jezik.

b) Prema datoj slici može se uvideti da ukupan broj zaposlenih koji govori ruski, ali i druge jezike iznosi 40 . Tada imamo da je: $P(B) = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$, gde je B dogadjaj da budu izabrana tri člana koja znaju ruski jezik.

c) Prema datoj slici može se uvideti da ukupan broj zaposlenih koji govori samo engleski jezik iznosi 13. Tada imamo da je: $P(C) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{100}{3}}$, gde je C dogadjaj da budu izabrana tri člana koja znaju samo engleski jezik.

d) Prema datom u delu pod a) imamo da je broj onih koji znaju jezike 64, a onih koji ne znaju 36. Tada imamo da je: $P(D)=\frac{\binom{64}{2}\binom{36}{1}}{\binom{100}{3}}$, gde je D dogadjaj da budu izabrana dva člana koja znaju strani jezik i jedan koji ne zna.

ZADACI ZA SAMOSTALNU VEŽBU

Zadaci koji se studentima ostavljaju za samostalan rad.

Zadatak. Strelac gađa u metu 4 puta, pri čemu se registruju pogoci i promašaji. Opisati skup svih ishoda i sledeće događaje:
A - da je gađanje započeto promašajem
B - da je cilj pogođen dva puta
Rezultat.
$\Omega=\{0000,1000,1001,0100,0010,0001,1010,1100,0110,0011,0101,0111,1011,$
$1101,1110,1111\}$
$A=\{0000,0100,0010,0001,0110,0011,0101,0111\}$
$B=\{1001,1010,1100,0110,0011,0101\}$
Zadatak. Nepismeno dete se igra sa ceduljama kojima su napisana slova A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Kolika je verovatnoća da će sastaviti reč od 10 slova koja glasi MATEMATIKA?

Rešenje. Kako sva slova koja se nalaze na ceduljama učestvuju u ispisivanju tražene reči, ovde se radi o permutacijama, Kako se određena slova na ceduljama ponavljaju, radi se o permutacijama sa ponavljanjem. Odredimo, najpre, koliko se reči od deset datih slova može sastaviti. Tada je

$$P_{10}^{(3,1,1,1,2,2)}=\frac{10!}{3!1!1!1!2!2!}=151200.$$

Označimo sa A događaj: sastavljena je reč MATEMATIKA. Reč MATEMATIKA je jedna od 151200 reči koje se mogu sastaviti (smislene ili besmislene) od dati slova. Kako je pojava bilo koje od ovih reči jednakoverovatna, tada je

$$P(A)=\frac{1}{151200}.$$

Zadatak. Iz skupa od 10 osoba (6 žena i 4 muškarca) na slučajan način biramo 3 osobe. Kolika je verovatnoća da među izabranim osobama bude bar jedna žena?
Rezultat. $\frac{29}{30}$

Zadatak. Kolika je verovatnoća da se prilikom slučajnog izbora jedne tačke iz kvadrata stranice a ta tačka nalazi i u krugu upisanom u taj kvadrat.
Rezultat. $\frac{\pi}{4}$.

Zadatak. U kutiji se nalazi 6 belih i 4 crne kuglice. Izvlače se tri kuglice bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da su sve tri iste boje?

Rezultat. $\frac{1}{5}$.

Vreme izrade: 1. 8 minuta; 2. 5 minuta; 3. 10 minuta; 4. 12 minuta; 5. 10 poena.

Napomena. Internet studenti treba da se za sve domaće zadatke jave asistentu kojije predviđen za rad sa njima. Potrebno je detaljno pročitati plan i program predmeta koji se nalazi na LAMS-u u okviru ovog predmeta, gde ćete naći i ime asistenta koji je predviđen za rad sa Vama. U njemu ćete takođe naći i termine u kojima se drže konsultacije na Skype-u, posebno sa profesorom posebno sa asistentom. Takođe, možete nas kontaktirati i putem e-maila.

Zaključak

ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE

Slučajan događaj, relacije i operacije sa njima, pojam i definicije verovatnoće, geometrijska verovatnoća, tehnike za prebrojavanje

Teorija verovatnoće je grana matematike koja se bavi analizom slučajnih fenomena. Ključni objekti koji se razmatraju u teoriji verovatnoće su slučajni događaji, promenljive i stohastički procesi. Iako je bacanje novčića ili numerisane kocke slučajan događaj, ako se ponovi mnogo puta, niz ovih slučajnih događaja će ispoljiti određene statističke pravilnosti, koje se mogu proučavati i predviđati. Dve ključne matematičke teoreme koje opisuju ovakvo ponašanje su zakon velikih brojeva i centralna granična teorema. Kao matematička osnova statistike, teorija verovatnoće je od velike važnosti za mnoge ljudske aktivnosti koje uključuju kvantitativnu analizu velikih skupova podataka.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa pojmom slučajnog događaja, kao i operacijama i relacija koje se mogu izvršavati sa njim. Uveli smo pojam i definiciju verovatnoće kao realne funkcije sa određenim osobinama. Takođe, uveden je pojam geometrijske verovatnoće.

Na početku predavanja su izložene tehnike za prebrojavanje, čije poznavanje je neophodno kako bi se potrebne verovatnoće tačno izračunavale.

LITERATURA:

1. M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
2. Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
3. Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.
4. Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.