UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Vektorska algebra I deo

Lekcija 11

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 11

VEKTORSKA ALGEBRA I DEO

- Vektorska algebra I deo
- Poglavlje 1: Vektorski prostor
- Poglavlje 2: Baza dimenzija vektorskog prostora
- Poglavlje 3: Linearni operator
- Poglavlje 4: Unitarni, normirani i metrički prostor
- Poglavlje 5: Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$
- Poglavlje 6: Pokazna vežba
- Poglavlje 7: Zadaci za samostalan rad
- Zaključak za lekciju 11

Uvod

VEKTORSKA ALGEBRA

Pojam skalara i vektora.

U svakodnevnom životu nailazimo na mnoga pitanja. Na primer, koja je tvoja visina? Ili, kako treba fudbaler da udari loptu kako bi je dodao drugom igraču njegove ekipe? Na prvo pitanje, jedan od mogući odgovor bi bio 1,8 metara, tj. odgovor bi bio veličina koja uključuje samo jednu vrednost (veličinu) koja je broj. Takve količine se nazivaju skalari.

Međutim, odgovor na drugo pitanje je veličina (sila) koja uključuje mišićnu snagu fudbalera kojom udara loptu i pravac u kome je treba da drugom igraču doda loptu, tj u kome je on pozicioniran. Takve veličine se nazivaju vektori. Pojam vektor je izveden od latinske reči vectus, što znači nositi.

U matematici, fizici i inženjerstvu, često se susrećemo s oba tipa ovih veličina. U skalarne veličine spadaju dužina, masa, vreme, rastojanje, površina, zapremina, temperatura, napon, gustina itd. Vektorske veličine su brzina, ubrzanje, sila, težina, impuls, jačina električnog polja itd.

U ovom lekciji ćemo proučiti neke od osnovnih pojmova o vektorima, različitim operacije na vektorima i njihove algebarske i geometrijske osobine. Ova dva svojstva (pojam skalara i pojam vektora) kada se razmatraju zajedno omogućavaju potpunu realizaciju vektorske algebre i njihovu primenljivosti u različitim oblastima nauke.

ŠTA ĆETE NAUČITI NA OVOM PREDAVANJU?

Vektorski prostor, unitarni i normirani vektorski prostor, ugao između dva vektora.

Na ovom času ćete naučiti:

- Šta je to vektorski prostor i njegove osobine?
- Šta je to unitaran, a šta normirani vektorski prostor?
- Kako se određuje ugao između dva vektora?

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Vektorski prostor

DEFINICIJA VEKTORSKOG PROSTORA

Polja realnih i kompleksnih brojeva nisu dovoljni da bi se njima svi fenomeni u matematici i njenim primenama opisali, pa se usled toga uvodi još opštiji prostor – vektorski prostor.

Algebarske strukture sa dve operacije koje smo pominjali na prethodnim predavanjima nisu dovoljne kako bi se njima svi fenomeni u matematici i njenim primenama opisali, pa se usled toga uvodi još opštiji prostor. O tome govorimo u nastavku.

Definicija. Neka je $(S,+,\cdot)$ polje čije ćemo elemente zvati skalarima i neka je X skup čije ćemo elemente zvati vektori. Kaže se da uređeni par (S,X) vektorski prostor ili linearni prostor nad poljem S, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. u skupu X je definisana binarna operacija $+$ koju nazivamo sabiranje vektora, takvu da je grupoid $(X,+)$ Abelova grupa, tj.

$\textbf{(i)}(\forall\, x,y\in X)\ x+y=y+x$,(komutativnost)

$\textbf{(ii)}(\forall\, x,y,z\in X)\ (x+y)+z=x+(y+z)$,(asocijativnost)

$\textbf{(iii)}(\forall\, x\in X)\ (\exists O\ \in V)\ x+O=x$,(0 je neutralni element za sabiranje vektora),

$\textbf{(iv)}(\exists(-x)\in X)(\forall\, x\in V)\ x+(-x)=O$. (svaki vektor ima svoj inverzni (suprotni) vektor u odnosu na operaciju $+$), gde se neutralni element za sabiranje vektora naziva nula vektor i označen sa O.

2. definisana je operacija množenja vektora elementom polja S koja svakom uređenom paru $(\lambda,x)\in S\times X$ pridružuje jedan element iz X koji označavamo $\lambda\cdot x$ (ili λx), tj. $\cdot:\ S\times X\mapsto X$za koju su ispunjene relacije:

$\textbf{(v)}(\forall\, x\in X)\ 1\cdot x=x$,

$\textbf{(vi)}(\forall\, x\in X)\ (\forall\, \lambda,\mu\in S)\ \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,

$\textbf{(vii)}(\forall\, x,y\in X)\ \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

$\textbf{(viii)}(\forall\, x,y\in X)\ (\forall\, \lambda\,\mu\in S)\ (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

gde je 1 skalar iz polja S.

Ukoliko je $S=\mathbb{R}$ takav prostor se naziva realan vektorski prostor, dok za $S=\mathbb{C}$ imamo kompleksan vektorski prostor. Vektorski prostor (S,X) se često značava samo sa X, ako se zna nad kojim poljem skalara S je on konstruisan. Ovde ćemo raditi samo u realnom vektorskom prostoru.

Napomena. Ovde koristimo istu oznaku za operaciju zbira dva vektora, kao i zbira dva skalara (operacija u oznaci $+$), bez bojazni da dođe do zabune, jer se iz konteksta lako može utvrditi o kojoj se vrsti sabiranja radi. Slično važi i za operaciju množenja dva skalara i operaciju množenja vektora skalarom (koristimo istu oznaku $\cdot$, bez bojazni o zabuni).

PRIMER

Prostor $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ je vektorski prostor.

Ako je $X=\mathbb{R}^2$ i $S=\mathbb{R}$, tada se u skupu $\mathbb{R}^2$ uvodi operacija $+$ na sledeći način

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2).$$

i množenje vektora (x,y) skalarom $\lambda\in\mathbb{R}$ sa

$$\lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,\lambda y).$$

Tada je $(\mathbb{R}^2,+)$ Abelova grupa, pri čemu je u ovom prostoru $O=(0,0)$.

Za množenje vektora skalarom važe sledeće osobine:

1. $(\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ 1\cdot(x,y)=(x,y)$,

2. $(\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R})\ (\lambda\mu)\cdot(x,y)=\big((\lambda\mu)x,(\lambda\mu)y\big)=\lambda(\mu x,\mu y)$,

3. $(\forall\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\,\lambda\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\lambda\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)&=\lambda(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\lambda x_1+\lambda x_2,\lambda y_1+\lambda y_2)=\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\lambda x_2,\lambda y_2)=\lambda(x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2),\end{aligned}$$

4. $(\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\,\lambda\mu\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)(x,y)&=\big((\lambda+\mu)x,(\lambda+\mu)y\big)=(\lambda x+\mu x,\lambda y+\mu y)=\\&=\lambda(x,y)+\mu(x,y).\end{aligned}$$

Ukupno, imamo da je $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ vektorski prostor.

LINEARNA ZAVISNOST I NEZAVISNOST VEKTORA, LINEARNA KOMBINACIJA, VEKTORSKI POTPROSTOR, LINEAL

Skup vektora je skup međusobno linearno zavisnih vektora ako i samo ako je u njemu neki od vektora linearna kombinacija preostalih, u suprotnom oni su linearno nezavisni.

Za vektore $x_1, x_2, \dots, x_n \in X \setminus \{0\}$, $(n \in \mathbb{N})$ kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari $k_1, k_2, \dots, k_n$ od kojih bar jedan nije jednak 0 , takvi da je

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n = O, \qquad (*)$$

gde je $O \in X$.

Vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ su linearno nezavisni, ako jednakost (*) važi samo ako $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$,pri čemu element 0, na desnoj strani ove jednakosti, pripada skupa X .

Vektor oblika $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n$, gde su $k_1, k_2, \dots, k_n$ skalari, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektori, naziva se linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Naredna dva stava govore o važnim osobinama linearne zavisnosti i nezavisnosti.

Stav. Ako je skup vektora $x_1, x_2, \dots, x_m$ linearno nezavisan, tada je i svaki podskup tog skupa linearno nezavisan. Ako su neki od $x_1, x_2, \dots, x_m$ linearno zavisni vektori, tada su svi vektori $x_1, x_2, \dots, x_m$ linearno zavisni.

Stav. Skup vektora $x_1, x_2, \dots, x_m$ je linearno zavisan ako i samo ako je bar jedan od njih linearna kombinacija ostalih.

Neprazan skup Y, $Y \subset X$, je potprostor vektorskog prostora X, ako je Y vektorski prostor u odnosu na operacije koje važe za X.

Ako sa $L(Y)$ obeležimo skup svih linearnih kombinacija vektora iz skupa Y, onda je $L(Y)$ potprostor od X. Skup svih linearnih kombinacija $L(Y)$ skupa $Y \subset X$, naziva se lineal nad skupom X.

VIDEO KLIPOVI

Snimak sa Youtube-a: o vektorskim prostorima.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Baza dimenzija vektorskog prostora

KONAČNO DIMENZIONALNI VEKTORSKI PROSTOR

Maksimalni broj vektora koji čine skup međusobno linearno nezavisnih vektora u nekom vektorskom prostoru naziva se dimenzija prostora. Skup ovih vektora čini njegovu bazu.

Za vektorski prostor X se kaže da je netrivijalan ako u njemu postoji bar jedan nenula vektor. Za svaki ovakav prostor može se postaviti pitanje maksimalnog broja vektora koji u tom prostoru čine skup međusobno linearno nezavisnih vektora. Ako je taj broj konačan, takav prostor se naziva konačno dimenzionalan, a u suprotnom je beskonačno dimenzionalan (takvi prostori ovde neće biti razmatrani).

Pomenuti broj, za posmatrani vektorski prostor X, jeste njegova (algebarska) dimenzija. Ako je dimenzija nekog vektorskog prostora X iznosi n , $n \in \mathbb{N}$, takav prostor se naziva n -dimenzionalan,a taj broj se označava sa $dim X$. Dakle, u takvom prostoru ima najviše n linearno nezavisnih vektora, dok svakih $n+1$ vektora su linearno zavisni.

Za svaki n -dimenzionalni vektorski prostor X skup vektora $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ je njegova (algebarska) baza ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ skup linearno nezavisnih vektora. Iz prethodnog možemo uočiti da je broj elemenata (vektora) baze nekog vektorskog prostora jednak njegovoj dimenziji. Netrivijalni vektorski prostor u sebi sadrži beskonačno mnogo različitih baza.

Svaku fiksiranu (proizvoljno izabranu) bazu nekog vektorskog prostora X nazivamo koordinatni sistem. Svaki vektor $x \in X$, gde je vektorski prostor X n -dimenzionalan, može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, tj. postoje skalari $k_1, k_2, \ldots, k_n$ takvi da je

$$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n,$$

Za ovakav vektor x uobičajeno je da se skalari obeležavaju sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i oni se nazivaju redom prva, druga,..., n -takoordinata vektora x u odgovarajućoj bazi. Tada pišemo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

PRIMER

Baza i dimenzija prostora $\mathbb{R}^2$.

U prethodnom primeru smo pokazali da je $\mathbb{R}^2$ vektorski prostor. Uočimo vektore $e_1=(1,0), e_2=(0,1)\in\mathbb{R}^2$. Oni su linearno nezavisni, jer je

$$k_1(1,0)+k_2(0,1)=(0,0) \text{ tj. } (k_1,0)+(0,k_2)=(0,0) \text{ tj. } (k_1,k_2)=(0,0) \text{ tj. } k_1=k_2=0.$$

Osim toga, postoje skalari $k_1\neq 0$ i $k_2\neq 0$ takvi da je $(x,y)=k_1(1,0)+k_2(0,1)$, odnosno

$$v=k_1e_1+k_2e_2,$$

za svako $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Ovo važi jer je

$$x(1,0)+y(0,1)=(x,0)+(0,y)=(x,y),$$

tj.

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1),$$

pa je

$$v=xe_1+ye_2, \text{ gde je } x\neq 0 \ \vee \ y\neq 0.$$

Ovo znači da u prostoru $\mathbb{R}^2$ postoje najviše dva linearno nezavisna vektora. To dalje znači da je $\dim\mathbb{R}^2=2$, a da vektori $e_1=(1,0)$ i $e_2(0,1)$ čine jednu bazu prostora $\mathbb{R}^2$, tj. $E=\{e_1,e_2\}$.

Napomena. Bilo koja dva linearno nezavisna vektora (x_1,y_1) i (x_2,y_2) čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Oni čine i njegov koordinatni sistem. U praksi, mnogo je lakše raditi sa vektorima baze koji su ortogonalni i čija je norma (intenzitet) jednaka 1. Takva baza se naziva ortonormirana baza, a vektori takve baze se nazivaju ortovi. Za prostor $\mathbb{R}^2$ vektori $e_1=(1,0)$ i $e_2=(0,1)$ su ortovi ičine njegovu ortonormiranu bazu. U srednjoj školi ste vektor e_1 označavali sa $\vec{i}$, a vektor e_2 sa $\vec{j}$. Postupak kojim se od vektora neke baze dobija ortonormirana baza naziva se Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije. O tom postupku biće više reči na narednom predavanju.

Poglavlje 3

Linearni operator

DEFINICIJA LINEARNOG OPERATORA

Linearni operator predstavlja preslikavanje jednog vektorskog prostora u drugi koji poseduje osobine aditivnosti i homogenosti.

Definicija. Neka su X_1 i X_2 dva vektorska prostora nad poljem skalara S. Preslikavanje $L : X_1 \mapsto X_2$ se naziva linearni operator ako i samo ako ispunjava uslove:

1. $(\forall x, y \in X_1) L(x + y) = L(x) + L(y)$,

2. $(\forall x \in X_1)(\forall \alpha \in S) L(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot L(x)$.

Prva osobina preslikavanja L se naziva aditivnost, a druga osobina homogenost. Iz prethodne dve osobine se može uočiti da za linearni operator L važi

$$(\forall x, y \in X_1)(\forall \alpha, \beta \in S) L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y).$$

Preslikavanje L uvedeno prethodnom definicijom se naziva linearni operator ili homomorfizam vektorskog prostora X_1 u vektorski prostor X_2.

Specijalno, ako je linearni operator L bijekcija tada se on naziva izomorfizam vektorskog prostora X_1 na vektorski prostor X_2. Ovakvi prostori se nazivaju izomorfni prostori i koristi se oznaka $X_1 \cong X_2$. Svakako, linearni operator može preslikavati vektorski prostor X_1 u samog sebe.

TRANSFORMACIJA VEKTORSKIH PROSTORA

Primenom vektorskog operatora može se m dimenzionalni vektorski prostor preslikati u n dimenzionalni vektorski prostor, pri čemu se baza prvog prostora preslikava u bazu drugog.

Neka je L linearni operator koji m dimenzionalni vektorski prostor X_1 sa bazom $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ preslikava u n dimenzionalni vektorski prostor X_2 sa bazom $\{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$.

$$\begin{aligned}
L(e_1) &= a_{11}e_1' + a_{12}e_2' + \ldots + a_{1n}e_n', \\
L(e_2) &= a_{21}e_1' + a_{22}e_2' + \ldots + a_{2n}e_n', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L(e_m) &= a_{m1}e_1' + a_{m2}e_2' + \ldots + a_{mn}e_n',
\end{aligned}$$

gde su $a_{ij}, (i \in \{1,2,3,\ldots,m\}, (j \in \{1,2,3,\ldots,n\})$ skalari iz S. Ako izaberemo proizvoljan vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m$ iz prostora X_1, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ koordinate vektora x, tada imamo:

$$\begin{aligned} L(x) &= L(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m) = x_1L(e_1) + x_2L(e_2) + \ldots + x_mL(e_m) = \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{12}e'_2 + \ldots + a_{1n}e'_n) + x_2(a_{21}e'_1 + a_{22}e'_2 + \ldots + a_{2n}e'_n) + \ldots + \\ &\quad + x_m(a_{m1}e'_1 + a_{m2}e'_2 + \ldots + a_{mn}e'_n) \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} L(x) &= L(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m) = x_1L(e_1) + x_2L(e_2) + \ldots + x_mL(e_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m)e'_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m)e'_2 + \ldots + \\ &\quad + (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m)e'_n \end{aligned}$$

MATRICA LINEARNOG OPERATORA

Transformacije jednog vektorskog prostora u drugi se izvršava primenom matrice linearnog operatora. Zapravo, ova matrica predstavlja taj linearni operator.

Zbog linearnosti, operator L je u potpunosti određen skalarima a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$. Takođe, kako je svaki vektor jedinstveno određen bazom vektorskog prostora, tada su i skalari a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ jedinstveno određeni operatorom. Pomeniti skalari se obično smeštaju u sledeću matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matrica A se naziva matrica linearnog operatora L u odnosu na zadate baze.

Kao što smo rekli, linearni operator može preslikavati vektorski prostor X_1 u samog sebe. U ovom slučaju, za zadatu bazu vektorskog prostora X_1 linearni operator L je jednoznačno određen jednom kvadratnom matricom. Dakle, za fiksiranu bazu nekog n -dimezionalnog vektorskog prostora postoji jednoznačna korespodencija između kvadratnih matrica reda n i linearnog operatora koji taj vektorski prostor preslikava u samog sebe.

SOPSTVENI VEKTOR I SOPSTVENA VREDNOST MATRICE

Za linearni operator nad vektorskim prostorom X, postoji vektor tog prostora, koji se naziva sopstveni vektor te matrice za koji važi $A \cdot x = \lambda \cdot x, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Neka je data kvadratna matrica $A \in M_n$, koja predstavlja linearni operator nad vektorskim prostorom X. Ako za datu maricu A postoji vektor $x \in X, x \neq 0$ takav da važi

$$A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

za $\lambda \in R \setminus \{0\}$, tada se taj vektor naziva (i svi vektori sa ovakvom osobinom u odnosu na matricu A) sopstveni vektor matrice A. Skalar λ se naziva sopstvena vrednost matrice A.

Stav. Ako su λ sopstvena vrednost i x spostveni vektor za kvadratnu matricu $A \in M_n$, koja predstavlja linearni operator nad vektorskim prostorom X. Tada je x takođe odgovarajući sopstveni vektor opratora

$$B = P(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots a_n A^n,$$

koji odgovara soptvenoj vrednosti $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots a_n\lambda^n$.

Stav. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sopstveni vektori operatora A koji odgovaraju međusobno različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Tada je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sistem linearno nezavisnih vektora.

Napomena. U literaturi se sopstveni vektor često naziva svojstveni vektor ili karakteristični vektor, dok se sopstvena vrednost naziva i svojstvena vrednost ili karakteristična vrednost.

KEJLI - HAMILTONOV STAV

Ovim stavom se tvrdi da je kvadratna matrica rešenje (nula) svog karakterističnog polinoma.

Kako bi se odredilo da li za datu matricu A postoje sopstveni vektori, potrebno je odrediti λ iz matrične jednačine $A \cdot x = \lambda \cdot x$. Odavde je $A \cdot x - \lambda \cdot x = 0$, tj. $(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$. U razvijenom obliku poslednja matrična jednačina izgleda:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj}-\lambda & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Netrivijalna rešenja ovog sistema predstavljaju koordinatne reprezentacije sopstvenih vektora operatora A u bazi B. Za njih kažemo da su sopstveni vektori matrice A. Vrednosti λ za koje postoje ova netrivijalna rešenja predstavljaju odgovarajuće sopstvene vrednosti matrice A. Određujemo ih iz karakteristične jednačine $\det(A-\lambda I)=0$, tj. uslova

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj}-\lambda & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Pritom, polinom

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj}-\lambda & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

nazivamo karakteristični polinom matrice A.

Stav (Kejli - Hamiltonov stav). Neka je $P(\lambda)$ karakteristični polinom linearnog operatora A . Tada je $P(A)=0$.

Napomena. Na desnoj strani jednakosti $P(A)=0$ nalazi se nula matrica koja je kvadratna i istog reda kao i matrica A. Ona se u ovom kontekstu naziva i nula operator.

Napomena. Generalno govoreći, određivanje sopstvenih vrednosti kvadratne matrice velikog formata je dugotrajan proces. Međutim, ako je matrica čije se sopstvene vrednosti određuju simetrična, tada su rešenja karakterističnog polinoma uvek realna. Takođe, važi da za svaku sopstvenu vrednost uvek postoji sopstveni vektor.

PRIMER

Određivanje sopstvenih vrednosti matrice.

Naći sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Karakterističnu jednačinu određujemo iz uslova

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Tada dobijamo da je karakteristična jednačina $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$ čija su rešenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2.$

Sopstveni vektor, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_1 određuje iz uslova

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tj. } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, odgovarajući homogen sistem se svodi na samo jednujednačinu $x_1 - x_2 = 0.$ Sistem ima beskonačno mnogo rešenja $x_1 = x_2 = t,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.Tada, sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = 1$ ima oblik

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t,\ \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sličnim postupkom, možemo odrediti sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_2 = -2$. On ima oblik

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot t,\ \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Poglavlje 4

Unitarni, normirani i metrički prostor

DEFINICIJA UNITARNOG PROSTORA

Vektorski prostor u kojem je definisan skalarni proizvod naziva se unitarni vektorski prostor.

Vektorski prostor u kojem je definisan skalarni proizvod naziva se unitarni prostor čija definicija je data u nastavku. Ovde će biti posmatran isključivo realan vektorski prostor.

Definicija. Neka je dat konačno dimenzionalan realan vektorski prostor X. Ako je u njemu definisano preslikavanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \; X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

koje ima osobine

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ i $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo je $x = 0$,

2. $(\forall x, y \in X) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

3. $(\forall x, y, z \in X)(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z \rangle = \lambda \cdot \langle x, z \rangle + \mu \cdot \langle y, z \rangle$.

tada se prostor X naziva unitaran prostor, a dato preslikavanje skalarni proizvod (unutrašnji proizvod) dva vektora.

Osobina 1 iz prethodne definicije je osobina nenegativnosti skalarnog proizvoda. Osobina 2 predstavlja simetričnost (komutativnost), a osobina 3 linearnost skalarnog proizvoda po prvoj koordinati. Zbog osobine 2, linearnost skalarnog proizvoda važi i po drugoj koordinati.

Napomena. Kada bi se umesto realnog vektorskog prostora posmatrao kompleksni vektorski prostor, tada se se skalarni proizvod naziva Ermiteov proizvod i on bi bio antisimetričan (promenila bi se osobina 2 iz prethodne definicije) i antilinearan (promenila bi se osobina 3 iz prethodne definicije).

NORMIRAN VEKTORSKI PROSTOR

Norma vektora predstavlja kvadratni koren iz skalarnog proizvoda vektora sa samim sobom.

Definicija. Norma (dužina, intenzitet) vektora x iz unitarnog prostora X , u oznaci $||x||$ je nenegativan broj $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Dakle, norma predstavlja nenegativno preslikavanje iz unitarnog prostora X u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ tj. $||.|| : X \mapsto \mathbb{R}$.

Vektor $x \in X$ za koji važi $\|x\| = 1$ naziva se normiran vektor ili jedinični vektor. Ako bazu vektorskog prostora čini skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ za koji važi

$$(\forall\ i = 1, \ldots, m)||x_i|| = 1,$$

ta se takva baza naziva se normirana baza.

Za normu vektora važi poznata Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakost, koja je data u narednom stavu.

Stav. Za proizvoljne vektore x i y iz unitarnog prostora X važi sledeća nejednakost

$$|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \cdot \| y \|.$$

Jednakost u prethodnom stavu važi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.
U sledećem stavu su date osobine norme vektora.

Stav. Za proizvoljne vektore x i y iz unitarnog prostora X i proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ važi:

1. $\|x\| \geq 0$,

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \| x \|$,

4. $\|x + y\| \leq \| x \| + \| y \|$.

Osobine 1 i 2 govore o nenegativnosti norme, dok se osobina 4 naziva nejednakost trougla. Jednakost u njoj važi ako i samo ako je $y = 0$ ili $x = \lambda y$ $(\lambda \geq 0)$. Ova osobina je posledica nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski.
Definicija. Vektorski prostor X takav da je svakom vektoru $x \in X$ pridružen broj $||x||$ za koji važe osobine iz prethodnog stava naziva se normiran vektorski prostor.

Svaki unitarni prostor jeste i normiran prostor, jer uvedeni skalarni proizvod na njemu direktno definiše i normu tog prostora pomoću $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

UGAO IZMEĐU DVA VEKTORA

Primenom nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski, za dva nenula vektora, može se odrediti kosinus ugla između njih.

Iz nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski, za dva nenula vektora, imamoda važi:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \| x \| \cdot \| y \| \Leftrightarrow \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x \| \cdot \| y\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x \| \cdot \| y\|} \leq 1.$$

Vrednost $k(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \in [-1,1]$ predstavlja kosinus ugla između vektora x i y. Dakle,ugao između vekora x i y se određuje na sledeći način

$$\varphi = \measuredangle(x,y) = \arccos(k(x,y)) \in [0,\pi].$$

Za nulti vektor u posmatranom unitarnom prostoru ne može se definisati ugao između njega i nekog drugog vektora.

Ako je dat vektor $x \neq 0$ unitarnog prostora X iako je dat skup vektora $\{y \in X \mid k(x,y) = 1 \vee k(x,y) = -1\}$, tada se za vektor x i bilo koji vektor iz prethodnog skupa kaže da su istog pravca (da su kolinearni ili paralelni). Za $k(x,y) = 1$ imamo da je $\varphi = 0$, pa za vektore x i y se kaže da su istog smera, dok za $k(x,y) = -1$ važi da je $\varphi = \pi$, pa se za vektore x i y kaže da su suprotnog smera.

Shodno prethodno rečenom, nulti vektor u odnosu na bilo koji drugi vektor iz istog unitarnog pravca ne može učestvovati u zadavanju pravca.

Ako za dva nenula vektora x i y važi da je $k(x,y) = 0$, tada je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Takve vektore nazivamo ortogonalni vektori. Dva nenula vektora x i y su međusobno ortogonalna ako i samo ako je $\langle x,y\rangle = 0$.

Da su dva vektora x i y ortogonalna označavamo sa $x \perp y$. Nula vekor ne može učestvovati u procesu zadavanja ortogonalnosti.

Napomena. Kao što smo rekli, neki vektorski prostor može imati beskonačno mnogo baza, a samim tim i beskonačno mnogo koordinatnih sistema. Međutim, u praksi se bira ona baza tj. koordinatni sistem čiji su vektori normirani i pritom su međusobno ortogonalni. Takva baza se naziva ortonormirana baza.

METRIČKI PROSTOR

Metrika je indukovana normom, odnosno skalarnim proizvodom. Vektorski prostor u kome je moguće indukovati metriku naziva se metrički prostor.

Za dati normirani vektorski prostor X preslikavanje

$$d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

definisano na sledeći način

$$d(x, y) = \| x - y \|,$$

za svako $x, y \in X$ naziva se rastojanje ili metrika između vektora x i y. Očigledno je da je ovako definisana metrika indukovana normom, odnosno skalarnim proizvodom koji je uveden na vektorskom prostoru.

Dakle, neka je dat vektorski prostor X koji je unitaran i neka je na njemu indukovana rastojanje d opisano na prethodni način. Tada to rastojanje ima osobine:

a) $d(x, y) \geq 0$ i $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$, sve $x, y \in X$,

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za sve $x, y, z \in X$.

Osobina pod a) govori o nenegativnosti metrike, dok ona pod b) govori o njenoj simetričnosti. Ove osbine direktno proizilaze iz osobine norme, jer metrika njome indukuje. Osobina pod c) se naziva nejednakost trougla. Vektorski prostor u kome je moguće indukovati metriku se naziva metrički prostor.

Poglavlje 5

Vektorski prostor

Rn

OPERACIJE S VEKTORIMA U $\mathbb{R}^n$

Vektori u prostoru $\mathbb{R}^n$ se predstavljaju kao uređene n -torke. Operacije sabiranja ovih vektora, kao i množenja vektora iz ovog prostora skalarom se zasniva na tome.

Skup $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$uređenih n -torki realnih brojeva predstavlja realan vektorski prostor gde je operacija sabiranja vektora definisana sa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

i gde je operacija množenja vektora skalarom definisana sa

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n),$$

gde su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ proizvoljni vektori iz $\mathbb{R}^n$, a $\lambda \in \mathbb{R}$. Nije teško videti da je $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ je vektorski prostor (biće dokazano na vežbama).

Vektori

$$e_1 = (\underbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}_{n}), e_2 = (\underbrace{0, 1, 0, \ldots, 0}_{n}), \ldots, e_n = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots, n}_{n})$$

čine jednu bazu uvektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ tj. $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Pomenuta baza se naziva kanonska baza prostora $\mathbb{R}^n$.

Napomena.U mnogi primenama, kao i u određenim matematičkim notacijama vrlo često se uređena n -torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predstavlja u obliku matrice kolone $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. U ovom slučaju, za rad sa njima, koriste se odgovarajuće operacije: sabiranje matrica i množenje matrice skalarom. Svakako, skup svih matrica kolona, sa pomenutim operacijama jeste vektorski prostor.

SKALARNI PROIZVOD, NORMA I METRIKA U PROSTORU $\mathbb{R}^n$. PRIMERI

Prostor $\mathbb{R}^n$ koji je snabdeven skalarnim proizvodom naziva se n -dimenzionalni Euklidski prostor. On je unitaran, normiran i metrički prostor

U prostoru $\mathbb{R}^n$ skalarni proizvod se uvodi sledećom definicijom.

Definicija. Skalarni proizvod vektora $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, u oznaci $\langle x,y\rangle$ ili $x\circ y$ je realan broj

$$\langle x,y\rangle = x\circ y = x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Prostor $\mathbb{R}^n$ koji je snabdeven skalarnim proizvodom uvedenim na prethodni način naziva se n-dimenzionalni Euklidski prostor i označava se sa $\mathbb{E}^n$.

Za vektore $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{E}^n$ norma vektora x se definiše na sledeći način

$$||x|| = \sqrt{x\circ x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

a metrika

$$d(x,y)=||x-y||=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Primer. Za vektore $e_1=(\underbrace{1,0,0,\ldots,0}_{n}), e_2=(\underbrace{0,1,0,\ldots,0}_{n})$ važi

$$e_1\circ e_2=0,\quad ||e_1||=1\quad \text{i}\quad d\big(e_1,e_2\big)=\sqrt{2}.$$

Primer. Dati su vektori $\vec{a}=(1,2)$ i $\vec{b}=(3,-4)$. Odrediti $||\vec{a}||$, $||\vec{b}||$, $<\vec{b},\vec{a}>$, kao i $d(a,b)$. Važi da je

$$||\vec{a}||=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\ ||\vec{b}||=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,\ <\vec{b},\vec{a}>=3\cdot1+(-4)\cdot2=-5,$$
$$d(a,b)=\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Poglavlje 6

Pokazna vežba

VEKTORSKA PROSTOR USMERENIH DUŽI 1 (20 MINUTA)

Zadavanje usmerene duži, sabiranje i oduzimanje usmerenih duži.

Usmerena duž p $\overrightarrow{AB}$ predstavlja vektor $\vec{a}$ određen :

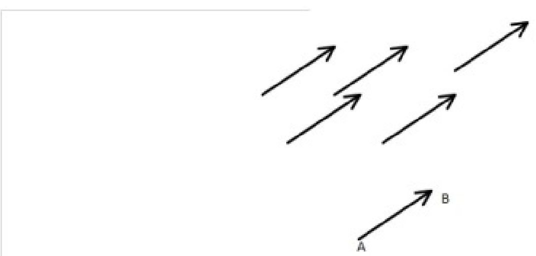
- svojom dužinom ili modulom ili intenzitetom: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

- pravcem kojem pripada

- smerom na tom pravcu.

Jednakost vektora definiše se kao podudarnost u dužini, pravcu i smeru. Dve usmerene duži predstavljaju isti vektor ako su paralelne, iste dužine i iste orijentacije.

Vektor se ne menja paralelnim pomakom - translacijom. Svi vektori istog pravca, smera i intenziteta su međusobno jednaki i pripadaju jednoj klasi vektora pa se može odabrati jedan predstavnik klase.



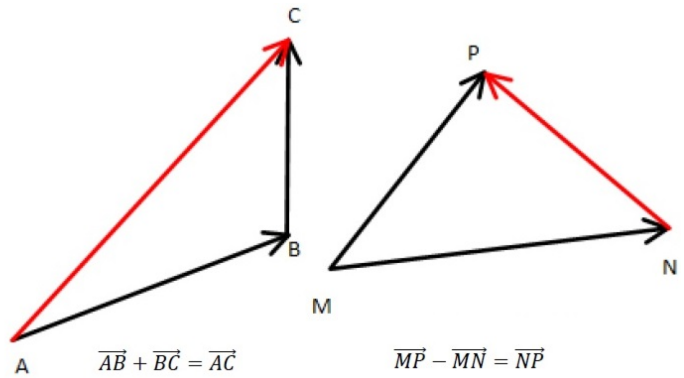
Slika 6.1 Zadavanje usmerene duži (izvor: Autor).

Napomena. U ovom slučaju termini vektor i usmerena duž ćemo smatrati sinonimima.

Pojam usmerene duži je pojam sa kojim ste susreli još u osnovnoj školi i to kako na časovima matematike, tako i na časovima fizike. Poznato je da se u vezi sa ovim pojmom mogu uvesti naredne dve operacije:

- operacija sabiranja dve usmerene duži i
- operacija množenja usmerene duži skalarom (brojem).

Usmerene duži se sabiraju tako što se druga usmerena duž translira da se njen početak poklopi sa krajem prve. Rezultat sabiranja je usmerena duž čiji se početak poklapa sa početkom prve, a kraj sa krajem druge. Usmerene duži se oduzimaju tako što se prva sabere sa suprtnom usmerenom duži u doda suprotna vrednost drugog.



Slika 6.2 Sabiranje i oduzimanje vektora (izvor: Autor).

VEKTORSKI PROSTOR USMERENIH DUŽI 2

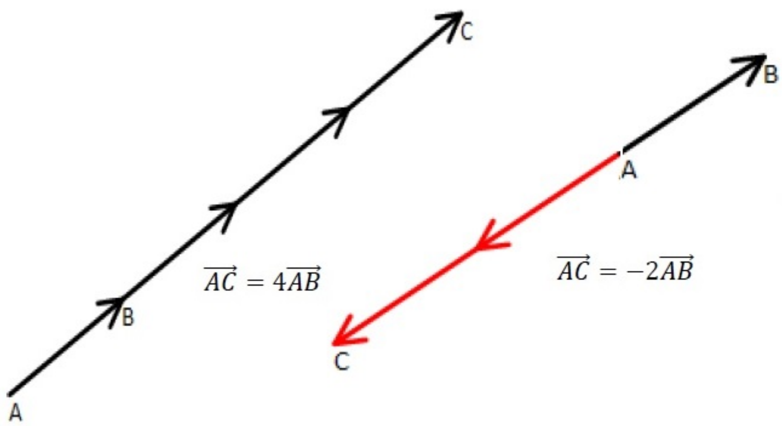
Sabiranje i oduzimanje vektora, množenje vektora skalarom

Oduzimanje vektora () može se uvestiti pojam suprotnog vektora.

Suprotni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju istu dužinu i pravac, ali su suprotnog smera, tj. važi da je $\vec{a} = -\vec{b}$, tj $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Nula - vektor je vektor čija je dužina jednaka nuli, tj. tačka $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Jedinični vektor je vektor čija je dužina jednaka 1.

Vektor se množi skalarom (brojem) različitim od 0 tako što se njegov intenzitet pomnoži tim brojem, pravac ostaje isti a smer se menja ukoliko množimo negativnim brojem.



Slika 6.3 Množenje usmerene duži skalarom (izvor: Autor).

Kako smo na predavanjima upoznali pojam vektorskog prostora, sada se može postaviti pitanje da li skup svih usmerenih duži, u kome su na opisani način uvedene operacije sabiranja vektorskih duži i operacija množenja usmerene duži skalarom predstavlja vektorski prostor.Odgovor je potvrdan.

Naime, u ovom slučaju specijalno vektor (iz opšte terminologije o vektorskim prostorima) predstavlja usmerenu duž. Među takvim objektima uvedene su operacije sabiranja usmerenih duži i operacija množenja usmerene duži skalarom. Nije teško videti da je sabiranje usmerenih duži komutativna i asocijativna operacija, da je suprotan vektor, zapravo inverzni element za saboranje usmerenih duži. S druge strane i operacija množenja usmerene duži skalarom zadovoljava sve osobine iz definicije vektorskog prostora.

ZADATAK 1 - 1. DEO (25 MINUTA)

Dokaz da je prostor $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor.

Dokazati da je, za proizvoljan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, skup $\mathbb{R}^n$ jedan vektorski prostor dimenzije n.

Rešenje. Važi da je

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Za proizvoljne vektore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, njihovo sabiranje definišemo na sledeći način

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

a množenje vektora x skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ sa

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Sve aksioma vektorskog prostora se mogu sada proveriti. Zaista, operacija sabiranja vektora je asocijativna, jer je asocijativna operacija sabiranja realnih brojeva po svakoj od koordinata. Nula vektor, u oznaci O, dat je sa $O = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}) \in \mathbb{R}^n$ i važi da je

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\exists O \in \mathbb{R}^n)\ x + O = O + x = x.$$

Suprotan vektor vektora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$je vektor $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.Dakle, važi da je

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\exists -x \in \mathbb{R}^n)\ \$x + (-x) = (-x) + x = O.$$

Očigledno je struktura $(\mathbb{R}^n, +)$ grupa. Ona je i Abelova grupa jer za svaka dva vektora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$važi $x + y = y + x$.

ZADATAK 1 - 2. DEO

Dokaz da je struktura $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ vektorski prostor.

Za množenje vektora skalarom važe sledeće osobine:

1. $(\forall\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n)\ 1\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

2. $(\forall\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n)\ (\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R})\ (\lambda\mu)\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
$=\big((\lambda\mu)x_1,(\lambda\mu)x_2,\ldots,(\lambda\mu)x_n\big)=\lambda(\mu x_1,\mu x_2,\ldots,\mu x_n)$,

3. $(\forall\,(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n)\ (\forall\,\lambda\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\lambda\big((x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)\big)&=\lambda(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)=\\&=(\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda x_2+\lambda y_2,\ldots,\lambda x_n+\lambda y_n)=\\&=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)+(\lambda y_1,\lambda y_2,\ldots,\lambda y_n)=\\&=\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\lambda(y_1,y_2,\ldots,y_n),\end{aligned}$$

4. $(\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\,\lambda\mu\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\big((\lambda+\mu)x_1,(\lambda+\mu)x_2,\ldots,(\lambda+\mu)x_n\big)=\\&=(\lambda x_1+\mu x_1,\lambda x_2+\mu x_2,\ldots,\lambda x_n+\mu x_n)=\\&=\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\mu(x_1,x_2,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Ukupno, imamo da je $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ vektorski prostor.

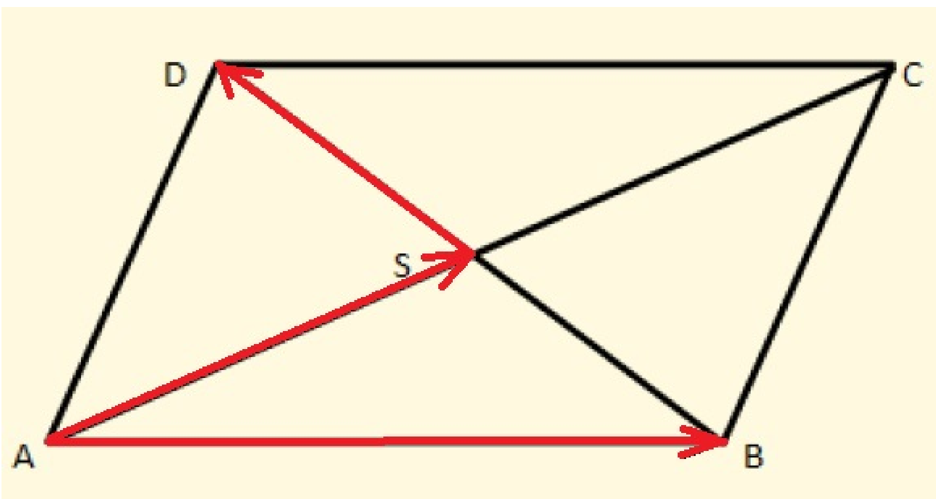
ZADATAK 2 (5 MINUTA)

Vektorska algebra sa usmerenim dužima

Neka je S središte dijagonala paralelograma ABCD. Izračunati

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{AS}$.

Rešenje. Iz činjenice da se dijagonale paralelograma polove (videti sliku) sledi da je $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SC}$ i $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AC}$.



Slika 6.4 Grafički prikaz problema (izvor: Autor).

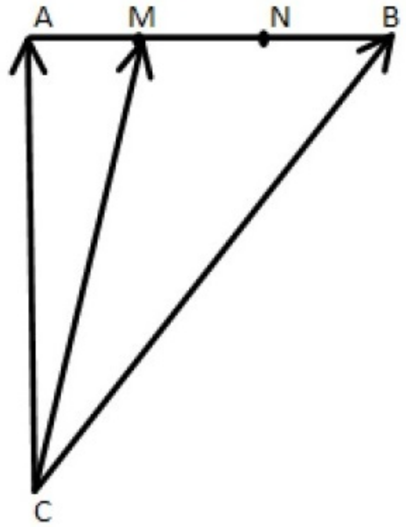
ZADATAK 3 (5 MINUTA)

Vektorska algebra sa usmerenim dužima.

Stranica AB trougla ABC podeljena je tačkama M i N na tri jednaka dela: $|AM| = |MN| = |NB|$. Vektor $\overrightarrow{CM}$ predstaviti kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CB} \\
\vec{a} + \overrightarrow{AB} &= \vec{b} \\
\overrightarrow{AB} &= \vec{b} - \vec{a} \\
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{CM} \\
\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) &= \overrightarrow{CM} \\
\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} &= \overrightarrow{CM}
\end{aligned}$$



Slika 6.5 Grafički prikaz problema (izvor: Autor).

ZADATAK 4 (5 MINUTA)

Skalarni proizvod vektora – vektori nisu zadati koordinatama.

Odrediti $||\vec{c}||$ ako je $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, ||\vec{a}|| = 3,\ ||\vec{b}|| = 5$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Rešenje. Važi da je

$$\begin{aligned}
||\vec{c}||^2 &= < \vec{c}, \vec{c} > = < \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} > = \\
&= < \vec{a}, \vec{a} > + < \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{b}, \vec{a} > + < \vec{b}, \vec{b} > = \\
&= ||\vec{a}|| + 2 < \vec{a}, \vec{b} > + ||\vec{b}|| = \\
&= ||\vec{a}||^2 + 2||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos 120^\circ + ||\vec{b}||^2 = \\
&= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 = \\
&= 9 - 15 + 25 = \\
&= 19.
\end{aligned}$$

Tada je $||\vec{c}|| = \sqrt{19}$.

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Vektori koji nisu zadati koordinatama.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ grade ugao $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Ako je intenzitet vektora $||\vec{a}|| = \sqrt{3}$ i $||\vec{b}|| = 1$ izračunati ugao θ između vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$, gde je $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$i $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Rešenje. Najpre, imamo

$$< \vec{p}, \vec{q} > = < \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} > = ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2 = 3 - 1 = 2.$$

Dalje, imamo

$$\begin{aligned}
||\vec{p}|| = \sqrt{< \vec{p}, \vec{p} >} = \sqrt{(< \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} >} = \sqrt{||\vec{a}||^2 + 2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cos\varphi + ||\vec{b}||^2} \\
= \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Na sličan način se može dobiti

$$||\vec{q}|| = \sqrt{\vec{q} \circ \vec{q}} = 1 \qquad \text{(pokazati za vežbu)}.$$

Konačno je

$$\cos\theta = \frac{< \vec{p}, \vec{q} >}{||\vec{p}|| \cdot ||\vec{q}||} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Odavde je

$$\theta = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Primena skalarnog proizvoda vektora.

Neka vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pripadaju ravni ω . Ako je vektor $\vec{c}$ normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, onda će on biti normalan i na ma koji vektor $\vec{d}$ ravni ω.

Rešenje. Pretpostavimo da su vektori $\vec{a}, \vec{b} \subset \omega$ nekolinearni vektori (tj. da su oni linearno nezavisni vektori) i neka je vektor $\vec{c}$ takav da je $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$. Treba dokazati da je tada $\vec{c} \perp \vec{d}$, gde je $\vec{d} \subset \omega$ proizvoljan vektor. Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni, tada se svaki treći vektor iz ravni ω može predstaviti kao njihova linearna kombinacija. Dakle, postoje skalari α i β takvi da je $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Tada imamo:

$$< \vec{c}, \vec{d} > = < \vec{c}, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} > = \alpha \cdot < \vec{c}, \vec{a} > + < \beta \cdot \vec{c}, \vec{b} > = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \perp \vec{d}.$$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Jedinstvenost nula vektora i jednistvenost suprotnog vektora u vektorskom prostoru.

Dokazati da u vektorskom prostoru X postoji samo jedan neutralan element O za sabiranje vektora. Takođe, dokazati da u vektorskom prostoru X za svaki vektor $x \in X$ postoji samo jedan suprotan vektor $-x$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva neutralna elementa O_1 i O_2. Tada je za proizvoljan vektor $x \in X$ ispunjeno

$$x + O_1 = x + O_2 = x.$$

Odavde je

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2.$$

Dakle, dobijamo da je $O_1 = O_2$.

Pretpostavimo da za neki vektor $x \in X$ postoje dva suprotna vektora x_1 i x_2. Tada je

$$x + x_1 = x + x_2 = O.$$

Sada je

$$x_1 = x_1 + O = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = O + x_2 = x_2.$$

Dakle, dobili smo da je $x_1 = x_2$.

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Dokaz da za svaki vektor x nekog vektorskog prostora X važi $-x = (-1) \cdot x$.

Dokazati da u svakom vektorskom prostoru X za proizvoljan vektor $x \in X$ važi $-x = (-1) \cdot x$.

Rešenje. Kako je za proizvoljan vektor x ispunjeno

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x. \qquad (*)$$

Za ovaj vektor x važi da je

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Tada, zbog jedinstvenosti neutralnog elementa (nula vektora) dobijamo da je $0 \cdot x = O$. Tada iz relacije $(*)$ imamo da je $x + (-1) \cdot x = 0 \cdot x = O$. Iz jedinstvenosti suprotnog vektora, vektoru x dobijamo da je $-x = (-1) \cdot x$.

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Među linearno nezavisnim vektorima ne može biti nula vektora.

a) Ako su u vektorskom prostoru X vektori $x_1, x_2, \ldots, x_k (k \geq 1)$ linearno nezavisni, dokazati da tada svaki od njih ne može biti nula vektor.

b) Ispitati da li su vektori $\vec{a} = (0, 0)$ i $\vec{b} = (1, 2)$ u prostoru $\mathbb{R}^2$ linearno zavisni.

c) Ispitati da li su vektori $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ i $\vec{c} = (4, 4)$ u prostoru $\mathbb{R}^2$ linearno zavisni.

Rešenje. a) Suprotno tvrđenju, pretpostavimo da je neki od ovih vektora nula vektor. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $x_1 = O$. Tada važi da je

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_k = O.$$

Na osnovu definicije linearne zavisnosti vektora i na osnovu prethodne relacije, zaključujemo da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_k$linearno nezavisni. Na osnovu dobijene kotradikcije, zaključujemo da svako od vektora $x_1, x_2, \ldots, x_k (k \geq 1)$ mora biti različit od nula vektora.

b) Kako je vektor $\vec{a}$ nula vektor u prostoru $\mathbb{R}^2$, na osnovu dela pod a) ovog zadatka, zaključujemo da su ovi vektori linearno zavisni u prostoru $\mathbb{R}^2$. .

c) Kako je $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, a data su tri vektora, tj. njihov broj je ve'i od dimenzije prostora, zaklučujemo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

ZADATAK 10 (15 MINUTA)

Provera linearne nezavisnosti vektora iz $\mathbb{R}^2$.

Ispitati da li su vektori $\vec{a}=(2,1)$ i $\vec{b}=(1,2)$ u prostoru $\mathbb{R}^2$ linearno nezavisni.

Rešenje. Konstatujmo da, s obzirom da je $dim(\mathbb{R}^2)=2,$ ovi vektori mogu biti linearno nezavisni. Ako su linearno nezavisni, tada na osnovu definicije linearne nezavisnosti mora da bude ispunjeno

$$k_1\cdot\vec{a}+k_2\cdot\vec{b}=O, \qquad (*)$$

tj.

$$k_1\cdot(2,1)+k_2\cdot(1,2)=(0,0),$$

samo u slučaju da je $k_1=k_2=0.$ Proverimo da li je to ispunjeno. Imamo da je

$$(2k_1,k_1)+(k_2,2k_2)=(0,0) \text{ tj. } (2k_1+k_2,k_1+2k_2)=(0,0).$$

Iz poslednje relacije dobijamo da je

$$\begin{array}{rcrcl} 2k_1 & + & k_2 & = & 0 \\ k_1 & + & 2k_2 & = & 0 \end{array}$$

Iz druge jednačine imamo da je $k_1=-2k_2.$ Zamenom dobijenog u prvoj jednačini prethonog sistema dobijamo da je $-3k_2=0,$ tj. $k_2=0.$ Tada je i $k_1=0.$ Dakle, relacija $(*)$ važi samo u slučaju kada je $k_1=k_2=0,$ pa zaključujemo da su vektori $\vec{a}=(2,1)$ i $\vec{b}=(1,2)$ linearno nezavisni.

Napomena.S obzirom da suvektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni oničine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Oni čine i njen koordinatni sistem. U praksi, mnogo je lakše raditi sa vektorima baze koji su ortogonalni i čija je norma (intenzitet) jednaka 1. Takva baza se naziva ortonormirana baza, a vektori takve baze se nazivaju ortovi. Za prostor $\mathbb{R}^2$ vektori $e_1=(1,0)$ i $e_2=(0,1)$ su ortovi ičine njegovu ortonormiranu bazu. U srednjoj školi ste vektor e_1 označavali sa $\vec{i}$, a vektor e_2 sa $\vec{j}$. Postupak kojim se od vektora neke baze dobija ortonormirana baza naziva se Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije.

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba samostalno da provežbaju.

Zadatak 1. Naći intenzitet vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ako je $||\vec{p}|| = 2,\ ||\vec{q}| = \sqrt{3}$ i $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

Rezultat. $||\vec{a}|| = 2.$

Zadatak 2. Odrediti $< \vec{a}, \vec{b} >$ ako je $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n},\ \vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n},\ ||\vec{m}|| = 3,\ ||\vec{m}|| = 2$ i $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi$.

Rezultat. $< a, b >= -52.$

Zadatak 3. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ obrazuju ugao $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ako je $||\vec{a}|| = \sqrt{3}$ i $||\vec{b}|| = 1$ odrediti ugao θ koji zaklapaju vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Rezultat. $\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{17}}{7}\right).$

Zadatak 4. Odrediti ugao α između dijagonala paralelograma čije stranice su određene vektorima $\vec{a} = 3\vec{q} - 2\vec{p}, \vec{b} = \vec{q} + 3\vec{p}, ||\vec{p}|| = 2,\ ||\vec{q}|| = 1$ i $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Rezultat. $\alpha = \arccos\left(-\frac{5\sqrt{3}}{14}\right).$

Vreme izrade: 1. 25 minuta; 2. 25 minuta; 3. 25 minuta; 4. 35 minuta.

Zaključak za lekciju 11

VEKTORSKA ALGEBRA

Vektorski prostor, unitarni i normirani vektorski prostor, ugao između dva vektora, prostor $\mathbb{R}^n$ ...

Vektorski prostor je nastao kao generalizacija pojmova polja realnih I kompleksnih brojeva. Pojam baze i dimenzije vektorskog prostora, linearne zavisnosti i nezavisnosti vektora, lineala su od suštinskog značaja u vektorskoj algebri. Uvođenjem skalarnog (unutrašnjem) proizvoda u ovaj prostor dolazi se do pojma unitarnog prostora, koji veoma bitan za rad sa vektorima, dok uvođenje pojma norme (intenziteta, dužine) vektora dovodi do normiranog prostora.

Literatura (nastavni materijal):
Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.