UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

Lekcija 01

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 01

OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

Uvod

UVOD

Fokus ove lekcije su osnove matematičke logike, sa fokusom na logičke zakone

Diskretna matematika proučava prirodne, cele i racionalne brojeve, diskretne (konačne ili najviše prebrojive) skupove, relacije i funkcije definisane na njima, jezike koji se koriste u matematičkom rezonovanju primenljivom u računarstvu, algoritme itd.

Diskretna matematika nam pomaže u razumevanju i razvijanju matematičkog rezonovanja. Ona takođe postavlja osnove moderne matematike i daje matematičku osnovu za mnoge kurseve kompjuterskih nauka, uključujući strukture podataka, algoritme, teoriju baza podataka, formalne jezike, kompajlere, bezbednost podataka i operativne sisteme.

U ovoj lekciji biće reči o:

- Logičkim operacijama
- Tautologijama i kontradikciji
- Logičkim zakonima

Poglavlje 1

OSNOVE MATEMATIČKE LOGIKE

ŠTA JE MATEMATIČKA LOGIKA?

Logička pravila daju tačno značenje matematičkim iskazima. Ova pravila se koriste da bi se razlikovali tačni i netačni iskazi.

Matematička logika je oblast koja se bavi primenom i analizom metoda rezonovanja, odnosno zaključivanja. Osnovna pitanja na koja matematička logika pokušava da da odgovor se odnosi na postavku da određeni zaključak sledi iz neke pretpostavke, kao i šta uopšte predstavlja matematički dokaz. Rezonovanje i određivanje istinitosti i pravilnog zaključivanja su okupirali filozofe od davnih vremena.

Logičko zaključivanje se u matematici koristi u dokazivanju teorema, u kompjuterskoj nauci za proveru ispravnosti programa, u prirodnim naukama za izvlačenje zaključaka iz eksperimenata, u društvenim naukama i u svakodnevnom životu za rešavanje različitih problema. Logička pravila daju tačno značenje matematičkim iskazima. Ova pravila se koriste da bi se razlikovali tačni i netačni iskazi.

Poglavlje 2

ISKAZI

DEFINICIJA ISKAZA

Iskaz je deklarativna izjava koja mora biti bilo tačna, bilo netačna

Naša diskusija počinje sa osnovnim delovima koji se koriste u logici, a to su iskazi. Počinjemo sa definisanjem iskaza koji predstavlja gradivni element matematičke logike.

Definicija

Iskaz (engl. proposition ili statement) je deklarativna izjava koja može biti bilo tačna, bilo netačna, ali ne može imati obe vrednosti istovremeno, ili nemati istinitosnu vrednost.

Primer

Razmotrimo sledeću rečenicu :

*** Beograd je grad u Srbiji.

Prvo treba da razmotrimo da li je navedena rečenica tačna, netačna ili možda nema istinitosnu vrednost. Beograd zaista jeste grad u Srbiji. Možemo da zaključimo da je navedena rečenica tačna, pa samim tim kažemo da je ona iskaz.

Primer

Posmatrajmo sledećih osam rečenica

(i) Pariz je u Francuskoj.

(ii) $1 + 1 = 2$

(iii) $2 + 2 = 3$

(vi) London je u Danskoj.

(v) $9 < 6$

(vi) 2 je rešenje jednačine $x^2=4$.

(vii) Gde ideš?

(viii) Uradi domaći!

Sve navedene rečenice u ovom primeru, osim (vii) i (viii) su iskazi. Za rečenice (i), (ii) i (vi) možemo da zaključimo da su tačni, pa samim tim kažemo da su iskazi, dok su (iii), (iv) i (v) netačni i pošto imaju istinitosnu vrednost kažemo da su iskazi. Rečenice (vii) i (viii) nemaju istinitosne vrednosti, odnosno nisu niti tačne niti netačne. Rečenica “Gde ideš?” je pitanje koje ne može biti tačno ili netačno, pa samim tim nije iskaz. Dok recimo odgovor na to pitanje bi mogao biti klasifikovan kao iskaz. Rečenica (viii) takođe nema istinitosnu vrednost, pa kažemo da nije iskaz.

TAČNOST ISKAZA

Logički iskaz ima dve istinitosne vrednosti – tačan ili netačan

Tačnost nekog iskaza A obeležavamo sa t(A), a on može biti tačan ili netačan. Istinitosna vrednost tačno se može obeležiti sa bilo kojim od sledećih notacija

tačno, T, true, TRUE, 1

dok istinitosna vrednost netačno se može obeležiti sledećim notacijama

netačno, F, false, FALSE, 0

Pa tako t(A) = T ili t(A) = 1, znači da je iskaz A tačan, a t(A) = F ili t(A) = 0 znači da je iskaz A netačan.

Poglavlje 3

OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

TRI OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

Tri osnovne logičke operacije su konjunkcija (I (engl. AND)), disjunkcija (ILI (engl. OR)) i negacija (NE (engl. NOT))

U sintaksu iskazne logike spadaju:

- Iskazna slova: p, q, r, p_1, q_1,...
- Skup logičkih veznika: ¬, ∧, ∨,→ , ↔, V, ≡
- Skup logičkih konstanti
- Skup pomoćnih simbola (npr. zagrade) .

Osnovne logičke operacije sa iskazima su:

- konjunkcija (engl. conjuction)
- disjunkcija (engl. disjunction)
- negacija (engl. negation).

Ove tri logičke operacije odgovaraju rečima I (AND), ILI (OR) i NE (NOT),respektivno. Ove logičke operacije se mogu koristiti za povezivanje iskaza u složeniji iskaz.

3.1 KONJUNKCIJA

KADA JE KONJUNKCIJA TAČNA?

Konjunkcija p∧ q je tačna ako i samo ako su oba iskaza p i q tačna

Svaka dva iskaza **p** i **q** se mogu kombinovati veznikom *I (AND)* i na taj način formirati složen iskaz koji se naziva konjunkcija iskaza p i q. Ona se označava sa

p ∧ q

Definicija

Konjunkcija p ∧ q je tačna ako i samo ako su oba iskaza p i q tačna.

Primer

Napraviti konjunkcije iskaza **p i q**, gde su
(a) p : Pada sneg. q : Hladno mi je.
(b) p : 2<3 q: −5 > −8
(c) p : Pada sneg. q : 3<5

Rešenje:
(a) p ∧ q: Pada sneg i meni je hladno.
(b) p ∧ q: 2 < 3 i −5 > −8.
(c) p ∧ q: Pada sneg i 3 < 5.

3.2 DISJUNKCIJA

KADA JE DISJUNKCIJA TAČNA?

Disjunkcija p ∨ q je netačna ako i samo ako su oba iskaza p i q netačna

Svaka dva iskaza p i q se mogu kombinovati rečju ILI (OR) i na taj način formirati složen iskaz koji se naziva disjunkcija iskaza p i q. Ona se označava sa

p ∨ q

Definicija

Disjunkcija p ∨ q je netačna ako i samo ako su oba iskaza p i q netačna.

Reč ILI možemo koristiti u dva različita značenja. U prvom značenju kažemo da je složeni iskaz koji se sastoji od dva podiskaza p i q tačan kada je jedan od ova dva podiskaza tačan ili ako su oba podiskaza tačni

p ili q ili oba, što znači što znači da se traži bar jedna alternativa. U tom slučaju govorimo o disjunkciji.

DISJUNKCIJA - PRIMER

Primeri koji pokazuju kako se od iskaza može napraviti disjunkcija

Primer

Napraviti disjunkcije iskaza **p i q** i odrediti njihove istinitosne vrednosti, gde su
(a) p: 2 je pozitivan ceo broj. q: 2 je racionalan broj.
(b)p :2+3≠5 q: London je glavni grad Francuske.

Rešenje:
(a) $p \vee q$:
2 je pozitivan ceo broj ili 2 je racionalan broj.

Kako je p tačno, **disjunkcija p ∨ q je tačna**, bez obziran to što je q netačno.
(b) $p \vee q$:
$2 + 3 \neq 5$ ili je London glavni grad Francuske.

Disjunkcija p ∨ q je netačna, pošto su i p i q netačni.

3.3 NEGACIJA

NEGACIJA ISKAZA

Iskaz ¬p je tačan ako i samo ako je p netačno, a netačan ako i samo ako je p tačno

Za dati iskaz p se može formirati složen iskaz koja se zove negacija iskaza p. Ona se označava sa

$$\neg p$$

što se čita “ne p”.

Definicija

Iskaz ¬p je tačan ako i samo ako je p netačno, a netačan ako i samo ako je p tačno.

Primer

Posmatrajmo sledeće iskaze:
(a_1) Pariz je u Francuskoj.
(a_2) Nije tačno da je Pariz u Francuskoj.
(a_3) Pariz nije u Francuskoj.
(b_1) $2+2=5$.
(b_2) Nije tačno da je $2 + 2 = 5$.
(b_3) $2+2\neq 5$.

Ovde su

(a_2) i (a_3) negacije iskaza (a_1);

takođe su i

(b_2) i (b_3) negacije iskaza (b_1).

Kako je (a_1) tačno, onda su (a_2) i (a_3) netačni. Kako je (b_1) netačno, (b_2) i (b_3) su tačni.

3.4 TABLICE ISTINITOSTI

TABLICE ISTINITOSTI ZA ∧, ∨, ¬

Tablice istinitosti se koriste za određivanje istinitosne vrednosti nekog iskaza za sve moguće vrednosti njegovih podiskaza

Istinitosne vrednosti konjunkcije, disjunkcije i negacije se takođe mogu definisati tablicama istinitosti (Tabela 1).

Za označavanje tačnih i netačnih istinitosnih vrednosti u Tabeli 1 koriste se simboli *1* i *0,* koji označavaju istinitosne vrednosti TRUE(T) i FALSE(F), respektivno.

Razmotrimo način na koji se kreiraju tablice istinitosti. Prve dve kolone tablice sadrže četiri moguće kombinacije istinitosnih vrednosti za p i q. U opštem slučaju, postoji 2^n kombinacija istinitosnih vrednosti za n promenljivih. U Tabeli 1 navedeni su iskazi sa dve promenljive, pa samim tim postoji 2^2 odnosno 4 moguće kombinacije. Zatim postoji kolona koja rešava sledeći složeniji iskaz. U ovom slučaju, tabela prikazuje konjunkciju, disjunkciju i negaciju, pa je svaka od ovih operacija prikazana u različitoj koleni.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Tabela 1. Istinitosne tablice za ∧, ∨, ¬

Slika 3.1.1 Istinitosne tablice za ∧, ∨, ¬ [Izvor: Autor]

Konjunkcija i disjunkcija su logičke operacije koje povezuju dva iskaza. Drugim rečima, ove operacije imaju dva argumenta. Zbog toga kažemo da su konjunkcija i disjunkcija binarne operacije .

Negacija je logička operacija koja se primenjuje nad jednim iskazom. Prema tome, pošto negacija ima jedan argument kažemo da je negacija unarna operacija.

3.5 ISKAZNE FORMULE

SLOŽENI ISKAZ

Složeni iskaz se sastoji od podiskaza koji su povezani logičkim veznicima

Korisno je razlikovati iskaze prema njihovoj složenosti.

Definicija

Složeni iskazi se sastoje odjednostavnijih iskaza ili podiskaza koji su povezani različitim logičkim veznicima. Takvi iskazi se zovu složeni iskazi.

Iskaz je prost ako se ne može razložiti na jednostavnije, odnosno proste iskaze. Ako se iskaz sastoji iz dva ili više prosta iskaza naziva se složeni iskaz.

Istinitosna vrednost složenih iskaza je određena istinitosnom vrednošću svojih podiskaza, odnosno od tačnosti i netačnosti iskaza od kojih je izgrađen, kao i veznika kojim su ti podiskazi povezani, odnosno operacija pomoću kojih je složen iskaz dobijen.

Primer

Iskaz

** *Ruža je crvena, a ljubičica je plava.*

je složeni iskaz koji se sastoji od dva podiskaza. Dva podiskaza su

*** *Ruža je crvena*

*** *Ljubičica je plava.*

OSOBINE ISKAZNE FORMULE

Osnovna osobina iskazne formule je da njena istinitosna vrednost zavisi isključivo od istinitosnih vrednosti njenih nezavisnih promenljivih

Ovde obrađujemo složene iskaze i tablice istinitosti da bi odredili njihove istinitosne vrednosti iz istinitosnih vrednosti njihovih prostih podiskaza.

Definicija

Označimo sa P(p, q, . . .) izraz sastavnjen od logičkih promenljivih p, q, ..., koji uzimaju vrednosti TRUE(T) ili FALSE (F), i logičkih veznika ˆ,ˇ i ¬. Takav izraz P (p, q, . . .) zovemo iskazna formula.

Osnovna osobina $iskazne formule$ je da njena istinitosna vrednost zavisi isključivo od istinitosnih vrednosti njenih nezavisnih promenljivih. Drugim rečima, istinitosna vrednost iskazne formule je poznata kada se znaju istinitosne vrednosti svake njene nezavisne promenljive.

Jednostavan način prikazivanja ove veze je korišćenjem tablice istinitosti.

Da bi izbegli zagrade koje nisu neophodne za razumevanje iskazne formule usvojićemo sledeći prioritet logičkih veznika:

¬ ima veći prioritet od ∧, a ∧ ima veći prioritet od ∨.

Primer
Posmatrajmo iskaznu formulu
$\neg(p \wedge \neg q)$
Pošto u iskazu postoje dve promenljive, tablica istinitosnih vrednosti će imati dve kolone sa četiri moguće kombinacije.
Zatim, postoji po jedna kolona za svaki elementarni korak u konstrukciji iskazne formule. Konkretno u ovom slučaju, kolone su za $\neg q, p \wedge \neg q$, i konačno $\neg(p \wedge \neg q)$.
Istinitosna vrednost cele formule se nalazi u poslednjoj koloni.

p	q	¬ q	p ∧ ¬ q	¬ (p ∧ ¬ q)
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Slika 3.2.1 Tablica istinitosti za iskaz ¬(p ∧ ¬q) [Izvor: Autor]

PRIMER

Primer koji prikazuje određivanje tablice istinitosti za iskaznu formulu

Primer
Posmatrajmo iskaznu formulu

¬ p ∧¬ q
Tablica istinitosti koja prikazuje postupne rešenje ove iskazne formule je navedena u tabeli.

p	q	¬ p	¬ q	¬ p ∧ ¬ q
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Slika 3.2.2 Tabela-2 Tablica istinitosti za iskaz ¬ p ∧ ¬ q [Izvor: Autor]

Poglavlje 4

USLOVNI ISKAZI

IMPLIKACIJA I DVOSTRUKA IMPLIKACIJA

Implikacija ima oblik „ako p onda q“. Dvostruka implikacija ima oblik „p ako i samo ako q“

Mnogi iskazi, posebno u matematici, imaju oblik “Ako p onda q” i zovu se uslovni iskazi (engl. conditional statements). Iskazi koji imaju oblik “p ako i samo ako q” se zovu dvostruki uslovni iskazi(engl. biconditional statements).

Implikacija iskaza p i q se čita kao “ako p onda q”, “p sledi q”, “p implicira q” i označava se sa

$p \to q$

Iskaz p se zove hipoteza, premisa ili pretpostavka, a iskaz q se zove zaključak.

Definicija
Iskaz $p \to q$ je netačan samo ako je iskaz p tačan i iskaz q netačan (Tabela 1).

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Slika 4.1 Istinitosne vrednosti za implikaciju, $p \to q$ [Izvor: Autor]

Dvostruka implikacija (engl. biconditional statement) iskaza *p* i *q* se čita kao “*p* ako i samo ako *q*” i označava se sa

$p \leftrightarrow q$

Definicija

Iskaz $p \leftrightarrow q$ je tačan samo ako su iskaz p i iskaz q iste istinitosne vrednosti (Tabela 2).

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Slika 4.2 Tabela-2 Istinitosne vrednosti za dvostruku implikaciju, p ↔ q [Izvor: Autor]

IMPLIKACIJA I GOVORNI JEZIK

Ako je iskaz p netačan, onda je iskaz p→q tačan, bez obzira na tačnost iskaza q

U govornom jeziku kada kazemo “ako p onda q”, pretpostavljamo da postoji uzročno-posledična veza između p i q. U logici se implikacije koriste u mnogo širem značenju. Složeni iskaz implikacije znači samo da nećemo imati situaciju da je istovremeno p tačno, a q netačno. Logička implikacija ne znači da p prouzrokuje q u uobičajenom smislu te reči. Nas u matematičkoj logici ne interesuje šta su iskazi p i q, već samo njihova istinitost.

U logici se implikacije koriste u mnogo širem značenju. Složen iskaz p → q je tačan, prosto znači da, ako je p tačno onda je i q tačno. Drugim rečima, p → q znači samo da nećemo imati situaciju da je istovremeno p tačno a q netačno. Ne znači da p prouzrokuje q u uobičajenom smislu te reči.

Prema definiciji implikacije, ako je iskaz p netačan, onda je iskaz p→q tačan, bez obzira na tačnost iskaza q

Primer

p: Nova Godina se slavi 1 juna

q: Položio sam diskretne strukture

Ova implikacija je tačna, ali isto tako bi neko mogao reći da u govornom jeziku ovaj iskaz nema smisla zato što između dva iskaza ne postoji logična veza.

Poglavlje 5

LOGIČKA EKVIVALENCIJA

KADA SU DVA ISKAZA EKVIVALENTNA?

Dva iskaza su ekvivalentna ako imaju identične tablice istinitosti

Koncept logičke ekvivalencije je fundamentalan u matematičkoj logici. Složeni iskazi p i q se nazivaju logičkim ekvivalentima ako je iskaz p ↔ q tautologija. Notacija p ≡ q označava da su p i q logički ekvivalenti.

Definicija

Za dva iskaza P (p1, p2, . . .) i Q(p1, p2 , . . .) se kaže da su logički ekvivalentni ili jednostavno ekvivalentni, jednaki ili isti, u oznaci
P (p1, p2 , . . .) ≡ Q(p1, p2, . . .)
ako imaju identične tablice istinitosti.

Primer
Posmatrajmo iskaze Nije tačno da su ruže crvene i ljubičice plave. Ovaj iskaz može biti zapisan u obliku ¬(p ∧ q) pri čemu

p:Ruže su crvene
q: Ljubičice su plave.

Kako je $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, sledeći iskaz ima isto značenje kao originalni iskaz

Ruže nisu crvene, ili ljubičice nisu plave.
Još jedan od načina da se prikaže da su dva iskaza logički ekvivalenti je koristiti istinitosne tablice. Složeni iskazi p i q su ekvivalentni ako i samo ako su kolone koje određuju istinosne vrednosti iskaza iste. Naredni primer, u kom je prikazan Demorganov zakon, ilustruje ovaj metod, kako bi uspostavio veoma važnu logičku ekvivalenciju da je iskaz ¬ (p ∧ q) ekvivalentan sa iskazom ¬ p ∨ ¬ q.

Primer
Iskazne formule $\neg(p \wedge q)$ i $\neg p \vee \neg q$ su ekvivalentne, to jest
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
Navedenu tvrdnju ćemo razmotriti kroz tablice istinitosti.

p	q	p∧q	¬ (p∧q)
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Slika 5.1 Tabela-1 ¬(p ∧ q) [Izvor: Autor]

p	q	¬ p	¬ q	¬p∨¬q
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Slika 5.2 Tabela-2 ¬p ∨ ¬q [Izvor: Autor]

Poglavlje 6

VAŽNI ZAKONI

ZAKONI IDEMPOTENCIJE, ASOCIJATIVNOSTI, KOMUTACIJE

Definicije zakona idempotencije, asocijativnosti i komutacije

- Zakoni idempotencije

$\boldsymbol{p \lor p \equiv p}$ Idempotentnost disjunkcije

$\boldsymbol{p \land p \equiv p}$ Idempotentnost konjunkcije

- Zakoni asocijativnosti

$\boldsymbol{(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)}$ Asocijativnost disjunkcije

$\boldsymbol{(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)}$ Asocijativnost konjunkcije

- Zakoni komutacije

$\boldsymbol{p \lor q \equiv q \lor p}$ Komutativnost disjunkcije

$\boldsymbol{p \land q \equiv q \land p}$ Komutativnost konjunkcije

DISTRIBUTIVNOST

Definicija distributivnosti

$\mathbf{p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)}$ Distributivnost disjunkcije

$\mathbf{p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)}$ Distributivnost konjunkcije

Zakon distribucije ćemo razmotriti pomoću tablice istinitosti. U Tabeli 1 se može videti da su istinitosne vrednosti za iskaz $p \land (q \lor r)$ iste kao i za iskaz $(p \land q) \lor (p \land r)$. Za vežbu možete proveriti i drugi zakon distribucije kroz tablice istinitosti, odnosno treba pokazati da $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$.

p	q	r	q V r	p∧(qVr)	p∧ q	p∧ r	(p∧q)V(p∧ r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Slika 6.1 Tabela-1 Tablica istinitosti za zakon distribucije p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) [Izvor: Autor]

ZAKONI IDENTITETA, DVOJNE NEGACIJE, KOMPLEMENTA

Definicija zakona identiteta, dvojne negacije i zakona komplemenata

- Zakoni identiteta

$$p \vee 0 \equiv p$$
$$p \wedge 1 \equiv p$$
$$p \vee 1 \equiv 1$$
$$p \wedge 0 \equiv 0$$

- Involutivni zakon (zakon dvostruke negacije)

$$\neg\neg p \equiv p$$

- Zakoni komplementa

$$p \vee \neg p \equiv 1$$
$$p \wedge \neg p \equiv 0$$
$$\neg 1 \equiv 0$$
$$\neg 0 \equiv 1$$

DEMORGANOVI ZAKONI

Definicija Demorganovih zakona

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
U tabeli su prikazane istinitosne vrednosti za DeMorganov zakon.

p	q	p∧ q	¬(p∧ q)	¬p	¬q	¬p V ¬q
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Slika 6.2 Tabela-2 Tablica istinitosti DeMorganovog zakona [Izvor: Autor]

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZAKON APSORPCIJE

Definicija zakona apsorpcije

p ∧ (p ∨ q) ≡ p

p ∨ (p ∧ q) ≡ p

Razmotrimo sledeći zakon apsorpcije p ∨ (p ∧ q) ≡ p. Ovaj zakon može biti dokazan na sledeći način. Koristeći zakon identiteta dobija se

p ∨ (p ∧ q) ≡ (p ∧ 1) ∨ (p ∧ q)

Ovde se može videti da prethodno navedeni korak može biti uprošćen korišćenjem zakona distribucije. Samim tim sledi,

(p ∧ 1) ∨ (p ∧ q) ≡ p ∧ (1 ∨ q)

Prema prethodno navedenom zakonu identiteta znamo da je

p ∧ (1 ∨ q) ≡ p ∧ 1 ≡ p

pa smo samim tim dokazali zakon apsorpcije.

Na sličan način se može dokazati i drugi zakon apsorpcije

p ∧ (p ∨ q) ≡ (p ∧ p) ∨ (p ∧ q)

≡ p ∨ (p ∧ q)

≡ (p ∧ 1) ∨ (p ∧ q)

≡ p ∧ (1 ∨ q)

≡ p

ZAKON EKVIVALENCIJE ZA IMPLIKACIJU

p → q ≡ ¬p ∨ q

Neka su p i q proizvoljni iskazi. Tada je implikacija p → q ekvivalentna sa ¬p ∨ q, to jest

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Ovaj zakon ekvivalencije koristimo kada želimo da zamenimo implikaciju sa negacijom i disjunkcijom.
Istinitosne vrednosti navedenog zakona ekvivalenacije za implikaciju se dobijaju iz četvrte i pete kolone iz tabele.

p	q	¬p	p→q	¬p V q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Slika 6.3 Tabela-3 Tablica istinitosti za p → q ≡ ¬p ∨ q [Izvor: Autor]

ZAKONI EKVIVALENCIJE ZA DISJUNKCIJU I KONJUNKCIJU

Za disjunkciju: p˅q ≡ ((p → q) → q), za konjunkciju: p˄q ≡ ⌐ (p → ⌐q)

Zakon ekvivalencije za disjunkciju koristimo kada želimo da izrazimo disjunkciju sa implikacijom. Tada možemo da napišemo,

p˅q ≡ ((p → q) → q)

Zakon ekvivalencije za konjunkciju koristimo kada želimo da izrazimo konjunkciju pomoću negacije i implikacije. Tada možemo da napišemo,

p˄q ≡ ⌐ (p → ⌐q)

ZAKON EKVIVALENCIJE

Prikaz dokaza zakona ekvivalencije

Zakon ekvivalencije (tranzitivnost implikacije) omogućava da zamenimo ekvivalenciju p ↔ q sa konjunkcijom implikacija

(p ↔ q) ≡ (p → q) ˄ (q → p)

Dokaz za navedeni zakon razmatramo kroz tablicu istinitosti.

p	q	p→q	q→p	(p→q) ∧(q→p)	p↔ q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Slika 6.4 Tabela-4 Tablica istinitosti za (p → q) ∧ (q → p) i p ↔ q [Izvor: Autor]

Razmotrimo negaciju zakona ekvivalencije. Negacija zakona ekvivalencije se drugačije može napisati kao

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

Dokaz za navedenu tvrdnju možemo pratiti kroz niz koraka, u kojima koristimo već napomenute logičke zakone

$$\begin{aligned} \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\ &\equiv (\neg(p \rightarrow q)) \vee (\neg(q \rightarrow p)) \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q). \end{aligned}$$

PRIMER LOGIČKE EKVIVALENCIJE

Koristeći logičke zakone pokazati da je iskaz ¬ (p ∨ (¬ p ∧ q)) logički ekvivalentan iskazu ¬p ∧ ¬q

Primer

Koristeći logičke zakone pokazati da je iskaz $\ulcorner(p \vee (\ulcorner p \wedge q))$ logički ekvivalentan iskazu $\ulcorner p \wedge \ulcorner q$.

$$\begin{aligned} \ulcorner(p \vee (\ulcorner p \wedge q)) &\equiv \ulcorner p \wedge \ulcorner(\ulcorner p \wedge q) drugiDeMorganovzakon \\ &\equiv \ulcorner p \wedge [\ulcorner(\ulcorner p) \vee \ulcorner q] prviDeMorganovzakon \\ &\equiv \ulcorner p \wedge (p \vee \ulcorner q) dvostrukanegacija \\ &\equiv (\ulcorner p \wedge p) \vee (\ulcorner p \wedge \ulcorner q) zakondistribucije \\ &\equiv 0 \vee (\ulcorner p \wedge \ulcorner q) zato\check{s}toje \ulcorner p \wedge p \equiv 0 \\ &\equiv (\ulcorner p \wedge \ulcorner q) \vee 0 zakonkomutacijedisjunkcije \\ &\equiv (\ulcorner p \wedge \ulcorner q) \end{aligned}$$

Možemo zaključiti da su iskazi
$\ulcorner(p \vee (\ulcorner p \wedge q))$
i
$\ulcorner p \wedge \ulcorner q$
logički ekivalentni.

NEGACIJA IMPLIKACIJE

Negacija implikacije se može napisati kao ¬(p → q) ≡ p ∧ ¬q

Druga forma zakona ekvivalencije za implikaciju je negacija implikacije. Negacija implikacije se može napisati kao

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$$

Navedeni iskaz ekvivalencije možemo dokazati na sledeći način koristeći logičke zakone

$$\begin{aligned}\neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q)(Ekvivalencijaimplikacije)\\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q(DeMorganovzakon)\\ &\equiv p \wedge \neg q(Dvojnanegacija)\end{aligned}$$

PRINCIP KONTRAPOZICIJE

p → q ≡ ¬q → ¬p

Sledeći princip kontrapozicije se često koristi u matamatičkim dokazima. Neka su p i q proizvoljni iskazi. Tada je p → q ekvivalentno sa ¬q → ¬p, to jest
$\mathbf{p \to q \equiv \neg q \to \neg p}$

Dokaz za princip kontrapozicije možemo razmotriti kroz niz logičkih zakona

$$\begin{aligned}p \to q &\equiv \neg p \vee q\\ &\equiv \ulcorner(p\,\hat{}\,\ulcorner q)\\ &\equiv \neg\neg q \vee \neg p\\ &\equiv \neg q \to \ulcorner p\end{aligned}$$

Primer

a) Odrediti implikaciju p→q sledećih iskaza:

p: Milan je kupio novi telefon q: Milan je pozvao Anu
Rešenje:
p→q
Ako je Milan kupio telefon, onda je Milan pozvao Anu.

b) Odrediti kontrapoziciju prethodno sastavljene implementacije
Rešenje:

$\neg q \rightarrow \neg p$
Ako Milan nije pozvao Anu, onda Milan nije kupio novi telefon.

SUPROTAN, INVERZAN I KONTRAPOZITIVAN ISKAZ

Kontrapozitivan i uslovni iskaz su ekvivalentni, kao i suprotan i inverzan iskaz

Posmatrajmo uslovni iskaz $p \rightarrow q$. Ovaj iskaz ima svoj suprotan, inverzan i kontrapozitivan iskaz. Njih predstavljamo na sledeći način
$p \rightarrow q$
$q \rightarrow p$ suprotan (engl. converse)
$\neg p \rightarrow \neg q$ inverzan (engl. inverse)
$\neg q \rightarrow \neg p$ kontrapozitivan (engl. contrapositive)

Koji od ovih iskaza su logički ekvivalentni iskazu $p \rightarrow q$?
Samo je kontrapozitivan iskaz $\neg q \rightarrow \neg p$ ekvivalentan uslovnom iskazu $p \rightarrow q$. Tako važi

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
i
$q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$,

to jest, kontrapozitivni i uslovni iskaz su ekvivalentni. Takođe važi da su suprotan iskaz i inverzan iskaz ekvivalentni među sobom.

Ako je p tačno, a q netačno, onda je iskaz $p \rightarrow q$ netačan, ali je $q \rightarrow p$ tačan, pa uslovni iskaz i njegov suprotni iskaz nisu ekvivalentni među sobom.

Poglavlje 7

TAUTOLOGIJE I KONTRADIKCIJE

DEFINICIJA I PRIMER TAUTOLOGIJE I KONTRADIKCIJE

Tautologija je iskazna formula čija je vrednost uvek tačno, a kontradikcija je iskazna formula čija je istinitosna vrednost uvek netačno

U nekim slučajevima, iskazna formula ima istinitosnu vrednost tačno, bez obzira na istinitosne vrednosti njenih podiskaza.

Iskazna formula koja ima istinitosnu vrednost tačno za sve istinitosne vrednosti svojih promenljivih zove se tautologija .

Iskazna formula koja ima istinitosnu vrednost netačno za sve istinitosne vrednosti svojih promenljivih zove se kontradikcija .

Može da se zapazi da je negacija tautologije uvek kontradikcija, a negacija kontradikcije je uvek tautologija.

Primer

Sledeća iskazna formula je tautologija

$p \vee \neg p$

Kako bi pokazali da je dati iskaz tautologija koristićemo tablice istinitosti. Kao što se može videti u Tabeli 1 istinitosne vrednosti za ovaj iskaz u svim kolonama su 1 odnosno tačno, bez obzira na istinitosne vrednosti njenih podiskaza p i ¬p.

p	¬p	p ∨ ¬p
1	0	1
0	1	1

Slika 7.1 Tabela-1 Tablica istinitosti za iskaz p ∨ ¬p [Izvor: Autor]

Sledeća iskazna formula je kontradikcija

$$p \wedge \neg p$$

Tablica istinitosti za navedenu kontradikciju je prikazana u Tabeli 2. Navedena kontradikcija ustvari predstavlja negaciju prethodno navedene tautologije u ovom primeru. Zašto je to tako, biće objašnjeno kasnije.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Slika 7.2 Tabela-2 Tablica istinitosti za iskaz $p \wedge \neg p$ [Izvor: Autor]

VIDEO - PRIMER TAUTOLOGIJE

Pogledajte primere dokazivanja tautologije korišćenjem tablica istinitosti

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

VAŽNE TAUTOLOGIJE

TAUTOLOGIJE U OBLIKU IMPLIKACIJE

Važne tautologije koje su u obliku implikacije

Sledeća teorema nam daje nekoliko važnih tautologija koje su u obliku implikacije. One se vrlo često koriste u dokazivanju rezlutata u matematici i kompjuterskoj nauci.

Neka su p, q i r proizvoljni iskazi. Tada se svako od sledećih tvrđenja tautologija.

(a) $(p \wedge q) \rightarrow p$
(b) $(p \wedge q) \rightarrow q$
(c) $p \rightarrow (p \vee q)$
(d) $q \rightarrow (p \vee q)$
(e) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
(f) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
(g) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
(h) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$
(i) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
(j) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
(k) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

DOKAZ TAUTOLOGIJE (P ∧ Q) → P

Koristeći ekvivalenciju implikacije, Demorganov zakon, komutativnost i asocijativnost, možemo pokazati da je iskaz (p ∧ q) → p tautologija

U dokazima često koristimo princip zamene i prethodno navedene logičke zakone. Koristeći ekvivalenciju implikacije, Demorganov zakon, komutativnost i asocijativnost, možemo pokazati da je iskaz $(p \wedge q) \rightarrow p$ tautologija na sledeći način

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p \\ &\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee p \\ &\equiv \neg q \vee (\neg p \vee p) \\ &\equiv \neg q \vee 1 \\ &\equiv 1\end{aligned}$$

Samim tim je pokazano da je implikacija $(p \wedge q) \rightarrow p$ tautologija.

DOKAZ TAUTOLOGIJE P → (P ∨ Q)

Korišćenje logičkih zakona u dokazivanju da je iskaz p→(p∨q) tautologija

Kao i u prethodnom primeru koristićemo prethodno navedene logičke zakone da pokažemo da je iskaz p→(p∨q) tautologija.

$$
\begin{aligned}
p \to (p \vee q) &\equiv \neg p \vee (p \vee q) \\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee q \\
&\equiv 1 \vee q \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

DOKAZ TAUTOLOGIJE ¬P → (P → Q)

Korišćenje logičkih zakona u dokazivanju da je iskaz ¬p → (p → q) tautologija

$$
\begin{aligned}
\neg p \to (p \to q) &\equiv \neg(\neg p) \vee (\neg p \vee q) \\
&\equiv (p \vee \neg p) \vee q \\
&\equiv 1 \vee q \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

DOKAZ TAUTOLOGIJE (¬P ∧ (P ∨ Q)) → Q

Korišćenje logičkih zakona u dokazivanju da je iskaz (¬p ∧ (p ∨ q)) → q tautologija

$$
\begin{aligned}
(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q &\equiv \neg(\neg p \wedge (p \vee q)) \vee q \\
&\equiv (p \vee \neg(p \vee q)) \vee q \\
&\equiv (p \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee q \\
&\equiv ((p \vee \neg p)^{\wedge}(p \vee \neg q)) \vee q \\
&\equiv (1 \wedge (p \vee \neg q)) \vee q \\
&\equiv (p \vee \neg q) \vee q \\
&\equiv p \vee (\neg q \vee q) \\
&\equiv p \vee 1 \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DOKAZ TAUTOLOGIJE (¬Q ˄ (P → Q)) → ¬P

Korišćenje logičkih zakona u dokazivanju da je iskaz (¬q ˄ (p → q)) → ¬p tautologija

$$
\begin{aligned}
(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p &\equiv (\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \to \neg p \\
&\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \to \neg p \\
&\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee 0) \to \neg p \\
&\equiv (\neg q \wedge \neg p) \to \neg p \\
&\equiv \neg(\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p \\
&\equiv (q \vee p) \vee \neg p \\
&\equiv q \vee (p \vee \neg p) \\
&\equiv q \vee 1 \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

DOKAZ TAUTOLOGIJE (P ∧ Q) → (P ∨ Q)

Korišćenje logičkih zakona u dokazivanju da je iskaz (p ∧ q) → (p ∨ q) tautologija

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\
&\equiv 1 \vee 1 \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

Poglavlje 9

SKUPOVI

OSNOVE SKUPOVA

Skup je kolekcija objekata ili elemenata , koji kao zajedničku karakteristiku imaju upravo pripadnost tome skupu.

Osnovna notacija i osobine su sledeći:
● Simbol $\in$ označava da neki element pripada skupu
- $a \in A$ znači da element a pripada skupu A
- $a \notin A$ znači da element a ne pripada skupu A

● Reprezentacija skupa se vrši ekstenzionalno i intenzionalno
- $Ekstenzionalno$ navođenje skupa podrazumeva da se elementi skupova navode između vitičastih zagrada, na primer {a, b, c} ili {1, 2, 3, ...}.
- $Intenzionalno$ navođenje skupa podrazumeva da se navode osobine koje imaju elementi skupa i samo oni, na primer {x : P(x) }, što se čita skup svih x za koje važi P(x).

● Simbol $\varnothing$ označava prazan skup, odnosno da skup ne sadrži ni jedan element
Skup A je $podskup$ skupa B, ako je svaki element skupa A i element skupa B. Da je A podskup supa B, označava se sa $A \subset B$, odnosno
$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
Skupovi A i B su $jednaki$ ako $A \subset B$ i $B \subset A$. Tada se piše $A = B$, a označava se sa
$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \wedge x \in B)$
Ako skupovi A i B nisu jednaki, onda se označava sa $A \neq B$.
Ako je $A \subset B$ i $A \neq B$, tada kažemo da je A $pravipodskup$ skupa B.

Zapis {x: x $\in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x \leq 2$} predstavlja skup svih realnih brojeva između 1 i 2. Intenzionalni {x:x je prirodan broj manji od 100 i kvadrat prirodnog broja } i ekstenzionalni {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 } zapisi predstavljaju isti skup.

UNIJA, PRESEK I DISJUNKTNA UNIJA

A ∪ B, A ∩ B, A ⊕ B

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Tada imamo sledeće definicije.

Definicija

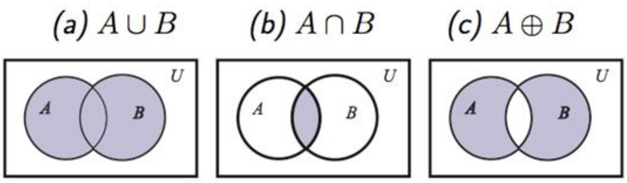
Unija skupova A i B je skup svih elemenata koji pripadaju bilo skupu A bilo skupu B, a obeležava se na sledeći način
A ∪ B
A ∪ B = {x : x ∈ A ∨ x ∈ B}

Definicija
Presek skupova A i B je skup svih elemenata koji pripadaju istovremeno i skupu A i skupu B, a obeležava se sa
A ∩ B
A ∩ B = {x : x ∈ A ∧ x ∈ B}

Definicija
Disjunktna unija ili simetrična razlika skupova - ako S = A ∪ B i važi da su A i B disjunktni, tada se S zove disjunktna unija skupova A i B
A Δ B

Drugim rečima, kažemo da su dva skupa disjunktna onda kada je njihov presek prazan skup.

Venovi dijagrami unije, preseka i disjunktne unije su prikazani na slici.



Slika 9.1 Venovi dijagrami za (a) uniju, (b) presek, (c) disjunktnu uniju [Izvor: Autor]

PRIMERI

Dokaz distributivnog zakona nad skupovima koristeći tabelu pripadnosti

Primer
Neka su A, B i C skupovi. Pokazati da

$$(A \cup (B \cap C))^c = (C^c \cup B^c) \cap A^c$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}(A\cup(B\cap C))^c &= A^c\cap(B\cap C)^c prviDeMorganovzakon\\ &= A^c\cap(B^c\cup C^c) drugiDeMorganovzakon\\ &= (B^c\cup C^c)\cap A^c zakonkomutacijepreseka\\ &= (C^c\cup B^c)\cap A^c zakonkomutacijeunije\end{aligned}$$

Primer

Dokazati prvi distributivni zakon koji glasi

A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

Rešenje:

A	B	C	$B\cup C$	$A\cap(B\cup C)$	$A\cap B$	$A\cap C$	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Slika 9.2 Tabela pripadnosti za osobinu distributivnosti [Izvor: Autor]

DEFINCIJA KOMPLEMENTA SKUPA

Komplement skupa A je skup elemenata koji pripadaju U ali ne pripadaju A

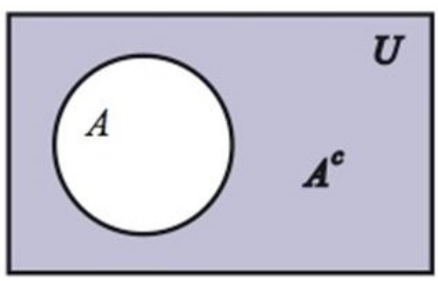
Označimo sa U univerzalni skup koji posmatramo i neka je

$$A\subset U$$

.

Definicija

Komplement skupa A, u označi A^C, je skup elemenata koji pripadaju U ali ne pripadaju A (Slika 1) , to jest $A^C = \{x \in U : x \notin A\}$



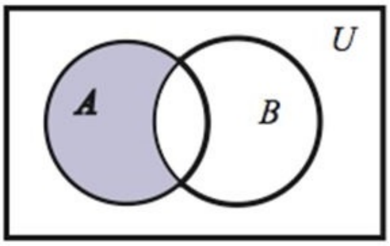
.

Slika 9.3 Venov dijagram ya komplement skupa A [Izvor: Autor]

DEFINICIJA RAZLIKE SKUPOVA

A \ B je skup svih elemenata koji pripadaju skupu A ali ne pripadaju skupu B

Definicija
Razlika skupova A i B, u oznaci A \ B, je skup svih elemenata koji pripadaju skupu A ali ne pripadaju skupu B (Slika 1)
$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

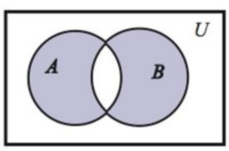


Slika 9.4 Venov dijagram za relativni komplement skupa [Izvor: Autor]

SIMETRIČNA RAZLIKA SKUPOVA

A ∆ B se sastoji iz onih elemenata koji pripadaju ili A ili B ali ne oboma

Definicija
Simetrična razlika skupova A i B, A ⊕ B, se sastoji iz onih elemenata koji pripadaju ili A ili B ali ne oboma (Slika 2); to jest
$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
ili
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Slika 9.5 Venov dijagram za simetričnu razliku skupova [Izvor: Autor]

Primer 1

Neka je U = N univerzalan skup

A = {1, 2, 3, 4}

B = {3, 4, 5, 6, 7}

C = {2, 3, 8, 9},

E = {2, 4, 6, . . . }

Tada imamo

A^c = {5, 6, 7, . . . }

B^c = {1, 2, 8, 9, . . . }

E^c = {1, 3, 5, . . . }

A \ B = {1, 2},

A \ C = {1, 4},

B \ C = {4, 5, 6, 7}

A \ E = {1, 3}

B \ A = {5, 6, 7}

C \ A = {8, 9}

C \ B = {2, 8, 9}

E \ A = {6, 8, 10, . . . }

A ∆ B = (A \ B) ∪ (B \ A) = {1, 2, 5, 6, 7}

B ∆ C = {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A ∆ C = (A \ C) ∪ (C \ A) = {1, 4, 8, 9}

A ∆ E = {1, 3, 6, 8, 10, . . . }

ALGEBRA ISKAZA - ZAKONI

Za skupove sa operacijama unije, preseka i komplementa važi veći broj važnih zakona

Za skupove sa operacijama unije, preseka i komplementa važi veći broj važnih zakona. Spisak ovih zakona je:

Komutativnost

X ∩ Y = Y ∩ X ,

X ∪ Y = Y ∪ X;

Asocijativnost

X ∩ (Y ∩ Z) = (X ∩ Y) ∩ Z,

$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$;

Distributivnost

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

Apsorptivnost

$X \cap (X \cup Y) = X$,

$X \cup (X \cap Y) = X$;

Idempotentnost

$X \cap X = X$,

$X \cup X = X$;

De Morganovi zakoni

$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$,

$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$;

Involutivni zakon (zakon dvostruke negacije)

$(A^c)^c = A$

Zakon komplementa

$A \cup A^C = U$

$A \cap A^C = \varnothing$

$U^C = \varnothing$

$\varnothing^C = U$

Zakoni identiteta

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

Zakon dominacije

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup U = U$

Primer

Prvi De Morganov zakon

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^C &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg(x \in (A \cup B)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg(x \in A \vee x \in B)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A)^C \wedge x \in (B)^C \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A)^C \cap (B)^C
\end{aligned}$$

Drugi De Morganov zakon

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B)^C &\Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg(x \in (A \cap B)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A)^C \cup x \in (B)^C \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A)^C \cup (B)^C
\end{aligned}
$$

Poglavlje 10

VEŽBE

ZADATAK 1

Ispitati koje od navedenih rečenica su iskazi

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Razmotrimo sledeće rečenice:

i. Da li smo na FIT-u?

ii. 1+5<6

iii. U Kaliforniji nikad ne pada kiša.

iv. 1+3=4

v. Tišina!

vi. Niš je u Srbiji.

vii. Odrediti koje od ovih rečenica predstavljaju iskaze.

viii. Odrediti istinitosnu vrednost svakog iskaza.

REŠENjE:

Iskazi: (ii), (iii), (iv), (vi)

Nisu iskazi: (i), (v)

ZADATAK 2

Pretvaranje rečenica govornog jezika u logičke iskaze

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta
Neka je p iskaz: **Hladno je.**
q je iskaz: **Pada kiša**
a) $\neg p$

b) p∧q

c) p∨q

d) q ∨ $\neg p$

e) p → q

REŠENjE:
a) ¬p: Nije hladno.

b) p∧q: Hladno je i pada kiša.

c) p∨q: Hladno je ili pada kiša.

d) q∨¬p: Pada kiša ili nije hladno.

e) p → q: Ako je hladno, onda pada kiša.

ZADATAK 3

Ako je A vernik, tada slovu a dodelimo vrednost tačno, a ako je A nevernik,tada slovu a dodelimo vrednost netačno.

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Pretpostavimo da smo na ostrvu vernika i nevernika.

Ako je A stanovnik ostrva, označimo sa a iskaz: „A je vernik."

Time smo svakom stanovniku ostrva dodelili jedno iskazno slovo.

Činjenica da je svaki stanovnik ostrva ili vernik ili nevernik odredjuje jednu valuaciju na ovim slovima:
ako je A vernik, tada slovu a dodelimo vrednost tačno, a ako je A nevernik,tada slovu a dodelimo vrednost netačno.

Teorema. Neka je A stanovnik ostrva, a je iskaz „A je vernik." i neka je p bilo koji iskaz.

Poznato je da je A izjavio: "p je tačno."
Tada je iskaz a ↔p tačan.

ZADATAK 4

Šta stranac može da zaključi o osobama A i B?

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Stranac dolazi na ostrvo, sreće osobe A i B i postavlja im pitanje:

„Ko je od vas vernik, a ko nevernik?".

Osoba A odgovara: **„Oboje smo nevernici.".**

Šta stranac može da zaključi o osobama A i B?

REŠENjE:

Ako sa a označimo iskaz „A je vernik.",

a sa b iskaz „B je vernik.",
tada vidimo da je A zapravo izjavio:

$$\neg a \bigwedge \neg b$$

Tj. I A je nevernik i osoba B je nevernik.
Prema teoremi zakučujemo da je

$$a \leftrightarrow (\neg a \bigwedge \neg b) = 1$$

Zapišimo tablicu ove formule

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$a \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

Slika 10.1 Tablica koja odgovara formuli a↔(¬a⋀¬b)=1 [Izvor: Autor]

Iz tablice vidimo da je

$$a \leftrightarrow (\neg a \bigwedge \neg b) = 1$$

akko a = 0 i b = 1.
pa zaključujemo da je A nevernik, a B vernik.

ZADATAK 5

Šta stranac može da zaključi o A i B.

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Stranac dolazi na ostrvo, sreće osobe A i B i nešto ih pita.
Osoba A odgovara:
„Ako sam ja vernik, onda je i B vernik".
Šta stranac može da zaključi o A i B?

REŠENjE:

Ako sa a označimo iskaz „A je vernik.",

a sa b iskaz „B je vernik.",
tada vidimo da je A zapravo izjavio:
a→b
Prema teoremi zakučujemo da je

$$a \leftrightarrow (a \rightarrow b) = 1$$

Zapišimo tablicu ove formule

a	b	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow (a \rightarrow b)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Slika 10.2 Prikaz tavlice koja odgovara formuli a↔(a→b)=1 [Izvor: Autor]

Iz tablice vidimo da je

$$a \leftrightarrow (a \rightarrow b) = 1$$

akko a =1 i b = 1,

pa zakučujemo da je A vernik, ali i da je B vernik.

ZADATAK 6

Prikaz matematičkih iskaza u logičke iskaze i određivanje njihovih istinitosnih vrednosti

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Sledeće iskaze prikazati simbolički i odrediti njihovu istinitosnu vrednost:

a) 4+2=5 i 6+3=9

b) 4+5=9 i 1+2=4

c) 3+2=5 i 6+1=7

d) 3+2=5 i 4+7=11

REŠENjE:

a) P: 4+2=5 $\perp$

Q: 6+3=9 $\top$ p ∧ q $\perp$

b) P:4+5=9 ⊤

Q: 1+2=4 ⊤ p ∧ q ⊤

c) P: 3+2=5 ⊤

Q: 6+1=7 ⊥ p ∧ q ⊥

d) P: 3+2=5 ⊤

Q: 4+7=11 ⊤ p ∧ q ⊤

ZADATAK 7

Određivanje tablica istinitosti za složene iskaze

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta
a) Odrediti tablicu istinitosti iskaza ¬p ∧ (p ∨ ¬q).

b) Pomoću tabele istinitosti pokazati da je sledeći iskaz tautologija
p ∨ ¬(p ∧ q)

REŠENjE:

¬p ∧(p ∨ ¬q).

p	q	¬p	¬q	p ∨ ¬q	¬p ∧(p ∨ ¬q).
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

p ∨ ¬(p ∧q)

p	q	p ∧q	¬(p ∧q)	p ∨ ¬(p ∧q)
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Slika 10.3 Rešenje zadatka [Izvor: Autor]

Formula jeste tautologija

ZADATAK 8

Dokaz zakona kontrapozicije koristeći tablice istinitosti

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Koristeći tablice istinitosti pokazati zakon kontrapozicije:

(p→q) ≡ (¬q→¬p)

REŠENjE:

p	q	p→q	¬q	¬p	¬q→¬p	(p→q) ≡(¬q→¬p)
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Slika 10.4 Rešenje zadatka [Izvor: Autor]

Jeste tautologija

ZADATAK 9

Koristeći logičke zakone pokazati da je sledeći iskaz tautologija

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Koristeći logičke zakone pokazati da je sledeći iskaz tautologija

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

REŠENjE:
(p ∧ q) → (p→q)

¬(p ∧ q) ∨ (¬p∨q)

¬p ∨ ¬q ∨ ¬p∨q

¬p ∨ (¬q ∨q)

¬p ∨ 1

1

Iskaz jeste tautologija.

ZADATAK 10

Ispitivanje da li je iskaz tautologija koristeći logičke zakone.

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Koristeći logičke zakone pokazati da je sledeći iskaz tautologija

$$\neg(p \to q) \to \neg q$$

REŠENjE:

¬ (p→q) →¬q

¬¬ (p→q) ∨ ¬q

(p→q) ∨ ¬q

(¬p ∨ q) ∨ ¬q

¬p ∨ 1

1

Iskaz jeste tautologija.

ZADATAK 11

Korišćenje tablice istinitosti u dokazivanju da je iskaz ((p → q) ∧ (q → r)) → (p → r) tautologija

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Zadatak:

Dokazati da je iskaz ((p → q) ∧ (q → r)) → (p → r) tautologija.

Rešenje:

Označimo sa s = (p → q) ∧ (q → r) i t = p → r i koristimo tablice istinitosti.

Kako su sve istinitosne vrednost za s → t, to jest, za ((p → q)^(q → r)) → (p → r), u poslednjoj koloni tablice istinitosti tačne (Tabela 1), bez obzira na istinitosne vrednosti promenljivih p, q i r, zaključujemo da je navedeni iskaz tautologija.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	s	t	$s \to t$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Slika 10.5 Tabela-1 Tablica istinitosti $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ [Izvor: Autor]

ZADATAK 12

Dokazi iskaza koristeći operacije nad skupovima

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Koristeći operacije nad skupovima dokazati sledeće

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

REŠENjE:

a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cap B)^c = \{x \mid x \notin A \cap B\}$

$= \{x \mid \neg (x \in (A \cap B))\}$

$= \{x \mid \neg (x \in A \wedge x \in B)\}$

$= \{x \mid \neg (x \in A) \vee \neg (x \in B)\}$

$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$

$= \{x \mid (x \in A^c) \vee (x \in B^c)\}$

$= \{x \mid x \in A^c \vee B^c\}$

$= A^c \cup B^c$

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

$$(A \cup B) \cap \left(A \cup B^{c}\right) = A \quad \cup \left(B \cap B^{c}\right) = A \quad \cup \ \emptyset \ = A$$

c) (A ∪ B) \ (A ∩ B) = (A \ B) ∪ (B \ A).

$$(A \cup B)\left(A \cap B\right) = \left(A \cup B\right) \cap (A \cap B)^{c}$$

$$= \left(A \cup B\right) \cap \left(A^{C} \cup B^{C}\right)$$

$$= \left((A \cup B) \cap A^{C}\right) \cup \left((A \cup B) \cap B^{C}\right)$$

$$= \left(\left(A \cap A^{C}\right) \cup \left(B \cap A^{C}\right)\right) \cup \left(\left(A \cap B^{C}\right) \cup \left(B \cap B^{C}\right)\right)$$

$$= \left(\emptyset \ \cup \left(B \cap A^{C}\right)\right) \cup \left(\left(A \cap B^{C}\right) \cup \ \emptyset \ \right)$$

$$= \left(\left(B \cap A^{C}\right)\right) \cup \left(\left(A \cap B^{C}\right)\right)$$

$$= \left(A \cap B^{C}\right) \cup \left(B \cap A^{C}\right)$$

$$= \left(A \cap B^{C}\right) \cup \left(B \cap A^{C}\right) \ (A \setminus B) \cup \left(B \setminus A\right)$$

Poglavlje 11

Vežba za samostalni rad

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Dokazati da su sledeće formule tautologije

Predviđeno vreme trajanja: 30 minuta

1. $(p \Leftrightarrow (q \wedge p)) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

2. $((p \vee q) \wedge ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))) \Rightarrow r$

3. $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$

4. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

5. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

6. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Poglavlje 12

Zaključak

ZAKLJUČAK

U ovoj lekciji obrađeni su osnovni pojmovi matematičke logike. Pored osnovnih logičkih operacija, konjunkcije, disjunkcije i negacije, dat je pregled najvažnijih tautologija i kontradikcija. U ovoj lekciji obrađeni su zakoni iskazne algebra koji predstavljaju osnovu matematičkog razmišljanja.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.

[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.