UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Uslovne raspodele. Uvod u teoriju informacija

Lekcija 07

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 07

USLOVNE RASPODELE. UVOD U TEORIJU INFORMACIJA

Uvod

UVOD

Uslovne raspodele. Uvod u teoriju informacija.

Uslovne raspodele se uvode u vezi da dvodimenzionalnim slučajnim promenljivim (X, Y). Može nas interesovati raspodela jedne slučajne promenljive, recimo X, posedujući informaciju ili pretpostavljajući da je druga slučajna promenljiva “uzela” neku vrednost $Y = y$.

Predmet proučavanja informatike su informacioni sistemi koji obuhvataju čoveka, kao i proizvode savremene elektronske civilizacije. Naglasak je, pri tom, na protoku, čuvanju, obradi i korišćenju informacija. U zavisnosti od vrste istraživanja, obično se ističu neke od mnogobrojnih karakteristika pojma informacija. S obzirom da informacija obično potiče (emituje se) iz nekog izvora i upućuje se kanalom ka nekom primaocu, ima smisla govoriti o neočekivanosti informacije sa stanovišta primaoca. Stepen neodređenosti, neočekivanosti informacije, koji se odnosi na primaoca, Klod Šenon je 1948. godine uzeo kao meru informacije, ignorišući tako njen sadržaj, značaj i ostale karakteristike. Time je zapravao počeo razvoj verovatnosne, statističke teorije informacija. Jedan deo ove teorije biće izložen u ovoj lekciji.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Uslovna raspodela – diskretan tip

USLOVNA RASPODELA DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Određivanje raspodela za slučajnu promenljivu X, ako posedujemo informaciju ili pretpostavljamo da je druga slučajna promenljiva Y "uzela" neku vrednost.

Može nas interesovati raspodela jedne slučajne promenljive, recimo X, posedujući informaciju ili pretpostavljajući da je druga slučajna promenljiva "uzela" neku vrednost $Y = y$. U slučaju kada je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) diskretnog tipa imamo

$$\begin{aligned} P\left(\{X = x_i\}|\{Y = y_j\}\right) = p(x_i|y_j) \\ &= \frac{P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right)}{P\{Y = y_j\}} \\ &= \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}. \end{aligned}$$

Verovatnoća $p(x_i|y_j)$ za $i = 1, 2, 3, \ldots$ predstavlja uslovnu verovatnoću za slučajnu promenljivu X, pri uslovu da je $Y = y_j$, za $j = 1, 2, 3, \ldots$

Analogno, verovatnoća $q(y_j|x_i)$ za $j = 1, 2, 3, \ldots$ koju zadajemo na sledeći način

$$q(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)},$$

predstavlja uslovnu verovatnoću za slučajnu promenljivu Y, pri uslovu da je $X = x_i$, za $i = 1, 2, 3, \ldots$

PRIMER – 1. DEO

Određivanje marginalne raspodele za slučajnu promenljivu Y.

Data je raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) sledećom tabelom

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{30}$
4	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$

Naći uslovnu raspodelu $X|Y$.

Rešenje. Da bismo odredili uslovnu raspodelu za $X|Y$ potrebno je da odredimo marginalnu raspodelu za slučajnu promenljivu Y. Imamo da je

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{30}$
4	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sada možemo odrediti traženu raspodelu $X|Y$. Potrebno je odrediti sledeće verovatnoće

$$P(\{X=1\}|\{Y=1\}) = \frac{P(\{X=1\}\cap\{Y=1\})}{P\{Y=1\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4},$$

$$P(\{X=1\}|\{Y=2\}) = \frac{P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})}{P\{Y=2\}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4},$$

$$P(\{X=1\}|\{Y=3\}) = \frac{P(\{X=1\}\cap\{Y=3\})}{P\{Y=3\}} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0,$$

$$P(\{X=1\}|\{Y=4\}) = \frac{P(\{X=1\}\cap\{Y=4\})}{P\{Y=4\}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4},$$

$$P(\{X=1\}|\{Y=5\}) = \frac{P(\{X=1\}\cap\{Y=5\})}{P\{Y=5\}} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}.$$

PRIMER – 2. DEO

Određivanje uslovne raspodele $X|Y$.

Na analogan način možemo odrediti i ostale verovatnoće i imamo da je

$$P(\{X=2\}|\{Y=1\})=\frac{1}{8},$$
$$P(\{X=2\}|\{Y=2\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=2\}|\{Y=3\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=2\}|\{Y=4\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=2\}|\{Y=5\})=\frac{1}{5},$$

zatim

$$P(\{X=3\}|\{Y=1\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=3\}|\{Y=2\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=3\}|\{Y=3\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=3\}|\{Y=4\})=0,$$
$$P(\{X=3\}|\{Y=5\})=\frac{1}{5},$$

zatim

$$P(\{X=4\}|\{Y=1\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=4\}|\{Y=2\})=0,$$
$$P(\{X=4\}|\{Y=3\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=4\}|\{Y=4\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=4\}|\{Y=5\})=\frac{1}{5}$$

i na kraju

$$P(\{X=5\}|\{Y=1\})=\frac{1}{8},$$
$$P(\{X=5\}|\{Y=2\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=5\}|\{Y=3\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=5\}|\{Y=4\})=\frac{1}{4},$$
$$P(\{X=5\}|\{Y=5\})=\frac{1}{5}.$$

PRIMER – 3. DEO

Tabelarno predstavljanje uslovne raspodele $X|Y$.

Dobijene verovatnoće možemo tabelarno predstaviti na sledeći način

$X \mid Y$	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Ukupno	1	1	1	1	1

AUTORSKI VIDEO KLIP

O uslovnoj raspodeli. Primer.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: primer za uslovnu raspodelu.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Entropija sistema

DEFINICIJA KONAČNOG VEROVATNOSNOG SISTEMA

Reč sistem u naučnim istraživanjima označava neki svrsishodno organizovan skup objekata.

Reč sistem u naučnim istraživanjima označava neki svrsishodno organizovan skup objekata. Funkcionisanje takvog sistema se karakteriše stanjima u koje on može da dođe zavisno od procesa koji jedan takav sistem obavlja ili u nekim situacijama kroz koje takav sistem prolazi. Pretpostavka je da se sistem u jedinici vremena može naći u tačno jednom od ovih stanja.

Definicija. Skup $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ zajedno sa raspodelom verovatnoća $p(x)$ na skupu X nazivamo konačni verovatnosni sistem i označavamo ga sa $\{X,p(x)\}$.

Prethodnom definicijom pojam sistema je dobio svoju matematičku interpretaciju. Elemente x_i $(i=1,2\ldots,n)$ skupa X interpretiramo kao stanja sistema, a brojeve $p(x_i)$ $(i=1,2\ldots,n)$ kao verovatnoće nalaženja sistema u nekom od svojih stanja.

Ako imamo dva skupa $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ i $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$, tada možemo definisati njihov direktan proizvod $X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$. Pojam sistema se ovako proširuje u smislu da možemo definisati sistem $\{X\times Y,p(x,y)\}$ kod koga je sa $p(x,y)$ označena raspodela verovatnoća po uređenim parovima (x,y), $x\in X$, $y\in Y$. Napomenimo da ako je zadat sistem $\{X\times Y,p(x,y)\}$, tada su određeni i sistemi $\{X,p(x)\}$ i $\{Y,q(y)\}$ koji kojih je

$$p(x_i)=\sum_{j=1}^{m}p(x_i,y_j),\quad \text{za}\quad i\in\{1,2,3,\ldots,n\}\quad \text{i}\quad q(y_j)=\sum_{i=1}^{n}p(x_i,y_j),\quad \text{za}\quad j\in\{1,2,3,\ldots,m\}.$$

Ako je za $x_i\in X$ i $p(x_i)>0$, tada možemo definisati

$$q(y_j|x_i)\overset{def}{=}p(x_i,y_j)\cdot p(x_i),$$

za svako $j\in\{1,2,3,\ldots,m\}$. Može se pokazati da je $q(y|x_i)$ raspodela verovatnoće na skupu Y. To je uslovna raspodela na skupu Y u odnosu na element $x_i\in X$. Tako se polazeći od sistema $\{X\times Y,p(x,y)\}$ može definisati i sistem $\{Y,q(y|x)\},$ za $p(x)>0.$ Na sličan način se može definisati i sistem $\{X,p(x|y)\},$ za $q(y)>0.$ Ako za sistem $\{X\times Y,p(x,y)\}$ važi da je

$$p(x_i,y_j)=p(x_i)\cdot q(y_j),$$

za sve $x_i\in X,y_j\in Y$ kažemo da su sistemi $\{X,p(x)\}$ i $\{Y,q(y)\}$ nezavisni.

SOPSTVENA INFORMACIJA

Svojstvo sistema u odnosu na koje se on sa određenom verovatnoćom može naći u svakom od svojih stanja predstavlja stepen neodređenosti sistema.

Svojstvo sistema u odnosu na koje se on sa određenom verovatnoćom može naći u svakom od svojih stanja predstavlja stepen neodređenosti sistema. Intuitivno shvaćenu meru te apriorne neodređenosti zvaćemo entropija. S obzirom da ovako uvedena neodređenost zavisi samo od stanja u koje sistem može doći, kao i od raspodele verovatnoća, entropija se definiše kao funkcija na sledeći način

$$H : D_n \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

gde je

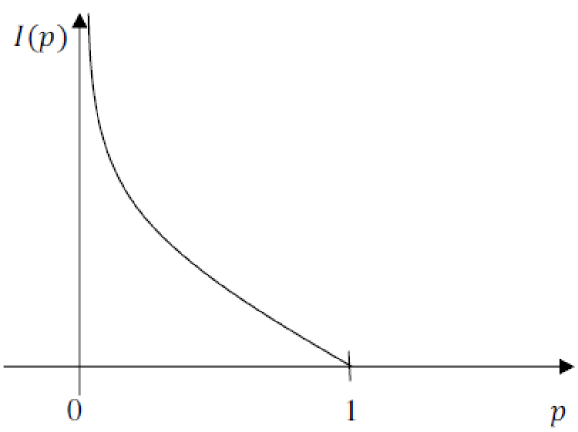
$$D_n = \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n | p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

skup svih raspodela verovatnoće na n -članom skupu. Da bismo definisali entropiju u potpunosti, najpre, ćemo definisati pojam sopstvena informacija.

Definicija. Neka je $\{X, p(x)\}$ sistem. Sopstvena informacija za stanje $x_i \in X$ i $p(x_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je broj

$$I(x_i) = -\log_b p(x_i) \;\; (b > 1).$$

Napomena. „Neodređenost“ sistema je logično meriti nekom monotono opadajućom funkcijom od $p(x_i)$, kakva je i prethodno data funkcija (videti sliku) jer ukoliko je verovatnoća veća utoliko je „neodređenost“ sistema manja i obrnuto. U slučaju prethodno date funkcije se često uzima da je $b = 2$.



Slika 2.1 Grafik funkcije sopstvene informacije [Izvor: Autor].

ENTROPIJA KONAČNE RASPODELE VEROVATNOĆA. PRIMER.

Entropija nekog sistema predstavlja matematičko očekivanje za sopstvene informacija svih stanja.

Definicija. Funkcija $H : D_n \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot \log_b p(x_i)$$

za $b > 1$, naziva se entropija konačne raspodele verovatnoća.

Napomena. Često se umesto oznake $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ koristi oznaka $H(X)$, a ako uzmemo u obzir i Definiciju 2 očigledno je

$$H(X) = \sum_{x_i \in X} p_i \cdot I(x_i).$$

Kako je funkcija $I : X \to \mathbb{R}$ jedna slučajna promenljiva, tada veličina $H(X)$ na osnovu prethodne formule predstavlja njeno matematičko očekivanje. Prilikom izračunavanja entropije moguće je da će se javiti $0 \cdot \log 0$ i mi ćemo u tom slučaju uzimati da je ta vrednost jednaka 0. Ubuduće nećemo pisati osnovu logaritma i podrazumevaćemo da je ona jednaka 2.

U slučaju da je

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1,$$

kažemo da se radi o jediničnoj entropiji i označavaćemo je 1 bit (binary digit). Odavde vidimo da sistem koji ima dva stanja ima najveću entropiju kada su verovatnoće da dospe u neko od tih stanja podjednake, tj. stepen neodređenosti tog sistema je najveći.

U ovom slučaju je bitno uočiti i entropiju

$$H(p, 1-p) = -p \cdot \log p - (1-p) \cdot \log(1-p).$$

Ova funkcija je neprekidna funkcija po promenljivoj p zbog toga što male promene verovatnoće p, ne bi trebalo da izazovu veće promene neodređenosti.

Primer. Odrediti entropiju sistema čije se stanje opisuje raspodelom verovatnoća slučajne promenljive X na sledeći način

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,04 & 0,90 \end{pmatrix}.$$

Rešenje. U ovom slučaju se tražena entropija računa na sledeći način

$$H(x) = -0,01\log 0,01 - 0,02\log 0,02 - 0,03\log 0,03 - 0,04\log 0,04 - 0,09\log 0,09 \approx 0,65\,\mathrm{bita}.$$

OSOBINE ENTROPIJE

Najneodređeniji su oni sistemi čije su verovatnoće da dospeju u neko od svojih stanja podjednake.

Ako za neki sistem od n stanja važi da je $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$, tada funkcija $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ zavisi samo od $n \in \mathbb{N}$. Uvedimo oznaku da je

$$H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = h(n).$$

Generalno govoreći, najneodređeniji sistemi su oni čije su verovatnoće da dospeju u neko od svojih stanja podjednake. U nastavku govorimo o nekim osobinama funkcije $h(n)$.

Stav. Za funkciju $h(n)$ $n \in \mathbb{N}$ važi da je

1) Ako su $n, m \in \mathbb{N}$ i važi $m < n$, tada je $h(m) < h(n)$.

2) Važi da je $h(m \cdot n) = h(m) \cdot h(n),$ za $n, m \in \mathbb{N}$.

Napomena. Prva od ovih osobina se odnosi na to da jednakoverovatni sistemi sa povećanjem broja stanja postaju neodređeniji. Drugao sobina se odnosi na entropiju sistema $X \times Y$, gde su X i Y nezavisni sistemi sa jednakoverovatnim stanjima.Uklanjanjem neodređenosti jednog od tih sistema, očekuje se da ostane neodređenost koja potiče od drugog.

POJAM ENTROPIJE SLOŽENOG SISTEMA

Entropija složenog sistema je manja ili jednaka zbiru pojedinačnih entropija sistema koje čine taj složeni sistem, pri čemu jednakost važi u slučaju njihove nezavisnosti.

Od interesa je određivati i entropiju sistema $\{X \times Y, p(x,y)\}$ i ona ima oblik

$$H(X \times Y) = -\sum_{x \in X,\, y \in Y} p(x,y) \cdot \log\big(p(x,y)\big).$$

Sa ovim složenim sistemom obično se posmatraju sistemi $\{X, p(x)\}$ i $\{Y, q(y)\}$ sa odgovarajućim marginalnim raspodelama verovatnoća. S tim u vezi nameće se i pitanje odnosa među entropijama. O tome govori naredni stav.

Stav. Važi da je

$$H(X \times Y) \leq H(X) + H(Y),$$

gde jednakost važi u slučaju da su sistemi X i Y nezavisni.

NapomenaAko za sistem $\{X \times Y, p(x, y)\}$ važi da je

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot q(y_j),$$

za sve $x_i \in X, y_j \in Y$ kažemo da su sistemi $\{X, p(x)\}$ i $\{Y, q(y)\}$ nezavisni.

Polazeći od sistema $\{X \times Y, p(x, y)\}$ može se definisati, kao što smo već rekli, i sistem $\{Y, q(y|x)\}$, za $p(x) > 0$. Na sličan način se može definisati i sistem $\{X, p(x|y)\}$, za $q(y) > 0$. Stoga je od interesa definisati i uslovnu entropiju za dva sistema o čemu govorimo u nastavku.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: teorija informacija

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Merenje informacije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Uslovna entropija sistema

USLOVNA ENTROPIJA JEDNOG SISTEM U ODNOSU NA FIKSIRANI ELEMENT DRUGOG SISTEMA

Uslovna entropija predstavlja matematičko očekivanje uslovne sopstvene informacije.

Definicija. Za sistem $\{X, p(x|y_0)\}$ veličina

$$I(x|y_0) = -\log p(x|y_0)$$

je uslovna sopstvena informacija elemenata x iz skup X, u odnosu na fiksirani element $y_0 \in Y, (q(y_0) > 0)$.

Slično, za sistem $\{Y, q(y|x_0)\}$ veličina

$$I(y|x_0) = -\log p(y|x_0)$$

je uslovna sopstvena informacija elemenata y iz skup Y, u odnosu na fiksirani element $x_0 \in X, (p(x_0) > 0)$.

Uzimajući u obzir prethodnu definiciju i činjenicu da entropija predstavlja matematičko očekivanje sopstvene informacije, možemo definisati pojam uslovne entropije, što činimo u nastavku.
Definicija Za fiksirano $y_0 \in Y, (q(y_0) > 0)$ imamo da je

$$H(X|y_0) = -\sum_{x \in X} p(x|y_0) \cdot \log p(x|y_0),$$

srednja uslovna entropija sistema X u odnosu na $y_0 \in Y$.

Slično, za fiksirano $x_0 \in X, (p(x_0) > 0)$ imamo da je

$$H(Y|x_0) = -\sum_{y \in Y} p(y|x_0) \cdot \log p(y|x_0),$$

srednja uslovna entropija sistema Y u odnosu na $x_0 \in X$.

Iz prethodno datih definicija očigledno imamo da je

$$H(X|y_0) = \sum_{x \in X} p(x|y_0) \cdot I(x|y_0),$$

SREDNJA USLOVNA ENTROPIJA JEDNOG SISTEMA U ODNOSU NA DRUGI

Srednja uslovna entropija predstavlja matematičko očekivanje uslovne entropije jednog sistem u odnosu na fiksirani element drugog sistema.

Sada smo u mogućnosti da definišemo srednju uslovnu entropiju sistema X u odnosu na sistem Y, kao i obrnuto.

Definicija. Srednju uslovnu entropiju sistema X u odnosu na sistem Y data je formulom

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{y\in Y} q(y)\cdot H(X|y) = \\ &= \sum_{y\in Y} q(y) \sum_{x\in X} p(x|y)\cdot I(x|y) = \\ &= -\sum_{y\in Y} q(y) \sum_{x\in X} p(x|y)\cdot \log p(x|y), \end{aligned}$$

a srednju uslovnu entropiju sistema Y u odnosu na sistem X data je formulom

$$H(Y|X) = -\sum_{x\in X} p(x) \sum_{y\in Y} p(y|x)\cdot \log p(y|x).$$

Poznajući pojam uslovne entropije, moguće je dokazati da važi sledeća formula za određivanje entropije složenog sistema, preko uslovne entropije

$$H(X\times Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y).$$

Sledeći stav je poznat i kao Šenonova nejednakost.

Stav. Imamo da je $H(Y|X) \leq H(Y)$, kao i $H(X|Y) \leq H(X)$, pri čemu jednakost važi u slučaju nezavisnosti sistema X i Y.

PRIMER

Određivanje srednje uslovne entropije

Primer. Raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) data je tabelom

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	$0,2$	0	$0,4$
x_2	$0,1$	0	$0,1$
x_3	$0,1$	$0,1$	0

Odrediti $H(Y|X)$.

Rešenje. Prema formuli za izračunavanje $H(Y|X)$ potrebno je, najpre, odrediti marginalnu raspodelu za slučajnu promenljivu X. Dakle, imamo

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Takođe treba odrediti sledeće uslovne verovatnoće

$$P(\{Y = y_1\}|\{X = x_1\}) = \frac{P(\{Y = y_1\}, \{X = x_1\})}{P(\{X = x_1\})} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3},$$
$$P(\{Y = y_1\}|\{X = x_2\}) = \frac{P(\{Y = y_1\}, \{X = x_2\})}{P(\{X = x_2\})} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2},$$

$$P(\{Y = y_1\}|\{X = x_3\}) = \frac{P(\{Y = y_1\}, \{X = x_3\})}{P(\{X = x_3\})} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$$

Slično, imamo da je

$$P(\{Y = y_2\}|\{X = x_1\}) = 0,$$
$$P(\{Y = y_2\}|\{X = x_2\}) = 0,$$
$$P(\{Y = y_2\}|\{X = x_3\}) = \frac{1}{2},$$

kao i

$$P(\{Y = y_3\}|\{X = x_1\}) = \frac{2}{3},$$
$$P(\{Y = y_3\}|\{X = x_2\}) = \frac{1}{2},$$
$$P(\{Y = y_3\}|\{X = x_3\}) = 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned} H(Y|X) = & -0,6(0,33 \log 0,33 + 0 + 0,66 \log 0,66) - \\ & - 0,2(0,5 \log 0,5 + 0 + 0,5 \log 0,5) - \\ & - 0,2(0,5 \log 0,5 + 0,5 \log 0,5 + 0) \approx 5,94 \text{ bita}. \end{aligned}$$

Poglavlje 4

Srednja uzajamna informacija

DEFINICIJA UZAJAMNE INFORMACIJE

Potpuna informacija o stanju sistema može se dobiti ako se ukloni njegova neodređenost. Odatle proizilazi da je jedinica za merenje (količine sistema) informacije 1 bit.

U vezi sa sistemom $\{X, p(x)\}$ definisali smo sopstvenu informaciju pojedinih stanja sistema. Sopstvena informacija čitavog sistema X, u oznaci $I[X]$, predstavlja, zapravo, njegovu entropiju. Dakle, potpuna informacija o stanju sistema može se dobiti ako se ukloni njegova neodređenost. Odatle i proizilazi da je jedinica za merenje (količine sistema) informacije 1 bit.

Definicija. Uzajamna informacija za $x \in X$ i $y \in Y$, u oznaci $I[x, y]$ je

$$I[x, y] = I(y) - I(y|x) = \log \frac{p(y|x)}{q(y)}.$$

Kako je $p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$, tada imamo da je

$$I[x, y] = \frac{\log p(x, y)}{p(x) \cdot q(y)}.$$

Napomena. Očigledno, iz prethodne definicije imamo da je

$$I[x, y] = I[y, x].$$

Ova veličina može biti i pozitivna i negativna, a može se desiti i da je neodređena. Da bi se izbegao poslednji slučaj posmatraju se samo slučajevi kada su $p(x) \cdot q(y) > 0$.
Možemo uvesti i pojam srednje uzajamne informacije sistema X i Y, kao matematičko očekivanje slučajne veličine $I[x, y]$.

Definicija. Srednja uzajamna informacija sistema X i Y je

$$I[X, Y] = \sum_{x \in X, y \in Y} p(x, y) I[x, y] =$$
$$= - \sum_{x \in X, y \in Y} p(x, y) \frac{\log p(x, y)}{p(x) \cdot q(y)}.$$

Napomena. Očigledno, iz prethodne definicije imamo da je

$$I[X, Y] = I[Y, X].$$

Stav. Važe sledeće jednakosti:

a) $I[X,Y] = H(X) - H(X|Y)$ i $I[X,Y] = H(Y) - H(Y|X)$,

b) $I[X,Y] = H(X) + H(Y) - H(X \times Y)$.

Napomena 5. Iz ovog stava vidimo da se informacija u sistemu Y o sistemu X dobija kada se neodređenost sistema X umanji za neodređenost koja u sistemu X ostaje posle utvrđivanja stanja sistema Y.

POJAM (PARCIJALNE) UZAJAMNE INFORMACIJE IZMEĐU JEDNOG SISTEMA I JEDNOG STANJA DRUGOG SISTEMA

Za fiksirano stanje jednog sistema, može se odrediti uzajamna informacija između njega i drugog sistema.

Definicija. Za fiksirano $x \in X, (p(x) > 0)$ (parcijalna) uzajamna informacija između sistema Y i stanja $x \in X$ glasi

$$I[x,Y] = -\sum_{y \in Y} p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{q(y)}.$$

Definicija. Za fiksirano $y \in Y, (q(y) > 0)$ (parcijalna) uzajamna informacija između sistema Y i stanja $x \in X$ glasi

$$I[X,y] = -\sum_{x \in X} p(x|y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)}.$$

Napomena. Očigledno, iz prethodne dve definicije imamo da je

$$I[X,Y] = \sum_{x \in X} p(x) \cdot I[x,Y] = \sum_{y \in Y} q(y) \cdot I[X,y].$$

Može se pokazati da važi da je $I[x,Y] \geq 0$, odnosno $I[X,y] \geq 0$. Odavde možemo zaključiti, na osnovu prethodne napomene, da važi $I[X,Y] \geq 0$.

PRIMER – 1. DEO

Određivanje srednje uzajamne informacije

Primer. Kocka se baca jedanput. Ako padne broj 1, 2, 3 ili 4 novčić se baca jednom. Ako padne broj 5 ili 6 novčić se baca dva puta. Naći informaciju o broju na kocki sadržanu u broju pisama kod bacanja novčića.

Rešenje. Neka slučajna promenljiva X ima dva stanja i to x_1, ako je na kocki pao broj 1, 2, 3 ili 4, a drugo stanje x_2 ako je na kocki pao broj 5 ili 6. Raspodela ove slučajne promenljive je

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Slučajna promenljiva Y predstavlja broj palih pisama pri bacanju novčića, pri čemu je $R_Y = \{0, 1, 2\}$. Potrebno je odrediti $I[X, Y] = H(Y) - H(Y|X)$. Da bismo odredili $H(Y)$ potrebno je odrediti sledeće verovatnoće $P(Y = 0), P(Y = 1)$ i $P(Y = 2)$. Njih određujemo tako što, najpre, odredimo sledeće verovatnoće

$$P(\{Y = 0\}|\{X = x_1\}) = \frac{1}{2},\ P(\{Y = 1\}|\{X = x_1\}) = \frac{1}{2},$$
$$P(\{Y = 2\}|\{X = x_1\}) = 0,$$

kao i

$$P(\{Y = 0\}|\{X = x_2\}) = \frac{1}{4},\ P(\{Y = 1\}|\{X = x_2\}) = \frac{1}{2},$$
$$P(\{Y = 2\}|\{X = x_2\}) = \frac{1}{4}.$$

PRIMER – 2. DEO

Određivanje srednje uzajamne informacije.

Sada, na osnovu formule potpune verovatnoće imamo:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) = {} & P(X = x_1) \cdot P(\{Y = 0\}|\{X = x_1\}) + \\ & + P(X = x_2) \cdot P(\{Y = 0\}|\{X = x_2\}) = \\ = {} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) = {} & P(X = x_1) \cdot P(\{Y = 1\}|\{X = x_1\}) + \\ & + P(X = x_2) \cdot P(\{Y = 1\}|\{X = x_2\}) = \\ = {} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 2) = {} & P(X = x_1) \cdot P(\{Y = 2\}|\{X = x_1\}) + \\ + \quad & + P(X = x_2) \cdot P(\{Y = 2\}|\{X = x_2\}) = \\ = {} & 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

Imamo da je

$$H(Y) = -\frac{5}{12} \cdot \log \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \log \frac{1}{12}.$$

S druge strane, imamo da je

$$H(Y|X) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + 0 \right) -$$
$$- \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \right).$$

Tada je

$$I[X,Y] = H(Y) - H(Y|X) = 0,158 \text{ bita.}$$

Poglavlje 5

Pokazna vežba

1. ZADATAK – 1. DEO (20 MINUTA)

Određivanje marginalnih raspodela za slučajne promenljive X i Y.

Data je raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) sledećom tabelom

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{30}$
4	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$

Naći uslovnu raspodelu $Y|X$.

Rešenje. Da bismo odredili uslovnu raspodelu za $Y|X$ potrebno je da odredimo marginalnu raspodelu za slučajnu promenljivu X. Imamo da je

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5	
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$

1.ZADATAK – 2. DEO

Određivanje verovatnoća za potrebne uslovne raspodele.

Sada možemo odrediti traženu raspodelu $\mathrm{Y}|\mathrm{X}$ Potrebno je odrediti sledeće verovatnoće:

$$\mathrm{P}\big(\{\mathrm{Y}=1\}\big|\{\mathrm{X}=1\}\big)=\frac{\mathrm{P}\big(\{\mathrm{Y}=1\}\cap\{\mathrm{X}=1\}\big)}{\mathrm{P}\{\mathrm{X}=1\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{12},$$

$$P(\{Y=1\}|\{X=2\}) = \frac{P(\{Y=1\}\cap\{X=2\})}{P\{X=2\}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{24},$$

$$P(\{Y=1\}|\{X=3\}) = \frac{P(\{Y=1\}\cap\{X=3\})}{P\{X=3\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{12},$$

$$P(\{Y=1\}|\{X=4\}) = \frac{P(\{Y=1\}\cap\{X=4\})}{P\{X=4\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{12},$$

$$P(\{Y=1\}|\{X=5\}) = \frac{P(\{Y=1\}\cap\{X=5\})}{P\{X=5\}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{24}.$$

Na analogan način možemo odrediti i ostale verovatnoće i imamo da je:

$P(\{Y=2\}|\{X=1\}) = \frac{5}{24}$, $P(\{Y=2\}|\{X=2\}) = \frac{5}{24}$, $P(\{Y=2\}|\{X=3\}) = \frac{5}{24}$, $P(\{Y=2\}|\{X=4\}) = 0$, $P(\{Y=$

$P(\{Y=4\}|\{X=1\}) = \frac{5}{24}$, $P(\{Y=4\}|\{X=2\}) = \frac{5}{24}$, $P(\{Y=4\}|\{X=3\}) = 0$, $P(\{Y=4\}|\{X=4\}) = \frac{5}{24}$, $P(\{Y=$

1. ZADATAK – 3. DEO

Tabelarno prikazivanje tražene uslovne raspodele $Y|X$.

Sada možemo tabelarno predstaviti traženu raspodelu

$X\,\vert\,Y$	1	2	3	4	5	Ukupno
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{24}$	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	1
2	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	1
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	0	$\frac{1}{6}$	1
4	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{5}$	1
5	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	1

2. ZADATAK (10 MINUTA)

Nalaženje uslovne verovatnoće $P(X=3|Y\geq 1)$.

Data je raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y)

$X \diagdown Y$	1	2	4
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
3	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

Naći $P\left(\{X=3\}|\{Y\geq 1\}\right)$.

Rešenje. Važi da je: $P\left(\{X=3\}|\{Y\geq 1\}\right)=P\left(\{X=3\}|\{Y=2\}\right)+P\left(\{X=3\}|\{Y=4\}\right)$. Kako je

$$P\left(\{X=3\}|\{Y=2\}\right)=\frac{P\left(\{X=3\}\cap\{Y=2\}\right)}{P\{Y=2\}} \quad \text{i} \quad P\left(\{X=3\}|\{Y=4\}\right)=\frac{P\left(\{X=3\}\cap\{Y=4\}\right)}{P\{Y=4\}},$$

potrebno je, najpre, odrediti $P\{Y=2\}$ i $P\{Y=4\}$ iz marginalne raspodele za slučajnu promenljivu Y. Imamo da je: $Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$.

Sada imamo da je:

$$P\left(\{X=3\}|\{Y\geq 1\}\right)=\frac{P\left(\{X=3\}\cap\{Y=2\}\right)}{P\{Y=2\}}+\frac{P\left(\{X=3\}\cap\{Y=4\}\right)}{P\{Y=4\}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}}+\frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{11}{12}.$$

3. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje raspodele slučajne promenljive $X|Y\in(0,5;8,25)$.

U kutiji se nalaze 6 belih kuglica koje teže po 3 grama i 4 crnekuglice koje teže po 5 grama. Iz kutije se na slučajan način ,bezvraćanja, izvlače 2 kuglice. Naći raspodelu dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y), gde je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj izvučenih kuglica, a Y slučajna promenljiva koja predstavlja težinu izvučenih kuglica, kao i marginalne raspodele. Naći raspodelu slučajne promenljive $X|Y\in(0,5;8,25)$.

Rešenje. Na prethodnim vežbama je određena raspodela dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) sa njenim marginalnim raspodelama, koja je data sledećom tabelom

$X \diagdown Y$	6	8	10	
0	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	0	$\frac{8}{15}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

Kako bismo odredili traženu raspodelu potrebno je odrediti sledeće verovatnoće: $P\{X=0|Y\in\{0,5,8,25\}\}=0$,

$$P\{X=1|Y\in\{0,5,8,25\}\}=\frac{P\{X=1,Y\in\{0,5,8,25\}\}}{P\{Y\in\{0,5,8,25\}\}}=\frac{P\{X=1,Y=6\}+P\{X=1,Y=8\}}{P\{Y=6\}+P\{Y=8\}}=\frac{0+\frac{8}{15}}{\frac{5}{15}+\frac{8}{15}}=\frac{8}{13},$$

$$P\{X=2|Y\in\{0,5,8,25\}\}=\frac{P\{X=2,Y\in\{0,5,8,25\}\}}{P\{Y\in\{0,5,8,25\}\}}=\frac{P\{X=2,Y=6\}+P\{X=2,Y=8\}}{P\{Y=6\}+P\{Y=8\}}=\frac{\frac{5}{15}+0}{\frac{5}{15}+\frac{8}{15}}=\frac{5}{13}.$$

Tada je

$$X|Y \in |0, 5, 8, 25 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{8}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

4. ZADATAK - 1. DEO (15 MINUTA)

Određivanje zakona raspodele slučajne promenljive, kao i marginalne raspodele.

Tri puta bacamo novčić. Neka je X slučajna promenljiva čija je vrednost jednaka broju palih pisama, a Y je slučajna promenljiva koja je jednaka broju promena (pismo je palo iza glave ili obrnuto). Naći zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y) i marginalne raspodele. Naći uslovne zakone raspodele za X ako znamo da je slučajna promenljiva Y

1. jednaka 0 (sva tri puta je pao isti znak - bilo je 0 promena),

2. jednaka 0 ili 1 (bilo je 0 ili 1 promena).

Rešenje. Slučajna promenljiva (X, Y) preslikava elementarne ishode iz skupa svih ishoda Ω u uređene parove na sledeći način

$$\begin{array}{cccccccc} PPP & PPG & PGP & GPP & PGG & GPG & GGP & GGG \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (3,0) & (2,1) & (2,2) & (2,1) & (1,1) & (1,2) & (1,1) & (0,0) \end{array}$$

Dakle, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ i $R_Y = \{0, 1, 2\}$. Tada je

$Y \diagdown X$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

kao i

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. ZADATAK - 2. DEO

Određivanje zakona tražene uslovne raspodele.

1. Važi da je

$$p(x_0|y_0) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2},\ p(x_1|y_0) = p(x_2|y_0) = 0,\ p(x_3|y_0) = \frac{1}{2},$$

te je zakon raspodele za X ako je Y = 0

$$X|Y = 0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Sada imamo da je $P(Y = 0 \text{ ili } Y = 1) = P(Y \in \{0,1\}) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$,pa važi

$$P(X = 0|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 0, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{p(x_0, y_0) + p(x_0, y_1)}{p(Y \in \{0,1\})} = \frac{\frac{1}{8} + 0}{\frac{6}{8}}$$
$$= \frac{1}{6}.$$

Analognom prethodnom, imamo da je

$$P(X = 1|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 1, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{2}{6},$$

$$P(X = 2|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 2, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{2}{6},$$

$$P(X = 3|Y \in \{0,1\}) = \frac{P(X = 3, Y \in \{0,1\})}{P(Y \in \{0,1\})} = \frac{1}{6}.$$

Zakon raspodele za X ako je $Y \in \{0,1\}$ ima oblik

$$X|Y \in \{0,1\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

5. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje entropije datih sistema.

Date su dve urne koje sadrže po 20 kuglica. U prvoj se nalazi 10 belih, 5 crnih i 5 crvenih, a u drugoj 8 belih, 8 crnih i 4 crvene kuglice. Iz svake urne izvlačimo po jednu kuglicu. Koji rezultat od ova dva eksperimenta možemo smatrati neodređenijim?

Rešenje: Kako je za prvu urnu raspodela X_1 verovatnoća:

$$X_1 : \begin{pmatrix} \text{bela} & \text{crna} & \text{crvena} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

a za drugu urnu:

$$X_2 : \begin{pmatrix} \text{bela} & \text{crna} & \text{crvena} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Tada imamo da je:

$$H(X_1) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = 1,5,$$

$$H(X_2) = -\frac{2}{5}\log\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\log\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\log\frac{1}{5} = 1,51.$$

Dakle, rezultat izvlačenja iz druge urne je neodređeniji.

6. ZADATAK – 1. DEO (10 MINUTA)

Određivanje uslovne entropije $H(X|Y)$ - najpre, određujemo marginalnu raspodelu za Y.

Raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) dat je tabelom:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	$0,2$	0	$0,4$
x_2	$0,1$	0	$0,1$
x_3	$0,1$	$0,1$	0

Odrediti $H(X|Y)$.

<u>Rešenje</u>: Prema formuli za izračunavanje $H(X|Y)$ potrebno je, najpre, odrediti marginalnu raspodelu za slučajnu promenljivu Y. Dakle, imamo:

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

6. ZADATAK – 2. DEO

Određivanje uslovne verovatnoće na osnovu određene raspodele slučajne promenljive Y , a nakon toga i tražene uslovne entropije.

Takođe treba odrediti sledeće uslovne verovatnoće:

$$P\left(\{X = \boldsymbol{x_1}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_1}\}\right) = \frac{P\left(\{Y = \boldsymbol{y_1}\}, \{X = \boldsymbol{x_1}\}\right)}{P\left(\{X = \boldsymbol{y_1}\}\right)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2},$$

$$P\left(\{X = \boldsymbol{x_2}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_1}\}\right) = \frac{P\left(\{Y = \boldsymbol{y_1}\}, \{X = \boldsymbol{x_2}\}\right)}{P\left(\{X = \boldsymbol{y_1}\}\right)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4},$$

$$P\left(\{X = \boldsymbol{x_3}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_1}\}\right) = \frac{P\left(\{Y = \boldsymbol{y_1}\}, \{X = \boldsymbol{x_3}\}\right)}{P\left(\{X = \boldsymbol{y_1}\}\right)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

Slično, imamo da je:

$$P\left(\{X = \boldsymbol{x_1}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_2}\}\right) = 0,\ P\left(\{X = \boldsymbol{x_2}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_2}\}\right) = 0,\ P\left(\{X = \boldsymbol{x_3}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_2}\}\right) = 1,$$

$$P\left(\{X = \boldsymbol{x_1}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_3}\}\right) = \frac{4}{5},\ P\left(\{X = \boldsymbol{x_2}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_3}\}\right) = \frac{1}{5},\ P\left(\{X = \boldsymbol{x_3}\}\middle|\{Y = \boldsymbol{y_3}\}\right) = 0.$$

Tada je:

$$H(Y|X) = -0,4(0,5\log 0,5 + 0,25\log 0,25 + 0,25\log 0,25) - 0,1(0 + 0 + 0) - 0,5(0,8\log 0,8 + 0,2\log 0,2 + 0) \approx 0,$$

7. ZADATAK – 1. DEO (15 MINUTA)

Računanje potrebnih verovatnoća koji su neophodni za izačunavanje srednje uzajamne informacije.

Pretpostavimo da je za Beograd verovatnoća da će pasti kiša 15. juna 0,4, a 15. septembra 0,8. Neka je metereološka prognoza za 15. jun tačna u 60% slučajeva kada se predviđa padanje kiše, a u 80% slučajeva kada se predviđa suvo vreme, a za 15. septembra je tačna u 90% slučajeva kada se predviđa padanje kiše, a u 50% slučajeva kada se predviđa suvo vreme. Za koji od ova dva dana prognoza daje više informacija o vremenu?

Rešenje. Neka je X_1 sistem čija su stanja: $x_1 -$ pada kiša 15. juna, $\overline{x_1} -$ ne pada kiša 15. juna.

Tada, iz $p(x_1) = 0,4$, a $p\left(\overline{x_1}\right) = 1 - 0,4 = 0,6$, imamo da je: $H(X_1) = -0,4\log 0,4 - 0,6\log 0,6 = 0,971$ bita.

Sada, ćemo uvesti još jedan sistem koji se odnose na prognoziranje vremena.

Neka je Y_1 sistem čija su stanja: $y_1 -$ prognozira se kiša 15. juna, $\overline{y_1} -$ ne prognozira se kiša 15. juna,

Tada, iz $p(x_1|y_1) = 0,6$, $p\left(\overline{x_1}\middle|y_1\right) = 0,4$, $p\left(x_1\middle|\overline{y_1}\right) = 0,2$, $p\left(\overline{x_1}\middle|\overline{y_1}\right) = 0,8$ i iz jednakosti:

$$p(x_1) = p(y_1) \cdot p(x_1|y_1) + p\left(\overline{y_1}\right) \cdot p\left(x_1\middle|\overline{y_1}\right),$$

možemo odrediti $p(y_1)$ (imamo da je $p\left(\overline{y_1}\right) = 1 - p(y_1)$). Nalazimo da je $p(y_1) = p\left(\overline{y_1}\right) = 0,5$.

Na sličan način, iz $p(x_2|y_2) = 0,9$, $p(\overline{x_2}|y_2) = 0,1$, $p(x_2|\overline{y_2}) = 0,5$, $p(\overline{x_2}|\overline{y_2}) = 0,5$ i iz jednakosti $p(x_2) = p(y_2) \cdot p(x_2|y_2) + p(\overline{y_2}) \cdot p(x_2|\overline{y_2})$, možemo odrediti $p(y_2)$ (imamo da je $p(\overline{y_2}) = 1 - p(y_2)$). Nalazimo da je $p(y_2) = 0,75$ i $p(\overline{y_2}) = 0,25$.

Odavde, imamo da je srednju uslovnu entropiju sistema X_1 u odnosu na sistem Y_1 : $H(X_1|Y_1) = -\sum_{y\in Y} q(y) \sum_{x\in X} p(x|y) \log p(x|y)$

što u našem slučaju glasi:

$$H(X_1|Y_1) = -p(y_1) \cdot \left(\log p(x_1|y_1) + \log p(x_1|\overline{y_1})\right) - p(\overline{y_1}) \cdot \left(\log p(\overline{x_1}|y_1) + \log p(\overline{x_1}|\overline{y_1})\right),$$

odnosno kada zamenimo dobijene vrednosti

$$H(X_1|Y_1) = -0,5 \cdot (0,6 \cdot \log 0,6 + 0,4 \cdot \log 0,4) - 0,5 \cdot (0,6 \cdot \log 0,2 + 0,8 \cdot \log 0,8) = 0,864.$$

7. ZADATAK – 2. DEO

Izračunavanje potrebnih entropija i srednjih uzajamnih informacija.

Sada isto ovo radimo za 15. septembar. Tada definišemo sledeća dva sistema:

neka je X_2 sistem čija su stanja:

$x_2 -$ pada kiša 15. septembra

$\overline{x_2} -$ ne pada kiša 15. septembra

neka je Y_2 sistem čija su stanja:

$y_2 -$ prognozira se kiša 15. septembra,

$\overline{y_2} -$ ne prognozira se kiša 15. septembra.

Tada, iz $p(x_2) = 0,8$, a $p(\overline{x_2}) = 1 - 0,8 = 0,2$, imamo da je:

$$H(X_2) = -0,8\log 0,8 - 0,2\log 0,2 = 0,772 \text{ bita.}$$

Na potpuno sličan način (uraditi za vežbu) možemo odrediti da je:

$$H(X_2|Y_2) = 0,602 \text{ bita.}$$

Konačno, iz formule da je $I[X_1, Y_1] = H(X_1) - H(X_1|Y_1)$, imamo da je:

$$I[X_1, Y_1] = 0,971 - 0,846 = 0,125 \text{ bita.}$$

S druge strane, iz formule da je $I[X_2, Y_2] = H(X_2) - H(X_2|Y_2)$, imamo da je:

$I[X_2, Y_2] = 0,772 - 0,602 = 0,120$ bita.

Dakle, informativnija je prognoza 15. juna, iako je verovatnoća tačne prognoze za taj dan informativnija. Ovo se objašnjava time što je tada teže predvideti vremensku situaciju (verovatnoća kiše i njenog odsustva iznose 0,4 i 0,6).

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD

Zadaci za samostalan rad studenata.

Zadatak. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) data je sa

X/Y	0	1
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{6}{18}$
1	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$
2	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$

Odrediti $P(X = 1 \mid Y = 1)$, kao i $P(Y = 1 \mid X = 2)$.

Rezultat. $P(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{4}{11}, P(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{1}{4}$.

Zadatak. Pera izvlači jednu kuglicu iz kutije u kojoj se nalazi sedam kuglica označenih brojevima 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Ako je izvučen broj deljiv sa tri, dobija jedan poen, ako je izvučen broj deljiv sa četiri, dobija dva poena, a u ostalim slučajevima dobija tri poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj poena koje je Pera osvojio. Slučajna promenljiva Y uzima vrednost nula ako je izvučen paran broj, a vrednost jedan ako je izvucen neparan broj. Naći zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y). Izračunati verovatnoće $P(X = 1|Y = 0)$ i $P(Y = 0|X = 3)$.

Rezultat.

X/Y	0	1
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
2	$\frac{2}{7}$	0
3	0	$\frac{2}{7}$

$$, \quad P(X = 1|Y = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(Y = 0|X = 3) = 0.$$

Zadatak. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) data je sa

X/Y	a	b	c	d
a	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
b	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0
c	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	0
d	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	0

Odrediti $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y \mid X)$ i $I[X,Y]$.

Rezultat.
$H(X) = 2\,\text{bita}$,
$H(Y) = \frac{7}{4}\,\text{bita}$,
$H(X,Y) = \frac{27}{8}\,\text{bita}$,
$H(Y \mid X) = \frac{11}{8}\,\text{bita}$ i
$I[X,Y] = \frac{3}{8}\,\text{bita}$.

Vreme izrade: 1. 12 minuta; 2. zadatak 12 minuta; 3. 21 minut.

Zaključak

USLOVNA RASPODELA. UVOD U TEORIJU INFORMACIJA

Uslovna raspodela dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog i neprekidnog tipa. Verovatnosni sistem, entropija, informacija.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa pojmom uslovne verovatnoće i naučili kako se ona određuje u slučaju dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog, odnosno neprekidnog tipa.

Takođe, upoznali smo se delom Teorije informacije, a koja je u vezi sa osnovnim pojmovima koji koriste u informatici i računarstvu, a to su pojmovi entropije i informacije. Ovi pojmovi igraju veliku ulogu prilikom kompresije podataka, njihovog kodiranja i slično.

LITERATURA:

M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.

Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.

Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.

Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.