UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA105 - MATEMATIČKA ANALIZA

Neodređeni integral - Integracija trigonometrijskih i iracionalnih funkcija

Lekcija 08

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA105 - MATEMATIČKA ANALIZA

Lekcija 08

NEODREĐENI INTEGRAL - INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH I IRACIONALNIH FUNKCIJA

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo obraditi specifične metode za iracionalnih i trigonometrijskih funkcija integraciju.

U prethodnim lekcijama je uveden integralni račun realne funkcije jedne realne promenljive preko osnovnih pojmova u vezi sa neodređenom integracijom, pravila i osobina neodređenog integral, tablice neodređenih integral osnovnih funkcija, kao i opštih metoda za integraciju. Takođe, uveli smo metodologije za integraciju racionalnih funkcija.

Sada ćemo obraditi specifične metode za integraciju nekih klasa iracionalnih funkcija.

INTEGRACIJA NEKIH KLASA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ojlerove smene, Metod Ostrogradskog za iracionalne funkcije, Binomni diferencijal i dr.

U ovoj lekciji ćemo pokazati kako se integrale sledeće klase iracionalnih funkcija:

1.

$$f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\dots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)$$

ili

$$f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

gde je R racionalna funkcija svojih argumenata;

2. $f(x)=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}),\ a\neq 0$, gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$;

3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0;$

4. $f(x)=\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ M\neq 0;$

5. $f(x)=R(x^{2n},\sqrt{a^2\pm b^2x^2})$, gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2\pm b^2x^2}$;
6. $f(x)=\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,$ gde je $P_n(x)$ polinom n -tog stepena $n\in\mathbb{N}$;

7. $f(x)=x^m(a+bx^n)^p$.

Veoma važna metoda koja se koristi za integraciju iracionalnih funkcija oblika 2 naziva se Ojlerove smene (ima ih ukupno tri). Takođe od interesa su i Metod Ostrogradskog (funkcije oblika 6) i Binomni diferencijal (funkcije oblika 7).

Napomena. Cilj većine metoda za integraciju iracionalnih funkcija jeste da se njima ova integracija prevede u integraciju racionalnih funkcija. U nekim slučajevima će se prevoditi u integraciju trigonometrijskih funkcija. Svakako, osim pomenutih, postoje i druge klase iracionalnih funkcija koja se mogu integraliti, ali ovde o njima neće biti reči.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Integracija algebarske iracionalnosti

INTEGRACIJA DVA TIPA JEDNOSTAVNIJIH IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u integrale racionalne funkcije.

Neka je podintegralna funkcija oblika $f(x)=R\big(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\ldots,\sqrt[n_k]{ax+b}\big)$, gde je R racionalna funkcija svojih argumenata. Ako je $n=NZS(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, tada je

$$\frac{n}{n_1}=m_1,\ \frac{n}{n_2}=m_2,\ \frac{n}{n_3}=m_3,\ \ldots,\ \frac{n}{n_k}=m_k,$$

gde su $m_1,m_2,\ldots,m_k\in\mathbb{N}$.Uvedimo smenu $\sqrt[n]{ax+b}=t$. Tada je

$$\sqrt[n_1]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_1}}=t^{m_1},\ \sqrt[n_2]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_2}}=t^{m_2},\ \ldots,\sqrt[n_k]{ax+b}=t^{\frac{n}{n_k}}=t^{m_k}$$

i $ax+b=t^n, x=\frac{t^n-b}{a}, dx=\frac{n\cdot t^{n-1}}{a}dt$.Tada, polazni integral postaje

$$\int f(x)dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t^{m_1},t^{m_2},\ldots,t^{m_k}\right)\frac{n\cdot t^{n-1}}{a}dt,$$

gde podintegralna funkcija u integralu s desne strane predstavlja racionalnu funkciju argumenta t.

Ako je podintegralna funkcija oblika $f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ gde je R racionalna funkcija svojih argumenata, treba uvesti smenu $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$, gde je $n=NZS(n_1,n_2,\ldots,n_k)$. Posle ove smene podintegralna funkcija se svodi na racionalnu funkciju argumenta t.

PRIMER

Integracija funkcije oblika $f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\ldots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)$.

Izračunati

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Rešenje. Kako je $6 = NZS(2,3)$, zadatak rešavamo uvođenjem smene $\sqrt[6]{x+1} = t$, tj. $x+1 = t^6$, tj. $x = t^6 - 1$. Tada je $dx = 6t^5\,dt$ i dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t^6-1)^2+\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}}6t^5\,dt = 6\int \frac{t^{12}+2t^6-1+t^3}{t^2}t^5\,dt = \\ &= 6\int (t^{12}+2t^6-1+t^3)\cdot t^3\,dt = 6\int (t^{15}+2t^9-t^3+t^6)\,dt = \\ &= 6\left(\frac{t^{16}}{16}+2\cdot\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{7}\right)+c = \\ &\, 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{16}}{16}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{10}}{5}-\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{4}}{4}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{7}}{7}\right)+c\end{aligned}$$

Poglavlje 2

Ojlerove smene

PRVA OJLEROVA SMENA

Prva Ojlerova smena se primenjuje u slučaju da u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$ važi da je $a > 0$.

Integracija iracionalnih funkcija ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$, a tokođe polinom $ax^2 + bx + c$ nema realna i jednaka rešenja može se rešavati Ojlerovim smenama.

Prva Ojlerova smena podrazumeva slučaj da u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$, funkcije f, važi da je $a > 0$. Tada se takav integral rešava smenom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}.$$

Odavde, kvadriranjem dobijamo da je

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2tx\sqrt{a} + ax^2.$$

Potiranjem ax^2 na levoj i desnoj strani poslednje jednakosti možemo da izrazimo x. Tada je

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}. \qquad (*)$$

S jedne strane, dobijeno u (*) zamenjujemo u polaznu smenu i dobijamo da je

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \frac{(t^2 - c)\sqrt{a}}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

S druge strane, dobijeno u (*) diferenciramo i dobijamo da je

$$dx = \frac{\mp 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \mp 2\sqrt{a}t)^2}\, dt.$$

Sada, smena može da se uvede u integral. Nakon njenog uvođenja, integracija polazne iracionalne funkcije prelazi u integraciju racionalne funkcije po promenljivoj t.

Napomena. Od oblika iracionalne funkcije koja se integrali zavisi da li će se prethodna smena uvodi sa znakom minus ili plus.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 1

Uvođenje prve Ojlerove smene nakon uočavanja da su ispunjeni uslovi za njenu primenu. Prva Ojlerova smena integraciju iracionalne funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Primer. Rešiti sledeće integrale: a) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$; b) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$.

Rešenje. a) Kako je koeficijent uz x^2 pozitivan za rešavanje ovog integral može se koristiti prva Ojlerova smena. Tada imamo da je

$$\sqrt{x^2+a^2} = t-x \Rightarrow x^2+a^2 = t^2-2tx+x^2 \Rightarrow 2tx = t^2+a^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+a^2}{2t}$$

Sada imamo da je $dx = \frac{t^2-a^2}{2t^2}dt$. Takođe važi da je

$$\sqrt{x^2+a^2} = t-x \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t}.$$

Konačno, ako dobijeno uvrstimo u prolazni integral imamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+c.$$

Iz početne smene imamo da je $\sqrt{x^2+a^2} = t-x \Rightarrow t = x+\sqrt{x^2+a^2}$,pa je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c.$$

Napomena. Ovaj integral je dat kao tablični, može se koristiti na ispitu kao takav, tj. bez prethodno datog rešavanja.

b) Uvodimo smenu $\sqrt{x^2+x+1} = t+x$. Kvadriranjem i sređivanjem ove smene, dobijamo da je $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$. Tada je $\sqrt{x^2+x+1} = t+x = t+\frac{t^2-1}{1-2t} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$, kao i $x-\sqrt{x^2+x+1} = x = \frac{t^2-1}{1-2t} - \frac{-t^2+t-1}{1-2t} = \ldots = -t$. Takođe je $dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}$. Konačno imamo da je

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{-(2t^2-2t+2)}{(1-2t)^2}}{-t}dt = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt =$$

$$= \int \left(-\frac{2}{t} + \frac{3}{2t-1} - \frac{3}{(2t-1)^2}\right) dt =$$

$$= -2\ln|t| + \frac{3}{2(2t-1)} + \frac{3}{2}\ln|2t-1| + c =$$

$$= -2\ln(x+\sqrt{x^2+x+1}) + \frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2+x+1}-1)} +$$

$$+ \frac{3}{2}\ln(2x+2\sqrt{x^2+x+1}-1) + c.$$

DRUGA OJLEROVA SMENA

Druga Ojlerova smena se primenjuje u slučaju da u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c važi da je $c>0$.

U slučaju da je koeficijent $a<0$ u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c podintegralne funkcije oblika

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \ a \neq 0,$$

tada je prva Ojlerova smena neupotrebljiva. Međutim, ako je u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c koeficijent $c>0$, tada se na ovakve integrale može primeniti druga Ojlerova smena koja glasi

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x \cdot t \pm \sqrt{c}.$$

Dalje, potrebno je uraditi analogno onome što rađeno kod prve Ojlerove smene. Dakle, potrebno je smenu kvadrirati i iz izraziti čemu je jednako x. Tada se ovako izraženo x, po novoj promenljivoj t vraća u polaznu smenu i izrazi se čemu je jednako $\sqrt{ax^2+bx+c}$ u odnosu na t. S druge strane, treba diferencirati dobijeni jednakost u kojoj je x izraženo preko t, i tako dobiti čime smenjujemo dx.

Napomena. Od oblika iracionalne funkcije koja se integrali zavisi dali će se prethodna smena uvodi sa znakom minus ili plus. Nakon uvođenja ove smene, integracija po iracionalnoj funkcije prelazi u intgraciju racionalne funkcije.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 2 – 1. DEO

Uvođenje druge Ojlerove smene nakon uočavanja da su ispunjeni uslovi za njenu primenu. Ona integraciju iracionalne funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Primer. Rešiti integral

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Rešenje. Kako je $a=-1$, ne može se primeniti prva Ojlerova smena, a kako je $c=1$, može se primeniti druga Ojlerova smena. Ona u ovom slučaju glasi

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1 \Rightarrow 1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1 \Rightarrow x-x^2=t^2x^2-2tx/:x$$
$$\Rightarrow 1-x=t^2x-2t.$$

Ako iz polednje relacije izrazimo x, tada dobijamo $x=\frac{2t+1}{t^2+1}$. Odavde je $dx=\frac{-2t^2-2t+2}{(t^2+1)^2}dt$, dok je s druge strane

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1=t\cdot\frac{2t+1}{t^2+1}-1=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Sada $\sqrt{1+x-x^2}$ i dx iz početnog integrala možemo smeniti po novoj promenljivoj t. Tada dobijamo

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}}=\int \frac{\frac{-2t^2-2t+2}{(t^2+1)^2}}{1-\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}dt=\int \frac{\frac{-2t^2-2t+2}{(t^2+1)^2}}{\frac{2-t}{t^2+1}}dt=$$
$$=\int \frac{(-2t^2-2t+2)dt}{(2-t)(t^2+1)}.$$

PRIMER 2 – 2. DEO

Dekompozicija racionalne funkcije primenom metode neodređenih koeficijenata.

Važi da je

$$\frac{-2t^2-2t+2}{(2-t)(t^2+1)}=\frac{A}{2-t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa $(2-t)(t^2+1)$ dobijamo da je

$$-2t^2 - 2t + 2 = A(t^2+1) + (Bt+C)(2-t) \text{ tj. } -2t^2 - 2t + 2 = (A-B)t^2 + (2B-C)t + A + 2C.$$

Sada je

$$\begin{aligned} t^2: &\quad A - B &= -2 \\ t^1: &\quad 2B - C &= -2 \\ t^0: &\quad A + 2C &= 2. \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su $A = -2$, $B = 0$ i $C = 2$. Tada je

$$\frac{-2t^2 - 2t + 2}{(2-t)(t^2+1)} = \frac{-2}{2-t} + \frac{2}{t^2+1},$$

pa je

$$\int \frac{-2t^2 - 2t + 2}{(2-t)(t^2+1)} = \int \frac{-2}{2-t} + \int \frac{2}{t^2+1} = -2\ln|2-t| + 2\operatorname{arctg} t + c.$$

PRIMER 2 – 3. DEO

Integracija elementarnih racionalnih funkcija.

Vraćajući smenu

$$t = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x},$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}} &= -2\ln\left|2 - \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + c = \\ &= -2\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + c. \end{aligned}$$

TREĆA OJLEROVA SMENA

Može se desiti da ni prva ni druga Ojlerova smena ne mogu da se primene. Ako kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ ima realna rešenja, tada se može primeniti treća Ojlerova smena.

Prilikom integracije iracionalnih funkcija ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$ može se desiti da polinom ax^2+bx+c ima realna i različita rešenja x_1 i x_2 , tj. može se zapisati na sledeći načina,tj. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Tada je od interesa sledeća smena

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1), \text{ ili } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2),$$

koja se naziva treća Ojlerova smena.

Metodologija rešavanja ovog slučaja veoma je slična prethodno opisanim slučajevima, tj potrebno je, najpre, smenu kvadriratit i izraziti x u funkciji od nove promenljive t, a zatim odrediti i dx. Treća Ojlerova smena se primenjuje u situacijama kada kvadratna jednačina $ax^2+bx+c=0$ ima rešenja koja su realna i različita, nezavosno od toga da li je $a>0$, pa se možemo primeniti prva Ojlerova smena, ili je $a<0$ i $c>0$, pa se može primeniti druga Ojlerova smena. Dakle, može se desiti da se na neki integral može primeniti i prva i treća Ojlerova smena, ili druga i treća Ojlerova smena.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 3 - 1. DEO

Treća Ojlerova smena, kao i prve dve Ojlerove smene, dovodi integraciju iracionalne funkcije, na integraciju racionalne funkcije.

Primer. Rešiti integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}}$.

Rešenje. Kako je $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, možemo uvesti treću Ojlerovu smenu. Tada je

$$\sqrt{x^2+x-6} = t(x-2) \ \ \text{(mogli smo da uvedemo i smenu } \sqrt{x^2+x-6} = t(x+3)\text{)}.$$

Kvadriranjem smene dobijamo da je

$$(x+3)(x-2) = t^2(x-2)^2 / : (x-2) \ \Rightarrow \ x+3 = t^2(x-2),$$

odakle je $x = \dfrac{2t^2+3}{t^2-1}$. Diferenciranjem poslednje relacije dobijamo da je $dx = \dfrac{-10t}{(t-2)^2}dt$. Takođe, važi da je

$$\sqrt{x^2+x-6} = t(x-2) = t\left(\frac{2t^2+3}{t^2-1} - 2\right) = \frac{5t}{t^2-1}$$

i

$$x+1 = \frac{2t^2+3}{t^2-1} + 1 = \frac{3t^2+2}{t^2-1}.$$

PRIMER 3 - 2. DEO

Dobili smo integral koji smo dali kao tablični, tako da primenjujemo formulu za određivanje njegove primitivne funkcije.

Konačno, polazni integral, nakon uvođenja ovih smena, postaje integral:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}} = \int \frac{\frac{-10t}{(t-2)^2}}{\frac{3t^2+2}{t^2-1}\cdot\frac{5t}{t^2-1}} = -2\int \frac{dt}{3t^2+2.}$$

Kako se rešava poslednji integral već smo govorili (a dat je i kao tablični integral), tako da je

$$\int \frac{dt}{3t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Vraćajući smenu

$$\sqrt{x^2+x-6} = t(x-2) \ \Rightarrow \ t = \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x-2}$$

konačno je

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+x-6}}{\sqrt{3}(x-2)}\right) + c.$$

Poglavlje 3

Integracija još nekih klasa iracionalnih funkcija

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 3

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u tablične integrale.

Integral oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

za $a>0,$ se rešava dovođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+c na kanonski oblik, tj.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

i uvođenjem smene $x+\frac{b}{2a}=t,$ odakle je $dx=dt.$ Tada se polazni integral svodi na integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$$

koji smo dali kao tablični.

U slučaju da je u polaznom integralu $a<0,$ tada se on svođenjem na kanonski oblik (prethodnim izvlačenjem minusa kao zajedničkog za ceo kvadratni trinom, jer je $a<0$) i uvođenjem smene svodi ili na prethodni integral ili na integral oblika

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}},$$

koji smo takođe dali kao tablični.

PRIMER 1

Integracija funkcije oblika $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+b+x+c}}.$

Izračunati sledeće integrale:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Rešenje.

a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \left| \begin{array}{c} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C =$$

$$= \ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C.$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \left| \begin{array}{c} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$$

c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}+C$$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 4

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u dva integrala, jedan dat kao tablični integral i drugi o čijem smo rešavanju već govorili.

Integral oblika

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

se rešava dovođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+c, za $a>0$, na kanonski oblik, tj.

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Mx+N}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}dx$$

gde treba uvesti smenu $x+\frac{b}{2a}=t$, odakle je $x=t-\frac{b}{2a}$ i $dx=dt$. Tada važi

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{M_1 t + N_1}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}dt = M_1 \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}.$$

Integral $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ se rešava metodom smene i o njemu smo već govorili, dok je integral $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ dat kao tablični integral. Slično, se postupa ako je $a < 0$ u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$. Tada se nakon uvođenja odgovarajuće smene umesto integrala $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ može javiti integral $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$.

Napomena. Prilikom integracije iracionalnih funkcija oblika 4, može se koristiti tehnika koju smo naveli kod integracije racionalnih funkcija oblika 4. Radi se o tome da se vrši "nameštanje" brojioca, da predstavlja izvod imenioca. Prilikom ovakvog rešavanja integrala oblika 4, on se svodi na dva integrala, od kojih je jedan oblika integracije iracionalne funkcije oblika 3, dok je drugi integral (nakon uvođenja smene)oblika $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ tj. tablični je. O tome govori naredni primer.

PRIMER 2

Integracija funkcije oblika $\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

Izračunati sledeće integrale:

$$\text{a)} \int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx; \qquad \text{b)} \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx.$$

Rešenje.

a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx = \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{27+6x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{-12}{\sqrt{27+6x-x^2}} = \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 6\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}} = \\
&= -\sqrt{27+6x-x^2} + 6\arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right) + c.
\end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-36}} =$$
$$= \sqrt{x^2+6x-27} + 2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right| + c.$$

Poglavlje 4

Inegracija primenom trigonometrijskih smena

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA KOD KOJIH JE MOGUĆE UVOĐENJE TRIGONOMETRIJSKE SMENE

Integracija nekih klasa iracionalnih funkcija uvođenjem trigonometrijskih smena.

- Ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x) = R\left(x^{2n}, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right), n \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}^+,$$

gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, tada se uvodi $\text{smena } x = \frac{a}{b}\sin t$ koja dovodi do

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = \sqrt{a^2 - b^2\frac{a^2}{b^2}\sin t} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t.$$

- Ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x) = R\big(x^{2n}, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\big), n \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}^+,$$

gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, tada se uvodi $\text{smena } = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t$ koja dovodi do

$$\sqrt{a^2 + b^2x^2} = \sqrt{a^2 + b^2\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}.$$

- Ako je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika

$$f(x) = R\big(x^{2n}, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\big), n \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}^+,$$

gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, tada se uvodi $\text{smena } x = \frac{a}{b\cos t}$ koja dovodi do

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2} = \sqrt{b^2\frac{a^2}{b^2 \cdot \cos^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{cos^2 t} - a^2} = a\sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{cos^2 t}} = a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{cos^2 t}}$$
$$= a\operatorname{tg} t.$$

Uvođenjem neke od tri pomenute smene, polazni integral postaje integral trigonometrijske funkcije po novoj promenljivoj t. Ovo je jedini slučaj gde ćemo primenom metode smene integraciju iracionalne funkcije, prevoditi u integraciju trigonometrijske funkcije. U svim ostalim slučajevima koje ćemo ovde pomenuti (ili smo ih već pomenuli), one će se prevoditi u integraciju racionalne funkcije.

Napomena. Iracionalne funkcije oblika 5 se mogu integraliti na još dva načina. Prvi je metod parcijalne integracije (videtiorvulekciju gde smo jedan takav integral rešavali). Drugi način je primenom Metode Ostrogradskog za iracionalne funkcije o kojoj govorimo kasnije.

VIDEO KLIP

Integracija nekih tipova iracionalnih funkcija-primeri.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Metod Ostrogradskog

METOD OSTROGRADSKOG ZA INTEGRACIJU IRACIONALNIH FUNKCIJA

Metod Ostrogradskog, integraciju posmatrane iracionalne funkcije prevodi u integraciju koja se može rešiti primenom Ojlerovih smena.

Sada će biti reči o integraljenju još nekim klasama funkcija za koje se mogu definisati specijalne metode, ali one ne moraju nužno dovesti do integrala racionalnih funkcija. Svakako, svaka od metodakoja će biti ovde pomenuta će nas dovoditi do integrala za koje smo metodologiju njihovih rešavanja već izneli.

Prva koju navodimo od njih je metod Ostrogradskog za integraciju iracionalnih funkcija koji se koristi za određivanje primitivne funkcije sledećeg tipa iracionalnih integrala

$$\int \frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Pri čemu je $P_n(x)$ dati polinom n -tog reda i a, b i c ($a \neq 0$) su dati realni brojevi. Za rešavanje integrala prethodnog oblika Ostrogradski je dao sledeću formulu

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$ koji je $(n-1)$. reda, kao i koeficijent λ treba odrediti, tako da prethodno data formula bude tačna. Njih određujemo tako što diferenciramo prethodnu formulu.

Prethodno izneto ćemo ilustruvati u naredna dva primera.

PRIMER – 1. DEO

Primena metode Ostrogradskog i određivanje nepoznatih koeficijenata.

Primer. Izračunati sladeće integrale*:*

a) $\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx;$

b) $\int \sqrt{x^2+1}dx.$

Rešenja.

a) U ovom slučaju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ dobija se:

$$2\left(x^2+x+2\right) = 2A\left(x^2+x+1\right) + (Ax+B)(2x+1) + 2\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4A &= 2 \\ 3A+B &= 2 \\ 2A+B+2\lambda &= 4 \end{aligned}$$

čije je rešenje $A = 1/2, \quad B = 1/4 \ \text{ i } \ \lambda = 11/8.$

PRIMER – 2. DEO

Nakon određivanja nepoznatih koeficijenata, ostaje da se reši jedan integral iraconalne funkcije na koji se može primeniti jedna od Ojlerovih smena.

Prema tome je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Poslednji integral se napiše kao

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

što posle smene

$$t = x+\frac{1}{2}, \quad dt = dx,$$

postaje

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left|x+\frac{1}{2}\right|^2+\frac{3}{4}}\right| + C = \ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

Na kraju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

PRIMER – 3. DEO

Primena metode Ostrogradskog i Ojlerovih smena.

b) Pre svega je

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Diferenciranjem poslednje jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = A\sqrt{x^2+1} + (Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \quad \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $\sqrt{x^2+1}$ dobija se

$$x^2+1 = A\left(x^2+1\right) + (Ax+B)x + \lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ B &= 0 \\ A + \lambda &= 1 \end{aligned}$$

pa je $A = 1/2, \quad B = 0 \quad \text{i} \quad \lambda = 1/2$. Prema tome je

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Poslednji integral je tablični, pa je

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Integracija iracionalne funkcije primenom formule Ostrogradskog.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Binomni diferencijal

OBLIK INTEGRALA KOJI PREDSTAVLJA BINOMNI DIFERENCIJAL

Binomni diferencijal integraciju posmatrane funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Integrali oblika

$$\int x^{m}\left(a+bx^{n}\right)^{p}dx$$

mogu se rešiti (tj. mogu se svesti na integral racionalne funkcije) samo u sledeća tri slučaja:

- ako je p ceo broj;
- ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^{s}=a+bx^{n}$, gde je s imenilac razlomka p;
- ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n}+p$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^{s}=ax^{-n}+b$, gde je s imenilac razlomka p.

Za svaki od navedenih slučajeva ćemo dati po jedan primer.

Primer. Izračunati sledeće integrale:

$$\left.a\right)\ \int\frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^{2}};$$

$$\left.b\right)\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^{2}}}};$$

$$\left.c\right)\int\frac{dx}{x^{6}\sqrt{x^{2}-1}}.$$

Metoda koja je opisana se naziva Binomni diferencijal.

REŠENJA PRIMERA

Svi slučajevi primene Binomnog diferencijala.

Rešenja.

a) U ovom slučaju je *p*=–2, tj. *p* je ceo broj, pa se integral rešava smenom $t^2 = x, \quad 2tdt = dx:$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^2} = 2\int \frac{t^2 dt}{(1+t)^2} = 2\left(t+1-2\ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C = 2\left(\sqrt{x}+1-2\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + C.$$

b) U ovom slučaju je m=1, n=2/3 i p=–1/2, tj. p je razlomak, ali je broj $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2/3} = 3$ ceo. Ako uvedemo smenu $t^2 = 1 + \sqrt[3]{x^2}$, tj. $x = \sqrt{\left(t^2-1\right)^3}$, ili $x^{1/3} = \sqrt{t^2-1}$, tada dobijamo $2tdt = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}dx, \quad dx = 3\sqrt{t^2-1}tdt$, tada dobijamo

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int \frac{\left(t^2-1\right)^2 tdt}{t} = 3\int \left(t^2-1\right)^2 dt = \frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C$$

c) U ovom slučaju je m=–6, n=2, p=–1/2, pa je $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5}{2} + \frac{-1}{2}$ ceo broj. Prema tome, može se uvesti smena $t^2 = 1 - x^{-2}, \quad tdt = \frac{dx}{x^3}, \quad x^{-2} = 1 - t^2,$ pa je

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3 x^4 \sqrt{1-x^{-2}}} = \int \left(t^2-1\right)^2 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C = = \frac{\left(\sqrt{1-x^{-2}}\right)^5}{5} - 2\frac{\left(\sqrt{1-x^{-2}}\right)^3}{3} + \sqrt{1-x^{-2}} + C$$

NAPOMENA O INTEGRACIJI U KONAČNOM OBLIKU - ZAVRŠNO RAZMATRANJE

Primitivna funkcija elementarne funkcije može biti elementarna funkcija. Međutim, postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije nisu elementarne funkcije.

Primitivna funkcija elementarne funkcije može biti elementarna funkcija. Međutim, postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije nisu elementarne funkcije. U tom slučaju se kaže da se integracija elementarnih funkcija ne može izvršiti u konačnom obliku.

Takav je slučaj sa integralima oblika

$$\int x^m (bx^n + a)^p dx,$$

kada nijedan od brojeva p, $\frac{m+1}{n}$ i $p + \frac{m+1}{n}$ nije ceo broj, kao i svi integrali koji se odgovarajućim smenama mogu svesti na ovaj integral. Na primer, $\int \sqrt{\sin x} dx$ se smenom $\sin x = t$, pri čemu je $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, svodi na integral $\int t^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$.

Isto tako integrali oblika

$$\int x^\alpha e^{\pm x}, \int x^\alpha \sin x, \int x^\alpha \cos x, \quad \text{gde je} \quad \alpha \notin \mathbb{N},$$

ne mogu se izraziti elementarnih funkcijama. Na njih se svode integrali oblika

$$\int e^{x^2}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int \sin x^2 dx.$$

Neelementarne funkcije

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{dt}{\ln t} = li\, x \text{ (integralni logaritam)}$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = si\, x$$

$$\int \frac{\cos x}{x}dx = si\, x \text{ (integralni logaritam)}$$

predstavljaju nove transcedentne funkcije koje su predmet posebnog izučavanja u matematici.

Integrali oblika

$$\int R\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right)\, dx$$

gde je R racionalna funkcija, a $P_n(x)$ polinom trećeg ili četvrtog stepena nazivaju se eliptički integrali, a izražavaju se tzv. eliptičkim funkcijama koje predstavljaju neelementarne funkcije koje se posebno proučavaju, a imaju velike primene. Primer eliptičkog integrala je integral oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx \ \ (|k|<1).$$

Poglavlje 7

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Integracija iracionalne funkcije oblika 1.

Izračunati

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

Rešenje. Važi da je $6 = NZS(2,3)$. Zato treba uvesti smenu $\sqrt[6]{x} = t, x = t^6$, pa je $\sqrt{x} = t^3$ i $\sqrt[3]{x^2} = t^4$. Takođe, imamo da je $dx = 6t^5\,dt$. Tada je

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{6(t^6-1)t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = \int \frac{6(t^6-1)\,dt}{t^4(t+1)},$$

Kako je

$$\begin{aligned} t^6-1 &= (t^2-1)\cdot(t^4+t^2+1) = (t+1)(t-1)(t^4+t^2+1) \\ &= (t+1)(t^5-t^4+t^3-t^2+1), \end{aligned}$$

imamo da je

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{6(t+1)(t^5-t^4+t^3-t^2+1)\,dt}{t^4(t+1)} = 6\int \frac{(t^5-t^4+t^3-t^2+1)\,dt}{t^4} = \\ &= \int 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3}\right) + c = \\ &= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}| + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) + c. \end{aligned}$$

ZADATAK 2 (10 MINUTA)

Integracija funkcije oblika $f(x) = R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.

Izračunati

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)}dx.$$

Rešenje. Ušćemo smenu $\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}}=t$, jer je $6=NZS(2,3)$. Tada se dobija

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)}dx = \left| \begin{array}{ll} \frac{x}{x-1}=t^6, & x=\frac{t^6}{t^6-1} \\ & dx=-\frac{6t^5}{(t^6-1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{-6dt}{t^4(t^2+1)} =$$

$$= \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t^2} + \int \frac{Cdt}{t^3} + \int \frac{Ddt}{t^4} + \int \frac{(Ex+F)dt}{t^2+1} =$$

(za vežbu odrediti koeficijente A, B, C, D, E i F)

$$= -6\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{2}{t^3}-6\frac{1}{t}-6\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} - 6\sqrt[6]{\frac{x-1}{x}} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}} + C.$$

ZADATAK 3 (10 MINUTA)

Primena Ojlerovih smena (druga Ojlerova smena) - integracija iracionalnih funckija oblika 2.

Izračunati

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Rešenje. Koristeći Ojlerovu smenu $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$ (ili $tx+\sqrt{c}$), jer je $c>0$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+x-x^2}=tx-1, & x=\frac{1+2t}{t^2+1} \\ & dx=-\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= -2\int\frac{dt}{t^2+2t+2} = -2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2\operatorname{arctg}(t+1)+C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Primena Ojlerovih smena (treća Ojlerova smena) - integracija iracionalnih funckija oblika 2.

Izračunati

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}.$$

Rešenje. Ako su koreni kvadratnog trinoma ax^2+bx+c realni i različiti , onda se može uvesti treća Ojlerova smena $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_1)}=(x-x_1)t$ (ili $(x-x_2)t$ gde su x_1 i x_2 ta rešenja. Kvadratni trinom x^2+2x ima korene $x_1=0$ i $x_2=-2$, to smenom $\sqrt{x^2+2x}=xt$ dobijamo

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = \left| \sqrt{x^2+2x}=xt, \quad x=\frac{2}{t^2-1}, \quad dx=-\frac{4tdt}{(t^2-1)^2} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}dt = \frac{3}{2t}-\frac{1}{2}t+C = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+2x}}+C.$$

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Integracija iracionalnih funkcija oblika 3.

Rešiti integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+12}}dx$$

Rešenje.

$$2x^2+8x+12=2\left(x^2+4x+6\right)=2\left((x+2)^2+2\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+12}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(x+2)^2+2}}dx = \begin{pmatrix} \text{smena :} \\ x+2=t \\ dx=dt \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+(\sqrt{2})^2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+|\sqrt{2}|^2}\right|+C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{|x+2|^2+|\sqrt{2}|^2}\right|+C =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+C$$

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Integracija iracionalnih funkcija oblika 4.

Rešiti integral:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx.$$

Rešenje.

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

$$I=\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx=\int \frac{x+3}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx=\left(\begin{array}{c}\text{smena :}\\ x+2=t,\ x=t-2\\ dx=dt\end{array}\right)=$$

$$\int \frac{t-2+3}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=I_1+I_2$$

$$I_1=\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\left(\begin{array}{c}\text{smena :}\\ t^2+1=u\\ tdt=\frac{du}{2}\end{array}\right)=\int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C_1=$$

$$\sqrt{u}+C_1=\sqrt{t^2+1}+C_1=\sqrt{x^2+4x+5}+C_1$$

$$I_2=\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C_2=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C_2$$

$$I=I_1+I_2=\sqrt{x^2+4x+5}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Uvođenje trigonometrijske smene u integral iracionalne funkcije oblika 5.

Primer: Izračunati sledeće integrale*:*

a) $\int\sqrt{16-x^2}dx;$ b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}};$

c) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx.$

Rešenje.

a) Ako stavimo $x=4\sin t,$ tada je $\sqrt{16-x^2}=4\cos t$ i $dx=4\cos t\ dt,$ pa se dobija

$\int\sqrt{16-x^2}dx = \int 16\cos^2 t\,dt = 8\int(1+\cos 2t)dt = 8t + 4\sin 2t + C = 8t + 8\sin t\cos t + C = 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2} + C.$

b) Posle smene $x = 3\mathrm{tg}t,\quad dx = \frac{3dt}{\cos^2 t}$ i $\sqrt{x^2+9} = \frac{1}{\cos t}$, dobijamo

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \int\frac{3\frac{dt}{\cos^2 t}}{27\mathrm{tg}^2 t\frac{1}{\cos t}} = \frac{1}{9}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}$$

Dalje se koristi smena $u = \sin t,\quad du = \cos t\,dt$ i sledi

$$\frac{1}{9}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{9\sin t} + C = -\frac{1}{\frac{3}{\cos t}\cdot 3\mathrm{tg}t} + C = -\frac{1}{3x\sqrt{x^2+9}} + C.$$

c) Posle smene $x = \frac{2}{\cos t},\quad dx = \frac{2\sin t\,dt}{\cos^2 t}$, koristeći relaciju $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \mathrm{tg}t,$ dobijamo

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \int\frac{4\mathrm{tg}t\cos^2 t\sin t}{4\cos^2 t}dt = \int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt.$$

Dalje se uvodi smena $u = \sin t,\quad du = \cos t\ \ dt,$ i dobija se

$$\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{u^2}{1-u^2}du = -u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = -\sin t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C = = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}\right| + C = -$$

ZADATAK 8 (10 MINUTA)

Metod Ostrogradskog za integraciju iracionalnih funkcija oblika 6.

Izračunati

$$\int\sqrt{x^2+1}dx.$$

Rešenje. Pokazali smo već da ovakav tip integrala možemo rešavati metodom parcijalne integracije. Sada ćemo pokazati kako se ovaj tip integrala može rešiti i primenom Metode Ostrogradskog za integraciju iracionalne funkcije.

Integral $\int\sqrt{x^2+1}dx$ možemo zapisati u obliku

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

pa je

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = A\sqrt{x^2+1} + (Ax+B)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$x^2+1 = 2Ax^2 + Bx + A + \lambda.$$

Tada važi da je

$$x^2 : 1 = 2A,$$
$$x^1 : 0 = B,$$
$$x^0 : 1 = A + \lambda.$$

Odavde je $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ i

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Binomni diferencijal za integraciju racionalnih funkcija oblika 7.

Izračunati:

$$\text{a)} \int \sqrt{x^3}(1-\sqrt{x})^2 dx; \qquad \text{b)} \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}dx.$$

Rešenje. a) Posmatrani integral može se predstaviti u obliku integrala binomnog diferencijala $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, za $m = \frac{3}{2}, n = \frac{1}{2}$ i $p = 2$. Kako je p pozitivan ceo broj, prema binomnom obrascu dobijamo

$$\int \sqrt{x^3}(1-\sqrt{x})^2 dx = \int x^{\frac{3}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})^2 dx = \int x^{\frac{3}{2}}(1-2x^{\frac{1}{2}}+x)dx =$$
$$= \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C.$$

b) Kako je $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-2}$, to je $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ i $p = -2$. U ovom slučaju je p negativan ceo broj, pa uvodimo smenu $x = t^s$, gde je s najmanji zajednički sadržalac za imenioce razlomaka m i n . Dakle, $t = x^{\frac{1}{2}}$, $2tdt = dx$, pa važi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}dx = 2\int \frac{t^2 dt}{(1+t)^2} = 2\left(t+1-2\ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C =$$
$$= 2\left(\sqrt{x}+1-2\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + C.$$

Poglavlje 8

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Zadaci koje studenti treba dodatno da provežbaju.

Rešiti integrale

$\int \frac{x}{x^3-1}dx$ rešenje: $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

$\int \frac{x^4}{x^2+3}dx$ rešenje: $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\mathrm{arctg}\ \frac{x}{\sqrt{3}}+C$

$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$ rešenje: $\frac{1}{2-\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}}+C$

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ rešenje: $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$

$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ rešenje: $\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\mathrm{arctg}\ z+C,\qquad z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

$\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$, rašenje:
$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\left((z-1)^3+(z-1)^{-3}\right)+\left((z-1)^2+(z-1)^{-2}\right)+\left((z-1)+(z-1)^{-1}\right)\right)+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C,\ z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$ rešenje: $\frac{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2+2}}{3}+C$

Vreme izrade: 1. 20 minuta; 2. 20 minuta; 3. 20 minuta; 4. 20 minuta; 5. 20 minuta; 6. 20 minuta; 7. 20 minuta.

Zaključak za lekciju 08

NEODREĐENA INTEGRACIJA – TREĆI DEO

Integracija racionalnih funkcija, integracija nekih tipova iracionalnih i trigonometrijskih funkcija.

U ovoj lekciji su uvedene specifične metode za integraciju iracionalnih i trigonometrijskih funkcija. Navedeni su najčešći tipovi ovih funkcija koji se sreću u primenama.

Literatura:

1. Rale Nikolić, Onlajn nastavni materijal sa predmet MA202 Matematika 2, Sistem sa e-učenje Univerziteta Metropolitan
2. Dragan Đurčić, Aleksandar Torgašev, Milorad Stevanović, Matematika 2, Tehnički fakultet Čačak, 2009. godina.
3. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike I, Naučna knjiga, Beograd, 1986. godina.