UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Determinante

Lekcija 06

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 06

DETERMINANTE

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćete da naučite da izračunate determinante reda višeg od tri

Determinante je prvi otkrio i proučavao Lajbnic 1693. godine ispitujući rešenja sistema linearnih jednačina. Kramer je 1750. godine dao pravilo za rešavanje sistema jednačina pomoću determinanata, o čemu će više biti reči u sledećim lekcijama. Naziv determinante u matematiku je uveo Gaus.

Determinante predstavljaju veoma važan matematički objekat, koji nam je neophodan za dalji rad.

U ovoj lekciji ćete obnoviti kako se:

- Izračunava determinanta drugog reda
- Izračunava determinanta trećeg reda

U ovoj lekciji ćete naučiti:

- Definiciju determinante proizvoljnog reda
- Osobine ovih determinante,
- Laplasovu teoremu koja će vam omogućiti da izračunavate determinante reda višeg od tri (ona se može koristiti za izračunavanje i determinante trećeg reda).

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Determinante drugog i trećeg reda

POJAM DETERMINANTE DRUGOG REDA

Pojam determinante drugog reda se uvodi u vezi sa određivanjem rešenja sistema dve linearna jednačine s dve nepoznate.

Neka je dat sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Rešavajući prethodni sistem nekog od poznatih metoda (npr. metodom suprotnih koeficijenata), dobija se da su njegova rešenja

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{aligned}$$

pod uslovom da je $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Napomena. U poslednjem objektu učenja, pre pokaznih vežbi dato je podsećanje o metodi suprotnih koeficijenata.

DEFINICIJA DETERMINANTE DRUGOG REDA

Determinanta drugog reda ima dve vrste i kolone i ona predstavlja broj. Elemente koje ćemo smeštati u nju za sada će biti realni ili kompleksni brojevi, mada mogu biti i druge veličine.

Očigledno da postojanje jedinstvenog rešenja datog sistema određuje - determiniše činjenicu da li je izraz $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ jednak nuli ili ne. Zbog toga se on naziva determinanta . Kako početni sistem ima dve jednačine sa dve nepoznate, odgovarajuća determinanta se naziva determinanta drugog reda.

Definicija. Broj

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

se zapisuje u sledećem obliku

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

i naziva se determinanta drugog reda.

Determinanta se predstavlja u obliku kvadratne šeme koja ima isti broj vrsta i kolona i taj broj je jednak redu determinante. U ovom slučaju imamo dve vrste i dve kolone u kojima su smešteni realni ili kompleksni brojevi a_{ij}, $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ i oni se nazivaju elementima determinante. Za svaki element se koriste dva indeksa od kojih prvi označava vrstu, a drugi kolonu u kojoj se odgovarajući element nalazi.

PRIMER

Primena determinante drugog reda na određivanje rešenja sistema.

Da li sledeći sistem

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 204 \\ 9x - 3y &= 204 \end{aligned}$$

ima rešenja?

Rešenje. Kako je $a_{11} = 2$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 9$ i $a_{22} = -3$ sistem ima rešenja, jer je

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 2 \cdot (-3) - 9 \cdot 5 \neq 0.$$

POJAM DETERMINANTE TREĆEG REDA

Pojam determinante trećeg reda se uvodi u vezi sa određivanjem rešenja sistema tri linearne jednačine s tri nepoznate.

Neka je dat sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Rešavajući prethodni sistem nekom od poznatih metoda (npr. metodom suprotnih koeficijenata), dobija se da su njegova rešenja

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$
$$x_2 = \frac{b_1a_{23}a_{31} + b_2a_{11}a_{33} + b_3a_{21}a_{13} - b_1a_{21}a_{33} - b_2a_{31}a_{13} - b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$
$$x_3 = \frac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

pod uslovom da je $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \neq 0$.

DEFINICIJA DETERMINANTE TREĆEG REDA

Determinanta trećeg reda ima tri vrste i tri kolone i ona predstavlja broj. Elemente koje ćemo smeštati u nju za sada će biti realni ili kompleksni brojevi, mada mogu biti i druge veličine.

Očigledno da postojanje jedinstvenog rešenja datog sistema određuje - determiniše činjenicu da li je izraz $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ jednak nuli ili ne. Zbog toga se on naziva determinanta. Kako početni sistem ima tri jednačine sa tri nepoznate, odgovarajuća determinanta se naziva determinanta trećeg reda.

Definicija. Broj

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

se naziva determinanta trećeg reda i zapisuje u obliku

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanta se predstavlja u obliku kvadratne šeme koja ima isti broj vrsta i kolona i taj broj je jednak redu determinante. Determinanta trećeg reda ima tri vrste i tri kolone u kojima su smešteni realni ili kompleksni brojevi a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ i oni se nazivaju elementima determinante. Za svaki element se koriste dva indeksa od kojih prvi označava vrstu, a drugi kolonu ukojoj se odgovarajući element nalazi.

Poglavlje 2

Parne i neparne permutacije

PARNA I NEPARNA PERMUTACIJA. INVERZIJA. PRIMER

Kako odrediti broj inverzija u datoj permutaciji i na osnovu toga odrediti da li se radi o parnoj ili neparnoj permutaciji.

Za prvih n prirodnih brojeva, sva moguća razmeštanja ovih brojeva nazivamo permutacije. Poznato je da njih ima $n!$. Permutaciju, u oznaci $(1,2,3,\ldots,n)$, u kojoj su elementi poređani u rastućem poretku se naziva osnovna permutacija.

Primer. Broj permutacija prirodnih brojeva 1, 2, 3 iznosi 3! = 6. To su sledeće permutacije

$$(1,2,3) \quad (1,3,2) \quad (2,1,3) \quad (2,3,1) \quad (3,1,2) \quad (3,2,1).$$

Definicija. Kažemo da je u nekoj permutaciji dva broja (susedna ili ne) napravljena inverzija, ako veći broj stoji ispred manjeg.

Permutacija $(4,2,1,3,5)$ se sastoji od 4 inverzije. Naime, 4 je ispred 2, ispred 1 i ispred 3; zatim 2 jeispred 1.

Parna permutacija je ona permutacija ako je broj inverzija koji se u njoj javljaju paran. U suprotnom, ona se naziva neparna permutacija. Osnovna permutacija je parna permutacija.

Iz prethodnog primera parne permutacije su $(1,2,3),(2,3,1)$ i $(3,1,2)$ dok su neparne $(1,3,2),(2,1,3)$ i $(3,2,1)$.

Stav. Zamena mesta za bilo koja dva elementa u permutaciji, parnu prevodi u neparnu i obrnuto.

Primer. Pokazano je da permutacija $(4,2,1,3,5)$ ima četiri inverzije tj. da je parna. Ako se zamene mesta brojevima 2 i 3 dobija se permutacija $(4,3,1,2,5)$ koja ima 5 inverzija (4 je ispred 3, ispred 1 i ispred 2, a 3 je ispred 1 i ispred 2), tj. ona je postala neparna.

Napomena. U poslednjem objektu učenja, pre pokaznih vežbi dato je podsećanje o permutacijama.

DODATAK

Dokaz prethodno datog stava.

Dokaz. Ovaj stav ćemo dokazati u sledeće dve etape:

1. Posmatrajmo, najpre, specijalni slučaj kada u permutaciji

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

zamene mesta susedi a_k i a_{k+1} tj. posmatrajmo permutaciju

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_n).$$

Pri ovakvoj promeni broj inverzija elemenata a_k i a_{k+1} u odnosu na ostale elemente posmatrane permutacije ostao je isti. Pri tome, može biti $a_k > a_{k+1}$, pa će u novoj permutaciji broj inverzija biti smanjen za jedan, ili $a_k < a_{k+1}$, kada će broj inverzija biti povećan za jedan, čime je stav dokazan za ovaj slučaj.

2. Neka, sada, menjaju mesta elementi a_i i a_j u permutaciji

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

između kojih ima k elemenata. Da bismo elementom a_i stigli do elementa a_j i njima zamenili mesta potrebno je $k+1$ promena, a da bismo elementom a_j stigli do pozicije gde je bio a_i potrebno je k promena. Dakle, u novoj permutaciji

$$(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

smo imali $2k+1$ promena parnosti u neparnosti ili neparnosti u parnost, čime je stav dokazan.

Poglavlje 3

Determinante proizvoljnog reda

O NAČINU ZA IZRAČUNAVANJE DETERMINANTI

Determinanta bilo kog reda se može izračunati primenom parnih i nepranih permutacija. Za početak je to objašnjeno za determinantu trećeg reda.

Iz definicije za determinantu trećeg reda videli smo da je

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

odakle se može uočiti da su svi sabirci koji učestvuju u njenom izračunavanju proizvodi od po tri elemenata uzeti iz svake vrste i kolone po jedan.

Kod svih sabiraka, prvi indeksi elemenata koji učestvuju u proizvodu čine osnovnu permutaciju. Drugi indeksi za različite sabirke čine različite permutacije. Sabiraka ima onoliko koliko ima i permutacija. Ako drugi indeksi elemenata iz proizvoda čine parnu permutaciju, odgovarajući sabirak ima predznak $+$, a u suprotnom ima predznak $-$. Analogno se može uočiti i za determinantu drugog reda.

Ove zakonitosti se mogu uopštiti za determinantu n -tog reda, $n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}$. Dakle, ona će imati $n!$ sabiraka i svaki njen sabirak će predstavljati proizvod od n elemenata iz svake vrste i kolone po jedan. Oni proizvodi elemenata čiji drugi indeksi budu činili parne permutacije imaće znak $+$, a oni sa neparnim permutacijama imaće znak $-$.

DEFINICIJA

Determinanta bilo kog reda se može izračunati primenom parnih i nepranih permutacija.

Determinantu reda n zapisujemo u obliku sledeće kvadratne šeme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Elementi a_{11}, a_{22} , ..., a_{nn} se nazivaju elementi glavne dijagonale u determinanti, a elementi $a_{n1}, a_{(n-1)2}$, ..., a_{1n} se nazivaju elementi sporedne dijagonale u determinanti.

Broj D se izračunava na sledeći način

$$D = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} (-1)^{p(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

gde je

$$p(k_1,k_2,\dots,k_n) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (k_1,k_2,\dots,k_n) \text{ neparna permutacija,} \\ 2, & \text{ako je } (k_1,k_2,\dots,k_n) \text{ parna permutacija.} \end{cases}$$

PRIMER

Determinanta četvrtog reda se izračunava kao zbir od 24 proizvoda od po četiri člana, čiji drugi indeksi čine parne i neparne permutacije.

Sve permutacije četvrtog reda od elemenata $1, 2, 3$ i 4 su

$$\begin{array}{cccccc} (1,2,3,4) & (1,2,4,3) & (1,3,2,4) & (1,3,4,2) & (1,4,2,3) & (1,4,3,2) \\ (2,1,3,4) & (2,1,4,3) & (2,3,1,4) & (2,3,4,1) & (2,4,1,3) & (2,4,3,1) \\ (3,1,2,4) & (3,1,4,2) & (3,2,1,4) & (3,2,4,1) & (3,4,1,2) & (3,4,2,1) \\ (4,1,2,3) & (4,1,3,2) & (4,2,1,3) & (4,2,3,1) & (4,3,1,2) & (4,3,2,1) \end{array}$$

Broj ovih permutacija iznosi $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Pola od njih, tj. 12 od njih su neparne (označene crnom bojom), a 12 su parne (označene crvenom bojom). Determinanta četvrtog reda se tada izračunava, prema datoj definiciji na sledeći način

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \cdots + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} -$$

$$- (a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + \cdots + a_{14}a_{22}a_{33}a_{41})$$

Poglavlje 4

Izračunavanje determinante drugog i trećeg reda

NAČIN ZA IZRAČUNAVANJE DETERMINANTE DRUGOG REDA

Proizvod elemenata na glavnoj dijagonali (čine parnu permutaciju) minus proizvod elemenata na sporednoj dijagonali (čine neparnu permutaciju) je determinanta drugog reda.

Iz definicije za determinantu drugog reda imamo da je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Dakle, vrednost determinante drugog reda se dobija tako što se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali (koju dogovorno čine elementi a_{11} i a_{22}) oduzima proizvod elemenata na sporednoj dijagonali (koju dogovorno čine elementi a_{21} i a_{12}).

Primer.

$$\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 5 - 5 \cdot (-6) = 70.$$

Napomena. Izračunavanje detereminante primenom parnih i neparnih permutacija postaje sve komplikovanije što je red determinante veći. Stoga je od interesa uočiti neke metode kojima će se ovo izračunavanje ubrzati. Najpre, ćemo dati takvo pravilo za determinantu trećeg reda.

SARUSOVO PRAVILO. PRIMER

Postoji specifično pravilo za izračunavanje determinante trećeg reda, koje je jedino tačno kod deeterminante trećeg reda.

Ovde sada dajemo jedno specifično pravilo za determinantu trećeg reda koje se naziva Sarusovo pravilo i primenjuje se na sledeći način:

- pored date determinante, najpre, se dopišu prve dve kolone, a zatim se

- sabiraju proizvodi elemenata na glavnim dijagonalama i od njih se oduzimaju proizvodi elemenata na sporednim dijagonalama.

Dakle, primenom Sarusovog pravila determinanta trećeg reda se izračunava na sledeći način:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Primer. Izračunajmo datu determinantu primenom Sausovog pravila.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -9 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right. = 1\cdot 4\cdot 1 + 0\cdot(-9)\cdot 3 + (-3)\cdot 5\cdot(-5) - \\ - (3\cdot 4\cdot(-3) + (-5)\cdot(-9)\cdot 1 + 1\cdot 5\cdot 0) = \\ = 4 + 0 + 75 - (36 + 45 + 0) = 70.$$

Poglavlje 5

Osobine determinanti

TRANSPONOVANJE DETERMINANTE, PROPORCIONALNOST VRSTA ILI KOLONA U DETERMINANTI. PRIMER

Transponovanjem determinanta ne menja vrednost, ako su svi elementi jedne vrste ili kolone jednaki nuli ili ako su joj dve vrste ili kolone proporcionalne vrednost determinante je nula.

1. Vrednost determinante D se ne menja ako njene vrste zamenimo odgovarajućim kolonama. Tako dobijena determinanata se označava sa D^T i naziva transponovana determinanta.

Primer. Odredimo za datu determinantu njenu transponovanu determinantu.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = D^T.$$

2. Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone u determinanti jednaki nuli, vrednost determinante je jednaka nuli.

3. Determinanta je jednaka nuli ako su dve vrste ili kolone u determinanti jednake ili ako su međusobno proporcionalne.

Primer.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ a takodje i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

FAKTOR PROPORCIONALNOSTI, ZAMENA VRSTA ILI KOLONA U DETERMINANTI. PRIMER

Faktor proporcionalnosti se može izvući ispred determinante, determinanta menja znak kada njene dve proizvoljne vrste ili kolone zamene mesta.

4. Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone determinante proporcionalni, tada se faktor proporcionalnosti k ≠ 0 može izvući ispred determinante.

Primer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ovde je za treću kolonu izvučen zajednički faktor 3.

5. Ako dve vrste ili kolone u determinanti zamene mesta determinanta menja znak.

Primer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} \overset{V_{12}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix}.$$

Ovde su zamenjena mesta prvoj i drugoj vrsti. Takva promena se dogovorno označava sa V_{12}. Slično, ako bi se, na primer, menjala mesta drugoj i trećoj koloni oznaka bi bila K_{23}. Mi ćemo ovakve oznake koristiti.

MNOŽENJE DETERMINANTE BROJEM. PRIMER

Determinanta se množi nekim faktorom $k \neq 0$ tako što se samo jedna vrsta ili samo jedna kolona te determinante pomnoži tim faktorom.

6. Determinanta se množi nekim faktorom k ≠ 0 tako što se samo jedna vrsta ili samo jedna kolona te determinante pomnoži tim faktorom.

Primer.

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 15 & 24 & -27 \end{vmatrix}.$$

Ovde je determinanta pomnožena faktorom 3 tako što je samo njena treća vrsta pomnožena faktorom 3. Na sličan način bi se ovim faktorom množila determinanta, množeći samo, na primer, njenu drugu kolonu. Tada bi se dobila determinanta

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 5 & 24 & -9 \end{vmatrix}.$$

RASTAVLJANJE DETERMINANTE. PRIMER

Kako rastaviti determinantu čija jedna vrsta ili kolona sadrži sabirke na više pojedinačnih

7. Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone neke determinante predstavljeni kao zbirovi od po dva sabirka, tada je ta determinanta jednaka zbiru dve determinante u kojima su elementi odgovarajućih vrsta ili kolona prvi, odnosno drugi sabirci, dok su elementi u ostalim vrstama ili kolonama isti kao u polaznoj determinanti. Ovo pravilo važi i u slučaju da u vrsti ili koloni ima n sabiraka ($n \geq 2$). Svakako, ovo važi i ako su u pitanju razlike elemenata u nekoj vrsti ili koloni.

Primer.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31}+c_{31} & b_{32}+c_{32} & b_{33}+c_{33} & b_{34}+c_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

MNOŽENJE JEDNE VRSTE ILI KOLONE BROJEM I DODAVANJE DRUGOJ. PRIMER

Vrednost determinante se ne menja ako se svakom elementu jedne vrste ili kolone dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste ili kolone pomnoženi istim faktorom.

8. Vrednost determinante se ne menja ako se svakom elementu jedne vrste ili kolone dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste ili kolone pomnoženi istim faktorom.

Primer. Ako drugu vrstu determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 9 & 4 \\ 4 & -7 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

pomnožimo sa -2 i dodamo prvoj vrsti, u oznaci $V_{21}(-2)$, tada ona postaje

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 9 & 4 \\ 4 & -7 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{V_{21}(-2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 9 & 4 \\ 4 & -7 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

DODATAK - DOKAZ OSOBINE 8

Dokaz osobine koju ćemo koristiti za izračunavanje determinante reda višeg od tri.

Dokaz. Posmatrajmo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ kao i } D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Na osnovu Osobine 3 imamo da je vrednost determinante $D_1 = 0$. Dalje, primenjujući Osobinu 7 i činjenicu da je $D = D + D_1$, imamo:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & a_{i2} + \lambda a_{k2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Poglavlje 6

Minor determinante

DEFINICIJA MINORA

Minor determinante D reda n koji odgovara nekom njenom elementu predstavlja determinantu $(n-1)$. reda. Determinanta D ima n^2 minora - za svaki element determinante po jedan.

Neka je data neka determinanta D n -tog reda

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Minor determinante D koji odgovara elementu a_{ij}, $(i,j=1,2,3,\dots,n)$, u oznaci, M_{ij}, $(i,j=1,2,3,\dots,n)$ predstavlja determinantu $(n-1)$. reda koja se dobija iz determinante D kada se iz nje izostave i -ta vrsta i j -ta kolona. Dakle, minor, M_{ij} $(i,j=1,2,3,\dots,n)$ determinante D koji odgovara elementu a_{ij} $(i,j=1,2,3,\dots,n)$ je sledeća determinanta

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

PRIMER

Određivanje dva minora za determinantu četvrtog reda.

Primer. Za determinantu četvrtog reda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

minor M_{11} koji odgovara elementu a_{11} je naredna determinanta trećeg reda

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

dok je minor M_{43} koji odgovara elementu a_{43} naredna determinanta trećeg reda

$$M_{43} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Poglavlje 7

Algebarski kofaktor

DEFINICIJA ALGEBARSKOG KOFAKTORA

Algebarski kofator za neki element se izračunava na osnovu odgovarajućeg minora.

Neka je data neka determinanta D n -tog reda

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Algebarski kofaktor posmatrane determinante D koji odgovara elementu a_{ij} , u oznaci A_{ij} predstavlja broj koji se računa po formuli:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

gde je M_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$ minor determinante D koji odgovara elementu $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$.

PRIMER

Za minore iz prethodnog primera, izračunati su odgovorajući algebarski kofaktori.

Za determinantu četvrtog reda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

minori M_{11} i M_{43} su sledeće determinante trećeg reda

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ i } M_{43} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Odgovarajući algebarski kofaktori su

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

i

$$A_{43} = (-1)^{4+3} M_{43} = -M_{43}.$$

Napomena. Podsetimo se da je

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{za } n \text{ parno}, \\ -1, & \text{za } n \text{ neparno}. \end{cases}$$

Poglavlje 8

Laplasov stav

ISKAZ LAPLASOVOG STAVA I NJENA POSLEDICA

Na osnovu Laplasovog stava važi da je vrednost determinante jednaka zbiru prozvoda elemenata neke vrste ili kolone i odgovarajućih algebarskih kofaktora.

Sledeći stav se naziva Laplasov stav i koristi se za razvoj determinanti reda jednakog ili većeg od tri.

Stav. Ako je data determinanta D n -tog reda tada važi:

1. $D = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

2. $D = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Iz prve formule prethodnog stava se vidi da je vrednost determinante jednaka zbiru prozvoda elemenata neke vrste i odgovarajućih algebarskih kofaktora. Data formula prestavlja razvoj determinante po i -toj vrsti $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Slično, iz druge formule se vidi da je vrednost determinante jednaka zbiru prozvoda elemenata neke kolone i odgovarajućih algebarskih kofaktora. Data formula prestavlja razvoj determinante po j-toj koloni $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Formule 1. i 2. iz prethodnog stava se nazivaju Laplasov razvoj determinante D.

Posledica. Ako je data determinanta n -tog reda, tada važi:

1. $a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0, \quad i \neq j;$

2. $a_{1j} \cdot A_{1i} + a_{2j} \cdot A_{2i} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{ni} = 0, \quad i \neq j.$

Ako se dati stav primeni na razvoj determinante trećeg reda po drugoj vrsti, tada se dobija

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} =$$

$$= -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ako se dati stav primeni na razvoj determinante četvrtog reda po, na primer, trećoj koloni, tada se dobija

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{43} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

PRIMER

Izračunavanje determinante četvrtog reda primenom Laplasovog razvoja.

Primer. Izračunati vrednost sledeće determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Najpre, treba napomenuti da razvoj determinante treba vršiti po onoj koloni ili vrsti u kojoj ima što više nula, jer se u tom slučaju izračunava najmanji broj determinanti trećeg reda. Sledeći ovu logiku, datu determinantu ćemo razviti po drugoj vrsti jer ostaje da se izračunaju dve determinante trećeg reda. Tada se dobija

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 163.$$

VIDEO KLIP

Primer sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 9

Izračunavanje determinante primenom njenih osobina

NEDOSTATAK LAPLASOVOG STAVA

Za ubrzavanja postupka izračunavanja determinante reda višeg od tri Laplasov razvoj je najbolje kombinovati sa osobinama determinanti.

Primena Laplasovog razvoja skopčana je sa problemom izračunavanja velikog broja determinanti. To se posebno vidi kada je potrebno izračunati determinante petog ili višeg reda, pogotovu ako se u njima ne javljaju nule. Tako, na primer, prilikom razvijanja determinante petog reda dobija se pet determinanti četvrtog reda, a kako je njih potrebno, ponovo, razviti po istom stavu, dalje se dobija 20 determinanti trećeg reda koje treba izračunati. Za determinantu šestog reda razvijanjem se dobija 120 determinanti trećeg reda itd.

Stoga je od interesa napraviti u nekoj od vrsta ili kolona posmatrane determinante što je moguće više nula i datu determinantu razviti po njoj. Najbolje bi bilo kada bi moglo, na primer, za determinantu četvrtog reda u nekoj vrsti ili koloni da se napravi tri nule (ako bi u nekoj vrsti ili koloni ove determinante napravili četiri nule, tada bi njena vrednost bila jednaka nuli). Ovo je moguće izvesti kombinovanjem nekih od osobina determinante zajedno sa Laplasovim stavom. Razvijanjem determinante baš po toj vrsti ili koloni dobili bi jednu determinantu trećeg reda. Analogno rečenom važi i za determinante višeg reda od četiri. Osobina determinante koja se u ovom slučaju koristi je:

vrednost determinante se ne menja ako se svakom elementu jedne vrste ili kolone dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste ili kolone prethodno pomnoženi istim faktorom.

Prethodno rečeno ilustrujemo narednim primerom.

PRIMER 1 – I DEO

Kako se izračunavanje determinante primenom Laplasovog razvoja može ubrzati korišćenjem njenih osobina – I deo rešenja

Primer. Izračunati determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Za uočeni element $a_{31} = 1$ date determinante, potrebno je primeniti prethodno pomenutu osobinu na sledeći način:

- pomnožiti treću vrstu sa 2 i dodati je drugoj vrsti (oznaka $V_{32}(2)$) sa ciljem da element a_{21} bude jednak nuli,
- slično, pomnožiti treću vrstu sa -2 i dodati je prvoj vrsti (oznaka $V_{31}(-2)$) sa ciljem da element a_{11} bude jednak nuli i
- dodavanje treće vrste četvrtoj (oznaka $V_{34}(1)$) sa ciljem da postignemo da element a_{41} bude jednak nuli.

Treća vrsta ostaje nepromenjena. Na ovaj način se dobija determinanta koja je jednaka polaznoj determinanti tj.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} V_{31}(-2) \\ V_{32}(2) \\ = \\ V_{34}(1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

PRIMER 1 – II DEO

Kako se izračunavanje determinante primenom Laplasovog razvoja može ubrzati korišćenjem njenih osobina – II deo rešenja

Na ovaj način, razvijanje poslednje determinante po prvoj koloni primenom *Laplasovog stava* dobija se samo jedna determinanta trećeg reda umesto četiri koliko bi se dobilo da je direktno primenjen *Laplasov stav*. Tada se dobija:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Da bi se izračunala dobijena determinanta trećeg reda može se primeniti *Sarusovo pravilo*. Međutim, zbog uvežbavanja iznete metode ovde će se dobijena determinanta računati ponovo primenom pomenute osobine determinante i nakon toga primenom *Laplasovog stava*. Stoga, treba uočiti element $a_{12} = 1$ i postupiti na sledeći način:

- dodatu drugu kolonu prvoj koloni (oznaka $K_{21}(1)$), kako bi se dobilo da je element a_{11} jednak nuli,
- pomnožiti drugu kolonu sa 6 i dodati je trećoj koloni (oznaka $K_{23}(6)$), kako bi se dobilo da element a_{13} bude jednak nuli.

Druga kolona ostaje nepromenjena.

PRIMER 1 – III DEO

Kako se izračunavanje determinante primenom Laplasovog razvoja može ubrzati korišćenjem njenih osobina – III deo rešenja

Sada, poslednja determinanta postaje:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} K_{21}(1) \\ = \\ K_{23}(6) \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -13 \\ -1 & 2 & 17 \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem poslednje determinante po prvo vrsti dobija se:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -13 \\ -1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -1 & 17 \end{vmatrix}.$$

Konačno se dobija da je $D = -(17 - 13) = -4.$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Izračunavanja determinante četvrtog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 10

Pokazna vežba

1. ZADATAK (2 MINUTA)

Izračunavanje determinante 2. reda

Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Rešenje.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 7 \cdot 5 = 18 - 35 = -17.$$

2. ZADATAK (5 MINUTA)

Sarusovo pravilo za izračunavanje determinante trećeg reda.

Izračunati vrednost determinante koristeći Sarusovo pravilo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Rešenje.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 10 & 3 & 5 \end{array} \right. =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 6 \cdot 1 - 10 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 40 + 54 + 50 - 60 - 30 - 60 = -6$$

3. ZADATAK (5 MINUTA)

Primena Sarusovog pravila u kombinaciji sa osobinama determinante. Na taj način se ubrzava njeno izračunavanje.

Izračunati vrednost determinante koristeći Sarusovo pravilo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rešenje: Vrednost determinante se ne menja kada se elementi jedne vrste (kolone) pomnože brojem razlicitim od 0 i dodaju nekoj drugoj vrsti (koloni). U ovom zadatku je pogodno prvu vrstu (pomnoženu jedinicom) dodati drugoj (zapis $V_{12}(1)$) i prvu vrstu pomnoženu brojem 2 dodati trećoj (zapis $V_{13}(2)$). Tako se naprave "nule" u determinanti pa je lakše izračunati njenu vrednost.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 1 \cdot 7 \cdot 5 - 7 \cdot 4 \cdot 1 = 35 - 28 = 7.$$

4. ZADATAK (5 MINUTA)

Osobine determinante, Sarusovo pravilo.

Izračunati vrednost determinante koristeći Sarusovo prtavilo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rešenje: Zajednicki činilac jedne vrste (kolone) može da se izvuče ispred determinante. U ovom zadatku je prvo izvučen faktor 2 iz druge kolone, zatim faktor 2 iz druge vrste i na kraju faktor 3 iz treće kolone.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} \; . =$$

$$= 12 \cdot (2 - 1 + 3 - 1 + 3 - 2) = 12 \cdot 4 = 48$$

5. ZADATAK (5 MINUTA)

Izračunavanje determinante trećeg reda primenom Laplasove teoreme

Izračunati vrednost determinante koristeći Laplasovu teoremu

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rešenje: Odaberemo vrstu ili kolonu i po njoj razvijamo determinantu tako što je predstavimo kao zbir svih elemenata te vrste (kolone) pomnoženih odgovarajućim algebarskim kofaktorom. Minor koji odgovara elementu a_{ij} je determinanta manjeg reda koja se dobija iz početne determinante izbacivanjem i-te vrste i j-te kolone. Algebarski kofaktor njenog elementa a_{ij} je odgovarajući minor pomnožen sa $(-1)^{i+j}$, dakle minor sa odgovarajućim znakom. U ovom slučaju razvoj date determinante vršimo po prvoj vrsti.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (5 \cdot 6 - 4 \cdot 3) - 4 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 1 \cdot 5) =$$

$$= 3 \cdot 18 - 4 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 54 - 36 + 3 = 21.$$

6. ZADATAK (5 MINUTA)

Rešavanje jednačine zadate preko determinante trećeg reda.

Odredi x za koje važi

$$\begin{vmatrix} 2x & -3 & 5 \\ 2x & -x & -2 \\ -4 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje: Razvoj vršimo primenom Sarusovog pravila, s tim što koristimo slučaj kada ne dopisujemo dve kolone, nego primenjujemo metod trougla.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3 & 5 \\ 2x & -x & -2 \\ -4 & 2 & x \end{vmatrix} = -2x^3 - 24 + 20x - 20x + 8x + 6x^2 =$$

$$= -2(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) = -2(x^2(x-3) - 4(x-3)) =$$

$$= -2(x-3)(x^2-4) = -2(x-3)(x-2)(x+2)$$

Rešenja su:

$$x = 3 \vee x = 2 \vee x = -2.$$

7. ZADATAK (5 MINUTA)

Izračunavanje determinante trećeg reda primenom Laplasove teoreme.

Izračunati vrednost determinante koristeći Laplasovu teoremu

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rešenje: Za primenu Laplasove teoreme je pogodno imati ili "napraviti" kolonu ili vrstu sa što više nula i po njoj razvijati determinantu. Ovde je to druga vrsta.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 \cdot 3 - 1 \cdot 7) = -8.$$

8. ZADATAK (8 MINUTA)

Dokazivanje identiteta zadatog preko determinante.

Dokazati da važi:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Dokaz: Za razvoj determinante koristimo Laplasovu teoremu. Pre nego što je primenimo napravićemo nule u prvoj koloni ispod elementa $a_{11} = 1$. To radimo tako što prvu vrstu množimo sa -1 i dodajemo drugoj i trećoj vrsti.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) = \\ &= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) = \\ &= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) = \\ &= (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

9. ZADATAK (10 MINUTA)

Dokazivanje identiteta zadatog preko determinante trećeg reda.

Dokazati da je

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$

Rešenje. Primenom osobina determinanti imamo

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} \begin{matrix} V_{12}(1) \\ = \\ V_{13}(1) \end{matrix} \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b-a & a-b & a+b+2c \\ c-a & a+c+2b & a-c \end{vmatrix} \begin{matrix} K_{13}(1) \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -2a & a+b & c-a \\ b-a & a-b & 2(b+c) \\ c-a & a+c+2b & 0 \end{vmatrix}.$$

Razvijmo poslednju determinantu po trećoj koloni

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & \overset{+}{c-a} \\ b-a & a-b & \overset{-}{2(b+c)} \\ c-a & a+c+2b & \overset{+}{0} \end{vmatrix} = (c-a)\begin{vmatrix} b-a & a-b \\ c-a & a+c+2b \end{vmatrix}$$

$$-2(b+c)\begin{vmatrix} -2a & a+b \\ c-a & a+c+2b \end{vmatrix} =$$

$$= (c-a)\Big((b-a)(a+c+2b) - (a-b)(c-a)\Big)$$

$$-2(b+c)\Big(-2a(a+c+2b) - (a+b)(c-a)\Big) =$$

$$= 4a^2b + 4ab^2 + 4a^2c + 8abc + 4b^2c + 4ac^2 + 4bc^2 =$$

$$= {\color{red}4a^2b + 4ab^2} + {\color{green}4a^2c + 4abc} + {\color{blue}4abc + 4b^2c} + 4ac^2 + 4bc^2 =$$

$$= 4ab(a+b) + 4ac(a+b) + 4bc(a+b) + 4c^2(a+b) =$$

$$= 4(a+b)(ab+ac+bc+c^2) = 4(a+b)\big(a(b+c) + c(b+c)\big) =$$

$$= 4(a+b)(b+c)(c+a).$$

10. ZADATAK (10 MINUTA)

Razne transformacije u radu s determinantama.

izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Važi sledeće

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} K_{12}(-1) \\ = \\ K_{13}(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} V_{12}(-1) \\ = \\ V_{13}(-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ 0 & y^3-x^3 & z^3-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)\cdot(z-x)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y+x & z+x \\ 0 & y^2+xy+x^2 & z^2+zx+x^2 \end{vmatrix} \overset{K_{23}(-1)}{=} (y-x)\cdot(z-x)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y+x & z-y \\ 0 & y^2+xy+x^2 & z^2-y^2+zx-yx \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)\cdot(z-x)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y+x & z-y \\ 0 & y^2+xy+x^2 & (z-y)(x+y+z) \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-x)$$

$$\cdot (z-y)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y+x & 1 \\ 0 & y^2+xy+x^2 & x+y+z \end{vmatrix} \overset{V_{23}(-y)}{=}$$

$$= (y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y+x & 1 \\ 0 & x^2 & x+z \end{vmatrix} \overset{V_{23}(-x)}{=} (y-x)\cdot(z-x)$$

$$\cdot (z-y)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y+x & 1 \\ 0 & -xy & z \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y)\cdot(xy+xz+yz).$$

11. ZADATAK (10 MINUTA)

Laplasov razvoj za determinantu 4. reda

Izračunaj vrednost determinante koristeći Laplasovu teoremu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rešenje: Razvijamo determinantu po drugoj koloni

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(7-14) + 3\cdot(7-11) = -14-12 = -26.$$

12. ZADATAK (10 MINUTA)

Rešavanje jednačine zadate preko determinante četvrtog reda.

Odrediti vrednost realnog parametra p tako da važi

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & p+9 & -5 & 16 \\ -3 & p+11 & p-8 & 20 \\ 1 & -2(p+6) & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & p+9 & -5 & 16 \\ -3 & p+11 & p-8 & 20 \\ 1 & -2(p+6) & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & & \\ 0 & p+5 & & \\ 0 & p+5 & p+1 & \\ 0 & -2(p+5) & & \end{vmatrix}$$

Odavde imamo da je

$p(p+5) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = -5.$

13. ZADATAK (10 MINUTA)

Determinante n -tog reda.

Izračunati determinantu n -tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako primenimo Laplasovu teoremu n puta uzastopno na datu determinantu, razvijajući je prvo po prvoj, zatim drugoj i tako redom do n -te kolone dobićemo sledeće

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}_{(n-1).\ \text{reda}} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & n \end{vmatrix}_{(n-2).\ \text{reda}} =$$

$$\dots = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

14. ZADATAK (10 MINUTA)

Razni zadaci u vezi sa determinantama.

Razviti determinantu

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}.$$

Rešenje: Data determinanta se dodavanjem prve vrste svim ostalim vrstama svodi na trougaonu determinantu (ima sve nule ispod ili iznad glavne dijagonale) čija se vrednost dobija množenjem elemenata na glavnoj dijagonali.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = a \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2d = 8abcd.$$

15. ZADATAK (20 MINUTA)

Primene osobina determinante na izračunavanje determinante 4. reda.

izračunati

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Važi sledeći niz transformacija

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} K_{12}(-1) \\ K_{13}(-1) \\ = \\ K_{14}(-1) \end{matrix} a\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= a\cdot \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\cdot(b-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} \begin{matrix} K_{12}(-1) \\ = \\ K_{13}(-1) \end{matrix}$$

$$= a\cdot(b-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a\cdot(b-a)\cdot \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

$$= a\cdot(b-a)\cdot(c-b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} = a\cdot(b-a)\cdot(c-b)\cdot(d-b-c+b) =$$

$$= a\cdot(b-a)\cdot(c-b)\cdot(d-c).$$

16. ZADATAK (15 MINUTA)

Primene osobina determinante na njeno izračunavanje.

Dokazati da je

$$\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3.$$

Rešenje. Uradićemo sledeće transformacije

$$\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix} \overset{K_{32}(1)}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 2x+y+z & y+z & z \\ x & x+2y+2z & z \\ x & x+2y+2z & x+y+2z \end{vmatrix} \overset{K_{21}(1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x+y+z & y+z & z \\ x & x+2y+2z & z \\ x & x+2y+2z & x+y+2z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x+2y+2z & y+z & z \\ 2x+2y+2z & x+2y+2z & z \\ 2x+2y+2z & x+2y+2z & x+y+2z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2x+2y+2z & y+z & z \\ 2x+2y+2z & x+2y+2z & z \\ 2x+2y+2z & x+2y+2z & x+y+2z \end{vmatrix} = 2\cdot(x+y+z)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & y+z & z \\ 1 & x+2y+2z & z \\ 1 & x+2y+2z & x+y+2z \end{vmatrix} \begin{matrix} V_{12}(-1) \\ = \\ V_{13}(-1) \end{matrix}$$

$$= 2\cdot(x+y+z)\cdot \begin{vmatrix} 1 & y+z & z \\ 0 & x+y+z & 0 \\ 0 & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} = 2\cdot(x+y+z)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x+y+z & 0 \\ x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} = 2\cdot(x+y+z)^3.$$

Poglavlje 11

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da provežbaju.

Zadatak 1. Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Rezultat: -23.
Zadatak 2. Odrediti

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

Rezultat: $4ab$.
Zadatak 3. Izračunati vrednost determinante Sarusovim pravilom

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 24 \\ 1 & 7 & 13 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Rezultat: 3.
Zadatak 4. Koristeći Laplasovu teoremu izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rezultat: 74.
Zadatak 5. Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix},$$

za $z = 2$.
Rezultat: 49.
Zadatak 6. Dokazati

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (xy + xz + yz)(y - x)(z - x)(z - y).$$

Uputstvo: Koristiti $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
Zadatak 7. Rešiti jednačinu

$$\begin{vmatrix} 2+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultat: $x = -\frac{6}{11}$.

Vreme izrade: 1. 3 minuta; 2. 5 minuta; 3. 12 minuta; 4. 20 minuta; 5. 15 minuta; 6. 15 minuta; 7. 15 minuta

METOD SUPROTNIH KOEFICIJENATA

Rešavanje sistema od dve jednačine sa dve nepoznate metodom suprotnih koeficijenata.

Posmatrajmo opšti oblik sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Odredićemo njegova rešenja primenom metode suprotnih koeficijenata. S ciljem da eliminišemo promenljivu x_2, uradićemo sledeće

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad / \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad / \cdot (-a_{12}) \end{aligned}$$

Tada dobijamo:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 &= -a_{12}b_2 \end{aligned}$$

Sabiranjem poslednje dve jednačine imamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \text{ odnosno } x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Vraćajući dobijenu vrednost za x_1 u npr. prvu jednačinu početnog sistema, možemo da izračunamo promenljivu x_2 :

$$a_{11}\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} + a_{12}x_2 = b_1, \text{ odnosno } a_{12}x_2 = b_1 - a_{11}\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Sređivanjem poslednje jednačine dobijamo

$$a_{12}x_2 = \frac{a_{11}a_{22}b_1 - a_{21}a_{12}b_1 - a_{11}a_{22}b_1 + a_{11}a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

odnosno nakon potiranja prvog i trećeg člana iz brojioca i izvlačenja zajedničkog elementa a_{12} za preostale članove dobijamo

$$a_{12}x_2 = \frac{a_{12}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

Dakle, nakon skraćivanja sa a_{12}, konačno je

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Svakako, promenljive x_1 i x_2 je moguće odrediti pod pretpostavkom da je $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$i tada kažemo da sistem ima jedinstveno rešenje. U suprotnom sistem ima ili beskonačno mnogo rešenja ili ih nema uopšte. Detaljnije o ovome ćemo govoriti u temi posvećenoj sistemima linearnih jednačina.

Na identičan način se može rešiti i sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate.

NapomenaPreporuka je da student obnovi i metod zamene.

PRIMER 1

Metod suprotnih koeficijenata.

Rešiti sledeći sistem metod suprotnih koeficijenata:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 204 \\ 9x - 3y &= 204 \end{aligned}$$

Rešenje. Iz datog sistema eliminisaćemo promenljivu y tako što ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa 3, drugu sa 5 :

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 204 \quad / \cdot 3 \\ 9x - 3y &= 204 \quad / \cdot 5 \end{aligned}$$

Dakle, cilj je da se ispred promenljive y naprave suprotni koeficijenti u jednačinama sistema. Tada dobijamo:

$$\begin{aligned} 6x + 15y &= 612 \\ 45x - 15y &= 1020 \end{aligned}$$

Sabirajući poslednje dve jednačine imamo $51x = 1632$ tj. da je $x = 32$. Vraćajući ovu vrednost u neku od jednačina početnog sistema, na primer prvu imamo da je $64 + 5y = 204,$ tj. $5y = 140,$ tj. $y = 28$.

PERMUTACIJE

Obnavljanje o kombinatorici.

Neka je dat skup S sa konačno mnogo elemenata $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.Kombinovati elemente tog skupa, izmedju ostalog, znači i ređati ih po nekom pravilu jedne uz druge. Osnovnu ulogu pri ovome igra raspored tih elemenata. Prilikom pravljenja različitih rasporeda tih elemenata, apstrahujemo samu njihovu prirodu (tj. ne interesuje jesu li to brojevi, slova i dr., kao ni pravila koja za njih važe), već nas samo interesuje mesto koje oni zauzimaju u tako odredjenom rasporedu. Iz toga proizilaze izvesne osobine tako uočenih skupova i njihovih podskupova.

Proučavanjem ovih osobina bavi se oblast matematike koja se naziva kombinatorika. Osnovni pojmovi u vezi sa ovom oblašću jesu: permutacije, varijacije i kombinacije. Mi ćemo ovde pažnju posvetiti permutacijama i to specijalno permutacijama bez ponavljanja. To podrazumeva da su svi članovi polaznog skupa S medjusobno različiti.

U kombinatorici, permutacija (od latinske reči *permutatio* što znači premeštanje, zamena), za prethodno uočeni skup S , predstavlja niz elemenata tog skupa, koji sadrži tačno jednom svaki njegov element. Napomenimo, da kada koristimo termin niz to podrazumeva da je redosled elemenata u njemu tačno odredjen tj. zna se koji element je prvi u njemu, koji drugi i tako redom. S druge strane, kada koristimo termin skup mi samo nabrajamo njegove elemente, ali im time i ne odredjujemo redosled. Red permutacije predstavlja broj elemenata iz skupa S koji učestvuje u ovim razmeštajima. Permutacije ćemo dogovorno pisati u malim zagradama. Na primer, permutacija (a_1,a_2) je drugog reda i ona se razlikuje od permutacije (a_2,a_1), jer raspored elemenata nije isti. Permutacija (a_2,a_1,a_6,a_5)je permutacija četvrtog reda. Sada se postavlja pitanje, za izabrane elemente skupa S, koliko postoji njihovih permutacija.
Ovde ćemo neformalno pokazati koliko ima permutacija reda k. Ako iz skupa S izaberemo k prvih elemenata $a_1,a_2,\ldots,a_k$ i želimo da izbrojimo sve moguće permutacije od njih, postupamo na sledeći način:

pri konstruisanju permutacije postoji k mogućih izbora koji će element da bude stavljen na prvo mesto,
kada prvi element izaberemo preostalo je $k-1$ elementa koji mogu da se stave na drugo mesto što za izbor prva dva člana daje $k\cdot(k-1)$ mogućih permutacija,
za izbor trećeg člana permutacije nam je preostalo $k-2$ elemenata, što za prva tri člana daje ukupno $k\cdot(k-1)\cdot(k-2)$ mogućih permutacija,
nastavljajući na sličan način sve dok ne ostanu 2 elementa, kada postoje, naravno, samo 2 izbora, što za $k-1$ elemenata daje $k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots 2$, mogućih permutacija
poslednji izbor je sada iznudjen jer je preostao samo jedan element.
Dakle, ukupan broj permutacija bez ponavljanja od k elemenata (tj. reda k) skupa S, u oznaci P_k, iznosi:

$$P_k=k!,\ \text{gde je}\ k!=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots 2\cdot 1,$$

Oznaka $k!$ čita kao *k faktorijel* i predstavlja proizvod prvih k prirodnih brojeva. Takodje, po definiciji je $0!=1$.
Dokaz prethodnog tvrdjenja se, inače, izvodi primenom Principa matematičke indukcije.

PRIMER 2

Određivanje svih permutacija četvrtog reda.

Sve permutacije četvrtog reda od elemenata a_1, a_2, a_3 i a_4 su

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)\,(a_1, a_2, a_4, a_3)\,(a_1, a_3, a_2, a_4)\,(a_1, a_3, a_4, a_2)\,(a_1, a_4, a_2, a_3)\,(a_1, a_4, a_3, a_2)$$
$$(a_2, a_1, a_3, a_4)\,(a_2, a_1, a_4, a_3)\,(a_2, a_3, a_1, a_4)\,(a_2, a_3, a_4, a_1)\,(a_2, a_4, a_1, a_3)\,(a_2, a_4, a_3, a_1)$$
$$(a_3, a_1, a_2, a_4)\,(a_3, a_1, a_4, a_2)\,(a_3, a_2, a_1, a_4)\,(a_3, a_2, a_4, a_1)\,(a_3, a_4, a_1, a_2)\,(a_3, a_4, a_2, a_1)$$
$$(a_4, a_1, a_2, a_3)\,(a_4, a_1, a_3, a_2)\,(a_4, a_2, a_1, a_3)\,(a_4, a_2, a_3, a_1)\,(a_4, a_3, a_1, a_2)\,(a_4, a_3, a_2, a_1)$$

Dakle, broj ovih permutacija iznosi $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Zaključak za lekciju 06

DETERMINANTE

O determinantama.

Determinante predstavljaju veoma važan matematički objekat.

Determinanta je u matematici izraz predočen kvadratnom šemom u kojoj je poređano n^2 članova u n vrsta i n kolona i naziva se determinanta n-tog reda (npr. za n = 2, odnosno n = 3 dobijamo, tim redom, determinantu 2. ili 3. reda)

Literatura (nastavni materijal):

Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.