UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Sistemi linearnih jednačina - I deo

Lekcija 09

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 09

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA - I DEO

Uvod

UVOD

Gausov metod, Gaus – Žordanova metod eliminacije (Žordanova shema).

U ovoj i narednoj lekciji ćete primenom znanja koje ste stekli u prethodne dve lekcije i uz pomoć metoda koje će ovde biti izložene biti u mogućnosti da diskutujete i nalazite rešenja sistema linearnih jednačina. Metode koje će biti u okviru ove lekcije izložene su:

- Gausov metod eliminacije
- Gausov metod - Žordanova shema

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Definicija sistema linearnih jednačina

SISTEM ALGEBARSKIH LINEARNIH JEDNAČINA

Sistem od m algebarskih linearnih jednačina sa n nepoznatih. Brojevi a_{ij} se nazivaju koeficijenti sistema, a brojevi b_i slobodni članovi.

Jednačina oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1 \in \mathbb{R},\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0),$$

ili ma koja jednačina koja se može svesti na nju naziva se linearna jednačina sa n nepoznatih.

Definicija. Konjunkcija od m linearnih jednačina sa n nepoznatih predstavljena u zapisu

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3j}x_j + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \qquad (*)$$

gde su a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ i b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ dati realni brojevi, a x_i nepoznate $(i = 1, 2, \ldots, m)$, naziva se sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih. Brojevi a_{ij} se nazivaju koeficijenti sistema, a brojevi b_i slobodni članovi.

U slučaju da je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ tada se prethodni sistem naziva homogen sistem, a ako je bar jedan od brojeva $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$ onda se kaže da je prethodni sistem nehomogen sistem.

KVADRATNI SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA. PRIMER

Ako je broj nepoznatih u sistemu jednak broju jednačina sistema, tada takav sistem nazivamo kvadratni sistem.

Ako u sistemu $(*)$ važi da je $m = n$ tj.

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3j}x_j + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

kažemo da je to kvadratni sistem. On ima isti broj jednačina i nepoznatih. U suprotnom on se naziva pravougaoni sistem.

Primer. Sistem oblika

$$\begin{array}{rcrcr}
2x & + & 3y & = & 4 \\
-x & + & y & = & 0
\end{array}$$

predstavlja kvadratni sistem linearnih jednačina jer ima isti broj promenljivih i jednačina (dve jednačine i dve promenljive).

S druge strane, sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x & + & 6y & - & 5z & = & 4 \\
4x & + & 3y & - & 3z & = & -2 \\
2x & + & 4y & - & 5z & = & 9 \\
x & - & 6y & + & 7z & = & -3
\end{array}$$

predstavlja praougaoni sistem linearnih jednačina, jer nema isti broj jednačina i promenljivih (ima četiri jednačine i tri promenljive).

REŠENJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Ako sistem nema rešenja kažemo da je nesaglasan (nemoguć), a ako sistem ima rešenja kažemo da je saglasan (moguć).

Definicija. Brojevi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ predstavljaju rešenje sistema $(*)$ ako jednačine tog sistema prelaze u indentitete nakon zamene nepoznatih x_i $(i = 1, 2, 3..., n)$ odgovarajućim vrednostima r_i $(i = 1, 2, 3..., n)$ tj.

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + \ldots + a_{1j}r_j + \ldots + a_{1n}r_n & = & b_1 \\
a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 + \ldots + a_{2j}r_j + \ldots + a_{2n}r_n & = & b_2 \\
a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 + \ldots + a_{3j}r_j + \ldots + a_{3n}r_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + a_{i3}r_3 + \ldots + a_{ij}r_j + \ldots + a_{in}r_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}r_1 + a_{m2}r_2 + a_{m3}r_3 + \ldots + a_{mj}r_j + \ldots + a_{mn}r_n & = & b_m
\end{array}$$

Tada se kaže da je uređena n -torka $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ rešenje sistema $(*)$.

Ako sistem nema rešenja kažemo da je nesaglasan ili nemoguć sistem, a ako sistem ima rešenja kažemo da je saglasan ili moguć sistem. Ako sistem ima tačno jedno rešenje kažemo da ima jedinstveno rešenje, a ako ima više rešenja kažemo da je sistem neodređen.

Napomena. Homogen sistem je uvek saglasan. Jedno njegovo rešenje je uvek $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Definicija. Za dva sistema sa istim brojem nepoznatih kažemo da su ekvivalentni sistemi ako je svako rešenje jednog sistema ujedno i rešenje drugog sistema ili ako su istovremeno nesaglasni.

PRIMER. VIDEO KLIP

Podsećanje o sistemu dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Pogledati primer sa Youtube o metodi suprotnih koeficijenata - obnavljanje.

U srednjoj školi ste učili o linearnoj jednačini sa dve nepoznate, a upoznali ste se i sa sistemom dve linearne jednačine s dve nepoznate.

Naime, konjunkcija dve linearne jednačine $a_1x + b_1y = c_1$ i $a_2x + b_2y = c_2$ se naziva sistem dve linearne jednačine s dve nepoznate, gde su x i y nepoznate veličine, a a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 i c_2 dati realni brojevi. Zapis

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

predstavlja opšti oblik ovog sistema.

Rešenje ovog sistema je svaki uređeni par realnih brojeva (x_0, y_0) za koji važi

$$\tau(a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \wedge a_2x_0 + b_2y_0 = c_2) = \top.$$

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Gausov metod eliminacije

REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA GAUSOVIM METODOM

Ovim metodom se u potpunosti može dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema linearnih jednačina. Može koristiti za pravougaone i kvadratne sisteme linearnih jednačina.

Gausovim metodom se u potpunosti može dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema linearnih jednačina. Dakle, mogu se odrediti njegova rešenja u slučaju da je sistem saglasan (bilo da ima jedinstveno rešenje ili da ih ima beskonačno mnogo), ili ako nema rešenja može se ustanoviti njegova nesaglasnost.

Ovde će se koristiti sledeće transformacije kojima se dati sistem prevode u njemu ekvivalentan:

- promena mesta dvema jednačinama u sistemu,
- množenje proizvoljne jednačine sistema brojem različitim od nule i
- dodavanje jedne jednačine sistema nekoj drugoj jednačini sistema, koja je prethodno pomnožena proizvoljnim brojem.

Prethodno navedene transformacije se nazivaju elementarne transformacije.
Neka je dat sledeći sistem

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & & \vdots (*) \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mj}x_j & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Dati sistem se posle konačnog broja koraka prevodi u njemu ekvivalentan sistem, takav da se iz njega jasno može odrediti da li je on saglasan ili ne i ako je saglasan, mogu mu se odrediti rešenja. U svakom od koraka se na dati sistem primenjuje neka od pomenutih elementarnih transformacija.

Gausov metod eliminacije se sastoji u tome da se iz polaznog sistema, na tačno određeni način, vrši eliminacija promenljivih (odatle i naziv za ovu metodu). Eliminacija promenljivih se izvršava u konačnom broju koraka i njihov broj je uslovljen time koliko promenljivih sistem sadrži. O tome govorimo u nastavku.

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE – I KORAK

U ovom koraku se prva jednačina množi odgovarajućim koeficijentima i dodaje ostalim kako bi se eliminisala prva promenljiva.

Prvi korak u ovom procesu jeste da u sistemu uočimo jednačinu kojoj je koeficijent uz nepoznatu x_1 različit od nule. Bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je to koeficijent a_{11}. Cilj je da se oslobodimo promenljive x_1 u drugoj, trećoj i tako sve do poslednje m -te jednačine. Iz druge jednačine eliminacija nepoznate x_1 se postiže tako što se prva jednačina pomnoži sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i doda drugoj jednačini. Na analogan način se eleminiše promenljiva x_1 iz ostalih jednačina. Nakon prvog koraka prethodni sistem prelazi u sistem

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1j}x_j & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \ldots & + & a'_{2j}x_j & + & \ldots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & a'_{32}x_2 & + & a'_{33}x_3 & + & \ldots & + & a'_{3j}x_j & + & \ldots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & & a'_{i2}x_2 & + & a'_{i3}x_3 & + & \ldots & + & a'_{ij}x_j & + & \ldots & + & a'_{in}x_n & = & b'_i \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & & a'_{m2}x_2 & + & a'_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a'_{mj}x_j & + & \ldots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m
\end{array}
$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu.

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE – II KORAK

U ovom koraku se druga jednačina množi odgovarajućim koeficijentima i dodaje ostalim kako bi se eliminisala druga promenljiva.

Sada ćemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je $a'_{22} \neq 0$. Na sličan način, kao i u prvom koraku, moguće je iz prethodnog sistema eliminisati nepoznatu x_2 iz treće, četvrte i tako redom sve do poslednje m -te jednačina. Tada se prethodni sistem transformiše na naredni, njemu ekvivalentan, sistem

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \dots & + & a'_{2j}x_j & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & & & a''_{33}x_3 & + & \dots & + & a''_{3j}x_j & + & \dots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
 & & & & a''_{i3}x_3 & + & \dots & + & a''_{ij}x_j & + & \dots & + & a''_{in}x_n & = & b''_i \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
 & & & & a''_{m3}x_3 & + & \dots & + & a''_{mj}x_j & + & \dots & + & a''_{mn}x_n & = & b''_m
\end{array}
$$

Svakako, ovaj sistem je ekvivalentan i polaznom sistemu.

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE – ZAVRŠNI KORAK

Na kraju primene pomenutih elementarnih transfomacija polazni sistem se svodi na jedan od data dva sistema.

Nastavljajući sa primenom ovih transformacija dolazimo do toga da se polazni sistem, posle konačnog broja koraka, svodi na sistem

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1k}x_k & + & \dots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2k}x_k & + & \dots & + & a'_{2n}x_n = b'_2 \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a^{(k-1)}_{kk}x_k & + & \dots & + & a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k \\
 & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n \\
 & & & & & & & & & & 0 = b^{(n-1)}_{n+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & 0 = b^{(n-1)}_m
\end{array}
$$

ili na sistem

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1k}x_k & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2k}x_k & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & & a^{(k-1)}_{kk}x_k & + & \dots & + & a^{(k-1)}_{kn}x_n & = & b^{(k-1)}_k
\end{array}
$$

DISKUSIJA REŠENJA ZA POLAZNI SISTEM

U potpunosti je moguće dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema, tj. razgraničiti da li sistem ima ili nema rešenja na osnovu toga da li je dobijen prvi ili drugi sistem.

U slučaju da se polazni sistem svede na prvi od prethodno data dva sistema, tada postoje dve mogućnosti

- ako je bar jedan od brojeva $b_{n+1}^{(n-1)}, \dots, b_m^{(n-1)}$ različit od nule sistem nema rešenja, ili

- ako važi da je $b_{n+1}^{(n-1)} = \dots = b_m^{(n-1)} = 0,$ tada polazni sistem ima jedinstveno rešenje. Njega određujemo polazeći od poslednje jednačine sistema. Naime, tada dobijamo da je $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}}$. Vraćajući dobijeno rešenje za x_n u pretposlednju jednačinu sistema određujemo x_{n-1} i tako redom.

U slučaju da se polazni sistem svodi na drugi sistem od prethodno data dva sistema, pri čemu je $k < n$, on je saglasan i polazni sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Tada su $x_{k+1}, \dots, x_n$ proizvoljni brojevi (tzv. slobodne promenljive), preko kojih se izražavaju nepoznate $x_1, \dots, x_k$ koje se nazivaju vezane promenljive. Napomenimo da u ovom slučaju k predstavlja broj jednačina sistema koji su preostale nakon primene elementarnih transformacija, dok je n broj promenljivih. Sve ostale jednačine su se nakon primene odgovarajućih elementarnih transformacija svele na identitete oblika $0 = 0$, pa se zbog toga izostavljaju iz zapisa.

Ova metoda se može koristiti za rešavanje proizvoljnih sistema, tj.ona važi kako za pravougaone, tako i za kvadratne sisteme.

PRIMER

Gausov metod elimincije za rešavanje sistema od četiri jednačine s tri nepoznate.

Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & 17x_3 & = & -14 \\ -2x_1 & & & + & 8x_3 & = & 2 \end{array} \tag{1}$$

Rešenje. Prvi korak se sastoji u tome što prvu jednačinu sistema (1)

- pomnožimo sa -2 i taj proizvod dodamo drugoj jednačini,
- saberemo sa trećom jednačinom i

- pomnožimo sa 2 i proizvod dodamo četvrtoj jednačini.

Na taj način, polazni sistem se transformiše u

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & -5 \\ & - & 2x_2 & - & 14x_3 & = & -10 \\ & & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 10 \end{array} \tag{2}$$

Drugi korak se sastoji u tome da drugu jednačinu sistema (2)

- pomnožimo sa -2 i taj proizvod dodamo trećoj jednačini,
- pomnožimo sa 2 i taj proizvod dodamo četvrtoj jednačini.

Na taj način, polazni sistem (1) se transformiše u sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & -5 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

tj. na sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & -5 \end{array} \tag{3}$$

Sistem (3) je ekvivalentan sistemu (1) i predstavlja završni korak prilikom primene Gausovog metoda eliminacije. Kako je broj jednačina sistema ($n = 3$) veći od broja jednačina u sistemu $(k = 2)$, sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Kako bismo predstavili rešenja u operativnom obliku, potrebno je da uvedemo $n - k$ slobodnih promenljivih. U našem slučaju potrebno je da uvedemo jednu slobodnu promenljivu i to može biti, u ovom slučaju, bilo koja od promenljivih. Ako izaberemo da x_3 bude slobodna promenljiva, tada iz druge jednačine sistema (3) imamo da je $x_2 = -7x_3 + 5$. Konačno, vraćajući dobijeno u prvu jednačinu sistema (3) dobijamo da je $x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 4 + 7x_3 - 5 - 3x_3 = 4x_3 - 5$Skup svih rešenja je tada oblika

$$(x_1, x_2, x_3) = \{(4x_3 - 5, -7x_3 + 5, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Napomena. U nekim udžbenici se nakon uvođenja slobodnih promenljivih uvodi i nova oznaka za njih. Tako smo u prethodnom primeru mogli da označimo da je $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ i da ostale promenljive izrazimo preko t.

Poglavlje 3

Gaus-Žordanov metod eliminacije (Žordanova shema)

REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA PRIMENOM GAUSOVOG-ŽORDANOVE METODA

Ovim metodom se u potpunosti može dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema linearnih jednačina. Može koristiti za pravougaone i kvadratne sisteme.

Ovde će biti izložen metod kojim se u potpunosti može dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema linearnih jednačina. Dakle, mogu se odrediti njegova rešenja u slučaju da je sistem saglasan (bilo da ima jedinstveno rešenje ili da ih ima beskonačno mnogo), ili ako nema rešenja može se ustanoviti njegova nesaglasnost.

Ovde će se koristiti sledeće transformacije kojima se dati sistem prevode u njemu ekvivalentan:

- promena mesta dvema jednačinama u sistemu,
- množenje proizvoljne jednačine sistema brojem različitim od nule i
- dodavanje jedne jednačine sistema nekoj drugoj jednačini sistema, koja je prethodno pomnožena proizvoljnim brojem.

Neka je dat sledeći sistem:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1j}x_j & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2j}x_j & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3j}x_j & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3, \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & & \vdots (*) \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \ldots & + & a_{ij}x_j & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_i, \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a_{mj}x_j & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array}$$

Dati sistem se posle konačnog broja koraka tj. primena pomenutih elementarnih transformacija prevodi u njemu ekvivalentan sistem, takav da se iz njegovog oblika jasno može odrediti da li je on saglasan ili ne i ako je saglasan, mogu mu se odrediti rešenja.

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE – I KORAK

U ovom koraku se prva jednačina množi odgovarajućim koeficijentima i dodaje ostalim kako bi se eliminisala prva promenljiva. Na kraju se prva jednačina deli sa $a_1 1$.

Prvi korak u ovom procesu jeste da u sistemu uočimo jednačinu kojoj je koeficijent uz nepoznatu x_1 različit od nule. Bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je to koeficijent a_{11}. Cilj je da se oslobodimo promenljive x_1 u drugoj, trećoj i tako sve do m -te jednačine. Iz druge jednačine eliminacija nepoznate x_1 se postiže tako što se prva jednačina pomnoži sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i doda drugoj jednačini. Na analogan način se eleminiše promenljiva x_1 iz ostali jednačina. Na kraju ovog postupka se prva jednačina sistema pomnoži sa $\frac{1}{a_{11}}$. Nakon prvog koraka prethodni sistem prelazi u sistem

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \dots & + & a'_{1j}x_j & + & \dots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1, \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \dots & + & a'_{2j}x_j & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2, \\
 & & a'_{32}x_2 & + & a'_{33}x_3 & + & \dots & + & a'_{3j}x_j & + & \dots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3, \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & & a'_{i2}x_2 & + & a'_{i3}x_3 & + & \dots & + & a'_{ij}x_j & + & \dots & + & a'_{in}x_n & = & b'_i, \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & & a'_{m2}x_2 & + & a'_{m3}x_3 & + & \dots & + & a'_{mj}x_j & + & \dots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m.
\end{array}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu.

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE – II KORAK

U ovom koraku se druga jednačina množi odgovarajućim koeficijentima i dodaje ostalim kako bi se eliminisala druga promenljiva. Na kraju se druga jednačina deli sa $a_2 2$.

Sada, će se bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je $a'_{22} \neq 0$. Na sličan način, kao i u prvom koraku, moguće je iz prethodnog sistema eliminisati nepoznatu x_1 iz svih jednačina, osim iz druge. Na kraju ovog koraka drugu jednačinu sistema treba pomnožiti sa $\dfrac{1}{a'_{22}}$. Tada se prethodni sistem transformiše na naredni, njemu ekvivalentan, sistem

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & + & a''_{13}x_3 & + & \dots & + & a''_{1j}x_j & + & \dots & + & a''_{1n}x_n & = & b''_1, \\
 & x_2 & + & a''_{23}x_3 & + & \dots & + & a''_{2j}x_j & + & \dots & + & a''_{2n}x_n & = & b''_2, \\
 & & & a''_{33}x_3 & + & \dots & + & a''_{3j}x_j & + & \dots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3, \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
 & & & a''_{i3}x_3 & + & \dots & + & a''_{ij}x_j & + & \dots & + & a''_{in}x_n & = & b''_i, \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
 & & & a''_{m3}x_3 & + & \dots & + & a''_{mj}x_j & + & \dots & + & a''_{mn}x_n & = & b''_m.
\end{array}$$

Svakako, ovaj sistem je ekvivalentan i polaznom sistemu.

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE – ZAVRŠNI KORAK

Na kraju primene pomenutih elementarnih transfomacija polazni sistem se svodi na jedan od data dva sistema.

Nastavljajući sa primenom ovih transformacija dolazimo do toga da se polazni sistem, posle konačnog broja koraka, svodi na sistem (tj. ekvivalentan je sa sistemom):

$$\begin{array}{llllllllll}
x_1 + & & & & a^{(k)}_{1(k+1)}x_{k+1} & + & \dots + & a^{(k)}_{1n}x_n & = b^{(k)}_1, \\
 & x_2 + & & & a^{(k)}_{2(k+1)}x_{k+1} & + & \dots + & a^{(k)}_{2n}x_n & = b^{(k)}_2, \\
 & & x_3 + & & a^{(k)}_{3(k+1)}x_{k+1} & + & \dots + & a^{(k)}_{3n}x_n & = b^{(k)}_3, \\
 & & & & \dots & & & & \\
 & & & x_k + & a^{(k)}_{k(k+1)}x_{k+1} & + & \dots + & a^{(k)}_{kn}x_n & = b^{(k)}_k,
\end{array}$$

ili na sistem (tj. ekvivalentan je sa sistemom)

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & & & & = & b^{(n)}_1, \\
 & x_2 & & & = & b^{(n)}_2, \\
 & & x_3 & & = & b^{(n)}_3, \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & x_n & = & b^{(n)}_n, \\
 & & & 0 & = & b^{(n)}_{n+1}, \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & 0 & = & b^{(n)}_m.
\end{array}$$

DISKUSIJA REŠENJA ZA POLAZNI SISTEM

U potpunosti je moguće dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema, tj. razgraničiti da li sistem ima ili nema rešenja na osnovu toga da li je dobijen prvi ili drugi sistem.

U slučaju da se polazni sistem svodi na prvi sistem od prethodno data dva sistema on je saglasan, jer je npr. jedno njegovo rešenje

$$x_1 = b_1^{(k)},\ x_2 = b_2^{(k)}, \ldots, x_k = b_k^{(k)},\ x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Ako je $k < n$, tada polazni sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pri čemu su $x_{k+1}, \ldots, x_n$ proizvoljni brojevi (slobodne promenljive), preko kojih se izražavaju nepoznate $x_1, \ldots, x_k$.

U slučaju da se polazni sistem svede na drugi od prethodno data dva sistema, tada postoje dve mogućnosti

- ako je bar jedan od brojeva $b_{n+1}^{(n)}, \ldots, b_m^{(n)}$ različit od nule sistem nema rešenja, ili
- ako važi da je $b_{n+1}^{(n)} = \ldots = b_m^{(n)} = 0,$tada polazni sistem ima jedinstveno rešenje.

$$x_1 = b_1^{(n)}, x_2 = b_2^{(n)}, \ldots, x_n = b_n^{(n)}.$$

Ova metoda se može koristiti za rešavanje proizvoljnih sistema, tj.ona važi kako za pravougaone, tako i za kvadratne sisteme.

Napomena. Slična metoda prethodno opisanoj metodi jeste ona kod koje se samo ispod elemenata $a_{11}, a_{22}, \ldots$ prave nule (ona se u literaturi naziva Gausov metod).

PRIMER

Primena Gaus-Žordanove sheme za rešavanje sistema od četiri jednačine s tri nepoznate.

Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 13x_3 & = & 1 \end{array} \qquad (1)$$

Rešenje. Prvi korak se sastoji u tome što prvu jednačinu sistema (1)

- pomnožimo sa -2 i taj proizvod dodajmo drugoj jednačini,
- pomnožimo sa -3 i proizvod dodajmo trećoj jednačini i
- pomnožimo sa -1 i proizvod dodajmo četvrtoj jednačini.

Na taj način, polazni sistem se transformiše u

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & -5 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -7 \\ & & x_2 & - & 16x_3 & = & -3 \end{array} \tag{2}$$

Drugi korak se sastoji u tome da drugu jednačinu sistema (2)

- dodamo prvoj,
- pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj,
- dodamo je četvrtoj.

Na kraju, drugu jednačinu pomnožimo sa (-1).
Na taj način, polazni sistem (1) se transformiše u sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 4x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ & & & & 19x_3 & = & 8 \\ & & & - & 23x_3 & = & -8 \end{array} \tag{3}$$

Treći korak se sastoji u tome da treću jednačinu sistema (3)

- pomnožimo sa $\frac{4}{19}$ i dodamo prvoj,
- pomnožimo sa $-\frac{7}{19}$ i dodamo trećoj,
- pomnožimo sa $\frac{23}{19}$ i dodamo četvrtoj.

Na kraju treću jednačinu podelimo sa 19. Tada sistem (3), postaje sistem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & \frac{13}{19} \\ & x_2 & & = & \frac{39}{19} \\ & & x_3 & = & \frac{8}{19} \\ & & 0 & = & -\frac{32}{19}. \end{array} \tag{4}$$

Iz poslednjem sistema, na osnovu Žordanove sheme zaključujemo da je sistem (4) nemoguć, a to znači i da je sistem (1) nemoguć.

Poglavlje 4

Pokazna vežba

1. ZADATAK (15 MINUTA)

Gausov metod eliminacije. Pravougaoni sistem (sistem ima četiri jednačine, a tri promenljive).

Gausovom metod ispitati saglasnost sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 13x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Rešenje. Potrebno je uraditi sledeće transformacije:

- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -2 i taj proizvod dodajmo drugoj jednačini,
- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -3 i proizvod dodajmo trećoj jednačini i
- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -1 i proizvod dodajmo četvrtoj jednačini.

Na taj način, polazni sistem se transformiše u

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -x_2 - 7x_3 &= -5 \\ -3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ x_2 - 16x_3 &= -3 \end{aligned} \tag{2}$$

Sada, drugu jednačinu sistema (2)

- pomnožimo sa -3 i dodajmo je trećoj,
- pomnožimo sa 1 i dodajmo je četvrtoj.

Na taj način, polazni sistem (1) se transformiše u sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -x_2 - 7x_3 &= -5 \\ 19x_3 &= 8 \\ -23x_3 &= -8 \end{aligned} \tag{3}$$

Na kraju, treću jednačinu sistema (3) pomnožimo sa $\frac{23}{19}$ i dodajemo je četvrtoj. Dobijamo naredni sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -x_2 - 7x_3 &= -5 \\ 19x_3 &= 8 \\ 0 &= \tfrac{32}{19} \end{aligned} \tag{3}$$

Očigledno, poslednji sistem je nemoguć, a samim tim je i početni sistem nemoguć.

2. ZADATAK - I DEO (25 MINUTA)

Gausov metod eliminacije – postepena eliminacija promenljivih.

Gausovim metodom rešiti sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 13 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 11 \\ x & + & y & + & z & + & u & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & pu & = & 3 \end{array} \tag{1}$$

u zavisnosti od realnog parametra p.

Rešenje. S ciljem eliminacije promenljive x u svim jednačina sistema nakon prve, potrebno je uraditi sledeće transformacije:

- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -2 i taj proizvod dodajmo drugoj jednačini,
- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -1 i proizvod dodajmo trećoj jednačini i
- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -2 i proizvod dodajmo četvrtoj jednačini.

Polazni sistem je ekvivalentan sledećem sistemu

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 13 \\ & - & 2y & - & 5z & - & 7u & = & -15 \\ & - & y & - & 2z & - & 4u & = & -10 \\ & - & 2x & - & 4z & + & (p-10)u & = & -23 \end{array} \tag{2}$$

Kako bismo eliminisali promenljivu y na što je moguće jednostavniji način, prvo ćemo zameniti mesta drugoj i trećoj jednačini sistema (2). Tada on postaje

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 13 \\ & - & y & - & 2z & - & 4u & = & -10 \\ & - & 2y & - & 5z & - & 7u & = & -15 \\ & - & 2x & - & 4z & + & (p-10)u & = & -23 \end{array} \tag{3}$$

S ciljem eliminacije promenljive y u svim jednačinama nakon druge, primenjujemo sledeće transformacije:

- Drugu jednačinu sistema (3) pomnožimo sa -2 i taj proizvod dodajmo trećoj jednačini,
- Drugu jednačinu sistema (3) pomnožimo sa -2 i proizvod dodajmo četvrtoj jednačini.

Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 13 \\ 0 & - & y & - & 2z & - & 4u & = & -10 \\ & & & - & z & + & u & = & 5 \\ & & & & & & (p-2)u & = & -3 \end{array} \tag{4}$$

S obzirom da eliminaciju promenljivih ne može više da izvršavamo, sada počinjemo sa diskusijom o rešenjima sistema, u odnosu na parametar p.

2. ZADATAK – II DEO

Gausov metod eliminacije – diskusija rešenja.

S obzirom na poslednju jednačinu sistema (4), razlikovaćemo naredna dva slučaja.

1) Ako je $p \neq 2$ iz poslednje jednačine možemo odrediti koliko iznosi $u = \frac{-3}{p-2}$.
Vraćajući ovu vrednost u treću jednačinu sistema (4) ona postaje $-z + \frac{-3}{p-2} = 5$, odakle je $z = \frac{7-5p}{p-2}$
Vraćajući nađene vrednosti za u i z u drugu jednačinu sistema (4) ona postaje $y - 2 \cdot \frac{7-5p}{p-2} - 4 \cdot \frac{-3}{p-2} = -10$,odakle je $y = \frac{20p-22}{p-2}$.
Konačno vraćajući sve nađene vrednosti u prvu jednačinu sistema (4) ona postaje $x + 2 \cdot \frac{20p-22}{p-2} + 3 \cdot \frac{7-5p}{p-2} + 5 \cdot \frac{-3}{p-2} = 13$,odakle je $x = \frac{12(1-p)}{p-2}$.
Tada polazni sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z, u) = \left\{ \frac{12(1-p)}{p-2}, \frac{20p-22}{p-2}, \frac{7-5p}{p-2}, \frac{-3}{p-2} \right\}, \ p \neq 2.$$

2) Ako je $p = 2$, tada sistem (4) postaje

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 13 \\ 0 & - & y & - & 2z & - & 4u & = & -10 \\ & & & - & z & + & u & = & 5 \\ & & & & & & 0 & = & -3 \end{array}$$

Očigledno je polazni sistem nemoguć.

3. ZADATAK – I DEO (25 MINUTA)

Gausov metod eliminacije, slučaj kada se rešava homogen sistem – postepena eliminacija promenljivih..

Gausovim metodom eliminacije, rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & mu & = & 0 \\ x & + & 2y & + & (m+2)z & + & 2u & = & 0 \\ x & + & (m+1)y & + & 3z & + & 2u & = & 0 \\ mx & + & 2y & + & 3z & + & 4u & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

u zavisnosti od realnog parametra m.

Rešenje. Napomenimo, na početku, da se radi o homogenom sistemu koji je uvek saglasan. Dakle, u zavisnosti od vrednosti koje parametar m može da uzme mi ćemo proveriti da li ima sutuacija kada sistem ima jedinstveno rešenje, odnosno beskonačno mnogo rešenja. Primenimo Gausov metod. S ciljem da eliminišemo promenljivu x u svim jednačina sistema nakon prve, potrebno je uraditi sledeće transformacije:

- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -1 i taj proizvod dodajmo drugoj jednačini,
- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa $-m$ i proizvod dodajmo trećoj jednačini i
- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -2 i proizvod dodajmo četvrtoj jednačini.

Polazni sistem je ekvivalentan sledećem sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & mu & = & 0 \\ & & & + & (m-1)z & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & (m-1)y & & & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & 2(m-1)y & + & 3(1-m)z & + & (4-m^2)u & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

Kako bismo eliminisali promenljivu y na što je moguće jednostavniji način, prvo ćemo zameniti mesta drugoj i trećoj jednačini sistema (2). Tada on postaje

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & mu & = & 0 \\ & & (m-1)y & & & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & & + & (m-1)z & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & 2(m-1)y & + & 3(1-m)z & + & (4-m^2)u & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Sada, drugu jednačinu sistema (3) pomnožimo sa 2 i taj proizvod dodajemo četvrtoj. Tada dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & mu & = & 0 \\ & & (m-1)y & & & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & & & (m-1)z & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & & & 3(1-m)z & + & (8-2m-m^2)u & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

3. ZADATAK – II DEO

Gausov metod eliminacije - slučaj kada se rešava homogen sistem – diskusija rešenja.

Na kraju ćemo treću jednačinu sistema (4) pomnožiti sa 3 i taj proizvod dodati poslednjoj jednačini.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & mu & = & 0 \\ & & (m-1)y & & & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & & & (m-1)z & + & (2-m)u & = & 0 \\ & & & & & & (14-5m-m^2)u & = & 0 \end{array} \qquad (5)$$

Da bismo mogli da diskutujemo sistem (5), potrebno je, najpre, kvadratni trinom $14-5m-m^2$ rastaviti na činioce. Tada je $14-5m-m^2 = -(x-2)(x+7)$.

1) U slučaju da je $m_1 \neq 2$ i $m_2 \neq -7$ sistem (5) ima jedinstveno rešenje $(x,y,z,u) = (0,0,0,0)$, jer se radi o homogenom sistemu. Tada je to i rešenje polaznog sistema.

2) U slučaju da je $m_1 = 2$ ili $m_2 = -7$ sistem će imati i netrivijalna rešenja. Njih određujemo u nastavku.

- Za $m = 2$, sistem (5) glasi

$$\begin{aligned} x+2y+3z+2u &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ako proglasimo u za slobodnu promenljivu, imamo da je $u=t, y=0, z=0,$ i $x=-2t$. Polazni sistem ima beskonačno mnogo rešenja $(x,y,z,u) = (-2t,0,0,t)$ gde je $t \in \mathbb{R}$.

- Za $m = -7$, sistem (5) glasi

$$\begin{aligned} x+2y+3z-7u &= 0 \\ -8y+9u &= 0 \\ -8z+9u &= 0, \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Ako proglasimo u za slobodnu promenljivu, imamo da je $u=t, z=\frac{9t}{8}, y=\frac{9t}{8}, x=\frac{11t}{8}$, $t \in \mathbb{R}$.Polazni sistem ima beskonačno mnogo rešenja $(x,y,z,t) = \left(\frac{11t}{8}, \frac{9t}{8}, \frac{9t}{8}, t\right)$ gde je $t \in \mathbb{R}$.

4. ZADATAK - I DEO (25 MINUTA)

Gausov metod eliminacije - slučaj kada sistem s jednim parametrom ima jedinstveno rešenje.

Diskutovati sistem jednačina za sve realne vrednosti parametra a i rešiti ga kada je to moguće

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & -2 \end{array} \qquad (1)$$

Rešenje. S ciljem da eliminišemo promenljivu x u svim jednačina sistema nakon prve, potrebno je uraditi sledeće transformacije:

- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa -1 i taj proizvod dodajmo drugoj jednačini,

- Prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa $-a$ i proizvod dodajmo trećoj jednačini.

Tada, sistem (1) postaje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & 0 \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & -(2+a) \end{array} \qquad (2)$$

S ciljem da eliminišemo promenljivu y u svim trećoj jednačini, potrebno je uraditi sledeću transformaciju:

- Drugi jednačinu sistema (2) treba dodati trećoj jednačini.

Tada, sistem (2) postaje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & 0 \\ & & y & & (2-a-a^2)z & = & -(2+a) \end{array} \qquad (3)$$

Kako je $2-a-a^2 = (2+a)(1-a)$, sada razlikujemo nekoliko slučajeva:

1^* Ako je $(2+a)(1-a) \neq 0$, tj. $a \neq 1$ i $a \neq -2$, tada je rešavajući sistem (3) počev od treće jednačine ka prvoj, dobijamo da je

$$(x,y,z) = \left(-\frac{2}{a-1}, \frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)$$

4. ZADATAK - II DEO

Primena Kroneker - Kapelijevog stava na rešavanje sistem u kome se javlja parametar - slučaj kada sistem nema rešenja, odnosno ima beskonačno mnogo rešenja.

2^* Ako je $(2+a)(1-a) = 0$, tada je $a = 1$ ili $a = -2$. Dakle, ovde imamo dva podslučaja.

2.1 Ako je $a = 1$, tada sistem (3) postaje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -3 \end{array}$$

pa on u ovom slučaju nema rešenja. To znači da ni polazni sistem u ovom slučaju nema rešenja.

2.2 U slučaju $a = -2$, sistem (3) postaje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & -2z & = & 1 \\ & & -3y & + & -3z & = & 0 \\ & & y & & 0 & = & 0 \end{array}$$

U ovom slučaju sistem (3) ima beskonačno mnogo rešenja. Njih određujemo iz sistema

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ -3y+3z &= 0 \end{aligned}$$

Kako poslednji sistem ima tri promenljive, a dve jednačine uvodimo jednu slobodnu promenljivu. Ako proglasimo da je $z=\alpha, \alpha \in \mathbb{R},$ tada je

$$\left\{(x,y,z) = \left(1-2\alpha, \alpha, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. ZADATAK – I DEO (20 MINUTA)

Prvi korak i drugi korak u određivanju ekvivalentnog sistema, datom sistemu.

Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 6x_2 & - & 9x_3 & - & 20x_4 & = & -11, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 5, \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2. \end{array}$$

Rešenje.

I korak: Kako je $a_{11} = 1,$ sada

- prva jednačina se množi sa -3 i dodaje drugoj,
- prva jednačina se množi sa -2 i dodaje trećoj,
- prva jednačina se množi sa -4 i dodaje četvrtoj,

Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 6x_2 & - & 9x_3 & - & 20x_4 & = & -11, \\ & & 20x_2 & + & 32x_3 & + & 64x_4 & = & 36, \\ & & 15x_2 & + & 24x_3 & + & 48x_4 & = & 27, \\ & & 25x_2 & + & 40x_3 & + & 83x_4 & = & 46. \end{array}$$

II korak : Sada će, najpre, druga, odnosno treća jednačina biti podeljena sa 4, odnosno sa 3. Tada se dobija

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 6x_2 & - & 9x_3 & - & 20x_4 & = & -11, \\ & & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 16x_4 & = & 9, \\ & & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 16x_4 & = & 9, \\ & & 25x_2 & + & 40x_3 & + & 83x_4 & = & 46. \end{array}$$

Kako je $a_{22} = 5$ sada:

- druga jednačina se množi sa 6/5 i dodaje prvoj,
- druga jednačina se množi sa −1 i dodaje trećoj,
- druga jednačina se množi sa −5 i dodaje četvrtoj.

Tada prethodni sistem postaje:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & \frac{3}{5}x_3 & - & \frac{4}{5}x_4 & = & -\frac{1}{5}, \\ & & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 16x_4 & = & 9, \\ & & & & & & 0 & = & 0, \\ & & & & & & 3x_4 & = & 0. \end{array}$$

5. ZADATAK – II DEO

Drugi korak u određivanju ekvivalentnog sistema polaznom sistemu.

Kao što se vidi treća jednačina prethodnog sistema je postala tačna jednakost. Iz poslednje jednačine je dobijeno $x_4 = 0$. Na kraju ovog koraka druga jednačina se deli sa 5. Možemo poslednju jednačinu da podelimo sa 3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & \frac{3}{5}x_3 & - & \frac{4}{5}x_4 & = & -\frac{1}{5}, \\ & & x_2 & + & \frac{8}{5}x_3 & + & \frac{16}{5}x_4 & = & \frac{9}{5}, \\ & & & & & & 0 & = & 0, \\ & & & & & & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Kako je $x_4 = 0$, posednji sistem možemo zapisati u obliku

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & \frac{3}{5}x_3 & - & & = & -\frac{1}{5}, \\ & & x_2 & + & \frac{8}{5}x_3 & + & & = & \frac{9}{5}, \\ & & & & & & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Ovo je bio i poslednji korak u rešavanju sistema. Poslednji sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Potrebno je odrediti broj slobodnih promenljivih preko kojih će se ostale promenljive izražavati. Važi da je

$$\text{broj slobodnih promenljivih jednak je broj promenljivih minus broj jednačina.}$$

Kako sistem ima četiri promenljive, a nakon elementarnih transformacija su preostale tri jednačine, potrebno je uvesti jednu slobodnu promenljivu. To, svakako, ne može biti nepoznata x_4. Koju ćemo od promenljivih x_1, x_2 ili x_3 proglasiti za slobodnu, potpuno je proizvoljno, ali je treba izabrati onu tako da što jednostavnije ostale promenljive izrazimo preko nje. To ćemo najlakše uraditi sa promenljivom x_3, pa nju proglašavamo za slobodnom. Ostale promenljive izražavaju preko nje. Tada se dobija:

$$x_1 = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}x_3, \quad x_2 = \frac{9}{5} - \frac{8}{5}x_3.$$

Sva rešenja sistema su oblika:

$$\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}x_3,\frac{9}{5}-\frac{8}{5}x_3,x_3,0\right),x_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

6. ZADATAK - I DEO (25 MINUTA)

Rešavanje sistema primenom Gaus - Žordanov postupak.

Rešiti sledeći sistem linearnih jednačina Gaus - Žordanovom metodom:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1, \\ x & + & ay & + & z & = & 2, \\ x & + & y & + & az & = & -3. \end{array}$$

u zavisnosti od realnog parametra a.

Rešenje. Prvo ćemo zameniti mesta prvoj i trećoj jednačini

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & -3, \\ x & + & ay & + & z & = & 2, \\ ax & + & y & + & z & = & 1. \end{array}$$

I korak: Kako je $a_{11}=1,$ sada
- prva jednačina se množi sa -1 i dodaje drugoj,
- prva jednačina se množi sa $-a$ i dodaje trećoj,

Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & -3, \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & -5, \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 3a+1. \end{array}$$

II korak: Kako je $a_{22}=a-1,$ sada
- drugu jednačinu dodajemo trećoj,
- drugu jednačinu množimo sa $-\frac{1}{a-1}$ i dodajemo prvoj, pri $a-1\neq 0$.

Na kraju drugu jednačinu množimo sa $\frac{1}{a-1}$ Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & & & (a+1)z & = & \frac{-3a-2}{a-1}, \\ & & y & & -z & = & \frac{5}{a-1}, \\ & & & & -(a+2)(a-1)z & = & 3(a+2). \end{array}$$

III korak: Kako je $a_{33}=-(a+2)(a-1)$, sada
- treću jednačinu množimo sa $\frac{a+1}{(a+2)(a-1)}$ i dodajemo prvoj, pri $a+2\neq 0$,

- treću jednačinu množimo sa $\frac{-1}{(a+2)(a-1)}$ i dodajemo drugoj, pri $a+2 \neq 0$.

Na kraju treću jednačinu množimo sa $\frac{-1}{(a+2)(a-1)}$. Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{aligned} x \quad &= \frac{1}{a-1}, \\ y \quad &= \frac{2}{a-1}, \\ z \quad &= -\frac{3}{a-1}. \end{aligned}$$

Pod pretpostavkom da je $a \neq 1$ i $a \neq -2$ dobili smo jednistveno rešenje, kao i kod matričnog metoda, i to je uređena trojka

$$(x,y,z) = \left\{ \left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, -\frac{3}{a-1} \right) \right\}.$$

Za razliku od matričnog metoda, kod ove metode, možemo odrediti šta se dešava sa rešenjima polaznog sistema kada je $a=1$ ili $a=-2$.

6. ZADATAK - II DEO

Diskusija rešenja kada je $a=1$ ili $a=-2$.

1° Za $a=-2$ dovoljno je posmatrati poslednji sistem koji smo dobili sređivanjem polaznog, pre zabrane $a \neq -2$. To je sistem

$$\begin{aligned} x + \quad (a+1)z &= \frac{-3a-2}{a-1}, \\ y \quad -z &= \frac{5}{a-1}, \\ -(a+2)(a-1)z &= 3(a+2). \end{aligned}$$

Stavljajući u njega da je $a=-2$ dobijamo

$$\begin{aligned} x + \quad -z &= \frac{-4}{3}, \\ y \quad -z &= -\frac{5}{3}, \\ 0 \cdot z &= 0. \end{aligned}$$

Tada, iz treće jednačine poslednjeg sistema zaključujemo da je z proizvoljan realan broj (slobodna promenljiva), da se ostale promenljive x i y mogu izraziti preko z (x i y se tada nazivaju vezane promenljive, jer zavide od z). Iz druge jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y = z + \frac{5}{3}$, a iz prve jednačine imamo da je $x = z + \frac{4}{3}$. Dakle, sistem ima beskonačno mnogo rešenja koje možemo zapisati u obliku

$$\left\{ (x,y,z) = \left(z + \frac{4}{3}, z + \frac{5}{3}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

1° Za $a=1$ dovoljno je posmatrati poslednji sistem koji smo dobili sređivanjem polaznog, pre zabrane $a \neq 1$. To je sistem

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad az &= -3, \\ (a-1)y + (1-a)z &= -5, \\ (1-a)y + (1-a^2)z &= 3a+1. \end{aligned}$$

Stavljajući u njega da je $a = 1$ dobijamo

$$\begin{aligned} x + y + z &= -3, \\ 0 &= -5, \\ 0 &= 4, \end{aligned}$$

što nas dovodi do zaključka da je u ovom slučaju polazni sistem nemoguć - nema rešenja.

Ovo smo mogli uočiti i da smo u polazni sistem vratili vrednost $a = 1$, jer bi tada dobili

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 2, \\ x + y + z &= -3, \end{aligned}$$

što je nemoguće, jer tri ista broja u zbiru daju tri različite vrednosti.

Poglavlje 5

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba samostalno da provežbaju

Zadatak. Rešiti sistem Gausovom, odnosno Gaus-Žordanovom metodom

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 12, \\ 2x & + & y & + & z & = & 4, \\ & - & y & + & 2z & = & 7. \end{array}$$

Rezultat. Sistem ima jedinstveno rešenje $(1, -1, 3)$.

Zadatak. Rešiti sistem Gausovom, odnosno Gaus-Žordanovom metodom

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0, \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0, \\ x & - & 4y & & & = & 0. \end{array}$$

Rezultat. Sistem ima beskonačno mnogo rešenja $\{(t, 4t, -5t), t \in \mathbb{R}\}$.

Zadatak. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i kada je to moguće rešiti sledeći sistem Gausovom, odnosno Gaus-Žordanovom metodom

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & (a+1)y & + & z & = & 7, \\ x & + & y & + & z & = & 6, \\ ax & + & 4y & + & z & = & 5. \end{array}$$

Rezultat. Za $a \neq 4$ i $a \neq -3$ sistem ima jednistveno rešenje $\left(-\frac{1}{a-4}, \frac{1}{a-4}, 6\right)$. Za $a = 4$ sistem je nemoguć, dok za $a = -3$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $\left\{\left(\frac{19-3t}{7}, \frac{23-4t}{7}, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.

Zadatak. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i kada je to moguće rešiti sistem Gausovom, odnosno Gaus-Žordanovom metodom

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 6y & - & 9z & - & 20u & = & -11, \\ 3x & + & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 3, \\ 2x & + & 3y & + & 6z & + & 8u & = & 5, \\ 4x & + & y & + & 4z & + & au & = & 2. \end{array}$$

Rezultat. Za $a=0$ sistem je nemoguć, dok za $a\neq 0$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja $\left\{\left(\frac{4-3ta-a}{5a},\frac{9a-8ta-16}{5a},t,\frac{1}{a}\right),t\in R\right\}$.

Vreme izrade: 1. 25 minuta; 2. 25 minuta; 30 minuta; 30 minuta

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube: eliminacija promenljivih sistem sa tri nepoznate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube: eliminacija promenljivih, sistem sa četiri nepoznate.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Zaključak za lekciju 09

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Gausov metod eliminacije, Gausov-Žordanov metod eliminacije (Žordanova shema).

Sistem linearnih jednačina predstavlja veoma važan matematički model koji se sreće veoma često u primenama preko koga treba naći rešenja po određenim veličina (nepoznatim) koje ga čine.

U ovoj lekciji su izučene dve metode za određivanje rešenja takvog sistema: Gausov metod eliminacije i Gaus metod-Žordanova shema. Ukazano je na prednosti i mane ovih metoda.

Literatura (nastavni materijal):
Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.