UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

FUNKCIJE

Lekcija 05

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 05

FUNKCIJE

Uvod

UVOD

Fokus ove lekcije su osnovni koncepti funkcija, kompozicija funkcija i 1-1, NA i invertibilne funkcije

Jedan od najznačajnijih koncepata u matematici, računarskoj nauci i mnogim primenama je funkcija. Kada govorimo o funkcijama neizbežno je da se koriste termini preslikavanje i transformacija. Termini preslikavanje (engl. mapping) i transformacija se koriste u istom značenju.

Funkcije su specijalni tipovi relacija. Oni su takođe podskupovi proizvoda skupova. Međutim, bitna razlika među njima je u tome što kod relacija može da postoji više od jednog elementa b koji su u relaciji sa a, dok kod funkcija, za dati a postoji jedan i samo jedan b koji je povezan sa a.

U ovom predavanju uvodimo pojam funkcije kao specijalnog tipa relacija. Izučavamo njene osnovne osobine i razmatramo nekoliko specijalnih tipova funkcija.

U ovoj lekciji biće obradene sledeće teme:

- Funkcije

- Kompozicija funkcije

- 1-1, NA i invertibilne funkcije.

Poglavlje 1

OSNOVNI POJMOVI FUNKCIJA

DEFINCIJA FUNKCIJA

Funkcija f iz X u Y je pravilo dodeljivanja jedinstvenog elementa iz Y svakom elementu iz X

Definicija
Neka su X i Y neprazni skupovi. Funkcija f iz X u Y je pravilo dodeljivanja jedinstvenog elementa iz Y svakom elementu iz X. Ako je f funkcija iz X u Y tada pisemo
$f : X \to Y$
("f je funkcija iz X u Y)
("f preslikava X u Y")

Skup X se zove domen funkcije, a skup Y se zove kodomen funkcije.

Ako je $f : X \to Y$ funkcija i $x \in X$, tada

f (x)

("f od x")

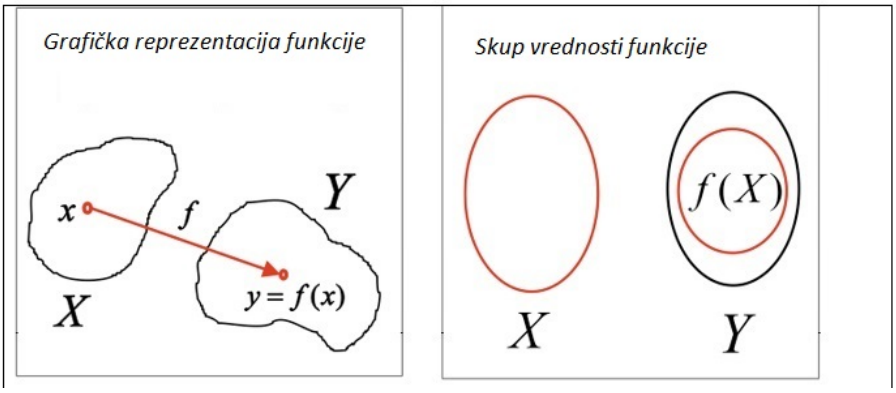
označava jedinstveni element iz Y koji f dodeljuje elementu $x \in X$. f (x) se zove slika elementa x u odnosu na funkciju f ili vrednost f od x.

Skup svih vrednosti od f se zove skup vrednosti funkcije f, i označava sa f (X), ili R_f . Dve funkcije

f, g : X → Y

su jednake u oznaci f = g ako f (x) = g(x) za sve $x \in X$.

Koncepti funkcije f i njene vrednosti f(x) se ne smeju pomešati. Funkcija f iz X u Y može biti definisana na nekom specifičnom podskupu D_f skupa X , to jest, domen D_f funkcije f može biti pravi podskup skupa X.



Slika 1.1 Šematski (grafički) prikaz definicije funkcije [Izvor: autor]

PRIMER

Odrediti da li je f(n) funkcija

Ako je $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ odrediti da li je f funkcija
a) $f(n)=\pm n$
- Možemo reći da ovo nije funkcija, jer za jednu vrednost nezavisne promenljive, funkcija uzima dve vrednosti f(n) = n i f(n) = - n

b) $f(n)=\sqrt{n^2+1}$
- Možemo reći da ovo jeste funkcija, jer jednom originalu pridružuje tačno jednu sliku i svim tačkama iz domena (skupa $\mathbb{Z}$) možemo pridružiti odgovarajući realan broj.

c) $f(n)=\frac{1}{n^2-4}$
- Ovo nije funkcija sa domenom $\mathbb{Z}$ zato što za vrednosti n = 2 i n = -2 vrednost od f(n) nije definisana. Drugim rečima, f(2) i f(-2) nisu definisane , pošto ne možemo deliti sa 0

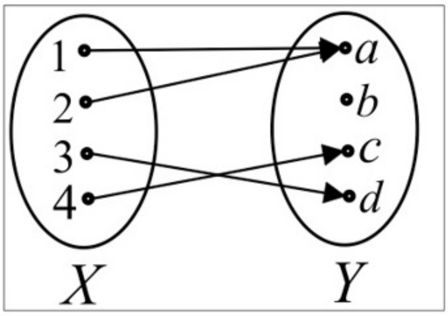
FUNKCIJE - PRIMER

Ispitivanje funkcija

<u>Primer</u>
Neka su
X = {1, 2, 3, 4}
Y = {a, b, c, d},
i neka je f : X → Y definisana sa
f (1) = a, f (2) = a, f (3) = d, f (4) = c . Pronaći rang funkcije f(x).

Rešenje:
Pošto je svako f (x) jedna jednistvena vrednost, f je funkcija; njen rang je f (X) = {a, c, d} pravi podskup od Y.
Primetimo da se element a $\in$ Y javlja kao vrednost funkcije f za dva različita elementa iz X ,

konkretno a = f (1) = f (2). Ovo nije u suprotnosti sa našom definicijom funkcije. Funkcija može imati iste vrednosti za dva različita elementa svog domena



Slika 1.2 Preslikavanje funkcije f(x) [Izvor: autor]

Primer

Neka je P kompjuterski program koji i na ulazu i na izlazu ima ceo broj. Neka su X = Y = **Z** i neka za svaki ceo broj na ulazu, n, P daje jedinstveni ceo broj $f_P(n)$ = m na izlazu

Tada je f_P funkcija.

Ovaj koncept se može generalizovati za program za koji je X skup svih mogućih ulaznih veličina, a Y skup svih mogućih izlaznih veličina.

Dakle, ove vrste funkcija možemo posmatrati kao ulazno-izlazne relacije.

PRIMER - SKUP VREDNOSTI FUNKCIJE

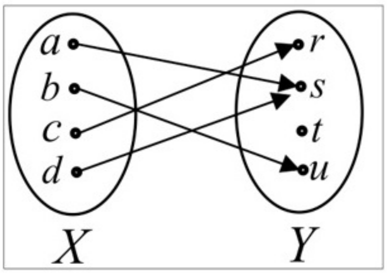
Pronaći skup vrednosti funkcije f

Primer
Funkcija f je definisana iz X u Y, tako da su dati
X = {a, b, c, d},
Y = {r, s, t, u}.
Ovde imamo
f (a) = s,
f (b) = u,
f (c) = r,
f (d) = s.

Pronaćiskup vrednostifunkcije f.

Rešenje:

Skup vrednosti funkcije f je skup svih vrednosti iz X, to jest f (X) = {r, u, s}. Primetimo da $t \notin f(x)$, pošto t nije slika ni jednog elementa u odnosu na funkciju f , to jest $t \neq f(x)$ za svaki $x \in X$.



Slika 1.3 Definicija funkcije iz Primera 5.5 [Izvor: autor]

IDENTIČKA I INKLUZIONA FUNKCIJA

Inkluziona funkcija je funkcija definisana sa $\iota(x) = x$ za svako $x \in S$

Neka je X proizvoljan skup. Funkcija $f : X \to X$ koja svakom elementu iz X pridružuje njega samog, se zove identička funkcija nad X i označava sa 1X ili jednostavno 1. Tako imamo

$1_X = x$ za svaki $x \in X$.

Neka je S podskup od X . Inkluziono preslikavanje ili ugnježdenje skupa S u skup X , u oznaci

$\iota : S \to X$,

je funkcija definisana sa

$\iota(x) = x$ za svako $x \in S$

RESTRIKCIJA FUNKCIJA

$f\,|S\,(x) = f\,(x)$ za svako $x \in S$

Restrikcija na S bilo koje funkcije $f : X \to Y$, u oznaci $f\,|S$ je funkcija iz S u Y definisana sa

$f\,|_S\,(x) = f\,(x)$ za svako $x \in S$

$\iota(x) = x$ za svako $x \in S$.

Primer

Funkcija f je definisana iz X u Y, tako da su dati

$X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{r, s, t, u\}$.

Ovde imamo

$f\,(a) = s$, $f\,(b) = u$, $f\,(c) = r$, $f\,(d) = s$.

Ako je $S = \{a, b, c\}$ pronaći restrikciju $f\,|S$.

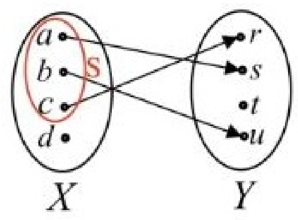
Rešenje:

Restrikcija $g = f|_S$ funkcije f na S je definisana sa

g(a) = s, g(b) = u i g(c) = r

Primetimo da su rangovi obe funkcije, f i g, jednaki, konkretno

f (X) = g(S) = {r, s, u}
Znači, može se desiti da i funkcija i njena restrikcija imaju isti ra



Slika 1.4 Restrikcija funkcije iz Primera [Izvor: autor]

Poglavlje 2

FUNKCIJE KAO RELACIJE

FUNKCIJA I NJEN GRAFIK

Kada su funkcije jednake, one imaju iste grafike

Već smo pomenuli da se funkcije mogu posmatrati kao specijalni slučajevi relacija. Za početak, svaka funkcija $f : X \to Y$ ima takozvani grafik funkcije f. Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je graf funkcije f skup

$$\{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$$

Definicija
Dve funkcije $f, g : X \to Y$ su jednake po definiciji ako
$f(x) = g(x)$ za svako $x \in X$
onda one imaju iste grafike.
Zbog toga ne pravimo razliku između funkcije i njenog grafika.

Grafik funkcije f ima osobinu da svaki element $x \in X$ pripada jednom jedinom uređenom paru (x, y) u relaciji. S druge strane, svaka relacija f iz X u Y koja ima ovu osobinu jedinstvenosti predstavlja funkciju

$f : X \to Y$, gde

$f(x) = y$ za svaki $(x, y) \in f$

PRIMER 1

Ispitivanje da li je relacija istovremeno i funkcija

Primer
Neka su f, g i h relacije nad skupom $A = \{1, 2, 3\}$ definisane sa
$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$,
$g = \{(1, 2), (3, 1)\}$
$h = \{(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$.

Možemo primetiti sledeće:

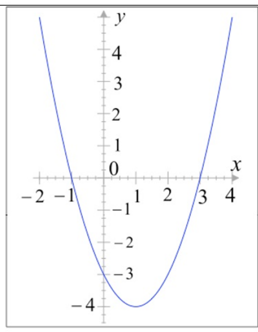
- Tada je f funkcija iz A u A, pošto se svaki element iz A javlja kao prva koordinata u tačno jednom uređenom paru iz f. Odnosno, f (1) = 3, f (2) = 3 i f (3) = 1

- Relacija g nije funkcija iz A u A, pošto 2 ∈ A nije prva koordinata nijednog uređenog para iz g, pa tako g ne pridružuje ni jednu sliku elementu 2.
- Takođe h nije funkcija iz A u A, pošto se 1 ∈ A javlja kao prva koordinata u dva različita uređena para (1, 3), (1, 2) ∈ h; a funkcija ne može pridružiti dve različite vrednosti nekom elementu.

Posmatrajmo realan polinom stepena n koji predstavlja funkciju f : R → R definisanu sa

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

gde su a_k ∈ R (k = 0, 1, . . . , n) dati brojevi. Kako je R beskonačan skup, bilo bi nemoguće nacrtati svaku tačku grafa. Međutim, graf takve funkcije se može aproksimirati tako što se prvo nacrtaju neke od njenih tačaka a zatim nacrta glatka kriva kroz te tačke. Tačke se obično dobijaju iz tabele u kojoj su različite vrednosti dodeljene vrednosti x, a odgovarajuće vrednosti f (x) se izračunavaju (Slika 1).



Slika 2.1 Grafik funkcije $f(x) = x^2 - 2x{-}3$ [Izvor: autor]

PRIMER 2

Graf funkcija f (x) = (3/2)x + 1 i f (x) = x^2

Primer

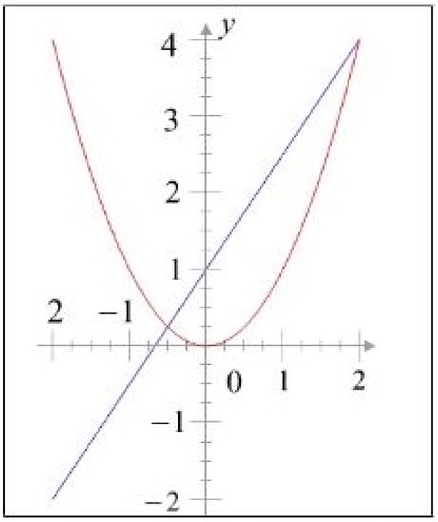
Neka su a, b ∈ R i neka je funkcija f : R → R definisana sa

f (x) = ax + b.

Tada je graf relacije f prava u ravni. Graf funkcije f : R → R definisane sa

$f(x) = x^2$

je kvadratna parabola.



Slika 2.2 Grafik funkcije f(x) = (3/2)x + 1 i f(x) = x^2 [Izvor: autor]

Poglavlje 3

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

DEFINICIJA KOMPOZICIJE FUNKCIJA

Ako funkcije f i g posmatramo kao relacije, onda je funkcija g ◦ f isto što i kompozicija g ◦ f relacija f i g

Slično kao u slučaju relacija, možemo definisati kompoziciju funkcija. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ proizvoljne funkcije. Tada se funkcija $h : X \to Z$ definisana sa $h(x) = g(f(x))$ za svako $x \in X$ zove kompozicija funkcija f i g, što se zapisuje u oznaci

$g \circ f$.

Primetimo da je kodomen funkcije f domen funkcije g u definiciji kompozicije $g \circ f$ funkcija f i g. Definicija kompozicije funkcija, u stvari, nije nova. Ako funkcije f i g posmatramo kao relacije, onda je funkcija $g \circ f$ isto što i kompozicija $g \circ f$ relacija f i g.

Neka je $f : X \to Y$ proizvoljna funkcija. Tada imamo

$$f \circ 1_X = f$$

i

$$1_Y \circ f = f,$$

gde su 1_X i 1_Y identičke funkcije na X i Y , respektivno.

Kompozicija funkcija ima osobinu asocijativnosti. Ovu osobinu nećemo detaljno dokazivati, pošto je ovaj dokaz obavljen u prethodnom predavanju u kontekstu relacija.

Neka su $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$. Tada asocijativnost kompozicije funkcija možemo označiti kao

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

Primer

Neka su $X = Y = \mathbb{Z}$, i neka je $Z = 2\mathbb{Z}$, skup parnih celih brojeva.
Definišimo funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ sa
$f(x) = x + 1$ i $g(y) = 2y$
Odrediti kompoziciju $h = g \circ f$.

Rešenje:

$h(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$

PRIMER

Primer kompozicije funkcija

Ako je dato

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$;
onda
$g \circ f : X \to Z$ je definisano kao

$g \circ f\,(x) = g(f(x))$ za svako x

Tako ako kažemo da je

$f(x)=3x+5$, $g(x) = 2^x$

tada imamo sledeće kompozicije

$g \circ f\,(x) = g(f(x)) = 2^{(3x + 5)}$ i
$f \circ g\,(x)=f(g(x))= 3(2^{x})+5$

Poglavlje 4

1-1, NA I INVERTIBILNE FUNKCIJE

DEFINICIJE INJEKCIJE, SURJEKCIJE, BIJEKCIJE I INVERTIBILNE FUNKCIJE

Funkcija f : $X \to Y$ je 1-1 ako f (x) = f (y) sledi x = y. Funkcija f : X $\to$ Y je NA ako je svaki element iz Y slika nekog elementa iz X, to jest za svako y∈Y

U opštem slučaju, funkcija može preslikavati više različitih vrednosti iz svog domena u jednu istu vrednost. Ako se za neku funkciju to ne događa, onda se za nju kaže da je 1-1 . Ako je rang neke funkcije jednak njenom kodomenu, onda se za nju kaže da je NA.

Definicija
Neka su X i Y proizvoljni skupovi.
Funkcija f : X → Y je 1-1 (injekcija) ako
f (x) = f (y) sledi x = y
to jest, ako različiti elementi iz domena X
imaju različite slike.

Definicija
Neka su X i Y proizvoljni skupovi.
Funkcija f : X → Y je NA (surjekcija)
ako je svaki element iz Y slika nekog elementa iz X,
to jest
za svako y∈Y postoji x∈X tako da je f(x)=y.
U tom slučaju, kažemo da je f funkcija iz X NA Y ili
da f preslikava X NA Y.

Definicija
Funkcija f : X → Y je invertibilna ako je
njena inverzna relacija f−1 funkcija iz Y u X.

Definicija
Ako je funkcija f : X → Y 1-1 i NA,
onda je f 1-1 korespondencija (bijekcija) između X i Y

Definicija 1-1 funkcije u svojoj kontrapozitivnoj formi glasi:

1-1 funkcija f : X → Y

ne može imati f (x) = f (x’) za dva različita elementa x, x’ ∈ X, to jest

$x \neq x' sledi f(x) \neq f(x')$

Da bi pokazali da je neka funkcija f : X → Y NA, treba da, za proizvoljno y ∈ Y , nađemo x ∈ X takvo da je y = f (x).

PRIMER 1

Kada imamo da je f (1) = f (2) = a, funkcija f nije 1-1.

Primer

Posmatramo funkciju f : X → Y
X = {1, 2, 3, 4}
Y = {a, b, c, d}

gde su

f (1) = a, f (2) = a, f (3) = d, f (4) = c.

Da li je funkcija f 1-1 i NA funkcija?

Rešenje:

Pošto je f (1) = f (2) = a, funkcija f nije 1-1.
Pošto f (X) = {a, d, c} ≠ Y , funkcija f nije NA.

Primer

Neka su X = Y = R, a, b ∈ R, pri čemu a ≠ 0, i neka je funkcija f definisana sa f (x) = ax + b. Da li je funkcija f 1-1 i NA fukcija?

Rešenje:
Funkcija f je 1-1 funkcija. Da bi ovo pokazali, pretpostavimo da
f (x) = f (x’) za neke x, x’ ∈ R, to jest, ax + b = ax’+ b, ili, ekvivalentno, a(x − x’) = 0. Pošto a ≠ 0, iz ovog sledi x − x’ = 0, to jest x = x’.
Funkcija f je NA. Neka je dat proizvoljan element y ∈ R. Treba naći x ∈ R takvo da
y = f (x) = ax + b

Rešavanjem ove jednačine po x, pošto a ≠ 0, dobijamo

Za ovo x zaista važi, f (x) = y, pošto

f(x)=ax+b=ay-bab=y-b+b=y

PRIMER 2

Kada imamo da je f (−1) = 1 = f (1), tada funkcija nije 1-1

Primer

Neka je f : R → R definisano sa f (x) = x^2 . Da li je funkcija f 1-1 i NA funkcija?

Rešenje:

Kako elementi x = −1 i x = 1 imaju iste slike,

f (−1) = 1 = f (1)

funkcija f nije 1-1.

Pošto je kvadrat svakog realnog broja ne-negativan, za element −1 ∈ R, ne postoji x ∈ R takav da f (x) = −1; prema tome f nije NA.

Primer

Neka je g : [0,∞) → [0,∞) definisano sa g(x) = x ^{2} . Da li je funkcija g 1-1 i NA funkcija?

Rešenje:

• Da bi pokazali da je g 1-1, pretpostavimo g(x) = g(x’), to jest,

x ^{2} − (x’) ^{2} = (x − x’)(x + x’) = 0

Iz ovog sledi, x = x’ ili x = −x’

- Da bi pokazali da je g 1-1, pretpostavimo g(x) = g(x’), to jest,

x 2 − (x’) 2 = (x − x’)(x + x’) = 0

Iz ovog sledi,

x = x’ ili x = −x’
Ako je x = 0 onda je x’= 0 u oba slučaja.
Ako je x > 0 onda je x’=x.

- Da bi pokazali da je g NA, neka je dat proizvoljan y ∈ [0, ∞). Kako je y ≥ 0, postoji x ∈ [0, ∞) takav da
  y = x2 = f (x) (ovo je fundamentalna osobina ne-negativnih realnih brojeva)

samim tim možemo zaključiti da je g NA funkcija.

PRIMER 3

Ispitajmo da li su sledeće funkcije 1-1 i NA

Ispitati da li su sledeće funkcije 1-1 i NA

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{3}{2+x^2}$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{3}{2+|x|}$
$f_3 : \mathbb{R}\backslash -2 \to \mathbb{R}, f_3(x-4) = \frac{x-7}{x-2}$
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f_4(x) = e^{2-x}$
$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(2x-1) = 4x^2 - 2x + 1$

Rešenje:
Funkcije $f_1(x), f_2(x) i f_5(x) = x^2 + x + 1$ nisu ni 1-1 ni NA.
Funkcija $f_3(x) = \frac{x-3}{x+2}, x \neq -2$, jeste 1-1, ali nije NA, a funkcija $f_4(x)$ je i 1-1 i NA.

PRIMER - ISPITIVANJE DA LI SU FUNKCIJE NA I 1-1

Odrediti koje su od sledećih funkcija f: Z x Z → Z NA funkcije

Odrediti da li su sledeće funkcije 1-1 i NA
a) $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ako je f (x) = $\sqrt{x}$
- f jeste 1-1 zato što su x_1 i x_2 pozitivni celi brojevi i $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$, kada se obe strane kvadriraju dobijamo $x_1 = x_2$
- f nije NA zato što na primer ne postoji pozitivan ceo broj koji se preslikava u $\frac{1}{2}$. Ako je $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, tada je $x = \frac{1}{4}$, što nije pozitivan ceo broj

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ ako je $f(x) = \mid x \mid +1$
- f nije 1-1 pošto se -2 i 2 preslikavaju u istu vrednost $f(2) = 3 = f(-2)$
- f jeste NA pošto ako je y bilo koji pozitivan ceo broj u kodomenu, onda je $x = y - 1$ ne-negativan ceo broj u domenu, gde je $f(x) \mid x \mid +1 = x + 1 = (y-1) + 1 = y$

PRIMER - VIDEO

Ispitivanje da li su funckije 1-1 i NA

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DEFINICIJA INVERZNE FUNKCIJE

Funkcija f : X → Y je inverzna ako je njena inverzna relacija f^{−1} funkcija iz Y u X

U opštem slučaju, inverzna relacija f−1 ne mora biti funkcija. Sledeća teorema daje jednostavan kriterijum koji određuje da li inverzna relacija jeste funkcija

Neka je f : X → Y funkcija

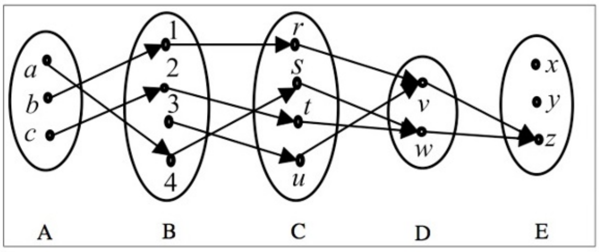
- Ako je f invertibilna, onda je njena inverzna funkcija jedinstvena
- Ako je f invertibilna, onda je njena inverzna funkcija f−1 takođe invertibilna i važi

(f −1) −1 = f .

Funkcija f : X → Y je inverzna ako i samo ako je i 1-1 i NA.

Primer

Neka su funkcije
$f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $f_3 : C \to D$ i $f_4 : D \to E$
definisane dijagramom sa slike. Odrediti koje su funkcije 1-1 korespondencije (bijekcije) i invertibilne.



Slika 4.1 Graf funkcija iz Primera [Izvor: autor]

Rešenje:
Funkcije f_1 i f_2 su 1-1, pošto ne postoji element iz B koji je slika više od jednog elementa iz A, i ne postoji element iz C koji je slika više od jednog elementa iz B.
Ni f_3 ni f_4 nisu 1-1, pošto $f_3(r) = f_3(u)$ i $f_4(v) = f_4(w)$.
Funkcije f_2 i f_3 su NA, pošto je svaki element skupa C slika nekog elementa iz B u odnosu na funkciju f_2, i svaki element skupa D je slika nekog elementa iz C u odnosu na funkciju f_3, to jest, $f_2(B) = C$ i $f_3(C) = D$.
S druge strane, f_1 nije NA, pošto $3 \in B$ nije slika nijednog elementa iz A u odnosu na funkciju f_1.
f_4 nije NA, pošto $x \in E$ nije slika nijednog elementa iz D u odnosu na funkciju f_4.
f_1 je 1-1, ali nije NA, f_3 je NA, ali nije 1-1, f_4 nije ni 1-1 ni NA.
f_2 je i 1-1 i NA. Drugim rečima, f_2 je 1-1 korespodencija između B i C. Prema tome, f_2 je invertibilna i f_2^{-1} je funkcija iz C u B

PRIMER - INVERZNA FUNKCIJA

Ispitati da li je funkcija invertibilna

Primer

Neka su $X = Y = R$, $a, b \in R$ pri čemu $a \neq 0$, i neka je funkcija f definisana sa
$f(x) = ax + b$

Pokazali smo da je f 1-1 i NA, f je tada invertibilna.

- Neka je $f : R \to R$ definisano sa
  $f(x) = x^2$

Kako f nije ni 1-1 ni NA, ona nije ni invertibilna.

- Neka je g : [0, ∞) → [0, ∞) definisano sa
  $g(x) = x^2$

Kako je f 1-1 i NA, tada je g invertibilna funkcija.

GEOMETRIJSKA KARAKTERIZACIJA 1-1 I NA FUNKCIJA

Reći da je f NA funkcija znači da za svaki y ∈ Y mora postojati bar jedan x ∈ X takav da (x, y) ∈ graf(f)

Funkcija f : X → Y je 1-1 ako ne postoje dva različita para (x1, y) i (x2, y) na grafu funkcije f. Dakle, svaka horizontalna linija može seći graf funkcije f u najviše jednoj tački. S druge strane, reći da je f NA funkcija znači da za svaki y ∈ Y mora postojati bar jedan x ∈ X takav da (x, y) ∈ graf(f). Dakle, svaka horizontalna linija mora seći graf funkcije f u bar jednoj tački. Saglasno sa tim, ako je f i 1-1 i NA, to jest, invertibilna, onda svaka horizontalna linija seče graf funkcije f u tačno jednoj tački.

Primer 5.18

Neka su funkcije f_k: **R** → **R** (k = 1, 2, 3, 4) definisane sa

$f_1(x) = x^2$,

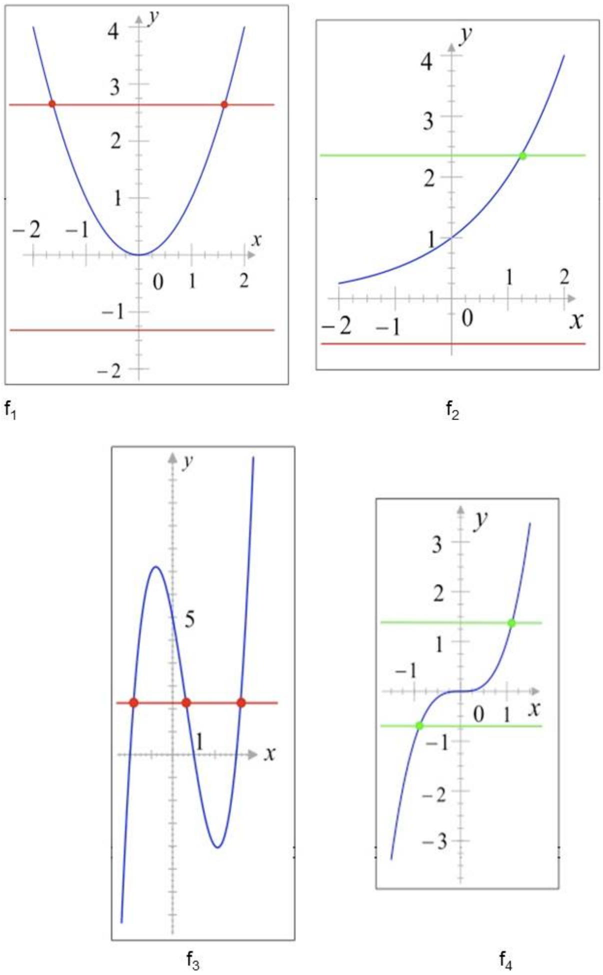
$f_2(x) = 2x$,

$f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$,

$f_4(x) = x^3$

Putem grafova odrediti da li su navedene funkcije NA i 1-1 funkcije.

Rešenje: Grafovi navedenih funkcija se nalaze na Slici 5.10.



Slika 4.2 Slike funkcija $f_1, f_2, f_3 i f_4$ iz Primera 5.18 [Izvor: autor]

Primetimo da postoje horizontalne linije koje seku graf funkcije f_1 u dve tačke, i postoje horizontalne linije koje ne seku graf funkcije f_1 . Prema tome f_1 nije ni 1–1 ni NA.

Slično,

f_2 je 1–1, ali nije NA,

f_3 je NA, ali nije 1–1, i

f_4 je i 1–1 i NA.

VIDEO - TEST HORIZOTALNOM LINIJOM

Horizontal Line Test and One to One Functions

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

KARAKTERIZACIJA INVERTIBILNIH FUNKCIJA

Funkcija $f : X \to Y$ je invertibilna ako i samo ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da $g \circ f = 1|X$ i $f \circ g = 1|Y$

Funkcija $f : X \to Y$ je invertibilna ako i samo ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da

$g \circ f = 1|X$

i

$f \circ g = 1|Y$

Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije.
(a) Ako su f i g 1-1, onda je i kompozicija funkcija 1-1 $h = g \circ f$
(b) Ako su f i g NA, onda je i kompozicija funkcija NA, $h = g \circ f$
(c) Ako su f i g invertibilne, onda je i kompozicija funkcija h invertibilna, i važi

$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Poglavlje 5

FUNKCIJE KOJE SE KORISTE U RAČUNARSTVU

VAŽNE FUNKCIJE

Na dalje ćemo dati pregled nekih važnih funkcija

U nastavku su date neke funkcije

- floor() I ceil()
- int()
- abs()
- mod() i modularna aritmetika
- eksponencijalna funkcija

5.1 FUNKCIJE floor() i ceil()

FLOOR() I CEIL()

Kada postoji jedinstveni ceo broj n takav da n ≤ x < n + 1, tada je broj n vrednost funkcije floor od x, u oznaci floor(x), a broj n + 1 je vrednost funkcije ceiling od x, u oznaci ceil(x)

Funkcije najmanji ceo broj i najveći ceo broj se često koriste u programiranju. Neka je x proizvoljan realan broj. Tada postoji jedinstveni ceo broj n takav da

$n \leq x < n + 1$

Tada je broj n vrednost funkcije floor od x, u oznaci floor(x), a broj n + 1 je vrednost funkcije ceiling od x, u oznaci ceil(x).

Neka je $x \in R$, tada za x možemo reći sledeće:

- floor(x) najveći ceo broj koji ne prevazilazi x
- ceil (x) je najmanji ceo broj koji nije manji od x
- Ako je $x \in \mathbf{Z}$, onda floor(x) =ceil(x); inače floor(x) + 1 =ceil(x)

Važno je napomenuti da iako u računarstvu koristimo floor() i ceil(), one imaju svoje matematičke reprezentacije koje se često pojavljuju u literaturi a to su floor (x) = $\lfloor x \rfloor$

ceil (x) = $\lceil x \rceil$

Primer

Za sledeće brojeve naći floor i ceil

floor(3.14) = 3, floor(√5) = 2, floor(−8.5) = −9,

floor(7) = 7, floor(−4) = −4,

ceil(3.14) = 4, ceil(√5) = 3, ceil(-8.5) = -8,

ceil(7) = 7, ceil(−4) = −4.

PRIMER 1

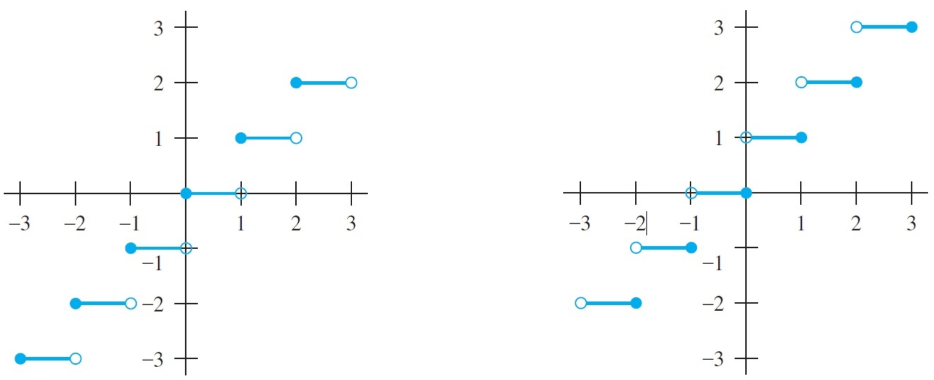
Grafički prikazi floor i ceil funkcija floor (x) i ceil (x)

Ovo su neke od vrednosti floor i ceil funkcija

$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0, \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1, \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1, \lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0, \lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lceil 3.1 \rceil = 4, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lceil 7 \rceil = 7.$

Pogledajmo grafove floor i ceil funkcija $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$. Primetimo da floor funkcija $\lfloor x \rfloor$ ima istu vrednost u intervalu [n, n+1), a onda ima skok na n+1 kada je x = n + 1. S druge strane ceil funkcija $\lceil x \rceil$ ima istu vrednost u invervalu (n, n + 1].

Na slici je levo prikazana floor, a desno ceil funkcija.



Slika 5.1.1 Levo (a) floor funkcija, Desno (b) ceil funkcija [Izvor: Rosen]

PRIMER 2

Koliko bajtova je potrebno za kodiranje 100 bita podataka?

Zadatak:

Podaci koji se čuvaju na disku računara ili se prenose preko mreže podataka obično se predstavljaju kao niz bajtova. Svaki bajt se sastoji od 8 bita. Koliko bajtova je potrebno za kodiranje 100 bita podataka?

Rešenje:

Potreban broj bajtova možemo odrediti pomoću ceil funkcije, imajući u vidu da 1 bajt ima 8 bitova.

ceil (100/ 8) = ceil (12,5) = 13

Dakle, potrebno nam je 13 bajtova za prenos ili čiuvanje ovih podataka.

PRIMER 3

Koliko ATM ćelija može da se prenese za 1 minut preko linka koji prenosi podatke brzinom od 500 kilobita u sekundi?

Zadatak

U asinhronom transfer modu (ATM) (komunikacioni protokol u računarskim mrežama) , podaci su organizovani u ćelijama od 53 bajta. Koliko ATM ćelija može da se prenese za 1 minut preko linka koji prenosi podatke brzinom od 500 kilobita u sekundi?

Rešenje

U jednoj minuti ova konekcija može da prenese

500 000 · 60 = 30 000 000 bitova

Svaki bajt sadrži 8 bita, što znači da jedna ćelija sadrži

53 · 8 = 424 bitova

Broj ćelija koji se mogu preneti u 1 minuti određujemo floor funkcijom

floor (30 000 000 / 424) = 70 754 ATM ćelija

5.2 FUNKCIJA int()

INT()

Ceo deo broja x, u oznaci INT(x), konvertuje broj x u ceo broj odsecanjem, odnosno brisanjem razlomljenog dela broja x

Neka je x proizvoljan realan broj. Ceo deo broja x, u oznaci INT(x), konvertuje broj x u ceo broj odsecanjem, odnosno brisanjem razlomljenog dela broja x. Funkcija int() je tesno povezana sa funkcijama floor i ceil. Primetimo da

$$\mathrm{INT}(x) = \begin{cases} \text{floor }(x) \text{ za } x \geq 0 \\ \text{ceil}(x) \text{ za } x < 0 \end{cases}$$

Za sledeće brojeve naći int()

INT(3.14) = 3, INT(√5) = 2,

INT(−8.5) = -8, INT(7) = 7.

5.3 FUNKCIJA abs()

ABS()

Funkcija apsolutne vrednosti meri rastojanje proizvoljnog realnog broja od nule.

Neka je x proizvoljan realan broj. Apsolutna vrednost broja x u oznaci

$$|x| ili ABS(x)$$

je definisana sa

$|x\ | = \begin{cases} x & za & x \geq 0 \\ -x & za & x < 0 \end{cases}$ Funkcija apsolutne vrednosti meri rastojanje proizvoljnog realnog broja od nule. Ona ima sledeće osobine za sve x, y ∈ $\mathbb{R}$

•|x| ≥ 0
•|x| = 0 ako i samo ako x = 0
•|xy| = |x| |y|
•|x/y|=|x|/|y| za y ≠ 0
•|x + y| ≤ |x| + |y|

Primer

U ovom primeru navodimo nekoliko primera koji pokazuju upotrebu apsolutne vrednosti, kao i njenih osobina

| − 15| = 15,
|7| = 7,
| − 3.33| = 3.33,
|4.44| = 4.44,
| − 0.075| = 0.075
|-1 x 2|=2=|-1||-2|
|4-3| ≤|4|+|-3|, odnosno 1 ≤7

Primetimo,
|x| = | − x| i |x| > 0 za sve x ≠ 0

DEFINICIJA APSOLUTNE VREDNOSTI

Apsolutna vrednost nad skupom R, u oznaci | • | je funkcija iz R u [0, ∞), to jest, | • | : R → [0, ∞).

Već smo definisali apsolutnu vrednost nad skupom $\mathbb{R}$. Sada detaljnije izučavamo apsolutnu vrednost nad skupom $\mathbb{Z}$.

Apsolutna vrednost nad skupom $\mathbb{R}$, u oznaci | • | je funkcija iz $\mathbb{R}$ u [0, ∞), to jest, | • | : $\mathbb{R}$ → [0, ∞); dakle, možemo posmatrati apsolutnu vrednost nad celim brojevima kao restrikciju ove funkcije na skup $\mathbb{Z}$.

Ipak, dajemo definiciju koja je nezavisna od ove primedbe.

Definicija
Apsolutna vrednost proizvoljnog celog broja a ∈ Z, u oznaci |a|
definisana je na sledeći način

$$|x \models \begin{cases} x \; za \; x \geq 0 \\ -x \; za \; x < 0 \end{cases}$$

Primer
Imamo

(a) | − 3| = 3, |7| = 7, | − 13| = 13;

(b) |2 − 7| = | − 5| = 5; |7 − 2| = |5| = 5;

(c) | − 3 − 8| = | − 11| = 11.

GEOMETRIJSKO TUMAČENJE |A|

Geometrijsko tumačenje |a| je da je to rastojanje između tačaka a i 0, |b − a| = |a − b| predstavlja rastojanje izmedju tačaka a i b.

Neka a, b $\in \mathbb{Z}$. Tada imamo

- |a| ≥ 0, i |a| = 0 ako i samo ako a = 0
- −|a| ≤ a ≤ |a|
- |ab| = |a| |b|
- |a $\pm$ b| ≤ |a| + |b|
- | |a| − |b| | ≤ |a $\pm$ b|

5.4 FUNKCIJA MOD I MODULARNA ARITMETIKA

FUNKCIJA MOD

k(mod M) označava ostatak pri celobrojnom deljenju k sa M

Sada definišemo funkciju modulo koja se često koristi u programiranju.

Neka je $k \neq 0$ proizvoljan ceo broj i neka je M pozitivan ceo broj. Tada

k(mod M),

što se čita "k po modulu M" ,

označava ostatak pri celobrojnom deljenju k sa M.

Preciznije, k(mod M) je ceo broj r takav da

$k = M q + r$

gde $0 \leq r < M$

Kada je k pozitivan, jednostavno delimo k sa M da bi dobili ostatak r.
Primer
Istim postupkom kao u Primeru 5.22 dobijamo i sledeća rešenja
25(mod 5) = 0,
35(mod 11) = 2,
3(mod 8) = 3
Primer
Odrediti 25(mod 7).
Rešenje:
Iz prethodne definicije možemo da zaključimo da k=25 i M=7.
q dobijamo na sledeći način
q=int(k/M),
odnosno
q=int(25/7)=3,
primenjujući prethodni iskaz k = M q + r, dobijamo
r=4
samim tim
25(mod 7) = 4

Ako je k negativan, delimo |k| sa M da bi dobili ostatak r'. Onda je k(mod M) = M − r' ako je r' ≠ 0.
Primer
−26(mod 7) = 7 − 5 = 2,
−371(mod 8) = 8 − 3,
−39(mod 3) = 0

MATEMATIČKA KONGRUENCIJA

a ≡ b(mod M) ako i samo ako M deli (b − a)

Oznaka *mod* se takođe koristi za relaciju matematičke kongruencije, koja se označava i definiše na sledeći način

a ≡ b(mod M)

ako i samo ako M deli (b – a).

M se zove moduo, a

a ≡ b(mod M)

se čita “a je kongruentno sa b po modulu M”

Sledeće osobine relacije kongruencije su dosta korisne

0 ≡ M (mod M)

5.5 EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

DEFINICIJA STEPENOVANJA

Stepenovanje je uopšteno za sve realne brojeve x, definisanjem, za svako x ∈ R

Eksponencijalna funkcija je možda najznačajnija funkcija u matematici.

Neka je a > 0. Setimo se definicija celobrojnih stepena (eksponenata). Neka je m ∈ N. Onda

$$a^0 = 1,\ a^m = a \cdot a^{m-1}\ for\, m \geq 1\, i\, a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Definicija stepenovanja je proširena da bi uključila sve racionalne brojeve m/n ∈ Q, gde je m $\in \mathbb{Z}$, a n $\in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Imamo

$2^4 = 16$,

$2^{-4} = 1/\ 2^4 = 1/16$

$125^{2/3} = 5^2 = 25$

U stvari, stepenovanje je uopšteno za sve realne brojeve x, definisanjem, za svako x $\in \mathbb{R}$,

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r$$

LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Logaritam (nekog pozitivnog broja) x za osnovu b je broj kojim treba stepenovati osnovu b da bi dobili izložilac x

Logaritmi su u vezi sa stepenima na sledeći način: Logaritam (nekog pozitivnog broja) x za osnovu b, u oznaci $\log_b$ je broj kojim treba stepenovati osnovu b da bi dobili izložilac x, to jest,

$y = \log_b x$ i $b^y = x$

su ekvivalentni iskazi.

Primer

$\log_2 8 = 3$, pošto $2^3 = 8$;

$\log_{10} 100 = 2$, pošto $10^2 = 100$;

$\log_2 64 = 6$, pošto $2^6 = 64$;

$\log_1 0.001 = -3$, pošto $10^{-3} = 0.001$

Logaritam negativnog broja i logaritam od 0 nije definisan.

Postoje tri klase logaritama koje su od specijalnog značaja:

- logaritmi za osnovu 10, se zovu dekadni logaritmi
- logaritmi za osnovu e, se zovu prirodni logaritmi
- logaritmi za osnovu 2, se zovu binarni logaritmi

U nekim knjigama se koriste oznake

ln x za $\log_e(x)$ i lg x ili Log x za $\log_2 x$

Oznaka log x obično znači $\log_{10} x$; ali se takođe koristi i za $\log_e x$ u naprednim matematičkim tekstovima, i za $\log_2 x$ u tekstovima iz kompjuterskih nauka.

Poglavlje 6

VEŽBE-FUNKCIJE

ZADATAK 1

Odrediti da li je relacija funkcija

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Neka je $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti da li je data relacija funkcija iz X u X .

(a) $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$;

(b) $g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$;

(c) $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$

REŠENjE:

(a) Nije funkcija. Dva različita uređena para imaju istu prvu koordinatu (2, 3) i (2, 1).

(b) Nije funkcija. Element 2 pripada skupu X, a ne javlja se ni u jednom uređenom paru.

(c) Jeste funkcija.

ZADATAK 2

Naći kompoziciju funkcija

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Neka su $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$ i $C = \{r, s, t\}$, i neka sufunkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$ definisane sa
$f(a) = y$,
$f(b) = x$,
$f(c) = y$;
$g(x) = s$,
$g(y) = t$,
$g(z) = r$.

Naći kompoziciju funkcija $h = g \circ f : A \to C$.

REŠENjE:

$$(h{\circ}g{\circ}f)\,(a) = h(g(f(a))) = h(g(2)) = h(x) = 4$$
$$(h{\circ}g{\circ}f)\,(b) = h(g(f(b)))) = h(g(1)) = h(y) = 6$$
$$(h{\circ}g{\circ}f)\,(c) = h(g(f(c)))) = h(g(2)) = h(x) = 4$$
$$h{\circ}g{\circ}f = \{(a,4),(b,6),(c,4)\}$$

ZADATAK 3

Odrediti da li je funkcija NA i naći kompoziciju h ◦ g ◦ f

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Neka su A = {a, b, c}, B = {1, 2, 3}, C = {w, x, y, z} i D = {4, 5, 6}, i neka su funkcije f ,g i h definisane sa

f (a) = 2, f (b) = 1, f (c) = 2;

g(1) = y, g(2) = x, g(3) = w;

h(w) = 5, h(x) = 4, h(y) = 6, h(z) = 4.

(a) Za svaku od ovih funkcija odrediti da li je NA.

(b) Naći kompoziciju funkcija h ◦ g ◦ f .

REŠENjE:

(a)

$f : A \to B$ nije NA posto 3 pripada kodomenu, a nije slika ni jednog elementa iz A.

$g : B \to C$ nije NA jer z pripada C, a nije slika ni jednog elementa iz skupa B

$h : C \to D$ jeste NA

(b)

$$(h \circ g \circ f)\,(a) - h(g(f(a))) - h(g(2)) - h(z) - 4$$
$$(h \circ g \circ f)\,(b) - h(g(f(b)))) - h(g(1)) - h(y) - 6$$
$$(h \circ g \circ f)\,(c) - h(g(f(c)))) - h(g(2)) - h(x) - 4$$
$$h \circ g \circ f - \{(a,4),(b,6),(c,4)\}$$

ZADATAK 4

Odrediti da li je f funkcija

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta
Odrediti da li je f: R → R funkcija
1. $f(x) = 1/x$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \mp\sqrt{(x^2+1)}$

REŠENjE:
$f(x)=\frac{1}{x}f(0)$ nije definisana, dakle **nije funkcija**
$f(x)=\sqrt{x}$ nije definisana za x<0, **dakle nije funkcija**
$f(x)=\pm\sqrt{x^2+1}$ nije dobro definisana jer postojedve jednakosti, dakle **nije funkcija**

ZADATAK 5

f(x)=2x+1, jeste bijekcija

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta Odrediti da li su sledeće funkcije 1-1 korespondencija (bijekcija), tako da je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

a) f(x)=2x+1

b) f(x)= x^2+1

c) f(x)= x^3

d) f(x)= (x^2+1)/ (x^2+2)

e) f(x)= x^2+x

REŠENjE:

a) f(x)=2x+1, jeste bijekcija

b) f(x)= x^2+1, nije pošto nije 1-1

c) f(x)= x^3, jeste bijekcija

d) f(x)= (x^2+1)/ (x^2+2), nije jer je f(-1)=f(1)

e) f(x)= x^2+x, nije ni 1-1 ni NA, pa nije ni bijekcija

ZADATAK 6

Da li je funkcija bijekcija?

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti da li su sledeće funkcije bijekcija
a) f: Z → Z za f(n)=5n ^{2}+2
b) f: N → R za f(n)=1/n
c) f: R → R za

REŠENjE:
(a)

f: Z → Z za f(n)=5n ^{2}+2

nije 1-1: f(1)=f(-1)
nije ni bijekcija

(b)
f: N → R za f(n)=1/n
jeste 1-1: f(x)=f(y)
$\frac{1}{w} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$
Nije NA: $f(n) = 2n = \frac{1}{2} \notin N$
Nije bijekcija

(c)
f: R → R za
Jeste 1-1:
f(x) = f(y) = 0
x = y = 0
$\frac{1}{w} = \frac{1}{y}$

x = y = 0

jeste NA
f(x) = 0
$f(y) = \frac{1}{y}, f\left(\frac{1}{y}\right) = z \in R$
Jeste BIJEKCIJA

ZADATAK 7

Upotreba funkcija floor i ceil

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Naći:

(a) floor(7.5), floor(-7.5), floor(-18);

(b) ceil(7.5), ceil(-7.5), ceil(-18).

REŠENjE:

FLOOR(7,5)=7

FLOOR(-7,5)=-8

FLOOR(-18)=-18

CEIL(7,5)=8

CEIL(-7,5)=-7

CEIL(-18)=-18

ZADATAK 8

Upotreba mod i log

Naći:

(a) 25(mod 7), 25(mod 5), -35(mod 11), -3(mod 8);

(b) $\log_2 8$, $\log_2 64$, $\log_{10} 100$, $\log_{10} 0.001$.

REŠENJE:

(a)

25=3∗7+4 → 25(mod 7)=4

25=5∗5+0 → 25(mod 5)=0

35=3∗11+2 → −35(mod 11)=11−2=9

3=0∗8+3 → −3(mod 8)=8−3=5

(b)

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$

$\log_2 64 = \log\_2\ 2^6 = 6 \log_2 2 = 6$

$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2$

$\log_{10} 0{,}001 = \log_{10} 10^{(-3)} = -3 \log_{10} 10 = -3$

ZADATAK 9

Dokazati da je funkcija f(x)=3x-4 bijekcija.

Predviđeno vreme trajanja: 55 minuta

Dokazati da je *funkcija f(x)=3x-4* bijekcija.

Rešenje :

"*1-1*" $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow 3x_1-4=3x_2-4 \Longrightarrow 3x_1=3x_2 \Longrightarrow x_1=x_2$

"*na*" $(\forall y \in \mathbb{R})\ (\exists x \in \mathbb{R})\ f(x)=y$

$y=3x-4 \Longrightarrow 3x=y+4 \Longrightarrow x=(y+4)/3$

Jeste bijekcija.

Poglavlje 7

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Odrediti da li je f: Z $\rightarrow R$ funkcija

a) f(x)=1/(x ^{2}-4)

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Neka su funkcije f i g definisane sa

f(x)=2x+1

g(x)=x ^{2}+2

Naći kompoziju funkcije

a) g $\circ$ f

Zadatak 3 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Naći:

(a) 25(mod 7), 25(mod 5), -35(mod 11), -3(mod 8);

(b) log2 8, log2 64, log10 100, log10 0.001.

ZAKLJUČAK

U ovoj lekciji su prikazana osnovna svojstva funkcija. Fokus predavanja je bio na surjekciji, bijekciji i injekciji. Objašnjen je pojam kompozicije funkcija, kao i pojam inverznosti. Cilj predavanja je da se razumeju karakteristike i da se omogući korišcenje karakteristicnih funkcija.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.