UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Uslovna verovatnoća

Lekcija 02

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 02

USLOVNA VEROVATNOĆA

Uvod

UVOD

Analiza o tome kako informacija da se neki slučajan događaj desio utiče na verovatnoću dodeljenu nekom drugom slučajnom događaju, dovodi nas do koncepta uslovne verovatnoće

Verovatnoće pridružene različitim događajima zavise od toga šta je poznato o eksperimentalnoj situaciji u trenutku dodeljivanja verovatnoća. Posle početnog dodeljivanja verovatnoća može se desiti da postanu dostupne neke nove informacije o eksperimentu ili neke informacije relevantne za ishod eksperimenta. Te nove informacije nam mogu ukazati na to da treba promeniti neke od početnih dodeljivanja vrednosti verovatnoća.

Za konkretan slučajan događaj B, uveli smo oznaku $P(B)$ da bi označili verovatnoću dodeljenu slučajnom događaju B, tj. u početku nam $P(B)$ označava originalnu ili bezuslovnu verovatnoću događaja B.

Analiza o tome kako informacija da se slučajan događaj A desio utiče na verovatnoću dodeljenu slučajnom događaju B dovodi nas do koncepta uslovne verovatnoće. Ovo nam omogućava da preispitamo verovatnoću $P(B)$ originalno dodeljenu slučajnom događaju B kada smo naknadno obavešteni da se neki drugi slučajan događaj A dogodio. Tada dodeljujemo novu verovatnoću $P(B \mid A)$ događaju B.

Ako informacija o tome da se slučajan događaj A desio uzrokuje promenu verovantnoće da se desio slučajan događaj B, onda je prirodno misliti da je slučajan događaj B zavisan od slučajnog događaja A; inače su ova dva slučajna događaja nezavisna.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Pojam uslovne verovatnoće

DEFINICIJA USLOVNE VEROVATNOĆE

Uslovna verovatnoća se predstavlja kao odnos dve bezuslovne verovatnoće.

Kao što smo u uvodu već rekli, ako nam je poznato ili ako pretpostavljamo da se realizovao događaj A, onda to može imati uticaja na vrednost verovatnoće nekog drugog događaja B. Na taj način uvodimo pojam uslovne verovatnoće, u oznaci $P(B|A)$ i to je verovatnoća događaja B pod uslovima koji izvesno ili sigurno dovode do realizacije događaja A. Ako se podsetimo intuitivne predstave o verovatnoći kao o broju oko koga se grupišu relativne učestalosti i ako označimo sa n_A, n_B i n_{AB}, broj realizacija događaja A, B i AB tim redom u n opita, imamo da je relativna učestanost događaja B u opitima koji izvesno dovode do realizacije događaja A jednaka $\frac{n_{AB}}{n_A}$. Tada, možemo pisati da je $P(B|A) = \frac{n_{AB}}{n_A}$, gde je $P(B|A)$ oznaka za verovatnoću realizacije događaja B, pod uslovom da se realizovao događaj A ili kraće uslovna verovatnoća događaja B u odnosu na događaj A. Tada je

$$P(B|A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

pri čemu mora biti događaj A moguć, tj. mora da važi $P(A) > 0$. (Pod slučajnim događajem AB u prethodnoj formuli podrazumevamo slučajan događaj $A \cap B$.)

U ovom slučaju važi da je prostor svih ishoda $\Omega = A$. Slučajan događaj B se desio ako i samo ako se javio neki slučajni ishod iz preseka ova dva slučajna događaja.

Na sličan način možemo definisati uslovnu verovatnoću događaja A u odnosu na događaj B na sledeći način

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \;\; P(B) > 0.$$

Napomena. Svaka verovatnoća je na neki način uslovna verovatnoća. Ako je Ω skup svih elementarnih ishoda, tada se verovatnoća proizvoljnog slučajnog događaja $D \subset \Omega$ izračunava pod uslovom da je Ω siguran događaj. Na primer, prilikom bacanja novčića, verovatnoća da će pasti pismo nalazimo pod uslovom da će novčić pasti na jednu od svojih strana. Na osnovu toga trebalo bi pisati $P(D|\Omega)$ umesto $P(D)$. Kako je $D \cap \Omega = D$ i $P(\Omega) = 1$, iz formule $P(D|\Omega) = \dfrac{P(D\Omega)}{P(\Omega)}$, sledi da je $P(D|\Omega) = P(D)$, pa je svejedno da li pišemo $P(D|\Omega)$ ili $P(D)$.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Pojam uslovne verovatnoće.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER

Izračunavanje uslovne verovatnoće.

Iz kutije u kojoj je 8 belih i 12 crnih kuglica odjednom je izvučeno 3 kuglica. Ako su sve tri izvučene kuglice iste boje, koja je verovatnoća da su sve tri crne?

Rešenje. Definišimo sledeće događaje

- događaj A - izvučeno je 3 kuglice crne boje,
- događaj B - izvučene su tri kuglice iste boje tj. sve tri su crne ili su sve tri bele boje.

Dakle, treba da odredimo

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Imamo da događaj AB predstavlja događaj da su sve tri kuglice crne boje, pa je

$$P(AB) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{20}{3}}.$$

S druge strane, verovatnoća događaja B iznosi

$$P(B) = \frac{\binom{12}{3} + \binom{8}{3}}{\binom{20}{3}}.$$

Sada imamo da je

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{12}{3}}{\binom{20}{3}}}{\frac{\binom{12}{3}+\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}}} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{12}{3} + \binom{8}{3}}.$$

DEFINICIJA PRAVILA MNOŽENJA. PRIMER

Pravilo množenja se izvodi iz formule za uslovnu verovatnoću.

Na osnovu prethodno datih definicija za uslovnu verovatnoću možemo dati pravilo množenja. Ono glasi

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Ovo pravilo je značajno jer je često potrebno naći verovatnoću $P(AB)$ kada su obe vrednosti verovatnoća $P(B|A)$ i $P(A)$ poznate. Slično važi i kada su poznate veroavtnoće $P(A|B)$ i $P(B)$.

Pravilo množenja je još korisnije kada se eksperiment sastoji iz nekoliko koraka. Na primer, ovo pravilo u slučaju da imamo tri slučajna događaja A_1, A_2 i A_3 pravilo množenja glasi

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2).$$

To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Student je izašao na ispit znajući 20 od 25 pitanja. Ispitivač postavlja 3 pitanja. Samo tačni odgovori na sva tri pitanja omogućavaju studentu da položi ispit. Koja je verovatnoća da student položi ispit?

Rešenje. Označimo sledeće događaje:

- A_1 student zna odgovor na prvo pitanje,
- A_2 student zna odgovor na drugo pitanje,
- A_3 student zna odgovor na treće pitanje.

Ovde se očigledno radi o uslovnim događajima, jer student prvo mora tačno da odgovori na prvo pitanje, Odgovaranje na drugo pitanje je uslovljeno tim da je tačno odgovorio na prvo pitanje.

Konačno, da bi odgovarao na treće pitanje mora tačno odgovoriti na prva dva.

Stoga, uvedimo sledeći događaj $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ili kraće $A_1A_2A_3$ student je položio ispit.

Sada imamo da

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2).$$

Važi da je $P(A_1) = \frac{20}{25}$. Kada student odgovara na drugo pitanje, tada se ukupan broj pitanja smanjio za jedan, a takođe i broj pitanja na koje on zna tačan odgovor, pa $P(A_2|A_1) = \frac{19}{24}$. Slična logika važi i za treće pitanje i imamo da je $P(A_3|A_1A_2) = \frac{18}{23}$.

Stoga, verovatnoća da student položi ispit iznosi

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23}.$$

U opštem slučaju, pravilo množenja se lako može uopštiti na proizvod od konačno mnogo događaja

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}),$$

za $n = 2, 3, 4, \ldots$

Poglavlje 2

Nezavisnost slučajnih događaja

DEFINICIJA NEZAVISNOSTI DVA SLUČAJNA DOGAĐAJA. PRIMER

Provera (ne)zavisnosti dva slučajna događaja proizilazi iz uslovne verovatnoće i pravila množenja.

Intuitivnu predstavu o nezavisnosti događaja B od događaja A možemo matematički iskazati uslovom $P(B|A) = P(B)$. Slično, nezavisnost događaja A od događaja B možemo matematički iskazati uslovom $P(A|B) = P(B)$. Koristeći se već pomenutim pravilom množenja

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B),$$

zaključujemo da su događaji A i B nezavisno (stohastički ili statistički) ako važi

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Napomenimo da je na ovaj način definisana nezavisnost dva događaja što ilustruje sledeći primer.

Primer. Iz špila od 52 karte slučajno se izvlači jedna karta. Nekaje A događaj izvučena karta je “pik”, a događaj B izvučena karta je “dama”. Da li su događaji A i B nezavisni?

Rešenje. Kako u špilu ima 13 karata koje su znaka “pik”, a 4 karte koje su “dama”, tada važi

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13},$$

pa imamo da je

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{52}.$$

S druge strane, imamo da je događaj AB izvučena karta je dama pik iimamo da je

$$P(AB) = \frac{1}{52}.$$

Dakle, ovi događaji su uzajamno nezavisni.

NapomenaU praktičnim primenama retko se proverava nezavisnost događaja na osnovu definicije, već nezavisnost neposredno usvajamo na osnovu samih uslova eksperimenta u kome te događaje posmatramo.

NEZAVISNOST U UKUPNOSTI

Nezavisnost u parovima ne povlači nezavisnost u ukupnosti.

Događaji $A_1,\ A_2,\ldots$ su nezavisni u ukupnosti, ako za svako $n\in\mathbb{N}$, i svaki konačan niz indeksa $1\leq k_1<k_2<\ldots<k_n$važi

$$P(A_{k_1}\cdot A_{k_2}\cdot\ldots\cdot A_{k_n})=P(A_{k_1})\cdot P(A_{k_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{k_n}).$$

Napomenimo da nezavisnost u parovima

$$P(A_{k_i}\cdot A_{k_j})=P(A_{k_i})\cdot P(A_{k_j}),\qquad i\neq j,\qquad i,j=1,2,\ldots$$

ne povlači nezavisnost u ukupnosti.

Primer. Strane tetraedar su obojene na sledeći način: jedna je bele boje, jedna je crvene boje, jedna je plave boje, dok je četvrta strana trobojna - bela, crvena i plava. Piramida se baca i gleda se boja osnove na koju je pala. Uočimo sledeće događaje
A - na osnovi koja je pala ima bele boje,
B - na osnovi koja je pala ima crvene boje i
C - na osnovi ima crvene boje.
Ispitati nezavisnost događaja A,B i C,

Rešenje. Prema načinu na koji je piramida obojena zaključujemo da važi

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \ P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},\ \ P(ABC)=\frac{1}{4}.$$

Događaji A,B i C su nezavisni u parovima, ali je $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$, što znači da događaji A,B i C nisu nezavisni u ukupnosti.

Poglavlje 3

Formula totalne verovatnoće

ISKAZ STAVA I DOKAZ

Formula totalne verovatnoće se bazira na uslovnoj verovatnoći i dokazuje primenom pravila množenja.

Stav. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uzajamno disjunktni događaji i važi $P(A_i) > 0$, za $i = 1, 2, \ldots, n$ i ako je $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, tada važi:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i),$$

za svako $B \in \mathcal{F}$.

Prethodna formula se naziva Formula totalne verovatnoće.

Dokaz. Kako je događaj $B \subseteq \Omega$ i $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (videti sliku), imamo da je

$$B = \sum_{i=1}^{n} B \cap A_i,$$

odakle na osnovu osobine aditivnosti verovatnoće važi da je $P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$. Tada, imamo da je

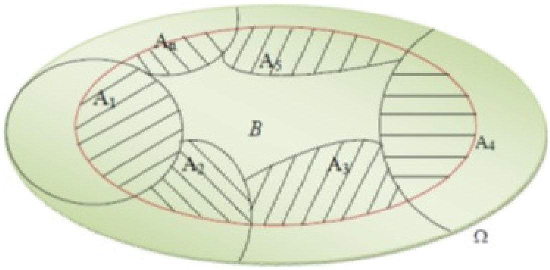
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n).$$

Dalje, iz pravila množenja, imamo da je

$$P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B|A_i), \text{ za svako } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Konačno, imamo da je

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i), \forall B \in \mathcal{F}.$$



Slika 3.1 Grafički prikaz formule totalne verovatnoće [Izvor: Autor].

PRIMER – FORMULA TOTALNE VEROVATNOĆE

Primena formule totalne verovatnoće.

Primer 6. U jednoj fabrici 25% artikala se proizvodi na mašini A, 35% na mašini B i 40% na mašini C. Mašine A, B i C prave 5%, 4% i 2% škarta tim redom. Svi proizvodi se stavljaju u isto skladište. Kolika je verovatnoća da slučajno izabrani artikal iz skladišta bude neispravan? Kolika je verovatnoća da je taj neispravni artikal proizveden na mašina A?

Rešenje. Uvedimo sledeće hipoteze:

H_1 – izabran je proizvod koji je proizveden na mašini A,

H_2 – izabran je proizvod koji je proizveden na mašini B,

H_3 – izabran je proizvod koji je proizveden na mašini C

i događaj

D – izabrani proizvod je neispravan. Po uslovima zadatka je:

$P(H_1) = 0,25,\qquad P(H_2) = 0,35,\qquad P(H_3) = 0,40.$

Takođe, po uslovima zadatka je

$P(D \mid H_1) = 0,05,\qquad P(D \mid H_2) = 0,04,\qquad P(D \mid H_3) = 0,02.$

Po formuli totalne verovatnoće imamo da je:

$$P(D) = P(H_1) \cdot P(D \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(D \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(D \mid H_3) = = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Formula totalne verovatnoće - objašnjenje

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Aposteriorna verovatnoća

BAJESOVA FORMULA

Bajesova formula se još naziva formula verovatnoće hipoteza, odnosno formula aposteriorne verovatnoće.

Pod pretpostavkama prethodnog stava važi:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bajesova formula se još naziva formula verovatnoće hipoteza, odnosno formula aposteriorne verovatnoće i ona se može interpretirati nasledeći način: događaj B može da se realizuje pod različitim uzrocima ili hipotezama $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Događaj B se realizovao. Kolika je verovatnoća da je tome uzorak baš A_i, za $i = 1, 2, \ldots, n$.

Napomena. Vrlo često se za apriorne verovatnoće uzimaju relativne frekvencije u vezi sa događajima koji se posmatraju u zamišljenom beskonačnom ponavljanju eksperimenta. Bajesova formula daje poboljšanje takvih verovatnoća, što se postiže ponavljanjem eksperimenta. To postižemo tako što dobijene apsteriorne verovatnoće iz prethodno ponovljenog eksperimenta, proglasimo za apriorne verovatnoće u sledećem ponavljanju eksperimenta.

PRIMER

Problem koji se rešava primenom Bajesove formule.

Primer. Jedan mašinski element se proizvodi u tri serije po 20 komada. U prvoj seriji je 15, u drugoj 18 i u trećoj 16 ispravnih elemenata. Na slučajan način se bira serija i iz nje se uzima jedan element. Kolika je verovatnoća da je slučajno izabrani element ispravan? Kolika je verovatnoća da je taj ispravan artikal napravljen u prvoj seriji?

Rešenje. Uvedimo sledeće hipoteze:

H_1 – izabran je proizvod koji je proizveden u prvoj seriji,

H_2 – izabran je proizvod koji je proizveden u drugoj seriji,

H_3 – izabran je proizvod koji je proizveden u trećoj seriji

i događaj

D – izabrani proizvod je ispravan.

Po uslovu zadatka imamo da je:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Takođe, imamo da je

$$P(D|H_1) = \frac{15}{20}, P(D|H_2) = \frac{18}{20}, P(D|H_3) = \frac{16}{20}.$$

Sada, po formuli totalne verovatnoće imamo da je

$$\begin{aligned} P(D) &= P(H_1) \cdot P(D|H_1) + P(H_2) \cdot P(D|H_2) + P(H_3) \cdot P(D|H_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{20} + \frac{1}{3}\, cdot \frac{16}{20} = \frac{49}{60}. \end{aligned}$$

Verovatnoća da je mašinski element proizveden u prvoj seriji naosnovu Bajesove formule glasi:

$$P(H_1|D) = P(H_1) \cdot P(D|H_1) P(D) = \frac{\frac{15}{60}}{\frac{49}{60}} = \frac{15}{49}.$$

Slično se može odrediti da je

$$P(H_2|D) = P(H_2) \cdot P(D|H_2) = \frac{\frac{18}{60}}{\frac{49}{60}} = \frac{18}{49} \quad \text{i} \quad P(H_3|D) = P(H_3) \cdot P(D|H_3) = \frac{\frac{16}{60}}{\frac{49}{60}} = \frac{16}{49}.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Bajesova formula.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Primer Bajesova formula.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Uslovna nezavisnost

DEFINICIJA

Pojam nezavisnosti događaja se može proširiti do pojma uslovne nezavisnosti.

Dva slučajna događaja A i B su nezavisna ako važi da je $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Ovaj pojam možemo proširiti do pojma uslovna nezavisnost.

Definicija. Dva događaja A i B su uslovno nezavisna u odnosu na događaj C, gde je $P(C) > 0$, ako važi da je

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C). \qquad (*)$$

Videli smo da se uslovna verovatnoća da se realizovao događaj A, ako se desio događaj B određuje po formuli

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

gde je događaj B moguć događaj, tj. važi $P(B) > 0$. Ovako uvedena uslovljenost realizacije jednog događaja drugim, može se proširiti. Zato, izvršimo dodatno uslovljavanje nekim događajem C, ovako uvedene uslovne verovatnoće za dva događaja. Tada imamo da je

$$P(A \mid B, C) = \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)},$$

gde je $P(B \mid C) > 0$ i $P(C) > 0$. Ako su događaji A i B uslovno nezavisni u odnosu na događaj C, tada imamo da je

$$P(A \mid B, C) = \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)} = \frac{P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)}{P(B \mid C)} = P(A \mid C).$$

Dakle, ako su dva događaja A i B uslovno nezavisni u odnosu na događaj C, tada je

$$P(A \mid B, C) = P(A \mid C). \qquad (**)$$

Formule (*) i (**) su ekvivalentne, tako da se formulom (**), takođe, može proveravati uslovna nezavisnost događaja A i B u odnosu na događaj C.

Napomena. Uslovna nezavisnost dva događaja A i B u odnosu na neki događaj C, ne povlači (bezuslovnu) nezavisnost događaja A i B. Takođe, ako su dva događaja nezavisna, ona ne moraju biti uslovno nezavisna u odnosu na neki treći događaj. Dakle, nezavisnost i uslovna nezavisnost su dva odvojena koncepta koji ne povlače jedan drugi.

PRIMER 1

Primer u kome je pokazano da iz uslovne nezavisnosti ne sledi nezavisnosti ta dva događaja.

U kutiji se nalazi dva novčića od kojih je jedan pravilan, a drugi nepravilan jer ima dve glave. Iz kutije se na slučajan način izvlači jedan novčić i baca dva puta. Definišimo događaje:
A - pri prvom bacanju je pala glava,
B - pri drugom bacanju je pala glava,
C - iz kutije je izvučen pravilan novčić.

Da li su događaji A i B uslovno nezavisni u odnosu na događaj C ? Da li su događaji A i B nezavisni?

Rešenje. Kako bismo dali odgovore na tražena pitanja, moramo odrediti $P(A \mid C)$, $P(B \mid C)$, $P(A \cap B \mid C)$, $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \cap B)$. Važi da je

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Slično, imamo da je $P(B|C) = \frac{1}{2}$. Takođe, imamo da je

$$P(A \cap B|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Tada je

$$P(A \cap B|C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

Događaji A i B su uslovno nezavisni u odnosu na događaj C.
Realizacije događaja A, B i $A \cap B$ zavisi od toga da li je izabran pravilan ili nepravilan novčić. Stoga, za određivanje verovatnoća $P(A)$, $P(B)$, kao i $P(A \cap B)$ moramo koristiti formulu totalne verovatnoće. Imamo da je

$$P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(\overline{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Na sličan način možemo pokazati da je $P(B) = \frac{3}{4}$. Konačno, koristeći da su događaji A i B uslovno nezavisni u odnosu događaj C, imamo da je

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\overline{C})P(\overline{C}) = \\ &= P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(B|\overline{C})P(\overline{C}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Tada, imamo da je

$$P(A \cap B) = \frac{5}{8} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = P(A) \cdot P(B).$$

Dakle, događaji A i B nisu nezavisni.

Do dobijenih rezultata smo mogli doći i intuitivno, Naime, ako se desio događaj A, to bi nas navelo da verujemo da je izabran nepravilan novčić. Ovo direktno uslovljava da će se i događaj B realizovati, pa ovi događaji ne mogu biti nezavisni. S druge strane, ako se desio događaj C, tada su očigledno događaji A i B nezavisni, tj. oni su uslovno nezavisni u odnosi na njega.

VIDEO KLIP

Youtube snimak: Koncept uslovne nezavisnosti dva događaja u odnosu na treći događaj.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Bernulijeva šema

POJAM PONAVLJANJA OPITA

Pod ponavljanjem opita n puta podrazumevamo niz od n eksperimenta koji se izvode jedan za drugim pod istim uslovima i svaki od njih ima isti prostor ishoda Ω.

Posmatrajmo kutiju sa pet numiresanih kuglica. Izvlačimo 3 puta po jednu kuglicu, bez vraćanja. Ako pod eksperimentom podrazumevamo izvlačenje kuglice, imamo ponavljanje eksperimenta 3 puta. Međutim, rezultat prethodnog eksperimenta utiče na rezultat sledećeg, tako da stvarnog ponavljanja i nema, već imamo realizaciju tri različita eksperimenta. Ukoliko bismo izvlačenje vršili sa vraćanjem, očigledno da se uslovi eksperimenta, kao i skup ishoda ne menjaju. Tada, zapravo, imamo ponavljanje istog eksperimenta tri puta.

Neka je dat opit sa skupom ishoda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$. Pod ponavljanjem opita n puta podrazumevamo niz od n eksperimenta koji se izvode jedan za drugim pod istim uslovima i svaki od njih ima isti prostor ishoda Ω. Pri tome, realizacija nekog slučajnog događaja u bilo kom od eksperimenata ne zavisi od njegove realizacije u ostalim eksperimentima. Drugim rečima, radi se o nezavisnim eksperimentima (kao kod prethodno pomenutog izvlačenja sa vraćanjem).

Niz od n ponovljenih eksperimenata možemo shvatiti kao jedan složeni eksperiment. Principijalne razlike nema između izvođenja za redom jednog za drugim nekog eksperimenta ili izvođenja više takvih eksperimenata odjednom. Na primer, nema razlike u tome ako novčić bacamo dva puta, od toga da istovremeno bacamo 2 novčića i posmatramo koja je njegova strana pala.

SKUP ELEMENTARNIH ISHODA ZA PONOVLJENE EKSPERIMENTE

Bilo koji slučajni događaj, koji je u vezi sa samo jednim određenim eksperimentom (iz niza ponovljenih ekperimenata) se može predstaviti kao slučajan događaj složenog eksperimenta.

Bilo koji slučajni događaj, koji je u vezi sa samo jednim određenim eksperimentom (iz niza ponovljenih ekperimenata) se može predstaviti kao slučajan događaj složenog eksperimenta.

Na primer, neka eksperiment predstavlja bacanje novčića sa skupom ishoda $\Omega = P, G$. Eksperiment se ponavlja tri puta. Ako sa Ω_3 označimo skup tih ishoda, imaćemo

$$\Omega_3 = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG\}.$$

Razmotrimo sada događaje koji su u vezi sa ovim eksperimentom. Nekasu A i B dva slučajna događaja složenog eksperimenta vezana samo za dva različita pojedinačna eksperimenta. Stoga, uočimo slučajni događaj A da u drugom bacanju novčića padne pismo, tj. $A = \{PPP, PPG, GPP, GPG\}$,kao i slučajni događaj B da utrećem bacanju novčića podne glava, tj. $B = \{PPG, PGG, GPG, GGG\}$i oni predstavljaju slučajne događaje za ceo složeni eksperiment bacanja tri nočića.

Dalje, prirodno je da verovatnoća definisana na slučajnim događajima složenog eksperimenta, za pomenute slučajne događaje A i B zadovoljava svojstvo

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

što znači da su A i B nezavisni slučajni događaji. To ćemo i pokazati u sledećem primeru.

PRIMER 1

Određivanje nezavisnost događaja – ponovljeni opiti.

Primer 8. Kod već pomenutog bacanja novčića 3 puta verovatnoća događaja A u složenom eksperimentu je ista kao i u drugom eksperimentu, tj. $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2}$, (verovatnoća da padne pismo). Takođe, verovatnoća događaja B u složenom eksperimentu je ista kao i u trećem eksperimentu, tj. $\mathrm{P(B)} = \frac{1}{2}$ (verovatnoća da padne glava) Po pretpostavci je

$$\mathrm{P(AB) = P(A) \cdot P(B)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Isti rezultat ćemo dobiti ako uočimo da je u

$$\Omega_3 = \{\mathrm{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG}\}$$

svaki elementarni ishod jednakoverovatan i iznosi $\frac{1}{8}$. Kako su slučajni događaji Ai B sastavljen od sledećih elementarnih ishoda:

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{PPP, PPG, GPP, GPG}\}, \qquad \mathrm{B} = \{\mathrm{PPG, PGG, GPG, GGG}\},$$

Tada je $\mathrm{AB} = \{\mathrm{PPG, GPG}\}$. Kako je $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2} = \mathrm{P(B)}$, $\mathrm{P(AB)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \mathrm{P(A) \cdot P(B)}$. Odavde imamo da su slučajni događaji A i B nezavisni.

PONAVLJANJE EKSPERIMENATA SA DVA ISHODA

Koristeći pretpostavku o nezavisnosti ispitivanja u pojedinačnim eksperimentima možemo izračunati verovatnoće ishoda.

Razmotrimo, sada, ponavljanje nekog eksperimenta koji imam dva ishoda, npr. bacanje novčića (palo je *pismo* ili *glava*), gađanje mete ili bacanje lopte u koš (pogodak ili promašaj), reakcija na neki hemijski test (npr. test na alergiju na polen je pozitivan ili negativan). Ako se ovakav eksperiment ponavlja n puta, skup svih ishoda imaće 2^n elemenata.

Ako pri ponavljanju ovakav eksperiment n puta uočimo događaj D koji se realizuje sa verovatnoćom $P(D) = p$. Tada je $P\left(\overline{D}\right) = q$, gde je $\overline{D}$ suprotan događaj, događaju D i važi da je $p + q = 1$. Ako je $n = 3$, tada je skup svih ishoda jednak $2^3 = 8$ i to su:

$$\Omega_3 = \left\{DDD,\ \overline{D}\,DD,\ D\,\overline{D}\,D,\ DD\,\overline{D},\ \overline{D}\,\overline{D}\,D,\ \overline{D}\,D\,\overline{D},\ D\,\overline{D}\,\overline{D},\ \overline{D}\,\overline{D}\,\overline{D}\right\}.$$

Koristeći pretpostavku o nezavisnosti ispitivanja u pojedinačnim eksperimentima možemo izračunati verovatnoće ishoda. Na primer,

$$P\left(D\,\overline{D}\,D\right) = p \cdot q \cdot p = p^2 q.$$

Opštije gledano, verovatnoća svakog ishoda u kojem događaj D realizovao k puta iznosi $p^k q^{n-k}$. Ako sa $D_{n,k}$ označimo slučajan događaj koji se u n ponovljenih eksperimenata, realizovao k puta (takvih ishoda ima $\binom{n}{k}$), tada je:

$$P\left(D_{n,k}\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ \dots, n.$$

Uočimo da je

$$P\left(D_{n,0}\right) + P\left(D_{n,1}\right) + \ \dots \ + P\left(D_{n,n}\right) = 1,$$

jer je

$$\binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ \dots \ + \binom{n}{n} p^n = 1.$$

Na osnovu binomne formule imamo da je:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

PRIMER 2

Određivanje verovatnoće slučajnog događaja koji se posmatra u opitu koji se ponavlja

Primer 9. Ako je verovatnoća da potrošnja vode u toku 24*h* ne prelazi postavljenu normu jednaka $\frac{1}{3}$, odredimo verovatnoću da u narednih 7 dana potrošnja vode u toku 4 dana ne prelazi tu normu.

Rešenje. U ovom slučaju je $n = 7, k = 4$ i $P(D) = p = \frac{1}{3}$, gde je D slučajan događaj koji se realizuje kada u toku dana potrošnja vode ne prelazi postavljenu normu, dobijamo da je:

$$P\left(D_{7,\,4}\right) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0,\,1.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Pokazna vežba

1. ZADATAK (5 MINUTA)

Primena formule za uslovnu verovatnoću za izračunavanje tražene verovatnoće.

Eksperiment se sastoji u bacanju dve kockice za jamb. Ako je pao zbir 10, kolika je verovatnoća da je na jednoj od kockica pao broj 6?

$\mathbf{Rešenje.}$Neka je događaj A : „ Na jednoj od kockica je pao broj 6“ , a događaj B : „ Zbir brojeva na obe kockice je 10“. Treba odrediti $P(A|B),$ odnosno verovatnoću da je pao je broj 6 pod uslovom da je pao zbir 10.

Na prethodnim vežbama smo videli da postoji 36 mogućih elementarnih ishoda kada se bacaju sve kockice, koji mogu da se predstave uređenim parovima. Uređenih parova kod kojih je zbir 10 ima četiri i to su $B = \{(4,6)(5,5)(6,4)(5,5)\},$ odnosno $n(B) = 4.$ Verovatnoća događaja B je $P(B) = \frac{4}{36}$. Uređeni parovi kod kojih je makar jedna šestica i zbir 10 su $A = \{(4,6)(6,4)\},$ pa je $n(A) = 2,$ a verovatnoća je $P(AB) = \frac{2}{36}$. Tada je

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}} = 0,5.$$

2. ZADATAK (5 MINUTA)

Primena pravilo množenja za tri događaja za izračunavanje tražene verovatnoće.

Od svih kupaca digitalne kamere njih 60% kupuje i dodatnu memorijsku karticu, njih 40% kupuje i dodatnu bateriju, a njih 30% kupuje memorijsku karticu i bateriju. Ako je kupac kupio dodatnu bateriju, kolika je verovatnoća da je kupio i dodatnu memorijsku karticu.

$\mathbf{Rešenje.}$ Ako proizvoljno izaberemo kupca i označimo slučajne događaje:

A – kupuje memorijsku karticu i

B – kupuje bateriju,

tada imamo da je $P(A) = 0,6$ i $P(B) = 0,4.$ Verovatnoća da kupac kupi memorijsku karticu i bateriju predstavlja slučajni događaj AB i imamo da je $P(AB) = 0,3$.

Ako je taj kupac kupio dodatnu bateriju, verovatnoća da je kupio i dodatnu memorijsku karticu iznosi

$$P(A|B) = P(AB) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12.$$

Ovo znači da od svih kupaca koji kupuju dodatnu bateriju, njih 12% kupuje i dodatnu memorijsku karticu.

3. ZADATAK (5 MINUTA)

Provera (ne)zavisnost dva događaja, kao i primena uslovne verovatnoće za izračunavanje tražene verovatnoće.

Prema evidenciji o potražnji rezervnih delova za jedan model *laptop*-a ustanovljeno je da se deo D_1 zamenjuje u 36% slučajeva, deo D_2 u 42% slučajeva, oba dela u 30% slučajeva.

Može li se na osnovu ovih podataka izvesti zaključak o zavisnosti zamene delova D_1 i D_2 kod jednom laptop-a?

Naći verovatnoću da se prilikom servisa laptop-a bude zamenjen deo D_2, ako je zamenjen deo D_1.

Rešenje. Označimo sa A događaj da je izvršena zamena dela D_1, a sa B događaj da je izvršena zamena dela D_2. Tada imamo da je:

$P(A) = 0,36, \qquad P(B) = 0,42, \qquad P(AB) = 0,30.$

Kako je

$P(A) \cdot P(B) = 0,1512 \neq 0,30 = P(AB),$

dobijamo da zamena jednog dela, uslovljava zamenu drugog dela.

Ovde se radi o uslovnoj verovatnoći:

$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0,8333 \ldots$

VIDEO KLIP

Snimak sa Yuotube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

4. ZADATAK (10 MINUTA)

Problem u kome treba odrediti nezavisnost dva događaja ako se eksperiment ponavlja, odnosno ne ponavlja.

Primer 5. Analizirajmo sledeći eksperiment: jedna kutija sadrži tri bele, dve crne i četiri crvene kuglice, a eksperiment se sastoji u tome da izvlačimo dve kuglice i beleži se boja izvučene kuglice. Kolika je verovatnoća da obe izvučene kuglice budu bele boje, ako se:

1. Prva izvučena kuglica vraća u kutiju;
2. Prva izvučena kuglica se ne vraća u kutiju.

Rešenje. Definišimo sledeće slučajne događaje: D_1 – prva izvučena kuglica je bela, D_2 – druga izvučena kuglica je bela.

1. Prva izvučena kuglica se vraća u kutiju, te ishod prvog izvlačenja ne utiče na realizaciju drugog izvlačenja tj. realizacija događaja D_1 ne utiče na realizaciju događaja D_2. Odavde imamo da je

$$P(D_1D_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{9}.$$

Kako je $P(D_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ i $P(D_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ imamo da su ovi slučajni događaji nezavisni jer je

$$P(D_1D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2).$$

2. U ovom slučaju je:

$$P(D_1D_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{12}.$$

U ovom slučaju moramo definisati $(D_2 \mid D_1)$, jer je slučajan događaj D_2 uslovljen slučajnim događajem D_1 i očigledno je da su događaji D_1 i D_2 zavisni slučajni događaji. Tada je:

$$P(D_2 \mid D_1) = \frac{P(D_1D_2)}{P(D_1)} = \frac{1}{4}.$$

5. ZADATAK – I DEO (15 MINUTA)

Postavka problema i definisanje potrebnih događaja, kao složenog događaja čija se verovatnoća izračunava.

Tri strelca nezavisno jedan od drugog gađaju u metu po jedanput, pogađajući sa verovatnoćama 4/5, 3/4 i 2/3. Ako je meta pogođena jedanput, naći verovatnoću da je treći strelac pogodio metu.

Rešenje: Definišimo sledeće događaje:

A – prvi strelac je pogodio metu,

B – drugi strelac je pogodio metu,

C – treći strelac je pogodio metu,

D – meta je pogođena tačno jedanput.

Mi treba da odredimo sledeću uslovnu verovatnoću:

$P(C \mid D) = \frac{P(CD)}{P(D)}.$

Događaj D da je meta pogođena jedanput je događaj koji je sastavljen od sledeća tri događaja: pogodio je prvi strelac tj. realizovao se događaj A, a drugi i treći strelac su promašili, tj. nisu se realizovali događaji B i C, ili pogodio je drugi strelac tj. realizovao se događaj B, a prvi i treći strelac su promašili, tj. nisu se realizovali događaji A i C, ili pogodio je treći strelac tj. realizovao se događaj C, a prvi i drugi strelac su promašili, tj. nisu se realizovali događaji A i B. Dakle, imamo:

$D = AB^CC^C \cup A^CBC^C \cup A^CB^CC = AB^CC^C + A^CBC^C + A^CB^CC.$

5. ZADATAK – II DEO

Izračunavanje verovatnoće traženog događaja primenom uslovne verovatnoće. Uvedeni događaji su nezavisni, što se koristi prilikom pomenutog izračunavanja.

Tada je

$P\left(D\right) = P\left(AB^CC^C \cup A^CBC^C \cup A^CB^CC\right) = P\left(AB^CC^C\right) + P\left(A^CBC^C\right) + P\left(A^CB^CC\right),$

pa imamo

$$P(D) = P(A) \cdot P\left(B^C\right) \cdot P\left(C^C\right) + P\left(A^C\right) \cdot P(B) \cdot P\left(C^C\right) + P\left(A^C\right) \cdot P\left(B^C\right) \cdot P(C).$$

Znajući da je

$P(A) = \frac{4}{5}, \quad P\left(A^C\right) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{3}{4}, \quad P\left(B^C\right) = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{2}{3}, P\left(C^C\right) = \frac{1}{3},$

dobijamo da je:

$P(D) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{60}.$

S druge strane, imamo da je $C \cap D = CD = A^CB^CC$, pa odatle dobijamo da je:

$$P(CD) = P\left(AA^CB^CC\right) = P\left(A^C\right) \cdot P\left(B^C\right) \cdot P(C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{60}.$$

Konačno je:

$P(C \mid D) = \frac{P(CD)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{2}{9}.$

6. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena formula potpune verovatnoće za traženje verovatnoće definisanog događaja.

Imamo dve kocke različitih tipova: kocku I tipa koja ima 2 bele i 4 crne strane, II tipa koja ima 4 bele i 2 crne strane. Baca se novčić: ako padne glava baca se kocka I tipa, a ako padne pismo baca se kocka II tipa. Odrediti verovatnoću:

a) da padne crna strana u prvom bacanju,

b) da padne bela strana u trećem bacanju, ako je poznato da je u prethodna dva bacanja pala bela strana.

Rešenje.

a) Ovde se primenjuje formula totalne verovatnoće. Hipoteze su:

H_1 - baca se kocka I tipa (prilikom bacanja je pala glava), H_2 - baca se kocka II tipa (prilikom bacanja je palo pismo).

Kako se radi o bacanju novčića imamo da je $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

Označimo sa A događaj pala je crna strana na izabranoj kocki. Tada je:

$P(A \mid H_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad P(A \mid H_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Tada imamo da je, primenom formule totalne verovatnoće,

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$

b) Da padne bela strana kocke u bilo kom bacanju je nezavisno od prethodnih bacanja. Dakle, verovatnoća da padne bela kocka u trećem bacanju je ista kao i da padne u prvom (ili drugom) bacanju i iznosi $\frac{1}{2}$. Da padne crna strana kocke je suprotan događaj, događaju A, pa je i ta verovatnoća $\frac{1}{2}$.

7. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena formula potpune verovatnoće, kao i Bajesova formula na izračunavanje verovatnoće.

Baca se kocka. Ako se na kocki pojavi 1 ili 6 tačaka uzima se kuglia iz prve urne, u suprotnom se uzima kuglica iz druge urne. Prva urna sadrži 8 belih i 3 crne kuglice, a druga 5 belih i 4 crne kuglice.

a) Kolika je verovatnoća da je izvučena kuglica bela?

b) Naći verovatnoću da je bela kuglica izvučena iz prve urne.

Rešenje. Hipoteze su:

H_1 – izabrana je I urna (na kocki je pao broj 1 ili 6), H_2 – izabrana je II urna (na kocki je pao broj 2,3,4 i 5).

Kako se radi o bacanju novčića imamo da je $P(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

a) Označimo sa A događaj da je izvučena bela kuglica. Tada je:

$P(A \mid H_1) = \frac{8}{11}$, $P(A \mid H_2) = \frac{5}{9}$.

Tada imamo da je, primenom formule totalne verovatnoće,

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{11} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{182}{297}.$$

b) Verovatnoću (aposteriornu) da ako je izvučena bela kuglica ona potiče iz I urne računamo Bajesovom formulom:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{11}}{\frac{182}{297}} = \frac{12}{91}.$$

8. ZADATAK – I DEO (15 MINUTA)

Postavka zadatak, definisanje potrebnih hipoteza, kao i primena kombinacija bez ponavljanja za određivanje potrebnih verovatnoća.

U jednoj kutiji se nalazi 5 belih i 7 crvenih kuglica, a u drugoj 3 bele i 4 crvene kuglice. Na slučajan način se iz prve u drugu kutiju prebacuje 3 kuglice. Zatim se iz druge kutije izvlači jedna kuglica.

a) Odrediti verovatnoću da je izvučena kuglica bele boje.

b) Ako je izvučena kuglica bele boje, odrediti verovatnoću da su iz prve u drugu kutiju prebačene jedna bela dve crvene kuglice.

Rešenje. Hipoteze su:

H_1 – iz prve kutije u drugu je prebačeno 3 bele kuglice,

H_2 – iz prve kutije u drugu je prebačeno 2 bele i 1 crvena kuglica,

H_3 – iz prve kutije u drugu je prebačena 1 bela i 2 crvene kuglice,

H_4 – iz prve kutije u drugu je prebačeno 3 crvene kuglice.

Sada imamo da je:

$$P(H_1) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{12}{3}}, \quad P(H_3) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{12}{3}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}.$$

8. ZADATAK – II DEO

Izračunavanje potrebnih verovatnoća kako bi se primenila formula totalne verovatnoće, kao i Bajesova formula

Označimo sa A događaj da je izvučena kuglica iz II kutije bela kuglica. Nakon prebacivanja kuglica, u drugoj kutiji ima tri kuglice više i zbog toga imamo:

$P(A \mid H_1) = \frac{6}{10}$, došle su tri bele kuglice tako da u II kutiji ima sada 10 kuglica, od kojih su 6 belih;

$P(A \mid H_2) = \frac{5}{10}$, došle su dve bele i jedna crvena kuglica;

$P(A \mid H_3) = \frac{4}{10}$, došle su jedna bela i dve crvene kuglice;

$P(A \mid H_4) = \frac{3}{10}$, došle su tri crvene kuglice.

a) Verovatnoća da je izvučena bela kuglica se računa po formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) + P(H_4) \cdot P(A \mid H_4).$$

Tada je:

$$P(A) = \frac{1}{22} \cdot \frac{3}{5} + \frac{7}{22} \cdot \frac{1}{2} + \frac{21}{44} \cdot \frac{2}{5} + \frac{7}{44} \cdot \frac{3}{10} = \frac{187}{440} = 0,425.$$

b) U ovom delu primenjujemo Bajesovu formulu:

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{84}{440}}{\frac{187}{440}} = \frac{84}{187} \approx 0,449.$$

9. ZADATAK (10 MINUTA)

Primen formule aposteriorne verovatnoće, za izračunavanje tražene verovatnoće.

Imamo tri novčića, od kojih su dva ispravna, a treći sa obe strane ima grb. Slučajno je izabran jedan novčić i bačen 4 puta. Ako je sva četiri puta pao grb, kolika je verovatnoća da je izabran ispravan, odnosno neispravan novčič?

Rešenje. Obeležimo događaje A_1 - izabran je ispravan novčić, A_2 - izabran je neispravan novčić, B - 4 puta je pao grb. Traže se verovatnoće $P(A_1|B)$ i $P(A_2|B)$ koje možemo odrediti pomoću Bajesove formule. Imamo da je $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$, a ako je izabran ispravan novčić, verovatnoća da 4 puta padne grb je $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, odnosno $P(B|A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Za novčić, koji sa obe strane ima grb, sigurno je da će sva 4 puta pasti grb, pa je $P(B|A_2) = 1$. Tada je

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{9}.$$

Kako je $P(A_2|B) = 1 - P(A_1|B) = \frac{8}{9}$, zaključujemo da je mnogo verovatnije da je izabran neispravan novčić.

10. ZADATAK (5 MINUTA)

Bernulijeva shema.

U seriji od 100 proizvoda ima 4 škarta. Slučajno se 5 puta bira po jedan proizvod iz serije. Naći verovatnoću

a) da se neće izvući ni jedan škart,

b) da će se najmanje 3 puta izvući škart.

Rešenje.a) Važi da je $p = 0,04$ i $q = 1 - p = 0,96$, a takođe i $n = 5$ i $k = 0$. Tada imamo da je

$$P(D_{0,5}) = \binom{5}{0}\cdot 0,04^0 \cdot 0,96^5 \approx 0,81.$$

b) U ovom slučaju je $k = 3,4,5,$ pa dobijamo da je

$$P(D_{3,5}) + P(D_{4,5}) + P(D_{5,5}) = \binom{5}{3}\cdot 0,04^3\cdot 0,96^2 + \binom{5}{4}\cdot 0,04^4\cdot 0,96 + \binom{5}{5}\cdot 0,04^5\cdot 0,96^0 \approx 0,0006.$$

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD - 1. DEO

Zadaci koji ste ostavljaju studentima za samostalni rad.

Zadatak. Strelci A, B, C gađaju po jednom u cilj nezavisno jedan od drugog, pogađajući ga sa verovatnoćama 0,6, 0,5 i 0,4. Ustanovljeno je da je cilj pogođen 2 puta. Odrediti verovatnoću da je strelac C promašio.

Rezultat: 0,59.

Zadatak. Proizvodi fabrike dolaze na kontrolu ispravnosti kod 2 kontrolora sa verovatnoćama 0,6 i 0,4. Verovatnoća da će proizvod biti proglašen ispravnim kod prvog kontrolora je 0,94, a kod drugog 0,98. Proizvod je bio ispravan. Naći verovatnoću da je proveru izvršio prvi kontrolor.

Rezultat: 0,59.

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta;

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD - 2. DEO (10 MINUTA)

Iz nezavisnosti dva događaja ne sledi njihova uslovna nezavisnosti.

Neka se eksperiment sastoji u bacanju pravilne kockice. Uočimo sledeće događaje:
A: pao je broj 1 ili 2 prilikom bacanje kockice,
B: pao je broj 2, 4, ili 6 prilikom bacanje kocikice,
C: pao je broj 1 ili 4.

Da li su događaji A i B nezavisni? Da li su događaji A i B uslovno nezavisni u odnosu na događaj C ?

Rešenje. Imamo da $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ i $C = \{1, 4\}$. Tada je $P(A) = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{1}{2}$. Takođe, imamo da je $A \cap B = \{2\}$, pa je $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Tada je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

pa su događaji A i B nezavisni.

S druge strane, kako je $A \cap C = \{1\}$, imamo da je

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Slično, dobijamo da je $P(B \mid C) = \frac{1}{2}$. Takođe, imamo da je

$$P(A \cap B \mid C) = P(\{2\} \mid C) = 0.$$

Ukupno, važi da je

$$P(A \cap B \mid C) \neq P(A \mid C) \cdot P(B \mid C),$$

pa događaji A i B nisu nezavisni u odnosu na događaj C.

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD - 3. DEO (10 MINUTA)

Formula potpune verovatnoće.

Na avion se ispaljuju tri pojedinačna hica. Verovatnoća da avion bude pogođen prvim hicem je 0,4, drugim 0,5, a trećim 0,7. Da bi avion bio izbačen sigurno oboren potrebna su sva 3 pogotka. U slučaju jednog pogotka avion će biti oboren sa verovatnoćom 0,2, a sa dva pogotka sa verovatnoćom 0,6. Naći verovatnoću da je avion srušen.

Rešenje. Hipoteze su:

H_1 – avion je pogođen jednim hicem,

H_2 – avion pogođen sa dva hica,

H_3 – avion pogođen sa tri hica,

H_4 – avion su promašila sva tri hica.

Tada imamo da je:

$P(H_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36,$

$P(H_2) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41,$

$P(H_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14,$

$P(H_4) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09.$

Označimo sa A događaj da je avion srušen. Tada je:

$P(A \mid H_1) = 0,2, \quad P(A \mid H_2) = 0,6, \quad P(A \mid H_3) = 1, \quad P(A \mid H_4) = 0.$

Konačno imamo da je:

$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(A \mid H_3)P(A \mid H_3) + P(H_4)P(A \mid H_4) = 0,458.$

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD - 4. DEO (5 MINUTA)

Bernulijeva šema.

Dve kockice se bacaju 10 puta. Odrediti verovatnoću da se tačno 3 puta dobije zbir 8. Odrediti koji je najverovatniji broj pojavljivanja zbira 8, i sa kojom verovatnoćom se taj događaj dešava.

Rešenje. Pri bacanju dve kockice zbir će da bude 8, ako su rezultati $(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$. Kako je broj mogućih ishoda, koji su jednakoverovatni, jednak 36, to je verovatnoća da se dobije zbir 8 jednaka $\frac{5}{36}$. Dakle, imamo da je $p = \frac{5}{36}$ i $q = \frac{31}{36}$

Da bi se od deset bacanja kockica 3 puta dobio zbir 8, verovatnoća je, po Binomnoj šemi, jednaka

$$P(D_{10,3}) = \binom{10}{3} p^3 q^{10-3} = 120 p^3 q^7 = 120 \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^3 \cdot \left(\frac{31}{36}\right)^7 \approx 0,113.$$

Zaključak

USLOVNA VEROVATNOĆA

Uslovna verovatnoća, nezavisnost događaja, Formula totalne verovatnoće, Bajesova formula.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa pojmom uslovne verovatnoće koji predstavlja veoma važan pojam u teoriji verovatnoće.

Na osnovu ovog pojma može se uvesti pravilo množenja, a, takođe, može se proveravati nezavisnost slučajnih događaja kako u parovima tako i u ukupnosti.

Kao glavni rezultat, primene uslovne verovatnoće, može se izvesti Formula potpune verovatnoće, kao i njena veoma bitna posledica koja se naziva Bajesova formula, a predstavlja formulu verovatnoće hipoteza.

LITERATURA:
M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.
Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.