UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

# MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

# Neke važnije raspodele slučajnih promenljivih

Lekcija 06

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

# MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 06

## *NEKE VAŽNIJE RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH*

# Uvod

## UVOD

*Binomna, Puasonova, Normalna (Gausova), Hi kvadrat, Studentova i Uniformna raspodela.*

U ovoj lekciji ćemo se upoznati sa važnijim slučajnim promenljivim, koje će nam biti od velikog značaja za dalji rad u statistici. Ovde ćemo obraditi:

- Binomnu raspodelu,
- Puasonovu raspodelu,
- Normalnu raspodelu,
- Hi-kvadrat raspodelu,
- Studentovu raspodelu,
- Uniformnu raspodelu,
- Fišerovu raspodelu.

**Napomena.** Kao prilog ovoj lekciji na LAMS-u se nalaze tablice koje se koriste za očitavanje vrednosti nekih od ovih raspodela. Potrebno je da ih preuzmete, jer ih koristimo, kakoza izradu kako primera na predavanjima, tako i zadataka na vežbama. Njih ćete koristiti i na ispitu, pa je potrebno da ih ponese tada.

## UVODNI VIDEO KLIP

*Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 1

# Bernulijeva raspodela

## AUTORSKI VIDEO KLIP

*O raspodelama.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

## DEFINICIJA. PRIMER

*Bernulijeva raspodela slučajne promenljive se još naziva i "zakon 0-1" jer je dihotomnog tipa po pitanju ishoda. Dakle, pri izvođenju nekog eksperimenta se neki događaj nije javio ili se javi.*

Prilikom izvršenja nekog eksperimentu posmatrajmo samo da li se neki slučajni događaj $A$ realizovao ili ne. Tada, u takvom eksperimentu imamo dva ishoda: događaj $A$ se desio, ili događaj $A$ se nije desio, tj. realizovao se njemu suprotan događaj $A^C$ . Zato, možemo smatrati da je $\Omega = \{A, A^C\}$. Stavimo da je $P(A) = p$ i $P(A^C) = 1 - p = q$, gde je $p$ data verovatnoća. Neka slučajna promenljiva $X$ predstavlja realizaciju događaja $A$ u posmatranom eksperimentu. Tada, za slučajnu promenljivu $X$ kažemo da ima Bernulijevu raspodelu sa parametrom $p$, $0 < p < 1$, i to zapisujemo na sledeći način

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

U prethodnom zapisu, stanje $0$ predstavlja situaciju da se realizovao događaj $A^C$, dok stanje $1$ predstavlja da se realizovao $A$. Dakle, važi da je $P(X = 0) = P(A^C) = q$ i $P(X = 1) = P(A) = p$. Slučajna promenljiva koja ima Bernulijevu raspodelu je očigledno diskretnog tipa.

**Primer.** Posmatrajmo eksperiment u kome se baca pravilan novčić i posmatra događaj da li je palo pismo ili ne. Na ovaj način definisana je slučajna promenljiva $X$ koja ima Bermulijevu raspodelu, tj. važi da je

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bernulijevi eksperimenti ili Bernulijeva šema predstavlja niz eksperimenata koji se nezavisno jedan od drugog izvode pod istim (neizmenjenim) uslovima, pri čemu svaki od tih eksperimenata predstavlja model slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom. O tome govorimo u nastavku.

# Poglavlje 2

# Binomna raspodela

## EKSPERIMENTI SA DVA ISHODA

*Sledeća jednostavna šema odigrala je fundamentalnu ulogu u razvitku Teorije verovatnoće.*

Posmatrajmo $n$ ponovljenih eksperimenata, od kojih svaki ima Bernulijevu raspodelu, kao novi eksperiment. Skup mogućih ishoda tog novog opita je sledeći Dekartov proizvod

$$\Omega_n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}_{n},$$

a polje događaja $\mathscr{F}_n$ nad $\Omega_n$ jeste skup svih podskupova skupa $\Omega_n$. Ishodi $\omega \in \Omega_n$ su oblika

$$\underbrace{A^{(C)} \times A^{(C)} \times \ldots \times A^{(C)}}_{n}$$

gde $A^{(C)}$ označava $A$ ili $A^C$. Označimo sa $A_k^{(C)}$ događaj iz $\mathscr{F}_n$ koji se sastoji u tome da se u $k$ -tom ponavljanju $(k = 1, 2, 3, \ldots, n,\ \ n \in \mathbb{N})$ realizuje događaj $A^{(C)}$. Događaj $A_k^{(C)}$ je podskup od $\Omega_n$ koji se sastoji od svih $\omega$ koji na $k$ -tom mestu imaju $A^{(C)}$. Na taj način, svaki elementarni ishod $\omega \in \Omega_n$ možemo zapisati na sledeći način

$$\omega = A_1^{(C)} \cap A_2^{(C)} \ldots \cap A_n^{(C)}. \tag{1}$$

Verovatnoću $P$ nad $\mathscr{F}_n$ definišemo tako da prilikom ponavljanja eksperimenta u Bernulijevoj šemi događaje $A_k^{(C)}, k = 1, 2, 3 \ldots, n$ smatramo nezavisnim i da se ponavljaju pod istim uslovima.

**Napomena.** Za verovatnoću nad $\mathscr{F}_n$ upotrebljavaćemo istu oznaku kao i za verovatnoću nad $\mathscr{F}$ bez opasnosti od zabune.

Dakle, važi da je

$$P\left(A_k^{(C)}\right) = \begin{cases} p, & A_k^{(C)} = A, \\ q, & A_k^{(C)} = A^C, \end{cases}$$

za $k = 1, 2, 3, \ldots, n,\ \ n \in \mathbb{N}$ već prema tome da li se u $k$ -tom ponavljanju eksperimenta realizuje događaj $A$ ili $A^C$.

Uvedimo slučajnu promenljivu $S_n(\omega)$ definisanu nad $\Omega_n$ kao broj realizacija događaja $A$ u

$\Omega$. Prema učinjenim pretpostavkama o nezavisnosti ponovljenih eksperimenata u neizmenjenim uslovima i prema formuli (1) imamo

$$P(\omega) = P\left(A_1^{(C)}\right) \cap P\left(A_2^{(C)}\right) \cap \ldots \cap P\left(A_1^{(C)}\right) = p^{S_n(\omega)} \cdot q^{n-S_n(\omega)}.$$

# DEFINICIJA BINOMNE RASPODELE

## *Binomna raspodela je raspodela diskretnog tipa.*

Slučajna promenljiva $S_n$ predstavlja broj koliko puta se realizuje događaj $A$ u $n$ ponovljenih eksperimenata. Skup vrednosti ove promenljive je $R_{S_n} = \{0,1,2,\ldots n\}$. Odredimo raspodelu ove slučajne promenljive. Uočimo, najpre, događaj $\{S_n = k\}$, tj. situaciju da se događaj $A$ realizovao $k$ puta ( $k \in \{0,1,2,\ldots n\}, n \in \mathbb{N}$ ). Ovaj događaj predstavlja skup svih onih $\omega$ iz $\Omega_n$ koji sadrže $k$ puta događaj $A$ i $n-k$ puta događaj $A^C$. Broj takvih $\omega$ iznosi $\binom{n}{k}$. Tada je

$$P(\{S_n = k\}) = \sum_{\omega : S_n(\omega)=k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ za } k = 0,1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

Prethodno izneto, s obzirom da se radi o slučajnoj promenljivoj diskretnog tipa, možemo predstaviti u sledećem obliku:

$$S_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \binom{n}{0} \cdot q^n & \binom{n}{1} \cdot p \cdot q^{n-1} & \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} & \ldots & \binom{n}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q & \binom{n}{n} \cdot p^n. \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Raspodela verovatnoća određena sa (2) ili sa (3) naziva se Binomna raspodela. Ona zavisi od dva parametara $n$ i $p$. Da slučajna promenljiva $S_n$ ima Binomnu raspodelu označavaćemo sa $\mathscr{B}(n,p)$. Korišćenjem binomne formule, može se zaključiti da važi

$$\sum_{k=0}^{n} P(\{S_n = k\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Iz prethodnog zaključujemo da je $P(\{S_n \in \{0,1,2,\ldots,n\}\}) = 1$. Za slučajnu promenljivu $S_n : \mathscr{B}(n,p)$ funkcija raspodele je

$$F_{S_n}(x) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad \text{za} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Funkcija raspodele je stepenasta funkcija sa skokovima u tačkama $k$ $(k \in \{0,1,2,\ldots,n\})$, pri čemu veličina tog skoka iznosi

$$P(\{S_n = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Važi da je $F_{S_n}(x) = 0,$ za $x < 0$, dok je $F_{S_n}(x) = 1,$ za $x \geq n$.

Za slučajnu promenljivu $S_n : \mathscr{B}(n,p)$ važi da je

$$E(S_n) = n \cdot p \text{ i } \sigma^2(S_n) = n \cdot p \cdot q.$$

# AUTORSKI VIDEO KLIP 1

## *O Binomnoj raspodeli.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# PRIMER 1

## *Primena Binomne raspodele na rešavanje problema.*

**Primer** Strelac pogađa metu sa verovatnoćom od $0,75.$ Ako je izvršio četiri gađanja, odrediti verovatnoću da je strelac metu:

a) promašio,

b) pogodio tačno jednom,

c) pogodio bar tri puta,

d) pogodio bar jednom.

Odrediti funkciju raspodele ove slučajne promenljive.

**Rešenje.** Označimo sa $X$ slučajnu promenljivu koja predstavlja broj pogodaka u metu. Ovako definisana slučajna promenljiva je očigledno Binomna raspodela, jer strelac ili pogađa ili promašuje metu i imamo da je $p = 0,75$ i $q = 1 - p = 0,25$ i $n = 4.$

Zakon raspodele ovako definisane slučajne promenljive glasi

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 & \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) & \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 & \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 & \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \end{pmatrix}.$$

tj.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{256} & \frac{12}{256} & \frac{54}{256} & \frac{108}{256} & \frac{81}{256} \end{pmatrix}.$$

Tada je:

a) $P(X = 0) = \frac{1}{256},$

b) $P(X = 1) = \frac{12}{256},$

c) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{108}{256} + \frac{81}{256} = \frac{189}{256},$

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$.

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X$ glasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{256}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{13}{256}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{67}{256}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{175}{256}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

# PRIMER 2

*U primenama efektivno izračunavanje vrednosti Binomne raspodele, kada je $n$ veliko je teško.*

Međutim, u primenama efektivno izračunavanje vrednosti Binomne raspodele date sa $(2)$ kada je $n$ veliko je teško. To ilustrujemo sledećim primerom.

**Primer.** Veliki luster ima $200$ sijalica. Verovatnoća da u izvesnom vremenskom periodu $T$ pregori jedna sijalica iznosi $0,03$. Promena sijalica se vrši ako pregori više od $10$ sijalica. Kolika je verovatnoća da u vremenskom intervalu $T$ ne dođe do promene sijalica? Kolika je verovatnoća da u vremenskom intervalu $T$ dođe do promene sijalica?

**Rešenje.** Broj pregorelih sijalica na lusteru za vremenski interval $T$ je slučajna promenljiva $S_{200} : \mathcal{B}(200; 0,03)$. Ova raspodela je Binomna jer nas interesuje, u radu sijalica, samo da li ona svetli ili ne tj. da li je sijalica pregorela ili ne. Verovatnoća da u vremenskom intervalu $T$ ne dođe do promene sijalica iznosi

$$P\{S_{200} \leq 10\} = \sum_{k=0}^{10} P\{S_{200} = k\} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 0,03^k \cdot 0,97^{200-k},$$

što je teško za izračunavanje. S druge strane, verovatnoća da u vremenskom intervalu $T$ dođe do promene sijalica iznosi

$$P\{S_{200} \geq 11\} = \sum_{k=11}^{200} P\{S_{200} = k\} = \sum_{k=11}^{200} \binom{200}{k} 0,03^k \cdot 0,97^{200-k}.$$

Ovaj račun je još komplikovaniji nego prethodni i u ovakvim slučajevima se koristi osobina verovatnoće koja je data i dokazana na prethodnom predavanju. Tada je:

$$P\{S_{200} \geq 11\} = 1 - P\{S_{200} \leq 10\}.$$

**Napomena.** Zbog poteškoća iznetih u prethodnom primeru od interesa je posmatrati asimptotsko ponašanje binomne raspodele kada $n$ neograničeno raste. Granični slučajevi Binomne raspodele kada $n \to +\infty$ dovode do dve važne raspodele: $\mathbf{Puasonove\ raspodele}$ i $\mathbf{Normalne\ raspodele}$.

# AUTORSKI VIDEO KLIP 2

## *O Primeru 1 i Primeru 2.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 3

# Geometrijska raspodela

## DEFINICIJA GEOMETRIJSKE RASPODELE

*Za razliku od Bernulijeve šeme, u ovom slučaju se posmatra slučajna promenljiva $X$ koja predstavlja broj ponavljanja opisanog eksperimenta do prve realizacije događaja $A$.*

Posmatrajmo eksperiment čiji su mogući ishodi slučajni događaj $A$ čija je verovatnoća $P(A) = p$ ili događaj $A^C$ čija je verovatnoća $P(A^C) = 1 - p = q$. Neka je u svakom nezavisnom ponavljanju eksperimenta verovatnoća realizacije događaja $A$ ista i jednaka $p$ . Za razliku od Bernulijeve šeme, u ovom slučaju se posmatra slučajna promenljiva $X$ koja predstavlja broj ponavljanja opisanog eksperimenta do prve realizacije događaja $A$. Za ovako definisanu slučajna promenljiva X, važi da je $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Odredimo raspodelu ove slučajne promenljive. Uočimo, najpre, događaj $\{X = k\}$, tj. situaciju da se događaj $A$ realizovao prvi put u $k$ -tom eksperimentu ( $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tada je

$$P\{X = k\} = q^{k-1} \cdot p, \quad \text{za } k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

verovatnoća da se događaj $A$ realizuje u $k$ -tom izvođenju eksperimenta (tj. nije se realizovao u prvih prvih $k - 1$ izvođenja eksperimenta). Prethodnom formulom je zadat zakon raspodele koja se naziva geometrijska raspodela. Raspodela se naziva geometrijska zato što vrednosti verovatnoća da se realizuje događaj $A$ opadaju geometrijskom progresijom, sa ponavljanjem eksperimenta.

Očigledno da slučajnu promenljivu $X$ koja ima ovu raspodelu možemo je predstaviti u sledećem obliku:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p & q \cdot p & q^2 \cdot p & \ldots & q^{k-1} \cdot p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je slučajna promenljiva $X$ diskretnog tipa. Dalje, poznato je da važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{X = k\}) = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Takođe, važi da je

$$P(X \leq n) = 1 - (1-p)^n, \quad \text{odnosno} \quad P(X > n) = (1-p)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prethodne formule služe za izračunavanje kumulativne verovatnoće za geometrijsku raspodelu.

Za slučajnu promenljivu $X$ koja ima geometrijsku raspodelu važi da njeno matematičko očekivanje i varijansa, tim redom, iznose

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{i} \qquad \sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Napomena.** Da bi neka raspodela bila geometrijska moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:
1. eksperimenti moraju biti nezavisni;
2. rezultat svakog eksperimenta je posmatrani događaj koji se realizovao ili ne;
3. verovatnoća realizacije posmatranog događaja u svakom eksperimentu je ista.

# PRIMER

## *Izračunavanje verovatnoće realizacije posmatranog događaja.*

Novčić se baca sve dok ne padne ,,glava". Odrediti raspodelu slučajne promenljive $X$ koja predstavlja broj bacanja.

**Rešenje.** Očigledno je $X$ diskretna slučajna promenljiva. Ona uzima vrednosti $1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
P(\{X=1\}) &= P(\{G\}) = \frac{1}{2}, \\
P(\{X=2\}) &= P(\{PG\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
P(\{X=3\}) &= P(\{PPG\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \\
&\vdots \\
P(\{X=k\}) &= P(\{\underbrace{PP\ldots P}_{k-1}G\}) = \frac{1}{2^k} \quad \text{(jedan je povoljan ishod od } 2^k \text{ mogućih)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sledi da je zakon raspodele slučajne promenljive $X$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \ldots & \left(\frac{1}{2}\right)^k & \ldots \end{pmatrix}.$$

**Napomena.** Poznato je da važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Ovo je geometrijski red.

# VIDEO KLIP 1

*Dodatni materijal: Snimak sa Youtube-a: još neke raspodele - geometrijska raspodela 1. deo*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# VIDEO KLIP 2

*Dodatni materijal: Snimak sa Youtube-a: još neke raspodele - geometrijska raspodela 2. deo*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 4

# Puasonova raspodela

## APROKSIMACIJA BINOMNE RASPODELE PUASONOVOM RASPODELOM

*Puasonova raspodela je jedan granični slučaj Binomne raspodele i primenjuje se kada je $n \cdot p \leq 10.$ .*

Kao što smo već rekli, radi bržeg izračunavanja binomnih verovatnoća kada je $n$ veliko, od interesa je posmatrati njihovo asimptotsko ponašanje kada $n$ neograničeno raste. Jedna od aproksimacija kada $n \to +\infty$ jeste Puasonova aproksimacija . Pretpostavimo da verovatnoća događaja $A$ u Bernulijevoj šemi zavisi od broja ponovljenih eksperimenata, tj. od $n$. U tom slučaju pišemo da je $P(A) = p_n$.

**Stav.** Ako u Binomnoj raspodeli $n \cdot p_n \to \lambda > 0,$ kada $n \to +\infty$, tada važi da je

$$P(\{S_n = k\}) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ kada } n \to +\infty.$$

Prethodnim stavom je data aproksimacija $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ za veliko $n$, gde se uzima da je $\lambda \approx n \cdot p$. Procena greške (koju ovde ne navodimo) pokazuje da se za primene zadovoljavajuća tačnost dobija već kada je $n$ reda nekoliko desetina, a $n \cdot p \leq 10$. Na osnovu prethodnog važi da je verovatnoća događaja $A$, mala, pa se prethodni stav naziva Stav o malim verovatnoćama.

Možemo smatrati da brojevi $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, za $k = 0, 1, 2, \ldots$ određuju raspodelu verovatnoća jedne slučajne promenljive $S_\infty$ definisane na proizvodu prostora $\Omega_\infty = \Omega \times \Omega \times \ldots \Omega$u smislu da je

$$P(\{S_\infty = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iz Maklorenovog razvoja poznato je da važi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$, pa je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1.$$

Dalje, slučajna promenljiva $S_\infty$ uzima vrednosti u prebrojivom skupu $R_{S_\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, pa je ona slučajna promenljiva diskretnog tipa. Raspodela verovatnoća za $S_\infty$ zove se Puasonova raspodela sa parametrom $\lambda > 0$ i to ćemo zapisivati $S_\infty : P(\lambda)$. Dakle, Puasonova raspodela je jedan granični slučaj Binomne raspodele, kada $n \to +\infty$.

# FUNKCIJA RASPODELE

## *Vrednosti ove funkcije zadaju se obično tabelarno da bi se lakše izračunale odgovarajuće verovatnoće.*

U praktičnim problemima se javlja potreba za određivanjem verovatnoća $P_j(\lambda)=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ za $0<\lambda\le 10$ i $j=0,1,2,\ \dots,$ kao i verovatnoća $P\{0\le X\le l\}=\sum_{j=0}^{l}P_j(\lambda)$. Vrednosti ovih verovatnoća se zadaju odgovarajućim tablicama za vrednosti verovatnoća Puasonove raspodele, kako za čitanje pojedinačnih vrednosti, tako i za čitanje zbirnih vrednosti verovatnoća.

Napomena. Sve vrednosti koje se koriste za rešavanje primera koji slede su preuzeti iz tablice za Puasonovu raspodelu.

Funkcija raspodele za slučajnu promenljivu $S_\infty$ : P( $\lambda$) je oblika:

$F_{S_\infty}(x)=\sum_{j<x}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda},\ -\infty<x<+\infty$ . Ovde su skokovi u tačkama 0, 1, 2,... Za $x<0$ je $F(x)=0$ i

$\lim\limits_{x\to+\infty}F_{S_\infty}(x)=F_{S_\infty}(\infty)=1.$

Vrednosti ove funkcije zadaju se obično tabelarno da bi se lakše izračunale odgovarajuće verovatnoće.

Matematičko očekivanje i disperzija za Puasonovu raspodelu $S_\infty : P(\lambda)$ iznosi $E(S_\infty)=\sigma^2(S_\infty)=\lambda.$

# PRIMERI

## *Rešavanje problema primenom Puasonove raspodele.*

**Primer 4 .** Posmatrajmo ponovo Primer 3. Kako je $n\cdot p=200\cdot 0,03=6$ u ovom slučaju Binomnu raspodelu možemo aproksimirati Puasonovom. U tom slučaju je

$$P\{S_{200}\le 10\}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}0,03^k\cdot 0,97^{200-k}=\sum_{k=0}^{10}\frac{6^k}{k!}\cdot e^{-6}=0,957380.$$

Tada imamo da je

$$P\{S_{200}\ge 11\}=1-P\{S_{200}\le 10\}=0,04620.$$

**Primer 5 .** Poznato je da u određenoj knjizi od $500$ strana postoji $500$ štamparskih grešaka po pretpostavci slučajno raspoređenih. Kolika je verovatnoća da na slučajno izabranoj strani knjige ima više od dve greške?

**Rešenje.** Označimo sa $X_{500}$ - broj štamparskih grešaka na slučajno odabranoj stranici.

Po uslovu zadatka, očigledno važi $X_{500} : \mathcal{B}\left(500, \frac{1}{500}\right)$. Kako je $n \cdot p = 1 < 10$ primenićemo Puasonovu aproksimaciju Binomne raspodele za $\lambda = 1$, pa je

$$P\{X_500 \geq 3\} = 1 - P\{X_{500} \leq 2\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{1^k}{k!} = 1 - 0,919699 = 0,080301.$$

**Primer 6.** Poznato je da je verovatnoća proizvodnje defektnog artikla $0,02$. Artikli se pakuju u kutije po $100$ komada. Naći verovatnoću da:
a) u kutiji nema defektnih artikala; b) broj defektnih artikala u kutiji bude veći od $5$.

**Rešenje.** Ako sa $X_{100}$ označimo broj defektnih artikala u kutiji, očigledno $X_{100} : \mathcal{B}(100, 0, 02)$. Kako je $n \cdot p = 2 < 10$ primenom teoreme Puasona za $\lambda = 2$ dobijamo da je:
a) $P\{X_{100} = 0\} = 0,135335;$
b) $P\{X_{100} > 5\} = 1 - P\{X_{100} \leq 5\} = 1 - \sum\limits_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!} e^{-2} = 1 - 0,983437 = 0,016563.$

# AUTORSKI VIDEO KLIP

## *O Puasonovoj raspodeli.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# VIDEO KLIP 1

## *Snimak sa Youtube-a: o Puasonovoj raspodeli.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# VIDEO KLIP 2

## *Snimak sa Youtube-a: primer Puasonova raspodela.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 5

# Normalna (Gausova) raspodela

## DEFINICIJA NORMALNE RASPODELE

*Binomna raspodela se može dobro aproksimirati normalnom raspodelom.*

U opštem slučaju za slučajnu promenljivu $Z$ kažemo da ima normalnu raspodelu ili Gausovu raspodelu sa parametrima $m$ ( $m$ je realan broj) i $\sigma^2$ ( $\sigma^2$ je pozitivan broj), ako ima gustinu oblika

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}, -\infty < x < +\infty.$$

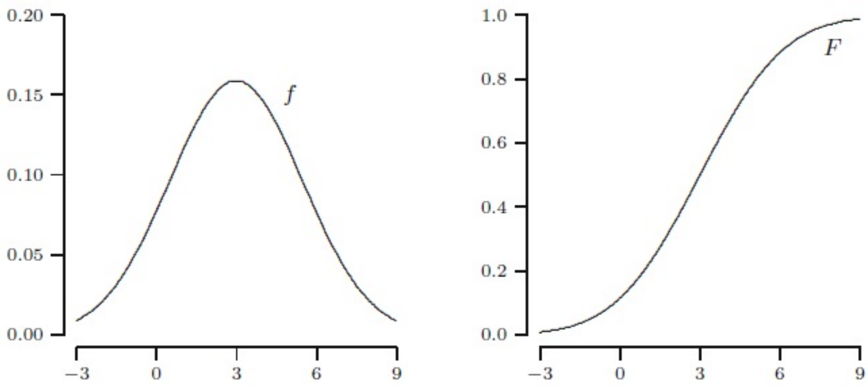
To ćemo zapisivati $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Dakle, ova raspodela zavisi od dva parametra $m$ i $\sigma$. Grafik koji odgovara funkciji $\varphi(x)$ se naziva Gausova kriva i ona je simetrična u odnosu na pravu $x = m$. Ova kriva je "šira" što je vrednost veličine $\sigma$ veća, a uža je što je vrednost veličine $\sigma$ manja. Na slici levo je dat grafik funkcije gustine za slučajnu promenljivu $Z : \mathcal{N}(3; 6, 25)$.

Ako važi da $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, tada se njena funkcija raspodele zadaje na sledeći način

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2}} \, du$$

za $x \in (-\infty, \infty)$. Na slici levo je dat grafik funkcije gustine za slučajnu promenljivu $Z : \mathcal{N}(3; 6, 25)$.

Kako za funkciju gustine $\varphi$ ne postoji njena primitivna funkcija, ne postoji eksplicitan zapis za funkciju $F$. Kako je $F_Z(x) = P(\{Z < x\})$ ovaj problem prouzrokuje da se ni odgovarajuće verovatnoće ne mogu izračunavati u slučaju $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.




Slika 5.1 Funkcija gustine i funkcija raspodele za slučajnu promenljivu $Z : \mathcal{N}(3; 6,25)$ [Izvor: Autor].

Međutim, pokazaćemo da bilo koju slučajnu promenljivu sa Normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, možemo na jednostavan način transformisati u slučajnu promenljivu sa Normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, 1)$, za koju postoji tablica odakle se očitavaju njene vrednosti. O tome govorimo u nastavku.

**Napomena.** Granični slučaj binomne raspodele kada $n \to +\infty$ jeste i normalna raspodela. Dakle, binomna raspodela se može dobro aproksimirati normalnom raspodelom koja ima dva parametra $m = n \cdot p$ i $\sigma^2 = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ i u praksi se ta aproksimacija vrši kada je $n \cdot p > 10$. O tome govori veoma bitna Moavr-Laplasova teorema o kojoj će biti više reči na narednim predavanjima.

# STANDARDIZOVANA SLUČAJNA PROMENLJIVA

## *Vrednosti verovatnoća za ovu slučajnu raspodelu se zadaju tabelarno.*

U slučaju da je $m = 0$ i $\sigma^2 = 1$ u Normalnoj raspodeli, tada $\phi$ označava funkciju gustine slučajne promenljive koja ima ovu raspodelu, tj. važi

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

za $x \in (-\infty, \infty)$. Očigledno, ova funkcija je parna, tj. važi da je $\phi(-x) = \phi(x)$, za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Sa $\Phi$ se označava funkcija raspodele slučajne promenljive koja ima Normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$ i važi

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du.$$

Slučajnu promenljivu $Z^*$ koja ima Normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$ i dobija se trasformacijom slučajne promenljive $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ nazivamo standardna ili normirana slučajna promenljiva. To označavamo sa $Z^* : \mathcal{N}(0, 1)$.

U tablicama koje su date kao prilog ovom predavanju date su vrednosti funkcije $\Phi(x)$, za $x > 0$. Za $x < 0$, vrednost funkcije $\Phi(x)$ može se odrediti na osnovu njene neparnosti, tj. da je $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Takođe je $\Phi(+\infty) = 0,5$.

Važi da je

$$P(\{Z^* < x\}) = \Phi(x).$$

Ovo određivanje je korektno, jer je

$$P(\{Z^* \in \mathbb{R}\}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$

Važi da je

$$P(\{a \leq Z^* < b\}) = \int\limits_{a}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Na prethodno možemo gledati kao na verovatnoću događaja da slučajna promenljiva $Z^*$ “padne” u interval $[a, b)$.

# STANDARDIZACIJA SLUČAJNE PROMENLJIVE $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

*Da bismo izračunali vrednost slučajne promenljive koja ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, moramo je prvo standardizovati.*

Standardizacija slučajne promenljive $Z$ koja ima $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu se izvršava prema sledećem pravilu.

Neka je $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Za $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $s \in \mathbb{R}$ slučajna promenljiva $r \cdot Z + s$ ima $\mathcal{N}(r \cdot m + s, r^2\sigma^2)$ raspodelu.

Na osnovu prethodnog važi da ako $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, tada za $r = \frac{1}{\sigma}$ i $s = -\frac{m}{\sigma}$ dobijamo slučajnu promenljivu

$$Z^* = \frac{1}{\sigma} Z + \left(-\frac{m}{\sigma}\right) = \frac{Z - m}{\sigma},$$

koja ima $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu.

Tada se izračunavanje vrednosti funkcije raspodele proizvoljne normalne slučajne promenljive može svesti na vrednosti funkcije raspodele standardne normalne slučajne promenljive $Z^*$ i to na sledeći način

$$F_Z(x) = P(\{Z \le x\}) = P\left(\left\{\frac{Z-m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\right\}\right) = P\left(\left\{Z^* \le \frac{x-m}{\sigma}\right\}\right)$$
$$= F_{Z^*}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Slično, važi

$$P(\{a \le Z < b\}) = P\left(\left\{\frac{a-m}{\sigma} \le \frac{Z-m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma}\right\}\right)$$
$$= P\left(\left\{\frac{a-m}{\sigma} \le Z^* < \frac{b-m}{\sigma}\right\}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

za $a < b$.

Matematičko očekivanje za slučajnu promenljivu $Z : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ iznosi $E(Z) = m$, dok je disperzija $\sigma^2(Z) = \sigma^2$. Očigledno je za $Z^* : \mathcal{N}(0,1)$ $E(Z^*) = 0$ i $\sigma^2(Z^*) = 1$.

# PRIMERI

## *Postupak određivanja vrednosti iz tablica za Normalnu raspodelu*

**Primer 7.** Slučajna promenljiva $X$ je raspoređena po normalnoj raspodeli sa $m = 4$ i $\sigma^2 = 25$. Odrediti verovatnoću $P(2 \le X \le 9)$.

**Rešenje.**

$P(2 \le X \le 9) = P\left(\frac{2-4}{5} \le \frac{X-4}{5} \le \frac{9-4}{5}\right) = P\left(-\frac{2}{5} \le X^* \le 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-0,4) = 0,34134 + 0,15542 = 0,49676$
(zbog neparnosti važi da je $\Phi(-0,4) = -\Phi(0,4)$).

**Primer 8.** Odrediti vrednost $x$ za koju je: a) $\Phi(x) = 0,47500$,

b) $\Phi(x) = 0,47000$.

**Rešenje.**

Iz tablice za normalnu raspodelu možemo naći da je za $x = 1,96$ $\Phi(1,96) = 0,47500$.

U tablici za normalnu raspodelu se ne može naći vrednost za $x$ takvo da je $\Phi(x) = 0,47000$. U tom slučaju se uoči vrednost za $x$ takva da je $\Phi(x)$ najbliža vrednost vrednosti 0,47500. Tada u obzir dolaze:

$x = 1,88$ jer je $\Phi(x) = 0,46995$ i $x = 1,89$ jer je $\Phi(x) = 0,47062$.

Dakle, vrednost za $x$ se nalazi između vrednosti 1,88 i 1,89.

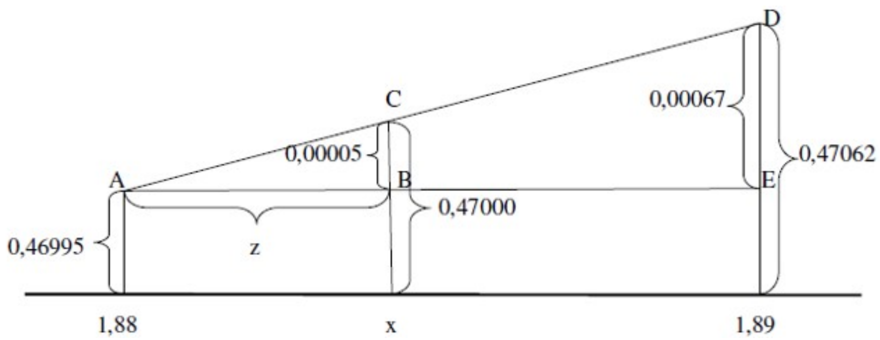
Sa date slike se može videti da je $x = 1,88 + z$. Dakle, potrebno je odrediti $z$. Uočimo, sada trouglove $\Delta ABC$ i $\Delta AED$. Ovi trouglovi su slični odakle imamo da je:

$AB : AE = BC : ED.$

Kako je $AB = z$, $AE = 1,89 - 1,88 = 0,01$, $BC = 0,00005$ i $ED = 0,00067$. Tada imamo:

$\mathrm{z} : 0,01 = 0,00005 : 0,00067, \quad \mathrm{z} = \frac{0,01 \cdot 0,00005}{0,00067} \approx 0,0007.$

Dakle, $\mathrm{x} = 1,8807$.




Slika 5.2 Grafički prikaz problema [Izvor: Autor].

# AUTORSKI VIDEO KLIP 1

*Primeri u vezi sa Normalnom raspodelom.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# PRIMER – NORMALNA RASPODELA

*Primena normalne raspodele na rešavanje raznih problema.*

**Primer 9.** U osiguravajućem društvu je osigurano 10.000 lica istih godina starosti i iste socijalne strukture. Verovarnoća nastupanja smrti u toku iste godine je ista za sva osigurana lica i iznosi 0,006. Svako osigurano lice uplaćuje 1. januara tekuće godine 1200 din, a u slučaju smrti njegovim naslednicima se isplaćuje od strane osiguravajućeg društva 100.000 din. Naći verovatnoću da:

a) osiguravajuće društvo pretrpi gubitak;

b) društvo posluje sa dobiti od najmanje 8.000.000 dinara.

**Rešenje.** Ako označimo sa $S_n$ broj smrtnih slučajeva osiguranika u toku jedne godine, tada važi $S_n : \mathcal{B}(10.000, 0,006)$ i važi $n \cdot p = 10.000 \cdot 0,006 = 60 > 10$ .

a) Osiguravajuće društvo trpi gubitke ako je $100.000 \cdot S_n > 1.200 \bullet 10.000,$ tj. ako je $S_n > 120$. Tada imamo

$$P\{S_n > 120\} = 1 - P\{0 \leq S_n \leq 120\}.$$

Kako je $m = n \cdot p = 60$ i $\sigma = n \cdot p \cdot q = \sqrt{59,74} = 7,72$ imamo:

$$\begin{aligned}P\{0 \leq S_n \leq 120\} = P\left\{\frac{0-60}{7,72} \leq \frac{S_n - m}{\sigma} \leq \frac{120-60}{7,72}\right\} = \\ = P\{-7,77 \leq S_n^* \leq 7,77\} = \\ = \Phi(7,77) - \Phi(-7,77) = 2 \cdot \Phi(7,77) \approx 1.\end{aligned}$$

(Vrednost $\Phi(7,77)$ je pročitana iz tablice koja je data u nastavku ovog predavanja).

b) Društvo će poslovati sa dobiti od najmanje od 8.000.000 din. ako je broj smrtnih slučajeva između 0 i 40, pa tada imamo

$$\begin{aligned}P\{0 \leq S_n \leq 120\} = P\left\{\frac{0-60}{7,72} \leq \frac{S_n - m}{\sigma} \leq \frac{40-60}{7,72}\right\} = \\ = P\{-7,77 \leq S_n^* \leq -2,59\} = \\ = \Phi(-2,59) - \Phi(-7,77) = \Phi(7,77) - \Phi(2,59) = \\ = 0,5 - 0,49520 = 0,0048.\end{aligned}$$

# PRAVILO TRI SIGMA

## *Normalna raspodela ima najveći značaj među raspodelama verovatnoća.*

Veoma je važno napomenuti da za normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ važe sledeća pravila:

$$\begin{aligned}P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,6826, \\ P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \approx 0,9545, \\ P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \approx 0,9973,\end{aligned}$$

tj. na odstojanju 1, 2 ili 3 standardne devijacije levo i desno od $m$ nalazi se 68,26%, 95,45% ili 99,73% svih vrednosti normalne slučajne promenljive $X$. U statističkoj praksi postoji i termin Pravilo tri sigma koji označava da se između $m - 3\sigma$ i $m + 3\sigma$ nalazi $99,73\%$ populacije.

Normalna raspodela u verovatnoći i statistici ima ogroman značaj iz sledećih razloga:

- veliki broj slučajnih promenljivih ili ima normalnu raspodelu ili se približno ponaša u skladu sa normalnom raspodelom,
- određene složenije raspodele se mogu aproksimirati normalnom raspodelom,
- veliki broj slučajnih promenljivih koje služe za verifikaciju statističkih testova imaju normalnu raspodelu.

# AUTORSKI VIDEO KLIP 2

## *O Pravili tri sigma.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# VIDEO KLIP

## *Snimak sa Youtube-a: primer Normalna raspodela.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 6

# Hi kvadrat raspodela. Studentova raspodela

## POJAM $\chi^2$ RASPODELE

*Za $n > 30$ $\chi^2$ raspodela se može aproksimirati Normalnom raspodelom.*

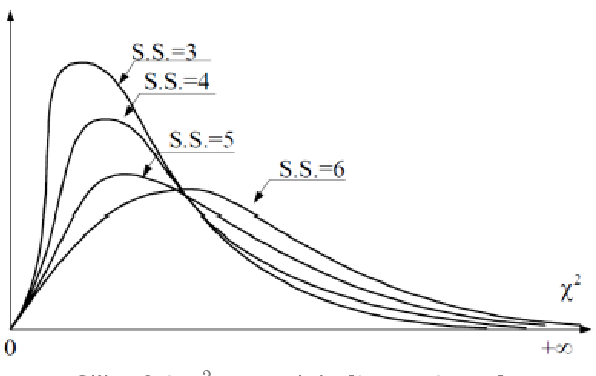
Neka su slučajne promenljive $X_1,\ X_2, \ldots\ X_n$ nezavisne i sve imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu. Za slučajnu promenljivu

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2,$$

kažemo da ima $\chi^2$ -raspodelu (čita se Hi kvadrat raspodela ) sa $n$ stepeni slobode, što označavamo sa $X : \chi_n^2$. Ako među slučajnim promenljivim ima $k$ veza, tada se broj stepeni slobode smanjuje za $k$, tj. tada imamo

$$\chi_{n-k}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2,$$

$\chi^2$ raspodela je raspodela neprekidnog tipa. S obzirom da je izraz za gustinu raspodele slučajne promenljive $\chi^2$ dosta komplikovan, verovatnoće vezane za ovu raspodelu zadaju se tabelarno. Te se verovatnoće daju za broj stepena slobode $n = 1, 2, 3, \ldots 30$ i za broj $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ (obično se zadaju za $\alpha = 0,01,\ \alpha = 0,05\ldots,\ \alpha = 0,95,\ \alpha = 0,98,\ \alpha = 0,99$ ) koji se naziva prag značajnosti. Tablica za $\chi^2$ raspodelu data je kao prilog ovom predavanju. Iz nje se očitava broj $\chi_{n;\alpha}^2$ i taj broj ustvari je veličina koju će slučajna promenljiva $\chi_n^2$ premašiti sa verovatnoćom $\alpha$ tj. $P\left(\{\chi_n^2 > \chi_{n;\alpha}^2\}\right) = \alpha$.




Slika 6.1 $\chi^2$ raspodela [Izvor: Autor].

Sa slike se vidi da je raspodela definisana u oblasti od 0 do $+\infty$. Kriva raspodele nije simetrična, ali sa povećanjem broja stepena slobode *n*, tačka lokalnog ekstremuma tzv. mod raspodele se pomera udesno i $\chi^2$-raspodela se približava normalnoj raspodeli. Za $n > 30$ $\chi^2$-raspodela se može aproksimirati sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(n, 2n)$, jer je

$E(X) = n, \quad \sigma^2(X) = 2n.$

Dakle, slučajna promenljiva $\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Napomenimo na kraju da ako su $\chi_n^2$ i $\chi_m^2$ nezavisne slučajne promenljive tada je:

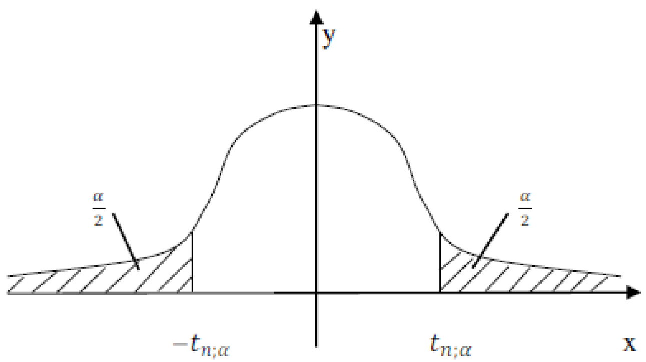
$\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2.$

# POJAM STUDENTOVE RASPODELE

## *Za $n \geq 30$ Studentova raspodela se može aproksimirati Normalnom raspodelom.*

Studentova raspodela ( $t$ -raspodela) je otkrivena od strane Vilijam Goset, hemičar i statističar zaposlenog u Ginisovoj pivskoj kompaniji. Smatrao se studentom koji još uvek uči statistiku, tako da je svoje radove potpisivao pod pseudonimom „student“. Ako su slučajna promenljiva $Y : \mathcal{N}(0,1)$ i slučajna promenljiva $Z : \chi^2$ nezavisne tada slučajna promenljiva: $X = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$ ima Studentovu raspodelu sa $n$ stepeni slobode, u oznaci $X : t_n$. Ova slučajna promenljiva je neprekidnog tipa (videti sliku) i odgovarajuće verovatnoće zadaju se tabelarno. U tablici se nalaze vrednosti $t_{n;\alpha}$, gde je $\alpha$ ( $0 < \alpha < 1$ ) verovatnoća da će $|t_n|$ premašiti broj $t_{n;\alpha}$, tj.

$$P\{|t_n| > t_{n;\alpha}\} = \alpha.$$




Slika 6.2 Studentova raspodela [Izvor: Autor].

**Napomena.** Tablica za Studentovu raspodelu je zadata kao dvostrana (kao na slici), a u praksi se koriste i jednostrane tablice. Ukoliko je $n > 30$, $t_n$ raspodela se može aproksimirati $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom. Zato u tablicama ne figurišu vrednosti veće $n$ od 30.

# PRIMER

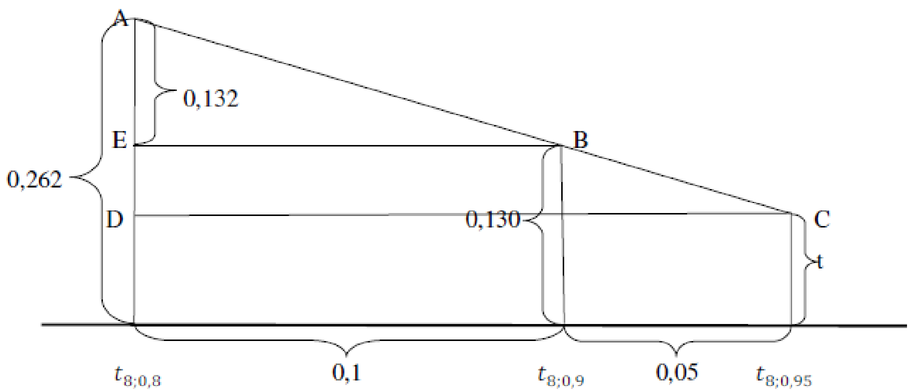
*Primenom sličnosti trouglova i koriščenjem datih vrednosti u tablici za Studentovu raspodelu, možemo odrediti proizvoljnu vrednost ove raspodele (koje nema u tablici).*

**Primer 9.** Iz tablice za Studentovu raspodelu naći vrednost a) $t_{8;\,0,\,05}$, b) $t_{8;\,0,\,95}$.

**Rešenje.**

a) Iz tablice za Studentovu raspodelu može se naći da je $t_{8;\,0,\,05} = 2,\,306$.

b) Vrednost $t_{8;\,0,\,95}$ nema u tablici. Zato uočavamo vrednost $t_{8;\,0,\,8} = 0,\,262$ i $t_{8;\,0,\,9} = 0,\,130$.



Slika 6.3 Primena sličnosti trouglova za određivanje tražene vrednosti [Izvor: Autor].

Tražena vrednost je $t = 0,\,262 - AD$. Sa slike se može videti da su trouglovi $\Delta\,ABE$ i $\Delta\,ACD$ slični. Tada važi da je:

$AE : AD = EB : DC,$ $\qquad 0,\,132 : (0,\,262 - t) = 0,\,1 : 0,\,15,$ $\qquad 0,\,262 - t = \frac{0,\,132 \cdot 0,\,15}{0,\,1},$

tj. imamo $t = 0,\,262 - \frac{0,\,132 \cdot 0,\,15}{0,\,1} = 0,\,064$. Dakle, dobijamo da je $t_{8;\,0,\,95} = 0,\,064$.

# Poglavlje 7

# Uniformna i Fišerova raspodela

## DEFINICIJA UNIFORMNE RASPODELE

*Uniformna raspodela je raspodela neprekidnog tipa. Uniformna raspodela se naziva i ravnomerna raspodela.*

*Uniformna raspodela*, u oznaci $\mathcal{U}(a, b)$, je definisana gustinom:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{za} \quad a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{za} \quad x > b \quad \text{ili} \quad a < x. \end{cases}$$

Gustina raspodele ove slučajne promenljive je tada:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad a < x \\ \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & \text{za} \quad a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{za} \quad x > b. \end{cases}$$

Matematičko očekivanje i disperzija ove raspodele je:

$$E(X) = \int_a^x \frac{xdx}{b-a} = \frac{a+b}{2}, \qquad \sigma^2(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^x \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

## PRIMER

*Kako odrediti vrednosti za Uniformnu raspodelu matematičko očekivanje ove raspodele*

**Primer 10.** Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(-1, b)$. Ako je $\sigma^2(X) = \frac{1}{4}$, odrediti konstantu $b$ i matematičko očekivanje slučajne promenljive X ( $b > 0$).

**Rešenje**: Funkcija gustine za slučajnu promenljivu $X$ data je izrazom

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b+1}, & \text{za} -1 \leq x \leq b, \\ 0, & \text{za} \quad x > b \quad \text{ili} -1 < x. \end{cases}$$

Kako je $\sigma^2(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$ imamo da je

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b+1} dx = \frac{1}{b+1} \int_{-1}^{b} x^2 dx = \frac{1}{b+1} \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{b} = \frac{b^3+1}{3(b+1)} = \frac{b^2-b+1}{3}.$$

Kako je $E(X) = \frac{b-1}{2}$, dobijamo

$$\sigma^2(X) = \frac{b^2-b+1}{3} - \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 = \frac{(b+1)^2}{12} = \frac{1}{4},$$

tj, imamo $(b+1)^2 = 3$.

Rešavanjem ove jednačine dobijamo da je $b_{1/2} = -1 \pm \sqrt{3}$. Kako je po uslovu zadatka $b > 0$, tada je $b = -1 + \sqrt{3}$. Sada se lako dobija matematičko očekivanje slučajne promenljive X

$$E(X) = \frac{-1+\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}.$$

# VIDEO KLIP

## *Snimak sa Youtube-a: primeri*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# FIŠEROVA RASPODELA

## *Fišerova raspodela je raspodela neprekidnog tipa.*

Ako su slučajne promenljive $Y : \chi^2_{n_1}$ i $Z : \chi^2_{n_2}$ nezavisne, tada se za slučajnu promenljivu

$$X = \frac{\frac{Y}{n_1}}{\frac{Z}{n_2}}$$

kaže da ima Fišerovu raspodelu, u oznaci $X : F_{n_1, n_2}$ sa $n_1$ i $n_2$ stepeni slobode.

Izraz za gustinu raspodele ove slučajne promenljive je, kao u slučaju $\chi_2$ i Studentove raspodele, komplikovan pa se vrši tabelarno zadavanje vrednosti. U tabelama se zadaje vrednosti $F_{n_1, n_2, \alpha}$ (najčešće za $\alpha = 0, 01$ i $\alpha = 0, 05$ ) za koje je:

$$P\left\{F_{n_1, n_2} > F_{n_1, n_2, \alpha}\right\} = \alpha.$$

Dakle, ovaj broj se premašuje sa verovatnoćom $\alpha$, koji se naziva prag značajnosti.

Ako je $X : F_{n_1, n_2}$ , tada slučajna promenljiva ima raspodelu $Y = \frac{1}{X}$ ima raspodelu $Y : F_{n_2, n_1}$ , pa se u tablicama daju parovi vrednosti $n_1$ i $n_2$ , za koje i $n_1 > n_2$.

# Poglavlje 8

# Pokazna vežba

## 1. ZADATAK (7 MINUTA)

*Binomna raspodela $\mathcal{B}(5, 0, 04)$ - izračunavanje traženih verovatnoća.*

U seriji jednog proizvoda ima $4\%$ škarta. Slučajno se $5$ puta bira po jedan proizvod iz serije. Naći verovatnoću:

a) da se neće izvući ni jedan škart,

b) da će se najmanje $3$ puta izvući škart.

**Rešenje.**a) Važi da je $p = 0,04$ i $q = 1 - p = 0,96$, a takođe i $n = 5$ i $k = 0$. Tada imamo da je

$$P\{S_5 = 0\} = \binom{5}{0} \cdot 0,04^0 \cdot 0,96^5 \approx 0,81.$$

b) U ovom slučaju je $k = 3, 4, 5$, pa dobijamo da je

$$P\{S_5 = 3\} + P\{S_5 = 4\} + P\{S_5 = 5\} = \binom{5}{3} \cdot 0,04^3 \cdot 0,96^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,04^4 \cdot 0,96$$
$$+ \binom{5}{5} \cdot 0,04^5 \cdot 0,96^0 \approx 0,0006.$$

## 2. ZADATAK (7 MINUTA)

*Binomna raspodela $\mathcal{B}\left(10, \frac{5}{36}\right)$ . Verovatnoća $p = \frac{5}{36}$ predstavlja verovatnoću pojavljivanja zbira $8$, prilikom bacanja dve kockice.*

Dve kockice se bacaju $10$ puta. Odrediti verovatnoću da se tačno $3$ puta dobije zbir $8$.

**Rešenje.** Pri bacanju dve kockice zbir će da bude $8$, ako su rezultati $(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)$. Kako je broj mogućih ishoda, koji su jednakoverovatni, jednak $36$, to je verovatnoća da se dobije zbir $8$ jednaka $\frac{5}{36}$. Dakle, imamo da je $p = \frac{5}{36}$ i $q = \frac{31}{36}$

Da bi se od deset bacanja kockica $3$ puta dobio zbir $8$, verovatnoća je, po Binomnoj šemi, jednaka

$$P\{S_{10}=3\}=\binom{10}{3}p^3q^{10-3}=120p^3q^7=120\cdot\left(\frac{5}{36}\right)^3\cdot\left(\frac{31}{36}\right)^7\approx 0,113.$$

# 3. ZADATAK (15 MINUTA)

## *Slučajna promenljiva $X$ ima Binomnu raspodelu $\mathcal{B}\left(6,\frac{2}{3}\right)$ .*

U kutiji se nalazi dve crvene i četiri plave kuglice. Izvlačimo šest puta po jednu kuglicu sa vraćanjem. Neka slučajna promenljiva $X$ predstavlja broj izvučenih plavih kuglica u tih šest izvlačenja. Odrediti zakon raspodele ove slučajne promenljive, verovatnoću da broj izvučenih plavih kuglica bude bar $4$, kao i njeno matematičko očekivanje.

**Rešenje**.Slučajna promenljiva $X$ ima Binomnu raspodelu, jer u kutiji imamo samo dve vrste kuglica: plave i crvene. Izvlačenje šest puta po jedne kuglice i utvrđivanje da li je izvučena kuglica plave boje možemo shvatiti kao eksperiment koji ponavljamo šest puta. U ovom slučaju je $p=\frac{2}{3}$ $q=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$i $n=6$.

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6 & \binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right) & \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 & \binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 & \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 & \binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5 \end{pmatrix}$$

tj.

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{729} & \frac{12}{729} & \frac{60}{729} & \frac{160}{729} & \frac{240}{729} & \frac{192}{729} & \frac{64}{729} \end{pmatrix}$$

Sada, imamo da je:

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{240}{729}+\frac{192}{729}+\frac{64}{729}=\frac{496}{729}.$$

Matematičko očekivanje slučajne promenljive je:

$$E(X)=n\cdot p=6\cdot\frac{2}{3}=4.$$

# 4. ZADATAK - I DEO (20 MINUTA)

## *Standardizacija slučanih promenljivih koje imaju Normalnu raspodelu i izračunavanje traženih verovatnoća.*

Slučajna promenljiva $X$ ima normalnu raspodelu sa parametrima $m=20$ i $\sigma^2=4$. Odrediti sledeće verovatnoće:

$$a)P(18 < X < 24), \quad c)P(X < 25),$$
$$b)P(|X-20| < 3), \quad d)P(X = 20).$$

**Rešenje.**a) Imamo da je

$$P(18 < X < 24) = P\left(\frac{18-20}{2} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{24-20}{2}\right) = P(-1 < X^* < 2) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0,47725 - 0,34134 = 0,81859.$$

b) Imamo da je

$$P(|X-20| < 3) = P(-3 < X - 20 < 3) = P(17 < X < 23) = P\left(-\frac{3}{2} < X^* < \frac{3}{2}\right) =$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = 2\Phi(1,5) = 2 \cdot 0,43319 = 0,86638.$$

# 4. ZADATAK - II DEO

## *Standardizacija slučanih promenljivih koje imaju Normalnu raspodelu.*

c) Imamo da je

$$P(X < 25) = P\left(X^* < \frac{25-20}{2}\right) = P\left(X^* < \frac{5}{2}\right) = \Phi(2,5) = 0,49379.$$

d) U ovom slučaju je $P(X = 20) = P(X^* = 0) = \varphi(0)$. Kako je $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funkcija gustine standardizovane slučajne promenljive koja ima normalnu raspodelu, tada je $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Konačno je

$$P(X = 20) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,3989.$$

# 5. ZADATAK (12 MINUTA)

## *Aproksimacija Binomne raspodele Normalnom, jer je $400 \cdot 0,2 > 10$.*

Verovatnoća da neki proizvod ne prođe kontrolu je 0,2. Odrediti verovatnoću da kod 400 slučajno izabranih proizvoda broj onih koji nisu prošli kontrolu bude između 70 i 100.

**Rešenje.** Označimo sa $X$ slučajnu promenljivu da izabrani proizvod nije prošao kontrolu. Očigledno važi da ova slučajna promenljiva ima Binomnu raspodelu $\mathcal{B}(400, 0, 2)$. Aproksimiraćemo je Normalnom raspodelom, jer je ispunjeno $400 \cdot 0,2 > 10$.

Tada je $q = 0,8$ i imamo da je

$$P(70 < X < 100) = P\left(\frac{70 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} < X^* < \frac{100 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) =$$
$$= P\left(\frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} < X^* < \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) =$$
$$= \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,49379 + 0,39435 =$$
$$= 0,88814.$$

# 6. ZADATAK (8 MINUTA)

## *Binomna raspodela $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{11}\right)$ je aproksimirana Puasonovom raspodelom $\mathcal{P}(0,9)$, jer je $10 \cdot \frac{1}{11} \approx 0,9$.*

U kutiji je 5 plavih i 50 crnih kuglica. Kolika je verovatnoća da se u 10 nezavisnih izvlačenja sa vraćanjem 3 puta izvuče plava kuglica?

**Rešenje.** Uočimo slučajnu promenljivu $X$ koja predstavlja da je izvučena plava kuglica. Očigledno, ova promenljiva ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{11}\right)$. Naime, ukupan broj kuglica u kutiji je 55, pa verovatnoća da se izvuče plava kuglica iznosi $p = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$. Tada, verovatnoća da ne bude izvučena plava kuglica iznosi $q = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$. Kako se izvodi 10 eksperimenata (izvlačenje kuglice sa vraćanjem iz kutije) imamo da $10 \cdot \frac{1}{11} \approx 0,9$, pa ćemo izvršiti aproksimaciju binomne raspodele, Puasonovom raspodelom. Tada je $\lambda = 0,9$. Tražena verovatnoća, u oznaci $P$, tada je

$$P = \frac{0,9^3}{3!} \cdot e^{-0,9} \approx 0,05.$$

# 7. ZADATAK (5 MINUTA)

## *Primena Puasonove raspodele za izračunavanje tražene verovatnoće.*

Za jedan sat telefonska centrala dobije prosečno 60 poziva. Naći verovatnoću da neće biti ni jednog poziva u periodu od 30 minuta.

**Rešenje.** Period u kome se vrši posmatranje je 1 minut, jer centrala u toku jednog sata prima 60 poziva. Ako nas interesuje situacija da u toku 30 minuta nema poziva, to je zapravo ponavljanje 30 nezavisnih eksperimenata da li će u toku jednog minuta biti poziva. Imamo da je $n = 30$, a interesuje je nas situacija da se ne realizuje nijedan od ovih eksperimenata (po uslovu zadatka). Tada je

$$P = \frac{0,5^0}{0!} \cdot e^{-0,5} \approx 0,61.$$

# 8. ZADATAK (8 MINUTA)

## *Slučajna promenljiva sa Normalnom raspodelom. Određivanje broja studenata na osnovu dobijene verovatnoće.*

Pretpostavimo da telesna težine 800 studenata imaju normalnu raspodelu sa srednjom težinom 66kg i standardnim odstupanjem 5kg. Naći broj studenata čija je težina između 65kg i 75kg.

**Rešenje.** Imamo da je $n = 800$, gde za slučajnu promenljivu $X$, koja predstavlja telesnu težinu slučajno izabranog studenta, važi $X : \mathcal{N}(66; 5)$. Tada je

$$P(65 < X < 75) = \Phi\left(\frac{75-66}{5}\right) - \Phi\left(\frac{65-66}{5}\right) =$$
$$= \Phi(1,8) + \Phi(0,2) = 0,46407 + 0,07926 =$$
$$= 0,5433.$$

Dakle, $54,33\%$ studenata ima telesnu težinu između 65kg i 75kg, tj. od 800 studenata to iznosi 434 studenata.

# 9. ZADATAK (8 MINUTA)

## *Izračunavanje tražene verovatnoće za slučajnu promenljivu koja ima Studentovu raspodelu.*

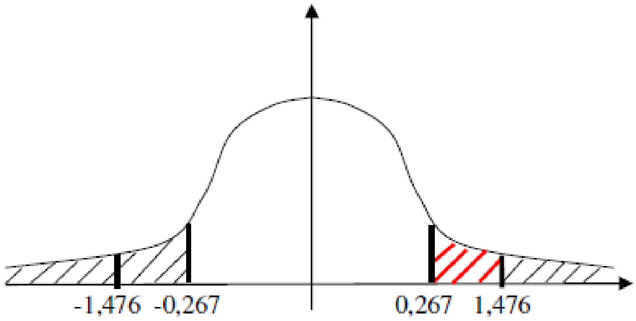
Odrediti $P(0,267 \leq X \leq 1,476)$ ako je $X : t_5$.

**Rešenje.** Kao što smo na predavanju rekli date su dvostrane tablice za Studentovu raspodelu, a mi treba da odredimo samo verovatnoću za jedan deo (šrafiran crvenom bojom). To radimo na sledeći način

$$P(0,267 \leq X \leq 1,476) = \frac{1}{2}(t_5(0,267) - t_5(1,476)) = \frac{1}{2}(0,8-0,2) = 0,3.$$

Vrednost $t_5(0,267)$ i $t_5(1,476)$ čitamo iz odgovarajuće tablice, pri čemu je ovde dat stepen slobode (iznosi 5). Iz tablice se očitavaju odgovarajuće verovatnoće.

Napomenimo da je bilo potrebno naći, npr. $P(0,3 \leq X \leq 1,5)$, a kako je u datoj tablici za vrednost 0,3 i 1,5, ne postoje odgovarajuće verovatnoće, tada bi bilo potrebno, najpre, traćene verovatnoće odrediti primenom načina koji je izložen na predavanjima, a tek onda izračunati $P(0,3 \leq X \leq 1,5)$, na način kao u ovom zadatku.



Slika 8.1 Grafički prikaz problema [Izvor: Autor].

# ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

## *Zadaci za samostalan rad studenata.*

**Zadatak.** Aparat se sastoji od 100 delova. Verovatnoća otkaza jednog dela u toku godine iznosi 0,01, pri čemu rad bilo kog dela ne zavisi od ispravnosti preostalih delova. Koliko je verovatnoća da u toku godine otkaže više od 2 dela?

**Zadatak.** Prosečno 4 % proizvoda je škart. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj ispravnih proizvoda od 150 posmatranih. Izračunati verovatnoću

(a) da će više od 140 proizvoda biti ispravno,

(b) da će više od 5 proizvoda biti neispravno.

**Zadatak.** Slučajna promenljiva $Z$ ima standardizovanu normalnu raspodelu. Odrediti $c$ tako da važe jednakosti:

(a) $\Phi(c) = 0.9838,$ (b) $P(Z \leq c) = 0.6718,$ (c) $P(c \leq Z) = 0.121,$ (d) $P(|Z| \leq c) = 0.6542.$

**Zadatak.** Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-3, 5)$.

(a) Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.

(b) Izračunati $F_X(0),\ P(|X-3| \leq 5)$ i $P(1 < 2 - X < 10)$.

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 10 minuta; 4. 15 minuta.

# Zaključak

## NEKE VAŽNIJE RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

*Binomna, Puasonova, Normalna (Gausova), Hi kvadrat, Studentova, Uniformna i Fišerova raspodela.*

U ovoj lekciji smo obradili:

- Binomnu raspodelu,
- Puasonovu raspodelu,
- Normalnu raspodelu,
- Hi-kvadrat raspodelu,
- Studentovu raspodelu,
- Uniformnu raspodelu
- Fišerovu raspodelu.

Osim Binomne i Uniformne raspodele, sve ostale pomenute raspodele se zadaju tablično i veoma je bitno ovladati pravilnim korišćenjem ovih tablica, jer ćemo ih u daljim lekcijama koristiti.

LITERATURA:

M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.
Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.