UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Jednačina ravni u prostoru. Uzajamni odnos dve ravni

Lekcija 13

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 13

JEDNAČINA RAVNI U PROSTORU. UZAJAMNI ODNOS DVE RAVNI

Uvod

ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\mathbb{E}^3$

Jednačina ravni, jednačina prave, uzajamni odnos prave i ravni.

Analitička geometrija se može proučavati u bilo kom vektorskom prostoru sa uočenim skalarnim proizvodom i ona se bavi izučavanjem osobina geometrijskih pojava korišćenjem vektorskog računa.

Ovde će biti izučavana analitička geometrija u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa uočenom kananskom bazom i uočenim euklidskim skalarnim proizvodom, tj. u prostoru $\mathbb{E}^3$.

Osnovni pojmovi analitičke geometrije u ovom prostoru su tačka, linija i površ. Precizne definicije linije i površi ovde neće biti date. Pomenimo samo da pojam linije je mnogo širi od pojma prave, kao i da je pojam površi mnogo širi od pojma ravni. U ovoj i narednim lekcijama će biti izučavana analitička intepretacija prave i ravni u prostoru $\mathbb E^3. Takođe, izučavaćemo i međusobni odnos dve prave, dve ravni, kao i prave i ravni.

U ovoj lekciji ćemo se baviti određivanjem jednačine ravni, određivanjem odstojanja tačke od ravni, kao i ispitivanjem uzajamnog položaja dve ravni.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Zadatak analitičke geometrije

TAČKE U PROSTORU

Zadatak analitičke geometrije u vezi sa tačkom u prostoru jeste određivanje rastojanja između dve tačke, kao i određivanje koordinate tačke koja deli datu duž u datoj razmeri.

U prostoru $\mathbb{R}^3$ tačka $M(x_0, y_0, z_0)$ predstavlja, s jedne strane, tačku tog prostora (afini pristup), dok, takođe, predstavlja i vektor (vektor položaja te tačke) koji je određen datom uređenom trojkom (vektorski pristup).

U vezi sa pojmom tačke u analitičkoj geometriji postoje dva zadatka:

1. Izračunati rastojanje između dve tačke M_1 i M_2;

2. Odrediti kordinate tačke M koja datu duž M_1M_2 deli u datoj razmeri.

Dakle, ako je $Oxyz$ pravougli Dekartov koordinatni sistem, svaka tačka M jednoznačno određuje uređenu trojku brojeva (x_0, y_0, z_0) koji predstavljaju njene koordinate. Ako su date dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ važi da je:

$$\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Takođe, ako je $M(x_0, y_0, z_0)$ tačka sa duži M_1M_2 i važi $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$, tada je:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Specijalno, ako je, $\lambda = 1$, tj. ako se tačka M nalazi na sredini duži M_1M_2 tada se dobijaju formule kako se računaju koordinate središta duži:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

PRIMER

Određivanje koordinata tačke koja datu duži deli u određenom odnosu. Određivanje dužine date duži.

Neka su date tačke $A(-1,3,2)$ i $B(-4,0,2)$. Odrediti koordinate tačke koja duž AB deli u odnosu $1:2$. Zatim, odrediti dužinu duži AB.

Rešenje. Označimo traženu tačku sa M. Važi da je $\lambda = \frac{1}{2}$, pa je

$$x_M = \frac{-1+\frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}} = -2,\; y_M = \frac{3+\frac{1}{2}\cdot 0}{1+\frac{1}{2}} = 2,\; z_M = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}} = 2.$$

Dakle, tačka važi da je $M(-2,2,2)$.

Odredimo sada dužinu duži AB. Kako je $\overrightarrow{AB} = (-4-(-1), 0-3, 2-2) = (-3,-3,0)$. Tada je

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2} = 3\sqrt{2}.$$

PRAVA I RAVAN U PROSTORU

Zadatak analitičke geometrije u vezu sa ravni i pravom u prostoru jeste određivanje njihove jednačine u zavisnosti od datih elemenata, kao i određivanje njihovog uzajamnog odnosa.

U vezi s pojmom ravni zadatak analitičke geometrije jeste, s jedne strane, određivanje jednačine ravni sa što manjim tj. najmanjim mogućim brojem zadatih podataka o njoj. Poznato je da je ravan jednoznačno određena sa tri nekolinearne tačke, s jednom pravom i tačkom van nje, s dve prave koje se seku, s dve paralelne prave i dr. Isto tako, položaj ravni u prostoru, možemo odrediti pomoću jedne tačke koja joj pripada i jednog (nenula) vektora koji je normalan na tu ravan, zatim pomoću dve tačke koje pripadaju toj ravni i vektorom koji je paralelan s tom ravni itd. S druge strane, može biti postavljeno pitanje njenog međusobnog odnosa i položaja s nekim drugim geometrijskim objektom.

Zadatak analitičke geometrije u vezi sa pravom je sličan, kao i u vezi sa ravni. Poznato je da je prava jednoznačno određena dvema različitim tačaka, kao i da kroz datu tačku paralelno datom vektoru može prolazi tačno jedna prava. Zbog toga jednačinu prave možemo zapisivati u raznim oblicima. U ovom slučaju, kao i kod ravni, može se postaviti pitanje uzajamnog odnosa prave sa nekom drugom pravom ili nekim drugim geometrijskim objektom. Mi ćemo se ovde baviti samo njenim odnosom sa datom ravni.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Jednačina ravni u E3

OPŠTI OBLIK JEDNAČINE RAVNI. PRIMER

Jednačina ravni se može definisati ako je data jedna tačka te ravni, kao i njen vektor normale.

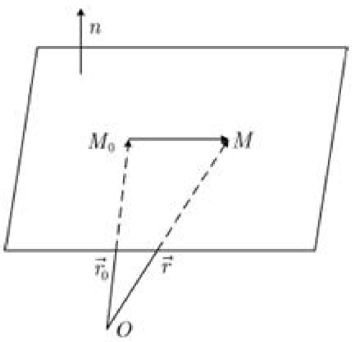
Ravan u prostoru $\mathbb{E}^3$ u oznaci π je određena tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom normale $\vec{n} = (A, B, C)$ na ravan π. Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka koja pripada ravni π i neka su sa $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ i $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$označeni tim redom vektore položaja tačaka M i M_0 (videti sliku). Tada vektor

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

pripada ravni π. Tada važi da je

$$\vec{n} \circ \overline{M_0M} = 0,$$

jer vektor $\overrightarrow{M_0M}$ pripada ravni π, pa je vektor normale ravni π normalan na njega.



Slika 2.1 Ravan π određena tačkom M_0 i vektorom normale ravni π (izvor: Autor).

Tada se jednačina ravni π određena sa $\vec{n} \circ \overline{M_0M} = 0$ naziva vektorska jednačina ravni π. Iz ove jednačine se, primenom formule za izračunavanje skalarnog proizvoda, dalje imamo

$$\pi : \vec{n} \circ \overrightarrow{M_0M} = 0 \;\Leftrightarrow\; (A, B, C) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Primenjujući skalarni proizvod definisan u $\mathbb{E}^3$ na poslednju jednačinu dobijamo

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ova jednačina se naziva skalarna jednačina ravni π kroz jednu tačku. Njenim sređivanjem dobija se jednačina

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

gde je $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. Ova jednačina predstavlja opšti skalarni oblik jednačine ravni π.

Primer. Koordinatne ravni Oxy, Oxz i Oyz se zadaju preko jednačina $z = 0$, $y = 0$ i $x = 0$, tim redom. Do ovih jednačina se lako može doći ako se uzme u obzir da sve one prolaze kroz koordinatni početak $O(0, 0, 0)$, a vektor normale je ort $\vec{k} = (0, 0, 1)$ (ili $-\vec{k}$) za Oxy ravan, ort $\vec{j} = (0, 1, 0)$ (ili $-\vec{j}$) za Oxz ravan i ort $\vec{i} = (1, 0, 0)$ (ili $-\vec{i}$) za Oyz ravan. Tada se primenom skalarne jednačine ravni kroz jednu tačku dolazi do pomenutih jednačina.

SEGMENTNI OBLIK JEDNAČINE RAVNI. PRIMER

Segmentni oblik jednačine ravni govori o tome koliko iznose odsečci koje posmatrana ravan (ako ih pravi) odseca na koordinantnim osama.

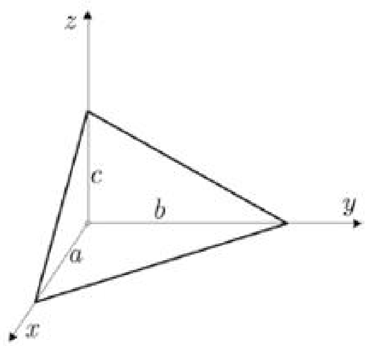
Ako se iz opšteg oblika jednačine ravni $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ napišemo $\pi : Ax + By + Cz = -D$ i ako se ova jednačina, pod predpostavkom daje $D \neq 0$ podeli sa $-D$ dobija se

$$\pi : \frac{x}{-\frac{A}{D}} + \frac{y}{-\frac{B}{D}} + \frac{z}{-\frac{C}{D}} = 1.$$

Ako uvedemo smene $a = -\frac{A}{D}$, $b = -\frac{B}{D}$ i $c = -\frac{C}{D}$, tada prethodna jednačina postaje

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Veličine a, b i c tim redom su odsečci na osi Ox, Oy i Oz (videti sliku). Ova jednačina predstavlja segmetni oblik jednačine ravni π.



Slika 2.2 Segmentni oblik jednačine ravni (izvor: Autor).

U slučaju da je $D=0$ ravan π prolazi kroz koordinatni početak i ne pravi odsečke na koordinatnim osama, pa se takva ravan ne može predstaviti u segmentnom obliku.

Napomena. Prilikom zadavanja opšteg oblika jednačina ravni može sedesiti da je neki od koeficijenata $A=0 \vee B=0 \vee C=0$ (svakako slučaj $A=B=C=0$ je trivijalan). To znači da se prilikom prelaska na segmentni oblik jednačine ravni odgovarajući parametar (x, y ili z) uz koji stoji neki od ovih koeficijenata neće ni pojaviti, a to dalje, geometrijski znači da ta ravan ne pravi odsečke na odgovarajućim osama, tj. da je takva ravan paralelna sa njima.

Primer. Ravan $z=2$ jeste ravan koja ne seče ni Ox, niti Oy osu (tj. paralelna je s njima), a na Oz osi odseca odsečak dužine 2. Ravan $x+y-2=0$ ili u segmentnog obliku $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ ne seče Oz osu (paralelna je sa njom), a Ox i Oy osu seče u tačkama $(2,0,0)$ i $(0,2,0)$ tim redom.

JEDNAČINE RAVNI ODREĐENA S TRI NEKOLINEARNE TAČKE

Kroz tri nekolinearne tačke može se postaviti tačno jednu ravan.

Neka su date tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ i $M_3(x_3,y_3,z_3)$ koje pripadaju ravni π. Uočimo jednu proizvoljnu tačku $M(x,y,z)$ iz ravni π (videti sliku 2) i formirajmo vektore

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= (x-x_1, y-y_1, z-z_1),\\ \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),\\ \overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1).\end{aligned}$$

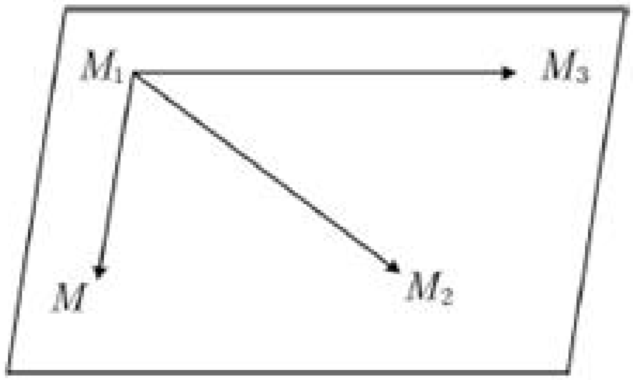
Kako su ova tri vektora komplanarna jer pripadaju ravni π, tada je:

$$\left[\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]=0,$$

tj.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

što predstavlja jednačinu ravni π kroz tri tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ i $M_3(x_3,y_3,z_3)$.



Slika 2.3 Jednačine ravni određena sa tri nekolinearne tačke (izvor: Autor).

PRIMER

Jednačina ravni određena s tri nekolinearne tačke.

Date su tačke $A(3,2,1),\ B(1,2,2)$ i $C(5,0,-1).$ Odredi jednačinu ravni π koju određuju ove tri tačke.

Rešenje. Jednačina ravni kroz tri nekolinearne tačke dobija se iz uslova

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1-3 & 2-2 & 2-1 \\ 5-3 & 0-2 & -1-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako je

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1-3 & 2-2 & 2-1 \\ 5-3 & 0-2 & -1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-3 & y-2 \\ -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{matrix} =$$
$$2y-4+4z-4+2x-6-4y+8 = 2x-2y+4z-6,$$

važi da je $2x-2y+4z-6=0$, tj. (nakon skraćivanja sa 2) dobijamo $\pi : x-y+2z-3=0.$

Napomena. U nekim slučajevima može da se dobije identitet 0=0 prilikom rešavanja prethodne determinante. To znači da date tačke nisu nekolinearne i da ne mogu da odrede jednu ravan.

JEDNAČINA RAVNI ODREĐENA DVEMA TAČKAMA I VEKTOROM PARALELNIM SA NJOM

Slično kao i prilikom definisanja jednačine ravni kroz tri nekolinearne tačke, ravan se može definisati i dvema tačkama koje joj pripadaju i vektorom koji je paralelan sa njom.

Neka ravan π pripadaju tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i paralelna je sa vektorom $\vec{p} = (l, m, n)$ (zapravo paralelna je sa pravom koja je nosač ovog vektora). Uočimo proizvoljnu tačku $M(x, y, z)$ iz ravni π. Tada su vektori $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{MM_2}$ i vektor $\vec{p}$ komplanarni vektori pa dobijamo da važi

$$\pi : \left[\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}\right] = 0,$$

tj.

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

Poslednja jednačina je jednačina ravni π određene dvema tačkama M_1 i M_2 i vektorom $\vec{p}$.

Poglavlje 3

Rastojanje tačke do ravni

FORMULA ZA ODREĐIVANJE RASTOJANJA TAČKE DO RAVNI

Rastojanje tačke do neke ravni predstavlja rastojanje te tačke do svoje ortogonalne projekcije u tu ravan.

Da bismo odredili rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ do ravni $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, u oznaci $d(M_1, \pi)$ odredićemo, najpre, ortogonalnu projekciju tačke M_1 na ravan π.

Napomena. Pojam ortogonalna projekcija tačke podrazumeva situaciju da kroz tačku M_1 postavimo pravu koja je normalna na ravan π i odredimo tačku prodora M_0. Tačka M_0 se naziva ortogonalna projekcija tačke M_1 na ravan π. Slično se može definisati i za pravu.

Jasno je da rastojanje između tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i tačke $M_0(x, y, z)$ čije koordinate ne znamo, predstavlja traženo rastojanje. Uočimo, stoga, vektor $\vec{d} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$,pri čemu važi $||\vec{d}\,|| = d(M_1, \pi)$. Očigledno je da su vektor $\vec{d}$ i vektor normale $\vec{n} = (A, B, C)$ ravni π kolinearni vektori. Tada, oni mogu biti istog smera, pa je $\cos(\measuredangle(\vec{d}, \vec{n})) = \cos 0 = 1$ ili suprotnog smera, pa je $\cos(\measuredangle(\vec{d}, \vec{n})) = \cos \pi = -1$. Iz formule za određivanje skalarnog proizvoda imamo

$$\vec{d} \circ \vec{n} = ||\vec{d}\,|| \cdot ||\vec{n}|| \cdot \cos(\measuredangle(\vec{d}, \vec{n})) = \pm||\vec{d}\,|| \cdot ||\vec{n}||.$$

Tada je

$$\left|\vec{d} \circ \vec{n}\right| = ||\vec{d}\,|| \cdot ||\vec{n}||. \qquad (*)$$

Sada imamo da je

$$\left|\vec{d} \circ \vec{n}\right| = |(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \circ (A, B, C)| = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax + By + Cz)|.$$

Kako tačka $M_0(x, y, z)$ pripada ravni π, tada je $Ax + By + Cz = -D$i imamo da je

$$\left|\vec{d} \circ \vec{n}\right| = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|.$$

Konačno, koristeći jednakost (*), imamo da je

$$||\vec{d}|| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{||\vec{n}||}.$$

Znajući da je $||\vec{n}|| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, rastojanje date tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ do ravni $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$se izračunava po formuli

$$d(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

PRIMER

Određivanje rastojanja date tačke do date ravni.

Naći rastojanje tačke $M_1(1, 2, 3)$ od ravni $\pi : x - y + 3z + 2 = 0$.

Rešenje. Iz odgovarajuće formule imamo da je:

$$d(M_1, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

Poglavlje 4

Uzajamni položaj ravni

UZAJAMNI POLOŽAJ DVE RAVNI. PRIMER

Ravni u prostoru se mogu seći, mogu biti paralelne ili da se poklapaju. Uzajamni odnos dve ravni određuje iz uzajamnog položaja njihovih vektora normala.

Neka su date dve ravni π_1 i π_2 u obliku

$$\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

gde su vektori $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ vektori normala ravni π_1 i π_2, tim redom. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

• Ravni π_1 i π_2 su paralelne, tj. njihovi vektori normala su kolinearni, pa je uslov paralelnosti ravni π_1 i π_2 dat sa

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_1} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

• Ravni π_1 i π_2 se seku, tj. njihovi vektori normala ne mogu biti kolinearni, tj.važi

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_1} \neq \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \neq \lambda \overrightarrow{n_2}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \vee \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

• Ravni π_1 i π_2 se poklapaju, pod uslov da važi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Da sumiramo: ako vektori normala posmatranih ravnih nisu kolinearni, ravni se seku. U slučaju da su oni kolinearni posmatrane ravni mogu biti ili paralelne ili da se poklapaju, što se utvrđuje datim uslovima.

Primer. Odrediti uzajmni položaj između ravni $\pi_1 : 3x + 2y + z + 5 = 0$ i $\pi_2 : 2x - y + 3z + 2 = 0$.

Rešenje. Kako važi da je

$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-1}$$

posmatrane ravni se seku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: određivanje jednačine ravni koja je normalna na presečnu pravu dve ravni o koja prolazi kroz određenu tačku.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Ugao između dve ravni. Pramen ravni

UGAO IZMEĐU DVE RAVNI. PRIMER

Ugao između dve ravni je jednak uglu između njihovih vektora normala.

Pod uslovom da se date ravni seku, može se postaviti pitanje određivanja ugla između ravni π_1 i π_2. Traženi ugao tj. kosinus tog ugla, predstavlja kosinus ugla između njihovih vektora normala koji se izračunava preko skalarnog proizvoda tih vektora. Kosinus ugla između dve ravni se izračunava po formuli

$$\cos(\measuredangle(\pi_1,\pi_2)) = \cos(\measuredangle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})) = \frac{\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}}{||\overrightarrow{n_1}||\cdot||\overrightarrow{n_2}||}$$

$$= \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Primenom inverzne trigonometrijske funkcije, y=\arccos x određujemo i ugao između dve ravni.

Kao specijalni slučaj prethodnog, može se vršiti provera da li se dve ravni seku pod pravim uglom. Tada je

$$\measuredangle(\pi_1,\pi_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\measuredangle(\pi_1,\pi_2)) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 = 0.$$

Primer. Odrediti ugao između ravni $\pi_1 : 3x+2y+z+5=0$i $\pi_2 : 2x-y+3z+2=0.$

Rešenje. Imamo da je

$$\cos(\measuredangle(\pi_1,\pi_2)) = \cos(\measuredangle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})) = \frac{\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} =$$

$$= \frac{3\cdot 2-2\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Tada je $\measuredangle(\pi_1,\pi_2) = \frac{\pi}{3}$.

PRAMEN RAVNI

Dve ravni koje se seku određuju njihovu presečnu pravu p. Pramen ravni predstavlja skup svih ravni koje se sa njima seku po presečnoj pravi p.

Neka su date dve ravni π_1 i π_2 u skalarnom opštem obliku

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

gde su vektori $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ vektori normala ravni π_1 i π_2, tim redom i pretpostavimo da se one seku, tj da važi

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \ \vee \ \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \ \vee \ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Jednačina svih ravni (izuzev ravni π_1 i π_2 koje su već date) koje prolaze kroz presečnu pravu ovih se naziva pramen ravni i određuje po formuli

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (8 MINUTA)

Provera da li data tačka pripada datoj ravni.

Ispitati da li neka od tačaka $A(1,1,1)$, $B(2,1,-3)$ i $C(4,1,5)$ pripada ravni $\pi : x-2y+z+3=0$.

$\mathbf{Rešenje.}$Za tačku $A(1,1,1)$, kako je $x=y=z=1$, zamenom ovih koordinata u jednačini ravni π dobijamo

$$1\cdot 1-2\cdot 1+1\cdot 1+3=3\neq 0,$$

pa dobijamo da $A\notin\pi$.

Za tačku $B(2,1,-3)$, kako je $x=2, y=1, z=-3$, zamenom ovih koordinata u jednačini ravni π dobijamo

$$1\cdot 2-2\cdot 1+1\cdot(-3)+3=0,$$

pa dobijamo da $B\in\pi$.

Za tačku $C(4,1,5)$, kako je $x=4, y=1, z=5$, zamenom ovih koordinata u jednačini ravni π dobijamo

$$1\cdot 4-2\cdot 1+1\cdot 5+3=10\neq 0,$$

pa dobijamo da $C\notin\pi$.

ZADATAK 2 (20 MINUTA)

Određivanje vektora normale za date ravni, kao i segmentnog oblika.

Date su ravni:

a) $x+y+z=0$

b) $x-y+2z-5=0$

c) $x+2y=0$

d) $z = 1$

e) $y = 0$

Za svaku od datih ravni naći vektor normale, bar jednu tačku koja pripada toj ravni i odgovarajuće odsečke na koordinatnim osama koje ove ravne prave.

Rešenje. a) U ovom slučaju je $A = 1,\ B = 1$ i $C = 1$, pa je vektor normale ove ravni $\vec{n} = (1,1,1)$. Jedna tačka koja pripada ovoj ravni je koordinatni početak $O(0,0,0)$, što se neposredno proverava zamenom njenih koordinata u jednačini ravni. Data ravan ne pravi odsečke na koordinatnim osama, s obzirom da ona sadrži koordinatni početak. To se može videti i iz činjenice da se ne u ovom slučaju ne može preći na segmetni oblik date ravni.

b) U ovom slučaju je $A = 1,\ B = -1$ i $C = 2$, pa je vektor normale ove ravni $\vec{n} = (1,-1,2)$. Jedna tačka koja pripada ovoj ravni je $PO(5,0,0)$, što se neposredno proverava zamenom njenih koordinata u jednačini ravni.
Prelaskom na segmetni oblik date ravni imamo

$$x - y + 2z - 5 = 0 \ \Leftrightarrow\ x - y + 2z = 5\,/:5 \ \Leftrightarrow\ \frac{x}{5} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{\frac{5}{2}} = 1.$$

Dakle, odsečci na koordinatnim osama Ox, Oy i Oz su $5, -5$ i $\frac{5}{2}$, tim redom.

c) U ovom slučaju je $A = 1, B = 2$ i $C = 0$, pa je vektor normale ove ravni $\vec{n} = (1,2,0)$. Jedna tačka koja pripada ovoj ravni je koordinatni početak $O(0,0,0)$, što se neposredno proverava zamenom njenih koordinata u jednačini ravni. Data ravan ne pravi odsečke na koordinatnim osama, s obzirom da ona sadrži koordinatni početak. To se može videti i iz činjenice da se ne u ovom slučaju ne može preći na segmetni oblik date ravni.

d) U ovom slučaju je $A = 0,\ B = 0$ i $C = 1$, pa je vektor normale ove ravni $\vec{n} = (0,0,1)$. Jedna tačka koja pripada ovoj ravni je koordinatni početak $P(0,0,1)$, što se neposredno proverava zamenom njenih koordinata u jednačini ravni. Data ravan je paralelena sa Oxy ravni, pa ne pravi odsečke na koordinatnim osama Ox i Oy , dok na koordinatnoj osi Oz taj odsečak iznosi 1, što se vidi iz same jednačine ravni.

e) U ovom slučaju je $A = 0, B = 1$ i $C = 0$, pa je vektor normale ove ravni $\vec{n} = (0,1,0)$. Jedna tačka koja pripada ovoj ravni je koordinatni početak $O(0,0,0)$, što se neposredno proverava zamenom njenih koordinata u jednačini ravni. Data ravan je zapravo Oxz ravan, pa ne pravi odsečke na koordinatnim osama (a sadrži i koordinatni početak).

ZADATAK 3 (8 MINUTA)

RAVAN: Jednačina ravni kroz jednu tačku ako je dat vektor normale.

Napisati jednačinu ravni π koja sadrži tačku $M(2,3,-4)$ i normalna je na vektor $\vec{n} = (1,-1,2)$ u opštem i segmentnom obliku.

Rešenje. Koristimo formulu za opšti oblik jednačine ravni

$$\pi : 1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y-3) + 2 \cdot (z+4) = 0,$$

tj. $\pi : x - y + 2z + 9 = 0.$ Segmentni oblik jednačine ravni glasi

$$\pi : x - y + 2z = -9 / : (-9)$$

tj.

$$\pi : \frac{x}{-9} + \frac{y}{9} + \frac{z}{-\frac{9}{2}} = 1.$$

ZADATAK 4 (15 MINUTA)

RAVAN: Određivanje presečne tačke za tri ravni.

Odrediti presek ravni $\alpha : x - y + 2z - 8 = 0,$ $\beta : -2x - 3y + z - 9 = 0$ i $\gamma : 3x - y + 3z - 9 = 0.$

Rešenje. Presek ovih ravni dobijamo rešavajući sistem koji čine jednačine ovih ravni. To je sistem od tri jednačine sa tri nepoznate.

Ako ovaj sistem ima jedinstveno rešenje sve tri ravni imaju tačno jednu zajedničku tačku.

Ako ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja, tada se ove ravni seku po jednoj pravi. U tom slučaju te ravni pripadaju istom snopu ravni. U najjednostavnijem slučaju ova sistem će imati beskonalno mnogo rešenja ako se sve tri ravni poklapaju.

Na kraju može se desiti da posmatrani sistem nema rešenja. To znači da ove ravni nemaju zajedničkih tačaka, tj. da su paralelne.

Rešimo sada prethodni sistem Kramerovim pravilom. Tada je determinanta sistema

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

pa sistem ima jedinstveno rešenje.

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -10, \; D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 25.$$

Sada je $x = \frac{-10}{5} = -2$, $y = \frac{0}{5} = 0$ i $z = \frac{25}{5} = 5$. Dobili smo da dati sistem ima jedinstveno rešenje i to je presečna tačka $A(-2, 0, 5)$ ravni α, β i γ.

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Kroz tri nekolinearne tačke može se postaviti tačno jednu ravan.

Date su tačke $A(2,1,0)$, $B(-1,1,3)$ i $C(3,-1,4)$. Odredi jednačinu ravni π koju određuju ove tri tačke.

Rešenje. Jednačina ravni kroz tri nekolinearne tačke dobija se iz uslova

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1-2 & 1-1 & 3-0 \\ 3-2 & -1-1 & 4-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako je

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (x-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sređivanjem prethodnog dobijamo $6\cdot(x-2) - (-15)(y-1) + 64z = 0$, tj. nakon sređivanja dobijamo $\pi : 2x + 5y + 2z - 9 = 0$.

ZADATAK 6 (9 MINUTA)

Određivanje rastojanje između dve ravni.

Odrediti rastojanje između ravni $\alpha : 2x + y - z - 1 = 0$i $\beta : 2x + y - z - 3 = 0$.

Rešenje. Važi da je $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (2,1,-1)$. Kako su vektori normala datih ravni jednaki, ove ravni se ili poklapaju ili su paralelne. Kako važi

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$

date prave su paralelne. Rastojanje između datih pravih u ovom slučaju računamo kao rastojanje jedne (proizvoljne) tačke sa npr. ravni α od ravni β. Uočimo stoga tačku $A(0,0,-1)$ ravni α i odredimo njeno rastojanje od ravni β. Tada je

$$d(\alpha,\beta) = d(A,\beta) = \frac{|2\cdot 0 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

ZADATAK 7 (10 MINUTA)

Određivanje geometrijskog mesta tačaka podjednako udaljenih od datih tačaka.

Date su tačke $A(1,2,3)$ i $B(-1,0,4)$. Naći geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od tačaka A i B.

Rešenje. Ovo geometrijsko mesto tačaka očigledno predstavlja simetralnu ravan duži AB. To je ravan koja je normalna na vektor $\overrightarrow{AB}$ i koja sadrži tačku $S(x,y,z)$ koja je sedište te duži. Odredimo sada tu ravan. Iz uslova da je $d(A,S)=d(S,B)$, tj. da je $d^2(A,S)=d^2(S,B)$ dobijamo

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(x+1)^2+y^2+(z-4)^2,$$

odnosno

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=x^2+2x+1+y^2+z^2-8z+16.$$

Nakon skraćivanja veličina x^2, y^2 i z^2 u prethodnoj relaciji dobijamo jednačinu simetralne ravni $4x+4y-2z+3=0$, koja predstavlja traženo geometrijsko mesto tačaka.

ZADATAK 8 (15 MINUTA)

Određivanje jednačine pramena ravni i ravni tog pramena koja sadrži određenu tačku.

Odrediti jednačinu pramena ravni koji sadrži ravni $2x-y+z+1=0$ i $x+y+3z-5=0$, kao i jednačinu ravni ovog pramena koji sadrži tačku $A(3,1,5)$.

Date ravni se seku, jer je $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}$, pa određuju jednu ravan. Na osnovu definicije pramena ravni važi da je

$$2x-y+z+1+\lambda(x+y+3z-5)=0,\ \text{za}\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Prethodna relacija se može zapisati i u obliku

$$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y+(3\lambda+1)z+1-5\lambda=0,\ \text{za}\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{*}$$

Ove relacije predstavljaju pramen ravni određen datim pravama, tj. skup svih ravni koje prolaze kroz presečnu pravu datih ravni.

Odredimo sada ravan koja pripada tom pramenu, a sadrži $A(3,1,5)$. Zamenom koordinata tačke A u relaciji (*) dobijamo

$$(\lambda+2)\cdot 3+(\lambda-1)\cdot 1+(3\lambda+1)\cdot 5+1-5\lambda=0$$

odakle je $14\lambda + 11 = 0,$ tj. $\lambda = -\frac{11}{14}$. Dakle, kada ovu vrednost zamenimo u jednačini snopa ravni dobićemp traženu ravan. Tada je

$$\left(-\frac{11}{14}+2\right)x+\left(-\frac{11}{14}-1\right)y+\left(3\cdot\left(-\frac{11}{14}\right)+1\right)z+1-5\cdot(-\frac{11}{14})=0,$$

odnosno

$$17x-25y-19z+69=0.$$

ZADATAK 9 (20 MINUTA)

RAVAN: Jednačina jedne ravni koja pripada datom pramenu, pod dodatnim uslovom.

Kroz presek ravni $\alpha : 4x - y + 3z - 1 = 0$ i $\beta : x + 5y - z + 2 = 0$ postaviti ravan

a) koja je normalna na ravan $\gamma : 2x - y + 5z - 3 = 0$,

b) koja je paralelna 0_{xy} ravni.

Rešenje. Jednačina svake ravni koja prolazi kroz pramen ravni određenog presekom ravni α i β glasi:

$4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$,

odnosno

$(4 + \lambda)x + (5\lambda - 1)y + (- \lambda + 3)z + 2\lambda - 1 = 0.\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Dakle, vektor normale svake takve ravni je $\vec{n} = (4 + \lambda, 5\lambda - 1, - \lambda + 3)$. Sada ćemo odrediti onu ravan, od beskonačno mnogo njih, koja je normalna na ravan, γ, odnosno odredićemo onu vrednost za, $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da prethodno rečeno važi. Tada je:

$\vec{n_\gamma} \circ \vec{n} = 0 \Rightarrow (4 + \lambda) \cdot 2 + (5\lambda - 1) \cdot (- 1) + (- \lambda + 3) \cdot 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 3.$

Tražena ravan je tada:

$7x + 14y + 5 = 0.$

b) 0_{xy} ravan je ravan čija jednačina je $z = 0$. Njen vektor normale je $\vec{n_1} = (0, 0, 1)$. Da bi ravan iz datog pramena ravni, bila paralelna 0_{xy} ravni mora da važi uslov:

$\frac{0}{4 + \lambda} = \frac{0}{5\lambda - 1} = \frac{1}{ - \lambda + 3}.$

Očigledno je da je ovo nemoguće, tj. ne postoji ravan u ovom pramenu ravni koja je paralelna 0_{xy} ravni.

ZADATAK 10 (10 MINUTA)

Određivanje jednačina ravni koje su uzajamno ortogonalne, a pripadaju istom pramenu ravni.

Odrediti jednačine dve uzajamno normalne ravni koje prolaze kroz presek ravni $x = y$ i $z = 0$, jedna od njih sadrži tačku $A(0, 4, 2)$.

$\mathbf{Rešenje.}$ Date ravni u kananskom obliku su $x - y = 0$ i $z = 0$, pa pramen ravni koji one određuju je

$$x - y + \lambda z = 0, \text{ za } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Jedna od traženih ravni sadrži tačku $A(0, 4, 2)$. Zamenom ovih koordinata u jednačini pramena ravni dobijamo

$$1 \cdot 0 - 1 \cdot 4 + \lambda \cdot 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2.$$

Dakle, jedna od traženih ravni $x - y + 2z = 0$. Njen vektor normale je $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$. Vektor normale svih ravni iz pramena je $\vec{n}_2 = (1, -1, \lambda)$. Naćićemo onu ravan za koju važi da je $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, odnosno $\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$. Odavde imamo da je $1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot \lambda = 0$. Odavde je $\lambda = -1$. Tada je jednačina druge ravni $x - y - z = 0$.

ZADATAK 11 (10 MINUTA)

Određivanje jednačine ravni koja sadrži datu tačku i normalana je na date ravni.

Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačku $A(2, -1, 1)$ i normalna je na ravni $\alpha : 3x + 2y - z + 4 = 0$ i $\beta : x + y + z - 3 = 0$.

$\mathbf{Rešenje.}$ Važi da je $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ i $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$. Tražena ravan π je normalna na ravan α, pa je $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha$. Takođe, ravan π je normalna na ravan β, pa je $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta$. Odavde zaključujemo da je vektor $\vec{n}_\pi$ kolinearan sa vektorskim proizvodom vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$, tj. važi da je

$$\vec{n}_\pi = \lambda \cdot (\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta),$$

gde je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Kako je

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} = (3, -4, 1).$$

Sada je $\vec{n}_\pi = \lambda \cdot (3, -4, 1)$, za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za $\lambda = 1$, dobijamo da je $\vec{n}_\pi = (3, -4, 1)$.

Skalarna jednačina ravni π kroz tačku $A(2, -1, 1)$ tada glasi

$$3 \cdot (x-2) - 4 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-1) = 0 \text{ tj. } 3x - 4y + z - 11 = 0.$$

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koji se ostavljaju studentima za samostalan rad.

$\mathbf{Zadatak.}$Kako glasi jednačina ravni koja prolazi kroz tačke $A(1,0,0),\ B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$?
$\mathbf{Rezultat.}x+y+z-1=0.$

$\mathbf{Zadatak.}$Naći rastojanje tačke $M(2,0,1)$ od ravni $x-2y+3z+1=0.$
$\mathbf{Rezultat.}\frac{6}{\sqrt{14}}.$

$\mathbf{Zadatak.}$Kroz presek ravni $4x-y+3z-1=0$ i $x+5y-z+2=0$ postaviti ravan koja je paralelna sa Oy osom.
$\mathbf{Rezultat.}21x+14z-3=0.$

$\mathbf{Zadatak.}$Date su jednačine ravni α i β :

$$\alpha : x+2y+z+4=0 \text{ i } \beta : 2x+3y-z+3=0.$$

a) Odrediti vektore normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$.
b) Odrediti proizvoljne tačke $A\in\alpha$ i $B\in\beta$.
c) Ispitati uzajamni položaj ravni α i β.
d) Odrediti ugao između vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$.

$\mathbf{Rezultat.}$a) $\vec{n}_\alpha=(1,2,1)$ i $\vec{n}_\beta=(2,2,-1)$;
b) Na primer, $A(0,0,-4)$ i $B(0,0,3)$;
c) Kako vektori $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ nisu kolinearni, date ravni se seku;
d) $\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)=\arccos\frac{\sqrt{21}}{6}$:

Vreme izrade: 1. 15 minuta; 2. 15 minuta; 3. 45 minuta

Zaključak za lekciju 13

ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\mathbb{E}^3$

Jednačina ravni, jednačina prave, uzajamni odnos prave i ravni.

Analitička geometrija se može proučavati u bilo kom vektorskom prostoru sa uočenim skalarnim proizvodom, a ovde je ona izučavana u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa uočenom kananskom bazom i uočenim euklidskim skalarnim proizvodom, tj. u prostoru. $\mathbb{E}^3$.

Pojmovi prava i ravan koji predstavljaju geometrijske objekte ovde su dobili svoj analitički oblik (zapis), odakle i ova oblast nosi naziv. Na taj način su stvoreni uslovi za diskusiju odnosa između dva istorodna objekta ili između prave i ravni.

Literatura (nastavni materijal):
Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.