UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Jednačina prave u prostoru. Uzajamni odnos dve prave

Lekcija 14

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 14

JEDNAČINA PRAVE U PROSTORU. UZAJAMNI ODNOS DVE PRAVE

Uvod

ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\mathbb{E}^3$

Jednačina ravni, jednačina prave, uzajamni odnos prave i ravni.

Analitička geometrija se može proučavati u bilo kom vektorskom prostoru sa uočenim skalarnim proizvodom i ona se bavi izučavanjem osobina geometrijskih pojava korišćenjem vektorskog računa.

Ovde će biti izučavana analitička geometrija u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa uočenom kananskom bazom i uočenim euklidskim skalarnim proizvodom, tj. u prostoru $\mathbb{E}^3$.

Osnovni pojmovi analitičke geometrije u ovom prostoru su tačka, linija i površ. Precizne definicije linije i površi ovde neće biti date. Pomenimo samo da pojam linije je mnogo širi od pojma prave, kao i da je pojam površi mnogo širi od pojma ravni. Ovde će biti izučavana analitička intepretacija prave i ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$.

Analitička intepretacija ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$ je obrađena na prethodnom predavanju, kao i uzajamni položaj dve ravni. Na ovom predavanju to isto ćemo uraditi za pravu.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Jednačina prave u E3

VEKTORSKI I KANONSKI OBLIK JEDNAČINE PRAVE

Kanonska jednačina prave se formira pomoću date tačke koja pripada toj pravoj i vektora koji je paralelan pravcu pružanja prave.

Položaj prave p u prostoru $\mathbb{E}^3$ jednoznačno je određen jednom tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kroz koju prava prolazi i vektorom $\vec{p} = (l, m, n)$ istog pravca. Ovaj vektor ćemo zvati vektor pravca prave p. Izaberimo proizvoljnu tačku $M(x, y, z)$ sa prave p. Tada je vektor $\overrightarrow{M_0M}$ za koji važi:

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

kolinearan sa vektorom $\vec{p} = (l, m, n)$. Tada dobijamo vektorski oblik jednačine prave

$$\overrightarrow{M_0M} \times \vec{p} = \vec{0}.$$

Dakle, vektori $\overrightarrow{M_0M}$ i $\vec{p}$ su kolinearni vektori, tj. možemo pisati $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{p}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tako da dobijamo

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t, \ (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Poslednja jednakost je jednačina prave u kanonskom obliku.

NapomenaPrilikom zadavanja jednačine prave u kanonskom obliku može se desiti da je neki od koeficijenata l, m ili n jednak nuli. To ne znači da u tom slučaju vršimo deljenje nulom.

PARAMETARSKI OBLIK JEDNAČINE PRAVE

Iz kanonskog jednačina prave, izražavajući svaku od veličina x, y i z po promenljivoj t, dobijamo parametarski oblik jednačine prave.

Ako se iz kanonskog oblika jednačine prave

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,\ t\in\mathbb{R}$$

izrazi svaka od promenljivih x, y i z dobijaju se jednakosti

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cdot t+x_0,\\ y &= m\cdot t+y_0,\\ z &= n\cdot t+z_0, \end{aligned}\right\} t\in\mathbb{R}.$$

koje predstavljaju parametarski oblik jednačine prave .

Dodeljući pojedinačne realne vrednosti parametru t dobijaju se koordinate tačaka prave.

U ovom obliku jednačine prave u prostoru sve tri koordinate predstavljene su preko jednog parametra.

Napomena. Ovaj oblik jednačine prave ćemo koristiti za određivanje presečne tačke dve prave, prodora prave kroz ravan i dr. O ovome će biti više reči kasnije.

JEDNAČINE PRAVE KROZ DVE RAZLIČITE TAČKE

Jednačina prave u prostoru se može odrediti, ako su poznate dve različite tačke kroz koje prava prolazi. Ovaj oblik se dobija na analogan način kao i kanonski oblik jednačine prave.

Neka su date tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Ako je $M(x_0,y_0,z_0)$ proizvoljna tačka sa posmatrane prave, tada su vektori

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),\overrightarrow{M1M2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

kolinearni, pa imamo da važi

$$\overrightarrow{M_1M}=t\cdot\overrightarrow{M_1M_2},t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Odavde imamo da je

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t,\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

što nazivamo jednačina prave kroz dve različite tačke.

JEDNAČINA PRAVE KAO PRESEK DVE RAVNI - 1. DEO

Svođenje na kanonski oblik ovako zadate prave vrši se iz dva koraka. Prvo treba odrediti jednu tačku koja pripada toj pravoj.

Prava p se, kao što smo to već pomenuli, može posmatrati i kao presek ravni π_1i π_2 u skalarnom opštem obliku:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

gde su vektori $\vec{n_1} = \left(A_1.B_1, C_1\right)$ i, $\vec{n_2} = \left(A_2.B_2, C_2\right)$, vektori normala ravni π_1 i, π_2, tim redom.

Da bi se sa ovog oblik prešlo na kanonski oblik jednačine prave $p : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ treba odrediti koordinate jedne tačke $M_1\left(x_1, \quad y_1, \quad z_1\right)$ kroz koju posmatrana prava p prolazi i vektor pravca $\vec{p}$.

Prethodne dve jednačine ravni možemo posmatrati kao sistem od dve jednačine sa tri nepoznate $x, \quad y$ i z koji ima beskonačno mnogo rešenja (jer se geometrijski ove dve ravni seku po jednoj pravoj koja predstavlja skup od beskonačno mnogo tačaka-rešenja prethodnog sistema). Lako je uočiti da je rang ovog sistema 2. Tada je bar jedna od determinanti (minora sistema) različita od nule, tj. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Može se pretpostaviti, bez gubitka opštosti, da je: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. U tom slučaju, kako tačka $M_1\left(x_1, \quad y_1, \quad z_1\right) \in p$ dobija se

$$A_1x_1 + B_1y_1 = -C_1z_1 - D_1,$$
$$A_2x_1 + B_2y_1 = -C_2z_1 - D_2.$$

Stavljajući da je, na primer, $z_1 = 0,$ tada prethodni sistem postaje kvadratni sistem, koji ima jedinstveno rešenje po x_1 i y_1 koje ako na primer, primenimo Kramerovo pravilo određujemo na sledeći način: $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, y_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$

Na ovaj način su određene koordinate tačke M_1.

JEDNAČINA PRAVE KAO PRESEK DVE RAVNI - 2. DEO

Drugi korak podrazumeva određivanje vektora pravca te prave.

Vektor pravca prave $\vec{p}$ ćemo odrediti iz osobine da na njega mora biti ortogonolan i vektor normale $\vec{n_1}$ ravni, π_1, kao i vektor normale $\vec{n_2}$ ravni $\pi_2,$ jer vektor $\vec{p}$ pripada i ravni π_1i ravni,

π_2, jer je u njihovom preseku. To znači (na osnovu osobine vektorskog proizvoda dva vektora) da su vektori $\vec{p}$ i $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ kolinearni.

Dakle važi:

$$\vec{p} = \lambda \cdot \left(\vec{n_1} \times \vec{n_2}\right) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}.$$

U praksi se najčešće uzima da je $\lambda = 1$, mada može i bilo koja druga nenula vrednost. Tada je

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Konačno, prava p ima kanonski oblik:

$$p : \frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{- \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

PRIMER 1

Ovde ćemo na primeru pokazati još jedna način kako se može prava koja je data kao presek dve ravni prevesti u kanonski oblik

U narednom primeru ćemo ukazati na još jedan način kako se može preći na kanonski oblik jednačine prave, ako je ona data kao presek dve ravni.

Date je prava kao presek ravni

$$\begin{cases} x - y + z - 4 & = & 0, \\ 2x + y - 2z + 5 & = & 0. \end{cases}$$

Napisati je u kanonskom obliku.

Rešenje. Date jednačine ravni koje je seku po traženoj pravoj možemo posmatrati kao sistem od dve jednačine sa tri nepoznate, koji ima beskonačno mnogo rešenje (to rešenje je tražena prava). Stoga, uvedimo jednu slobodnu promenljivu, na primer $x = t, t \in \mathbb{R}$. Tada imamo

$$\begin{cases} x & = & t, \\ -y + z & = & 4 - t, \\ y + 2z & = & -5 - 2t. \end{cases}$$

odnosno kada saberemo drugu i treću jednačinu, pa dobijenu jednačinu podelimo sa 3 i napišemo je na mesto treće jednačine

$$\begin{cases} x & = & t, \\ -y+z & = & 4-t, \\ z & = & \frac{-1-3t}{3}. \end{cases}$$

Zamenom dobijenog iz treće jednačine u drugu jednačinu, tada dobijamo

$$\begin{cases} x & = & t, \\ y & = & -\frac{13}{3}, \\ z & = & \frac{-1-3t}{3}, \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} x & = & 1\cdot t+0, \\ y & = & 0\cdot t-\frac{13}{3}, \\ z & = & -1\cdot t-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Na ovaj način smo dobili parametarski oblik jednačine prave, a kanonski oblik tada glasi

$$\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{13}{3}}{0}=\frac{z+\frac{1}{3}}{-1}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Jednačina prave data kao presek dve ravni.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Rastojanje tačke od prave

FORMULA ZA ODREĐIVANJE RASTOJANJA TAČKE OD PRAVE

Formula kojom se određuje rastojanje tačke do prave.

Rastojanje tačke M od prave p određene tačkom $P \in p$ i vektorom pravca $\vec{p}$ je dato formulom

$$d(M,p) = \frac{\left|\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|\right|}{||\vec{p}||}.$$

Da bismo dokazali ovu formulu, potrebno je, najpre, uočiti trougao $\triangle PNM$ (videti sliku 1). Tada je njegova visina $d(M,p) = \left|\left|\overrightarrow{MS}\right|\right|$. Tada, na osnovu formule za izračunavanje površine trougla važi

$$P_{\triangle PNM} = \frac{\left|\left|\overrightarrow{PN}\right|\right| \cdot \left|\left|\overrightarrow{MS}\right|\right|}{2}.$$

Ako iz prethodne formule izrazimo visinu, dobijamo da je

$$\left|\left|\overrightarrow{MS}\right|\right| = \frac{2P_{\triangle PNM}}{\left|\left|\overrightarrow{PN}\right|\right|}.$$

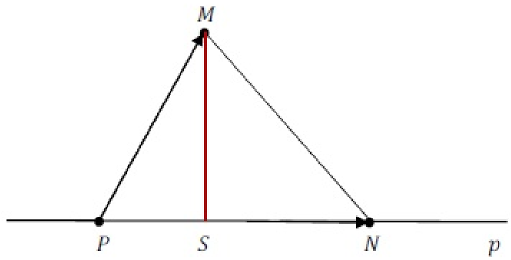
Poznato je da važi da je

$$P_{\triangle PNM} = \frac{1}{2}\left|\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|\right|,$$

pa tada dobijamo

$$||\overrightarrow{MS}| = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\left|\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|\right|}{||\vec{p}||} = \frac{\left|\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|\right|}{||\vec{p}||},$$

pri čemu je $||\vec{p}|| = \left|\left|\overrightarrow{PN}\right|\right|$.



Slika 2.1 Rastojanje tačke od prave (izvor: Autor).

PRIMER

Određivanje rastojanja date tačke od date prave.

Odrediti rastojanje tačke $M(2,-1,3)$ od prave $p: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{2}$.

Rešenje. Na osnovu prethodnog važi

$$d(M,p)=\frac{\left\|\vec{p}\times\overrightarrow{PM}\right\|}{\|\vec{p}\|}.$$

U ovom slučaju je $\vec{p}=(3,4,2)$ i $P(-1,-2,1),$ pa je $\overrightarrow{PM}=(3,1,2).$ Tada je

$$\vec{p}\times\overrightarrow{PM}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}&\vec{i}&\vec{j}\\3&4&2&3&4\\3&1&2&3&1\end{array}\right|=8\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}-12\vec{k}-2\vec{i}-6\vec{j}=6\vec{i}-9\vec{k}=(6,0,-9).$$

Tada je $\left\|\vec{p}\times\overrightarrow{PM}\right\|=\sqrt{6^2+(-9)^2}=\sqrt{117}.$ Takođe, imamo da je $\|\vec{p}\|=\sqrt{3^2+4^2+2^2}=\sqrt{29}$. Konačno, dobijamo da je

$$d(M,p)=\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{29}}.$$

Poglavlje 3

Uzajamni položaj dve prave - mimoilazne prave

USLOV DA PRAVE BUDU MIMOILAZNE PRAVE

Za razliku od ravni, prave u prostoru mogu biti i mimoilazne, a to znači da one ne mogu da odrede jednu ravan.

Neka su date dve prave p_1 i p_2 u kanonskom obliku

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

gde su $P_1(x_1,y_1,z_1)$ tačka koja pripada pravoj p_1 i $\overrightarrow{p_1} = (l_1,m_1,n_1)$ vektor pravca prave p_1, a $P_2(x_2,y_2,z_2)$ tačka koja pripada pravoj p_2 i $\overrightarrow{p_2} = (l_2,m_2,n_2)$ vektor pravca prave p_2.

Prave p_1 i p_2 su mimoilazne prave ako one ne mogu odrediti jednu ravan. Tada vektori $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{p_2}$ ne mogu biti komplanarni, pa uslov provere da li su ove prave mimoilazne glasi

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

NAJKRAĆE RASTOJANJE IZMEĐU DVE MIMOILAZNE PRAVE

Ako su prave mimoilazne tada postoji jedinstvena normala na njih i može se izračunati najkraće rastojanje između tih pravih.

Ako su dve prave p_1 i p_2 mimoilazne, sa vektorima pravaca $\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{p_2}$ tim redom, tada postoji jedinstvena normala na njih.

Najkraće rastojanje između tih pravih predstavlja rastojanje između presečnih tačaka te normale sa svakom od ovih pravih i računa se po formuli

$$d(p_1,p_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}\right\|}$$

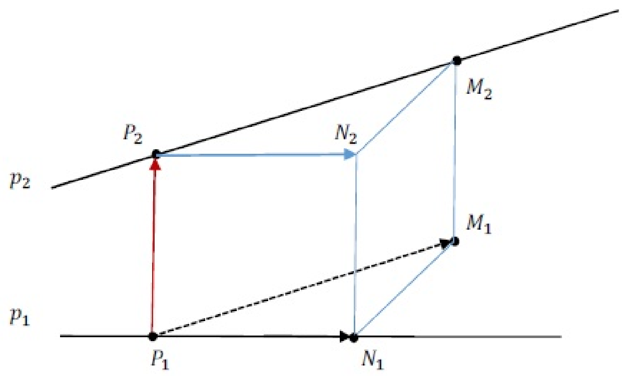
Traženo rastojanje predstavlja visinu trostrane prizme (videti Sliku 1), koju ćemo odrediti kao količnik zapremine te prizme sa površinom osnove (tj. iz formule $V = B \cdot H$, imamo da je $H = \frac{V}{B}$, gde je B površina osnove, V zapremina i H visine te prizme). Zapremina ove trostrane prizme se izračunava po formulu

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left| \left[\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{P_1P_2} \right] \right| .$$

Naime, mešoviti proizvod odgovarajućih vektora (gde je na slici $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{P_1N_1}$ i $p_2 = \overrightarrow{P_2N_2}$) predstavlja zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad njima, a odgovarajuća zapremina trostrane prizme iznosi polovinu od toga.

S druge strane, površina osnove te prizme, koju predstavlja trougao izračunava se po formuli

$$B = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} \right|$$



Slika 3.1 Najkraće rastojanje između dve mimoilazne prave (izvor: Autor).

PRIMER

Određivanje najkraćeg rastojanja između dve mimoilazne prave.

Dokazati da su prave $p_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ i $p_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ mimoilazne, a zatim odrediti najkraće rastojanje između njih.

Rešenje. Na pravoj p_1 uočimo tačku $P_1(0,0,1)$ i njen vektor pravca $\vec{p}_1 = (1,2,1)$. Na pravoj p_2 uočimo tačku $P_2(0,1,0)$ i njen vektor pravca $\vec{p}_2 = (2,1,2)$. Odredimo sada vekor $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,-1)$. Tada je

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2} \right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

pa su date prave mimoilazne.

Odredimo sada najkraće rastojanje. Prema prethodnom, njega izračunavamo po sledećoj formuli

$$d(p_1,p_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2},\overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right\|}$$

Dakle, potrebno je još da odredimo $\left\|\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right\|$.Naćićemo najpre $\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}$.

Tada je

$$\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}&\vec{i}&\vec{j}\\1&2&1&1&2\\2&1&2&2&1\end{array}\right|=4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}-4\vec{k}-\vec{i}-2\vec{j}=3\vec{i}-3\vec{k},$$

pa dobijamo da je $\left\|\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right\|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$.Tada je

$$d(p_1,p_2)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Poglavlje 4

Uzajamni položaj dve prave - prave se seku

USLOVI DA SE PRAVE SE SEKU

Pored uslova da pripadaju jednoj ravni, da bi se dve prave sekle moraju vektori njihovih pravaca da budu nekolinearni.

Neka su date dve prave p_1 i p_2 u kanonskom obliku

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

gde su $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada pravoj p_1 i $\overrightarrow{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$ vektor pravca prave p_1, a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tačka koja pripada pravoj p_2 i $\overrightarrow{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ vektor pravca prave p_2.

Ako prave nisu mimoilazne, tada se one nalaze u jednoj ravni. Sada ćemo dati uslove pod kojima ćemo razlikovati kada se prave seku, paralelene su ili se poklapaju.

Prave p_1 i p_2 se seku ako su vektori $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{p_2}$ komplanarni, pa prvo proveravamo da li važi

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Međutim, ovim uslovom se samo obezbeđuje da ove prave pripadaju jednoj ravni, ali se ne pravi razlika da li se one seku, ili su paralelne, ili se poklapaju. Da bi se prave p_1 i p_2 sekle dodatno je potrebno da vektori $\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{p_2}$ ne budu kolinearni, tj. $\overrightarrow{p_1} \neq \lambda \cdot \overrightarrow{p_2}, (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$ tj. važi

$$\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \vee \frac{l_1}{l_2} \neq \frac{n_1}{n_2} \vee \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}.$$

UGAO KOJI ZAKLAPAJU DVE PRAVE KOJE SE SEKU. PRIMER

Formula kojom se određuje ugao pod kojim se seku dve prave.

Specijalno, ako se prave p_1 i p_2 seku tada se ugao φ $\left(\varphi = \sphericalangle\left(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2\right)\right)$ određuje na sledeći način:

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{p_1} \circ \vec{p_2}}{\| \vec{p_1} \| \| \vec{p_2} \|} = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$

Uslov da li su dve prave koje se seku ortogonalne ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$) glasi:

$\vec{p_1} \circ \vec{p_2} = 0 \Rightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$

Primer. Dokazati da se prave

$$p_1 : \frac{x-8}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2} \text{ i } p_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

seku i odrediti ugao između njih.

Rešenje. Prvo ćemo dokazati da date prave nisu mimoilazne. Stoga, na pravoj p_1 uočimo tačku $P_1(8,-1,4)$ i njen vektor pravca $\vec{p}_1 = (-3,1,-2)$. Takođe, na pravoj p_2 uočimo tačku $P_2(1,0,0)$ i njen vektor pravca $\vec{p}_2 = (1,-1,1)$. Odredimo sada vekor $\overrightarrow{P_1P_2} = (-7,1,-4)$.

Tada je

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pa date prave nisu mimoilazne. Kako, takođe, važi da je $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ zaključujemo da se date prave seku. Odredimo sada ugao pod kojim se seku ove prave

$$\cos\varphi = \frac{(-3)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} + \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-6}{\sqrt{42}}.$$

Tada je

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-6}{\sqrt{42}}\right).$$

JEDNAČINA RAVNI ODREĐENA PRESEKOM DVE PRAVE. PRIMER

Dve prave koje se seku određuju tačno jednu ravan.

Poznato je iz geometrije da dve prave koje se seku mogu odrediti tačno jednu ravan. Pokazaćemo da se i analitički može odrediti jednačina te ravni. Neka su date dve prave p_1 i p_2 u kanonskom obliku

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

koje se seku, gde su $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada pravoj p_1 i $\overrightarrow{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$ vektor pravca prave p_1, a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tačka koja pripada pravoj p_2 i $\overrightarrow{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ vektor pravca prave p_2. Označimo traženu ravan sa π. Jednačinu te ravni ćemo odrediti tako što ćemo naći njen vektor normale, kao i jednu tačku te ravni. Kako se date prave sadrže u ravni π, tada sve tačjke ovih pravih pripadaju i ovoj ravni. Dakle, i tačka P_1 (ili P_2) pripada ravni π.

Odredimo sada vektor normale $\vec{n}_\pi$ ravni π. Važi da je $\vec{n}_\pi \perp \vec{p}_1$, kao i $\vec{n}_\pi \perp \vec{p}_2$. Tada je $\vec{n}_\pi$ kolinearan sa vektorom $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2$. Možemo pisati da je $\vec{n}_\pi = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$. Dakle, tada je

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Primer. U prethodnom primeru za prave

$$p_1 : \frac{x-8}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2} \text{ i } p_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

smo videli da se seku. Odredimo sada ravan π koju oni određuju. Tada je

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-1, 1, 2).$$

Uočimo i tačku $P_1(8, -1, 4)$. Tada jednačina ravni π glasi

$$\pi : -1 \cdot (x-8) + 1 \cdot (y+1) + 2 \cdot (z-4) = 0, \text{ tj. } \pi : -x + y + 2z + 1 = 0.$$

Napomena. Jednačina ravni se u ovom slučaju može odrediti i korišćenjem formule za jednačinu ravni kroz tri nekolinearne tačke. Uovom slučaju mogu se uzeti tačke $P_1(x_1, y_1, z_1) \in p_1$ i $P_2(x_2, y_2, z_2) \in p_2$ i još jedna tačka koja pripada nekoj od ovih prava.Prelaskom na parametarski oblik jednačine jedne od ovih pravih može se generisati ta treća tačka (svakako različita od tačaka P_1 i P_2).

Poglavlje 5

Uzajamni položaj dve prave - paralelne prave

USLOVI DA PRAVE BUDU PARALELNE

Pored uslova da pripadaju jednoj ravni, da bi dve prave bile paralelne moraju vektori njihovih pravaca da budu kolinearni i da vektor određen sa dve njihove tačke bude nekolinearan s njima.

Neka su date dve prave p_1 i p_2 u kanonskom obliku

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

gde su $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada pravoj p_1 i $\overrightarrow{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$ vektor pravca prave p_1, a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tačka koja pripada pravoj p_2 i $\overrightarrow{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ vektor pravca prave p_2.

Prave p_1 i p_2 su paralelne ako, kao i u slučaju kada se prave seku, važi uslov

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

koji obezbeđuje da prave budu u istoj ravni. Paralelnost takvih pravih je određena dodatnim uslovima da vektori $\overrightarrow{p_1}$ $\overrightarrow{p_2}$ budu kolinearni, ali da sa njima ne bude kolinearan vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Dakle, u slučaju paralelnosti pravih p_1 i p_2 dodatni uslovi koji važe su

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{i} \quad \frac{x_2-x_1}{l_1} \neq \frac{y_2-y_1}{m_1} \vee \frac{x_2-x_1}{l_1} \neq \frac{z_2-z_1}{n_1} \vee \frac{y_2-y_1}{m_1} \neq \frac{z_2-z_1}{n_1},$$

ili

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{i} \quad \frac{x_2-x_1}{l_2} \neq \frac{y_2-y_1}{m_2} \vee \frac{x_2-x_1}{l_2} \neq \frac{z_2-z_1}{n_2} \vee \frac{y_2-y_1}{m_2} \neq \frac{z_2-z_1}{n_2}.$$

PRIMER

Provera paralelnosti datih pravih.

Dokazati da su prave

$$p_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \text{ i } p_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

paralelne.

Rešenje. Na pravoj p_1 uočimo tačku $P_1(0,1,0)$, kao i njen vektor pravca $\vec{p}_1 = (1,1,2)$. Takođe, na pravoj p_2 uočimo tačku $P_2(1,0,1)$ i njen vektor pravca $\vec{p}_2 = (1,1,2)$. Odredimo sada vekor $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-1,1)$. Prave p_1 i p_2 će biti paralelne ako, najpre, važi uslov

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Prethodno je svakako tačno, jer su dve vrste u datoj determinanti jednake. Za data prave p_1 i p_2 takođe važi da je

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{i} \quad \frac{x_2 - x_1}{l_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{m_1}.$$

Zaista, u ovom slučaju je

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}.$$

JEDNAČINA RAVNI ODREĐENA DVEMA PARALELNIM PRAVAMA. PRIMER

Dve paralelne prave određuju tačno jednu ravan.

Poznato je iz geometrije da dve prave koje su paralelne mogu odrediti tačno jednu ravan. Pokazaćemo da se i analitički može odrediti jednačina te ravni. Neka su date dve prave p_1 i p_2 u kanonskom obliku

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

koje su paralelne, gde je $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada pravoj p_1, a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tačka koja pripada pravoj p_2. Označimo traženu ravan sa π. Njenu jednačinu u ovom slučaju možemo odrediti korišćenjem formule za jednačinu ravni kroz tri nekolinearne tačke. U ovom slučaju mogu se uzeti tačke $P_1(x_1, y_1, z_1) \in p_1$ i $P_2(x_2, y_2, z_2) \in p_2$ i još jedna tačka koja pripada nekoj od ovih prava. Prelaskom na parametraski oblik jednačine jedne od ovih pravih može se generisati ta treća tačka (svakako različita od tačaka P_1 i P_2).

Primer.U prethodnom primeru smo dokazali da su prave

$$p_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \text{ i } p_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

paralelne. Odredimo sada jednačinu ravni, koja je određena ovim pravama. Na pravoj p_1 uočimo tačku $P_1(0,1,0)$, a na pravoj p_2 uočimo tačku $P_2(1,0,1)$. Da bismo dobili i treću tačku, prećićemo na parametarski oblik prave p_1

Tada je

$$p_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} = t \quad \text{tj.} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t. \end{cases}$$

To znači da sva tačka koja pripada pravoj p_1 ima koordinate $(t, t+1, 2t), t \in \mathbb{R}$. Za $t = 1$ jedna tačka prave p_1 ima koordinate $A(1,2,2)$. Odredimo sada jednačinu te ravni, koja sadrži tačke P_1, P_2 i A. Tada je

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $\pi : 3x - y + 2z + 1 = 0$.

USLOVI DA SE PRAVE POKLAPAJU

Pored uslova da pripadaju jednoj ravni, da bi se dve prave poklapale moraju vektori njihovih pravaca da budu kolinearni i da vektor određen sa dve njihove tačke bude kolinearan s njima.

Neka su date dve prave p_1 i p_2 u kanonskom obliku

$$p_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{i} \qquad p_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

gde su $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tačka koja pripada pravoj p_1 i $\overrightarrow{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$ vektor pravca prave p_1, a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tačka koja pripada pravoj p_2 i $\overrightarrow{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ vektor pravca prave p_2.

Prave p_1 i p_2 ss poklapaju ako, najpre, važi uslov

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

koji obezbeđuje da prave budu u istoj ravni. Poklapanje takvih pravih je određena dodatnim uslovom da vektori $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{p_2}$ budu kolinearni, tj. da važi

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{i} \quad \frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{n_1},$$

ili

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{i} \quad \frac{x_2 - x_1}{l_2} = \frac{y_2 - y_1}{m_2} = \frac{z_2 - z_1}{n_2}.$$

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (5 MINUTA)

Kanonska jednačina prave.

Odrediti kanonski i parametarski oblik jednačine prave p koja prolazi kroz tačku $M(-1,2,5)$ i paralelna je vektoru $\vec{a}=(1,-3,6)$.

Rešenje. Kanonski oblik jednačine prave p glasi

$$p:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{6}=t, t\in\mathbb{R},$$

dok parametarski oblik jednačine prave p glasi

$$\left.\begin{aligned} x&=t-1\\ y&=-3t+2\\ z&=6t+5 \end{aligned}\right\} t\in\mathbb{R}.$$

ZADATAK 2 (5 MINUTA)

Jednačina prave koja sadrži dve tačke.

Napisati jednačinu prave p koja prolazi kroz tačke $\mathrm{M}(1,\ -3,2)$ i $\mathrm{N}(6,1,\ -5)$.

Rešenje: Jednačina tražene prave glasi:

$$\mathrm{p}:\frac{x-1}{6-1}=\frac{y+3}{1+3}=\frac{z-2}{-5-2},$$

odnosno

$$\mathrm{p}:\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-7}.$$

ZADATAK 3 – 1. DEO (25 MINUTA)

Prebacivanje jednačine prave zadate kao presek dve ravni u kanonski oblik – prvi način.

Odrediti kanonski oblik jednačine prave p koja je data kao presek ravni $\alpha:\ 2x+3y-z-2=0$ i $\beta\ :x+y+z-6=0.$

Rešenje1. Ove ravni nisu niti paralelne niti se poklapaju (jer važi da vektori normala nisu paralelni, tj. kolinearni, tj.) $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1}$), pa se seku po jednoj pravoj.

Jednačine datih ravni se mogu posmatrati kao sistem od dve jednačine sa tri nepoznate čiji je rang 2 i tada ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pri čemu se jedna promenljiva (x, y ili z) proglašava za parametar, a ostale izražavaju preko nje. Na primer, ako stavimo da je $x = t,\ t \in \mathbb{R}$, tada imamo:

$3y - z = 2 - 2t,$

$y + z = 6 - t.$

Sabirajući ove dve jednačine dobijamo da je $4y = 8 - 3t$, tj. $y = -\frac{3}{4}t + 2$. Tada vraćajući ovu vrednost u, na primer, drugu jednačinu poslednjeg sistema dobijamo da je $z = 6 - t - y = 6 - t + \frac{3}{4}t - 2 = -\frac{1}{4}t + 4$. Tada dobijeno rešenje glasi:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & 1 \cdot t + 0 \\ y & = & -\frac{3}{4}t + 2 \\ z & = & -\frac{1}{4}t + 4 \end{array}\right\},\ t \in \mathbb{R}$$

što predstavlja parametarski oblik jednačine prave. Njen kanonski oblik glasi:

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-\frac{3}{4}} = \frac{z-4}{-\frac{1}{4}} \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-1}.$$

ZADATAK 3 – 2. DEO

Prebacivanje jednačine ravni zadate kao presek dve ravni u kanonski oblik – drugi način.

Rešenje2. Kako presečna prava čija se jednačina traži u kanonskom obliku, pripada i jednoj i drugoj ravni, tada su vektori normala ravni α i β normalni na vektor pravca tražene prave. Tada zaključujemo da je vektor pravca tražene prave p kolinearan sa vektorskim proizvodom vektora normala $\vec{n_\alpha} = (2,\ 3,\ -1)$ i $\vec{n_\beta} = (1,\ 1,\ 1)$ ravni α i β, tim redom. Imamo da je:

$$\vec{p} = \lambda \cdot \left(\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \left(4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}\right),\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Za $\lambda = 1$ dobijamo da je $\vec{p} = (4,\ -3,\ -1)$.

Da bismo dobili traženi jednačinu ravni, potrebno je naći bar jednu tačku prave p. Nju određujemo iz jednačina ravni α i β, tj. rešavanjem tog sistema jednačinama. Kako ovaj sistem, kako smo većrekli, ima beskonačno mnogo rešenja uzećemo da je npr., $x = 0$, a onda ako uvrstimo ovu vrednost u taj sistem on postaje:

$3y - z = \mathbf{22}$,

$y + z = 6$.

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $y = 2$ i $z = 4$. Dakle, jedna tačka prave p ima koordinate $(0, 2, 4)$. Tražena jednačina prave u kanonskom obliku je:

$$p : \frac{x}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-1}$$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Određivanje presečne tačke dve prave.

Odrediti presek pravih:

$$p : \frac{x-8}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2} \qquad \text{i} \qquad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Rešenje: Parametarski oblik jednačine prave p je :

$x = -3t + 8 \ , \ \ y = t - 1 \ , \ \ z = -2t + 4, t \in \mathbb{R}$,

dok za pravu q parametarski oblik je :

$x = s + 1, y = -s, z = s, s \in \mathbb{R}$.

Izjednačimo $x, \ y, \ z$ iz parametarskih oblika jednačina pravih p i q. Na taj način dobijamo sledeći sistem jednačina koji mora da ima jednistveno rešenje, ako se posmatrane prave seku (proveriti za vežbu da li se ove prave seku). Tada rešavamo sledeći sistem::

$$(x =) \ -3t + 8 = s + 1$$

$$(y =) \ t - 1 = -s$$

$$(z =) \ -2t + 4 = s;$$

čije rešenje je $t = 3, \ s = -2$. Ubacimo $t = 3$ u parametarsku jednačinu prave p ili $s = -2$ u parametarsku jednačinu prave q i dobijamo istu tačku $(-1, -2, -2)$ koja predstavlja presek pravih p i q.

Napomena. S obzirom daprethodni sistem ima jedinstveno rešenje, tada se ove prave seku. Da je sistem imao beskonačno mnogo rešenja, prave bi se poklapale. Ako bi sistem bio nemoguć, tada bi ili date prave bile paralene ili mimoilazne, što sto bi se dodatnim ispitivanjem moglo utvrditi.

ZADATAK 5 (15 MINUTA)

Rastojanje tačke do prave.

Odrediti rastojanje tačke $M(2,1,3)$ do prave $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Rešenje. Za rešavanje koristimo formulu

$$d(M,p) = \frac{\left|\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|\right|}{||\vec{p}||}.$$

gde je $P(4,2,1)$ tačka sa prave p, pa je $\overrightarrow{PM} = (-2,-1,2)$. Takođe, imamo da je $\vec{p} = (1,2,2)$. Sada ćemo odrediti vektorski proizvod $\overrightarrow{PM} \times \vec{p}$. Važi da je

$$\overrightarrow{PM} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-6,6,-3).$$

Tada je $\left|\left|\overrightarrow{PM} \times \vec{p}\right|\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9.$ Takođe, $||\vec{p}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Sada je

$$d(M,p) = \frac{\left|\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|\right|}{||\vec{p}||} = \frac{9}{3} = 3.$$

ZADATAK 6 (25 MINUTA)

Određivanje kanonskog oblika jednačine prave i jednačine ravni koja ima određene osobine.

Date su prave

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{i} \quad q: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 4z = 1 \end{cases}$$

Odrediti kanonsku jednačinu prave q, a zatim i presek ove dve prave. Odrediti jednačinu ravni π , paralelne pravama p i q koja prolazi kroz koordinatni početak.

Rešenje. Parametarski oblik prave p je

$$p: \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t + 2, \\ z = 4t + 3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da bismo odredili parametarski oblik prave q , rešimo sistem jednačina kojim je ona zadata. Ovaj sistem ima dve jednačine, a tri promenjive, pa ga ima beskonačno mnogo rešenja. Ako promenljivu x proglasimo za slobodnu promenljivu, tj. $x = s,\ s \in \mathbb{R},$ tada je zadata sistemom

$$q: \begin{cases} x = s, \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{s}{2}, \\ z = -\frac{1}{4} + \frac{s}{4}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prava q ima kanonsku jednačinu

$$q: \frac{x}{1} = \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \quad \text{tj.} \quad q: \frac{x}{4} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2} = \frac{z+\frac{1}{4}}{1}$$

Ako se prave p i q seku, tada za koordinate presečne tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ važi

$$\begin{aligned} x_0 &= 2t+1, \\ y_0 &= 3t+2, \\ z_0 &= 4t+3, \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x_0 &= s, \\ y_0 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{s}{2}, \\ z_0 &= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{s}{4}. \end{aligned}$$

za neko $t \in \mathbb{R}$ i neko $s \in \mathbb{R}$ .tj.

$$\begin{aligned} s - 2t &= 1, \\ s - 6t &= 5, \\ s - 16t &= 13 \end{aligned}$$

Ovaj sistem je nemoguć (proveriti za vežbu), tj. date prave se ne seku. Ove prave su mimoilazne (proveriti za vežbu).

Tražena ravan π , zbog paralelnosti sa pravama p i q ima vektor normale $\overrightarrow{n}_\pi$ takav da je normalan na vektor pravca $\vec{p} = (2,3,4)$ prave p i vektor pravca $\vec{q} = (4,2,1)$ prave q, tj. $\overrightarrow{n}_\pi \perp \overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{n}_\pi \perp \overrightarrow{q}$. Tada je vektor $\overrightarrow{n}_\pi$ kolinearan sa vektorom koji predstavlja vektorski proizvod ovih vektora, tj. važi

$$\overrightarrow{n}_\pi = \lambda \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \overset{za\ \lambda=1}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 14\vec{j} - 8\vec{k} = (-5, 14, -8).$$

Na kraju, kako ova ravan prolazi koordinatni početak, imamo da je $\pi : -5x + 14y - 8z = 0$.

ZADATAK 7 (25 MINUTA)

PRAVA: Zajednička normala mimoilaznih pravih.

Naći jednačinu zajedničke normale, n, pravih:

$p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} = t,\ t \in \mathbb{R}$ i $q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4} = s,\ s \in \mathbb{R}.$

Rešenje. Uočimo vektore pravaca ovih pravih $\vec{p} = \left(1, 1, 2\right)$ i, $\vec{q} = \left(1, 3, 4\right)$, kao i po jednu tačku ovih pravih $P(-1, 0, 1)$ i $Q(0, -1, 2)$. Uočimo i vektor $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1)$. Kako je $\left[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right] \neq 0$, tada zaključujemo da postoji jedinstvena normala na ove prave. Da bismo odredili ovu pravu odredićemo tačke u kojima ta normala seče ove prave. Stoga ćemo, najpre, preći na parametarski oblik ovih pravih:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& t-1 \\ y &=& t \\ z &=& 2t+1 \end{array}\right\}, t \in \mathbb{R}, \qquad \left.\begin{array}{rcl} x &=& s \\ y &=& 3s-1 \\ z &=& 4s+2 \end{array}\right\}, s \in \mathbb{R}.$$

Dakle, svaka tačka sa prave p ima koordinate, $M(t-1, t, 2t+1)$, dok svaka tačka sa prave q imam koordinate $N(s, 3s-1, 4s+2)$. Uočimo sada vektor $\overrightarrow{MN} = (s-t+1, 3s-t-1, 4s-2t+1)$. Ovaj vektor je kolinearan sa vektor pravca svake prave koja seče pomenute prave, pa tako i one koja je normala na njih, s tim što treba da bude nađeno $t, s \in \mathbb{R}$ za koje ovo tačno. Njih nalazimo iz sledećih uslova:

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \circ \vec{p} = 0 \Rightarrow s-t+1+3s-t-1+8s-4t+2 = 0 \Rightarrow 12s-6t = -2 \Rightarrow -6s+3t = 1,$$

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{q} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \circ \vec{q} = 0 \Rightarrow s-t+1+9s-3t-3+16s-8t+4 = 0 \Rightarrow 26s-12t = -2 \Rightarrow -13s+6t = 1,$$

Rešavanjem ovom sistema dobijamo da $s = 1$ i $t = \frac{7}{3}$. Tada je $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pa je $\vec{n} = \lambda \cdot \overrightarrow{MN}$. Za $\lambda = -3$ imamo da je $\overrightarrow{MN} = (1, 1, -1)$. Jedna tačka sa te prave se dobija ako stavimo da je $s = 1$ u tačku N, tj. $N(1, 2, 6)$. Tada je jednačina normale:

$$n : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}.$$

ZADATAK 8 (15 MINUTA)

Određivanje jednačine prave koja sadrži datu tačku i seče dve date ravni.

Odrediti jednačinu prave p koja seče prave

$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3} \text{ i } r : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}$$

i sadrži tačku $P(1,2,-1)$.

Rešenje. Da bismo odredili jednačinu tražene prave treba odrediti njen vektor pravca $\vec{p} = (l, m, n)$. Uočimo, najpre, da je $\vec{q} = (2,6,3)$ i da je $Q(1,-1,-3)$. Tada je $\overrightarrow{PQ} = (0,-3,-2)$. Kako prava p seče pravu q, tada je

$$\left[\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right]=\begin{vmatrix} l & m & n\\ 2 & 6 & 3\\ 0 & -3 & -2\end{vmatrix}=-3l+4m-6n=0.$$

Slično, uočimo da je $\vec{r}=(3,1,-1)$ i da je $R(2,0,-3)$. Tada je $\overrightarrow{PR}=(1,-2,-2)$. Kako prava p seče pravu q, tada je

$$\left[\vec{p},\vec{r},\overrightarrow{PR}\right]=\begin{vmatrix} l & m & n\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=-4l+5m-7n=0.$$

Rešimo sada sistem $-3l+4m-6n=0$ i $-4l+5m-7n=0$. Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Nama treba samo jedno njegovo rešenje. Ako uzmemo da je $n=1$, tada je $m=3$, dok je $l=2$, pa je vektor pravca $\vec{p}=(2,3,1)$. Jednačina prave p glasi

$$p:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}.$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Nalaženje tačke na datoj pravoj koja se nalazi na datom rastojanju od date tačke.

Na pravoj

$$p:\frac{x-8}{8}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{0}$$

odrediti tačku čije rastojanje do tačke $A(8,2,0)$ iznosi 10.

Rešenje. Pređimo, najpre, na parametarski oblik jednačine prave p. Tada je

$$p:\begin{cases} x=8t+8,\\ y=-6t+2,\\ z=0, \quad t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Dakle, svaka tačka sa prave p može se zapisati na sledeći način $P(8t+8,-6t+2,0)$, za $t\in\mathbb{R}$. Odredimo sada onu od njih koja je na rastojanju 10 od tačke A. Primenom formule za računanje rastojanja između dve tačke imamo da je

$$\sqrt{(8t+8-8)^2+(-6t+2-2)^2+(0-0)^2}=10,\ \text{tj. } \sqrt{100t^2}=10,\ \text{tj. } 10|t|=10,$$
$$\text{tj. } |t|=1.$$

Dakle, dobijamo da je $t=1$ ili $t=-1$, pa imamo dve takve tačke. Za $t=1$ dobijamo $P_1(16,-4,0)$, dok za $t=-1$ dobijamo $P_2(0,8,0)$.

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koji se ostavljaju studentima za samostalan rad

Zadatak 1 Date su prave

$$p : \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 2x + z = 5 \end{cases} \quad \text{i} \quad q : \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

Odrediti kanonske jednačine ovih pravih, dokazati da se seku, odrediti ugao između njih.

Rezultat. $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-5}{2}$ i $q : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{6}$, $\varphi = \arccos \frac{20}{21}$.

Zadatak 2 Odrediti n u jednačini prave $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{n}$ tako da ona seče pravu $q : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$, a zatim odrediti njihovu presečnu tačku.

Rezultat. $n = 3$, presečna tačka ima koordinate $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$.

Zadatak 3 Naći rastojanja tačaka $A(3,1,2)$ i $B(5,2,0)$. od prave $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$.

Rezultat. $d(A,p) = 0$, tj. tačka pripada pravoj p. S druge strane $d(B,p) = \dfrac{5\sqrt{70}}{14}$.

Vreme izrade: 1. 30 minuta; 2. 15 minuta; 3. 15 minuta

Zaključak za lekciju 14

ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\mathbb{E}^3$

Jednačina ravni, jednačina prave, uzajamni odnos prave i ravni.

Analitička geometrija se može proučavati u bilo kom vektorskom prostoru sa uočenim skalarnim proizvodom, a ovde je ona izučavana u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa uočenom kananskom bazom i uočenim euklidskim skalarnim proizvodom, tj. u prostoru. $\mathbb{E}^3$.

Pojmovi prava i ravan koji predstavljaju geometrijske objekte ovde su dobili svoj analitički oblik (zapis), odakle i ova oblast nosi naziv. Na taj način su stvoreni uslovi za diskusiju odnosa između dva istorodna objekta ili između prave i ravni.

Literatura (nastavni materijal):

Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.