UNIVERZITET
METROPOLITAN
BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Vektorska algebra II deo

Lekcija 12

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 12

VEKTORSKA ALGEBRA II DEO

Uvod

VEKTORSKA ALGEBRA

Pojam skalara i vektora.

U ovom lekciji ćemo proučiti neke od osnovnih pojmova o vektorima, različitim operacije na vektorima i njihove algebarske i geometrijske osobine u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ova dva svojstva (pojam skalara i pojam vektora) kada se razmatraju zajedno omogućavaju potpunu realizaciju vektorske algebre i njihovu primenljivosti u različitim oblastima nauke.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Dekartov pravougli sistem u R3

POJAM

Tri vektore neke baze u prostoru $\mathbb{R}^3$ određuju koordinatni sistem. Ako su ti vektori jedinični i uzajamno ortogonalni onda oni čine Dekartov pravougli koordinatni sistem u $\mathbb{R}^3$.

U proizvoljnom vektorskom prostoru ortogonalnu bazu obrazuju uzajamno ortogonalni (normalni) vektori, dok normiranu bazu obrazuju jedinični vektori. Ortonormiranu bazu čine međusobno ortogonalni jediničn ivektori. Vektori baze prostora, kao što smo to ranije i naveli, određuju koordinatni sistem.

U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ svaka tri linearno nezavisna vektora određuju triedar (trostrani rogalj), koji predstavlja koordinatni sistem. Ako su ti vektori jedinični i uzajamno ortogonalni, triedar se naziva ortogonalan, a vektori ove ortonormirane baze se označavaju sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ nazivaju ortovi. Baza koju čine ova tri orta se označava sa $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Koordinatni sistem određen ovim vektorima se naziva Dekartov pravougli koordinatni sistem.

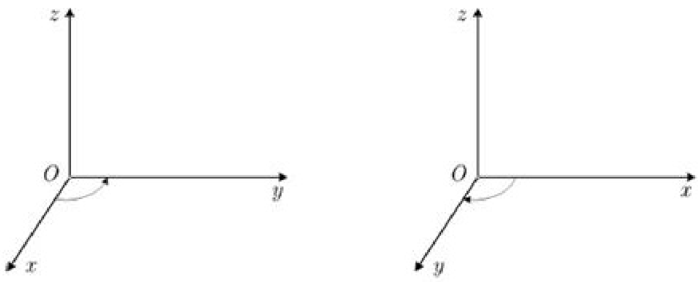
Ose na kojima leže ovi vektori se tim redom označavaju sa Ox, Oy i Oz i zovu se apscisna osa, ordinatna osa i aplikata osa tim redom. Dekartov pravougli koordinatni sistem se označava i sa $Oxyz$, gde se tačka O naziva koordinatni početak.

LEVI I DESNI TRIEDAR

U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ ortovi određuju jedan triedar. On može biti u zavisnosti od odgovarajuće orijentacije levi ili desni triedar.

Ako zamislimo jednu uzlaznu spiralu po kojoj se može realizovati kretanje sleva udesno, počevši od orta na 0_x osi, preko orta na 0_y osi do orta na 0_z osi, tada ovi vektori određuju desni koordinatni sistem ili desni tridar. U slučaju da se opisano kretanje vrši u suprotnom smeru, ili u istom smeru, ali po silaznoj spirali, tada ovi vektori određuju levi koordinatni sistem ili levi tridar.

Napomena. Ako tri vektora obrazuju triedar, tada je bitan poredak tih vektora. Na primer, ako vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ obrazuju desni triedar, tada vektori $\vec{y}$, $\vec{x}$ i $\vec{z}$ obrazuju levi triedar, što je prikazano na datoj slici.



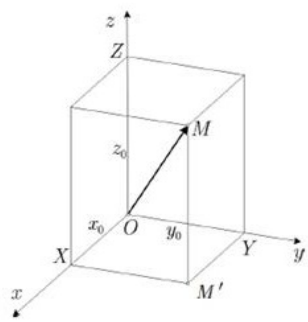
Slika 1.1 Levi i desni triedar (izvor: Autor).

VEKTOR POLOŽAJA TAČKE U KOORDINATNOM SISTEMU

Vektor položaja predstavlja vektor određen početnom tačkom koja je koordinatni početak i krajnom tačkom koja je posmatrana tačka.

Sada će biti pokazano da je svaka tačka M prostora u pravouglom koordinatnom sistemu određena uređenom trojkom (x_0, y_0, z_0) realnih brojeva koje se zovu koordinate tačke M.

Označimo sa M' ortogonalnu projekciju tačke M na ravan 0_{xy}, a sa X i Y projekcije ove tačke na 0_x i 0_y osu tim redom (videti sliku).



Slika 1.2 Vektor položaja tačke u koordinatnom sistemu (izvor: Autor).

Tada vektor $\overrightarrow{OM}$ možemo zapisati:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XM'} + \overrightarrow{M'M}$$

Zapravo sve projekcije tačke M u odgovarajuće ravni, pa njihove projekcije na odgovarajuće ose čine kvadar, a vektor $\overrightarrow{OM}$ predstavlja njegovu dijagonalu.

Ako označimo:

$\| \overrightarrow{OX} \| = x_0, \quad \| \overrightarrow{XM'} \| = y_0 \left(= \| \overrightarrow{OY} \| \right), \quad \| \overrightarrow{M'M} \| = z_0 \left(= \| \overrightarrow{OZ} \| \right),$

tada važi da je:

$\overrightarrow{OM} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k},$

s obzirom da su vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ vektori baze, tada se vektor

$\overrightarrow{OM} = \left(x_0, y_0, z_0 \right)$

naziva *vektor položaja* tačke M, a njene koordinate su $\left(x_0, y_0, z_0 \right)$ u ovako uvedenom pravouglom koordinatnom sistem. Tada je

$\| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$

U slučaju Dekartov pravougli koordinatni sistem za kordinatni početak se uzima tačka $O(0, 0, 0)$ a za vektore baze

$\vec{i} = (1, 0, 0), \ \vec{j} = (0, 1, 0), \ \vec{k} = (0, 0, 1).$

PRIMER

Određivanje intenziteta vektora.

Dati su vektori $\vec{a} = (4, -3, 1)$ i $\vec{b} = (5, -2, -3)$. Odrediti intenzitet vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rešenje. Važi da je

$$||\vec{a}|| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26},$$
$$||\vec{b}|| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}.$$

Poglavlje 2

Operacije i relacije sa vektorima u R3

RELACIJE I OPERACIJE U $\mathbb{R}^3$

Prostor $\mathbb{R}^3$ zajedno sa uvedenim operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom jeste vektorski prostor.

Za vektore $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ i skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ važi:

1. $\vec{a} = \vec{b}$ ako i samo ako $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$,(jednakost vektora zadatih koordinatama)

2. $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$,(sabiranje vektora zadatih koordinatama)

3. $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$,(množenje vektora zadatog koordinatama skalarom)

4. vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda,$$

5. jedinični vektor $\overrightarrow{a_0}$ vektora $\vec{a}$, je jednak $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$, pa imamo:

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot (x_1, y_1, z_1)$$

$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right)$$

Napomena. Neutralni element za sabiranje vektora je, kako smo već naveli, nula vektor koji se u $\mathbb{R}^3$ definiše kao
$\vec{0} = (0, 0, 0).$

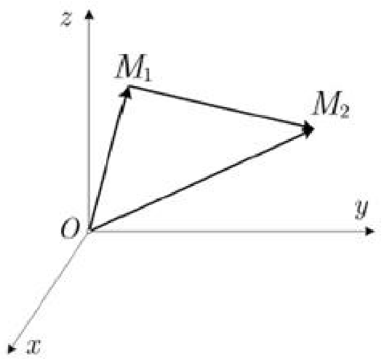
ZADAVANJE VEKTORA U KOORDINATNOM SISTEMU

Vektor se koordinatnom sistemu zadaje preko vektora položaja njegove početne i krajnje tačke

Ako su date dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ tada je:

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

što se sa naredne slike neposredno vidi:



Slika 2.1 Zadavanje vektora u koordinatnom sistemu (izvor: Autor).

Odavde se dobija da je

$$||\overrightarrow{M_1M_2}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

PRIMER

Određivanje intenziteta zbira dva vektora

Dati su vektori $\vec{a} = (4, -3, 1)$ i $\vec{b} = (5, -2, -3)$. Odrediti intenzitet vektora $\vec{a} + \vec{b}$.

Rešenje. Kako je $\vec{a} + \vec{b} = (9, -5, -2)$, tada je

$$||\vec{a} + \vec{b}|| = \sqrt{81 + 25 + 4} = \sqrt{110}.$$

VIZUELIZACIJA PROSTORA $\mathbb{R}^3$

Primer sa YouTube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Skalarni proizvod vektora u R3

DEFINICIJA

Prostor $\mathbb{R}^3$ u koji je uveden skalarni proizvod e naziva Euklidski trodimenzionalni vektorski prostor i označava sa E^3.

Skalarni proizvod vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ se definiše na sledeći način:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3.$$

Prostor $\mathbb{R}^3$ u koji na prethodno pomenuti način uveden skalarni proizvod se naziva Euklidski trodimenzionalni vektorski prostor i označava sa $\mathbb{E}^3$. Dalje, važi da je

$$\vec{a} \circ \vec{a} = ||\vec{a}||^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \;\Rightarrow\; ||\vec{a}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Ugao između dva vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ se određuje iz formule:

$$\cos\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

Skalarni proizvod se često i primenjuje u ovu svrhu određivanja ugla između dva vektora. Uslov normalnosti se iz prethodne formule može definisati na sledeći način

$$\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = 0.$$

Za ortove važi

$\circ$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Ako je neki vektor $\vec{a}$ jedinični vektor, tj. $||\vec{a}|| = 1$, tada je

$$\vec{a} \circ \vec{i} = \cos\alpha, \;\; \vec{a} \circ \vec{j} = \cos\beta, \;\; \vec{a} \circ \vec{k} = \cos\gamma.$$

gde su α, β, γ uglovi koje vektor $\vec{a}$ zaklapa sa Ox, Oy i Oz osom. Tada je

$$\vec{a} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

Odavde se dobija da jedinični vektor ima koordinate

$$\vec{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

OSOBINE SKALARNOG PROIZVODA

Skalarni proizvod je komutativna operacija i važi osobina distributni zakon nje prema sabiranju vektora.

U opštem slučaju, na osnovu toga kako se definiše ugao između dva vektora u normiranom prostoru, možemo skalarni proizvod uvesti na sledeći način

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right), \qquad (*)$$

gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva nenula vektora i važi $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$. Iz ovog oblika se može videti da je skalarni proizvod u prostoru $\mathbb{R}^3$ invarijantan u slučaju da ovi vektori istovremeno rotiraju za neki ugao. Sve osobine pomenute za skalarni proizvod prilikom definisanja unitarnog prostora i ovde važe. Podsetimo ih se:

1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$(komutativnost skalarnog proizvoda);

2) $\alpha \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = (\alpha \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = (\alpha \cdot \vec{b}) \circ \vec{a}$

3) $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$(distributivnost skalarnog proizvoda prema sabiranju vektora);

4) $\vec{a} \circ \vec{a} = ||\vec{a}||^2 \geq 0$ (nenegativnost skalarnog proizvoda). $\left(\vec{a}^2 = \vec{a} \circ \vec{a} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{a}|| \cdot \cos\left(\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{a}\right)\right) = ||\vec{a}||^2 \Rightarrow ||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\right)$

Iz jednakosti (*) dobija se značajna primena skalarnog proizvoda

$$\cos\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||},$$

o kojoj je bilo reči. Takođe, iz jednakosti (*), možemo uočiti da važi

$$\vec{a} \perp \vec{b} \;\;\Leftrightarrow\;\; \vec{a} \circ \vec{b} = 0.$$

Na kraju pomenimo i nejednakost

$$\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)^2 \leq (\vec{a} \circ \vec{a}) \cdot \left(\vec{b} \circ \vec{b}\right)$$

koja se zove Koši - Švarc - Bunjakovski nejednakost za skalarni proizvod.

PRIMER

Izračunavanje skalarnog proizvoda.

Dati su vektori $\vec{a} = (4, -3, 1)$, i $\vec{b} = (5, -2, -3)$. Odrediti skalarni proizvod vektora

a) $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

b) $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$.

Rešenje. Imamo da je

a) $\vec{a} \circ \vec{b} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = 23.$

b) Imamo da je $\vec{a} + \vec{b} = (4 + 5, -3 + (-2), 1 + (-3)) = (9, -5, -2)$ i $\vec{a} - \vec{b} = (4 - 5, -3 - (-2), 1 - (-3)) = (-1, -1, 4)$. Tada je

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = -9 + 5 - 8 = -12.$$

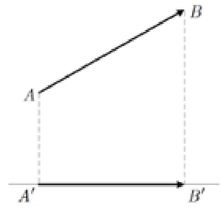
SKALARNA PROJEKCIJA VEKTORA NA OSU

Primenom skalarnog proizvoda može se definisati skalarna projekcija vektora na osu.

Neka je prava p orijentisana tj. neka je za bilo koje dve tačke prave p određeno koja je prethodna, a koja je sledeća tačka. Takva prava naziva se osa. Osa se može okarakterisati i svojim jediničnim vektorom. Tada je orijentacija prave p određena nekim njenim jediničnim vektorom $\overrightarrow{p_0}$.

Neka je neki vektor $\vec{a}$ zadat svojom početnom tačkom A i krajnjom tačkom B, tj.vektor $\overrightarrow{AB}$.

Kao što je poznato, ortogonalna projekcija tačke na pravu predstavlja podnožje normale konstruisane iz te tačke na tu pravu. Neka su tačke A' i B' ortogonalne projekcije tačaka A i B, tim redom, na osu p. Tačkama A' i B' definisan je vektor $\overrightarrow{A'B'}$ koji je, po definiciji, projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu p što je prikazano na sledećoj slici.



Slika 3.1 Projekcija vektora na osu (izvor: Autor).

Skalarna projekcija vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ na osu p, u oznaci $\vec{a}_p$, definiše se na sledeći način

$$\vec{a}_p = ||\vec{a}|| \cdot \cos\alpha,$$

gde je $\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{p}) \in [0, \pi]$.

Poglavlje 4

Vektorski proizvod u R3

DEFINICIJA VEKTORSKOG PROIZVODA U $\mathbb{R}^3$

Vektorski proizvod dva vektora je vektor.

Vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ se definiše na sledeći način

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Za ortove iz $\mathbb{R}^3$ važi

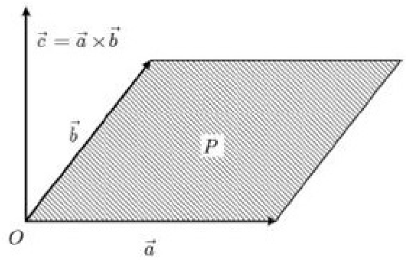
$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Dakle, vektorski proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je neki vektor $\vec{c}$, u oznaci $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
Može se pokazati da vektor koji predstavlja vektorski proizvod dva vektora ima sledeće osobine:

a) $||\vec{c}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \sin\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = P$, gde je P površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (videti sliku),

b) pravac vektora $\vec{c}$: $\vec{c} \perp \vec{a} \ \wedge \ \vec{c} \perp \vec{b}$(normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$),

c) smer vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ čini desni triedar (odnosno levi) triedarski sistem.



Slika 4.1 Geometrijska intepretacija vektorskog proizvoda dva vektora (izvor: Autor).

Lako je uočiti da se primenom prethodne osobine pod a) može računati i površina trougla konstruisanog nad vektorima datim vektorima i da ona iznosi polovinu od površine uočenog paralelograma sa slike.

OSOBINE VEKTORSKOG PROIZVODA

Osobina vektorskog proizvoda dva vektora koja se često primenjuje jeste da je intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak površini paralelograma konstruisanog nad njima.

Osobine vektorskog proizvoda:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$(antikomutativnost vektorskog proizvoda);

2. $\alpha \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\alpha \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\alpha \cdot \vec{b}\right)$(asocijativnost vektorskog proizvoda u odnosu na množenjem skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$);

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$(distributivnost vektorskog proizvoda u odnosu na operaciju sabiranje vektora);

4. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \lambda \vec{b},\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$tj. ovi vektori su kolinearni (pretpostavlja se da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ne-nula vektori, jer je tvrđenje u suprotnom trivijalno).
$\mathbf{Dokaz.}(\Rightarrow)\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow ||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{0}|| \Rightarrow ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \sin\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = 0$. Tada je $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \vee \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$. Dakle, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni.

$(\Leftarrow)$ Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su kolinearni i tada važi $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \vee \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi \Rightarrow \sin\left(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = 0 \Rightarrow ||\vec{a} \times \vec{b}|| = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

5. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
Dokaz :$||\vec{a} \times \vec{a}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{a}|| \sin\left(\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{a}\right)\right) = 0.$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: o vektorskom proizvodu.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER

Ispitivanje kolinearnosti vektora i izračunavanje površine trougla primenom vektorskog proizvoda.

Date su tačke $A(1,2,3), B(0,2,-2)$ i $C(5,2,2)$.

a) Dokazati da vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ nisu kolinearni.

b)Odrediti površinu trougla $\triangle ABC$.

$\mathbf{Re\check{s}enje.}$Imamo da je

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-2, -2-3) = (-1,0,-5) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AC} = (5-1, 2-2, 2-3) = (4,0,-1).$$

a) Kako bismo proverili kolinearnost ovih vektora potražićemo njihov vektorski proizvod. Ako on bude različit od nula vektora, time ćemo dokazati da ovi vektori nisu kolinearni. Zaista,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21\vec{j} = (0,-21,0) \neq (0,0,0).$$

b) Površinu traženog trougla određujemo kao polovinu površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Tada imamo da je

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}||(0,-21,0)|| = \frac{21}{2}.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Primena vektorskog proizvoda dva vektora.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Mešoviti proizvod tri vektora u R3

DEFINICIJA MEŠOVITI PROIZVOD TRI VEKTORA U $\mathbb{R}^3$

Mešoviti proizvod tri vektora je skalar. Njegovom primenom se provera komplanarnost vektora.

Ako su tri vektora zadata koordinatama, tj. dati su vektori $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1), \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ i $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ tada se mešoviti proizvod računa na sledeći način:

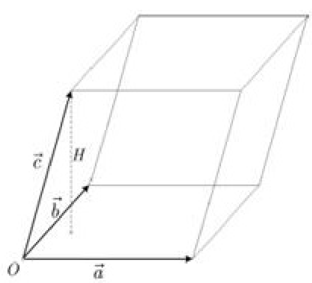
$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Odavde se vidi da su tri vektora zadata koordinatama komplanarna (sva tri se sadrže u istoj ravni) ako i samo ako je $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0$.

IZRAČUNAVANJE ZAPREMINE PARALELEPIPEDA

Zapremina paralelepipeda konstruisanog nad tri vektora se izračunava preko mešovitog proizvoda tih vektora. Takođe, on se može primeniti i na određivanje zapremine tetraedra.

Neka je nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ konstrusan paralelepiped (videti sliku) i neka je $\measuredangle\big((\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c}\big)=\theta$.



Slika 5.1 Paralelepiped konstruisan nad tri vektora (izvor: Autor).

Tada je

$$\cos\theta = \frac{H}{||\vec{c}||} \;\Rightarrow\; H = ||\vec{c}|| \cdot \cos\theta.$$

Iz prethodnog, na osnovu definicije skalarnog proizvoda, kao i osobine vektorskog proizvoda

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = ||\vec{a} \times \vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \cos\theta = P \cdot H = V$$

gde je sa P označena površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, sa H visina paralelepipeda, dok je sa V označena zapremina paralelepipeda.

U slučaju da ova tri vektora čine levi triedarski sistem tada važi da je

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -V.$$

Zato se prilikom korišćenja ove formule za izračunavanje zapremine paralelopipeda uzima da je

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| = V.$$

Mešoviti proizvod vektora se može koristiti i za izračunavanje zapremine odgovarajuće četvorostrane piramide. Ako tu zapreminu označimo sa V_T, tada je

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: izračunavanje zapremine paralelepipeda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

OSOBINE MEŠOVITOG PROIZVODA

Tri vektora zadata koordinatama su komplanarna ako i samo ako su barem dva od ta tri vektora linearno zavisna tj. ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak 0.

1. $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a})$(tj. prilikom kružnih permutacija vektora vrednost mešovitog prozvoda se ne menja);

2. $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$

Dokaz. $\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})\overset{1.}{=}\vec{c}\circ(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$(poslednja jednakost važi iz komutativnosti skalarnog proizvoda);

3. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=-[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]=-[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]=-[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$;

4. $\lambda\cdot[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\lambda\cdot\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\lambda\cdot\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\lambda\cdot\vec{c}],\ \lambda\in\mathbb{R}$;

5.

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\pm\vec{d}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\pm[\vec{a},\vec{b},\vec{d}],$$

$$[\vec{a},\vec{b}\pm\vec{c},\vec{d}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\pm[\vec{a},\vec{c},\vec{d}],$$

$$[\vec{a}\pm\vec{b},\vec{c},\vec{d}]=[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\pm[\vec{b},\vec{c},\vec{d}];$$

6. $[\vec{a},\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]=0$;

7. $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni vektori ako i samo ako je

$$\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})=0.$$

PRIMER

Određivanje zapremine tetraedra i jedne njegove visine primenom mešovitog proizvoda.

Neka su date četiri tačke $A(-2,0,1),B(0,0,1),C(1,4,1)$ i $D(1,4,3)$. . Izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$ i odrediti visinu H povučenu iz temena D.

Rešenje. Odredimo, najpre, $\overrightarrow{AB}=(0+2,0-0,1-1)=(2,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1+2,4-0,1-1)=(3,4,0)$, kao i $\overrightarrow{AD}=(1+2,4-0,3-1)=(3,4,2)$.

a) Zapremina traženog tetraedra se računa po formuli:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2&3&3\\0&4&4\\0&0&2\end{vmatrix}=\frac{8}{3}.$$

b) Kako je $V_{ABCD}=\frac{P_{\triangle ABC}\cdot H}{3}$, tada je $H=\frac{3\cdot V_{ABCD}}{P_{\triangle ABC}}$. Kako važi da je $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||=\ldots=4$(pokazati za vežbu), imamo da je $H=\frac{3\cdot\frac{8}{3}}{4}=2$.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Primena mešovitog proizvoda vektora.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Mešoviti proizvod vektora – provera komplanarnosti tri vektora.

Odrediti parametar t tako da dati vektori budu komplanarni $\vec{a} = (\ln(t-2), -2, 6), \vec{b} = (t, -2, 5), \vec{c} = (0, -1, 3)$.

Rešenje. Vektori su komplanarni (pripadaju istoj ravni) ako je njihov mešoviti proizvod jednak 0. Pri rešavanju moramo voditi računa, zbog logaritma pod kojim se javlja t, da mora biti $t - 2 > 0$, tj. $t \in [2, +\infty)$. Sada je

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \ln(t-2) & -2 & 6 \\ t & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6\ln(t-2) - 6t + 5\ln(t-2) + 6t = -\ln(t-2)$$
$$= 0.$$

Rešavanjem logaritamske jednačine $\ln(t-2) = 0$ dobijamo da je $t = 3$. Kako je $3 \in [2, +\infty)$, za vrednost $t = 3$ dati vektori glase $\vec{a} = (0, -2, 6)$, $\vec{b} = (3, -2, 5)$ i $\vec{c} = (0, -1, 3)$ i komplanarni su.

ZADATAK 2 (15 MINUTA)

Linearna kombinacija vektora.

Date su tačke $A(2, 3, -1), B(1, 0, 2), C(-1, 2, 3), D(2, -1, -1)$ i vektor $\vec{v} = (7, -7, -6)$. Predstaviti vektor $\vec{v}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Rešenje. Imamo da je $\overrightarrow{AB} = (1-2, 0-3, 2-(-1)) = (-1, -3, 3)$. Slično, dobijamo da je $\overrightarrow{AC} = (-3, -1, 4)$ i $\overrightarrow{AD} = (0, -4, 0)$. Kako važi da je

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ovi vektori su linearno nezavisni. To znači da vektor $\vec{v}$ može da se predstavi kao njihova linearna kombinacija. Tada je

$$\vec{v}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda_3\cdot\overrightarrow{AD},$$

gde λ_1, λ_2 i λ_3 treba odrediti. Sada imamo da je

$$(7,-7,-6)=\lambda_1\cdot(-1,-3,3)+\lambda_2\cdot(-3,-1,4)+\lambda_3\cdot(0,-4,0)=$$
$$=(-\lambda_1-3\lambda_2,-3\lambda_1-\lambda_2-4\lambda_3,3\lambda_1+4\lambda_2).$$

Izjednačavanjem vektora, imamo da je

$$\begin{aligned}-\lambda_1-3\lambda_2&=7\\-3\lambda_1-\lambda_2-4\lambda_3&=-7\\3\lambda_1+4\lambda_2&=-6\end{aligned}$$

Rešavanjem sistema,dobijamo $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$ i $\lambda_3=1$, pa je

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}.$$

ZADATAK 3 (15 MINUTA)

Razlaganje vektora, po datim vektorima.

Dati su vektori $\vec{a}=(1,1,-1),\vec{b}=(-2,-1,2),\vec{c}=(1,-1,2)$. Razložiti vektor $\vec{c}$ po vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$.

Rešenje. Odredimo, najpre, vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\-2&-1&2\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}=(1,0,1).$$

Vektor $\vec{c}$ razlažemo po vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$na sledeći način

$$(1,-1,2)=\alpha(1,1,-1)+\beta(-2,-1,2)+\gamma(1,0,1),$$

gde su α,β,γ realni brojevi. Odatle sledi da je

$$(1,-1,2)=(\alpha-2\beta+\gamma,\alpha-\beta,-\alpha+2\beta+\gamma).$$

To znači da realne konstante α,β,γ zadovoljavaju naredni sistem jednačina

$$\begin{aligned}\alpha-2\beta+\gamma&=1\\\alpha-\beta&=-1\\-\alpha+2\beta+\gamma&=2\end{aligned}$$

Jednostavnim rešavanjem ovog sistema, recimo izražavanjem α iz druge i zamenom u prvu i treću jednačinu, dobijamo da je

$$\alpha=-\frac{3}{2},\ \beta=-\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{3}{2}.$$

Odatle sledi da je

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Određivanje ugla kod jednog ugla trougla.

Neka tačke $A(-1,-2,4)$, B $(-4,-2,0)$ i $C(3,-2,1)$ čine temena trougla. Odrediti ugao kod temena B.

Rešenje. Važi da je

$$\overrightarrow{BA} = (-4,-2,0) - (-1,-2,4) = (3,4,0) \text{ i } \overrightarrow{BC} = (3,-2,1) - (-4,-2,0) = (7,0,1).$$

Tada je

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 25,$$

kao i

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5 \text{ i } \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{7^2+0^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ako ugao kod temena B označimo sa β, ta imamo da je

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tada je $\beta = \frac{\pi}{4}$.

ZADATAK 5 (15 MINUTA)

Vektorski proizvod vektora – vektori su zadati koordinatama.

Date su tačke $A(1,2,0), B(3,0,-3), C(5,2,6)$. Izračunati površinu $\triangle ABC$ i visinu iz tačke A na stranicu BC.

Rešenje. Imamo da je $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-3)$ i $\overrightarrow{AC} = (4,0,6)$. Tada je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k} - 12\vec{j} = (-12,-24,8).$$

Sada je

$$||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \sqrt{144+576+64} = \sqrt{784} = 28,$$

pa možemo izračunati površinu $\triangle ABC$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

Odredimo visinu iz tačke A. Imamo da je $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{4+4+81} = \sqrt{89}$. Kako je $P_{\triangle ABC} = \dfrac{||\overrightarrow{BC}|| \cdot h}{2}$, tada je

$$h = \frac{2P_{\triangle ABC}}{||\overrightarrow{BC}||} = \frac{28}{\sqrt{89}}.$$

ZADATAK 6 (15 MINUTA)

Mešoviti proizvod vektora – određivanje zapremine tetraedra i visine tetraedra

Date su tačke $A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), D(4,1,3)$. Izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$ i visinu iz tačke D koja odgovara osnovi ABC.

Rešenje. Zapremina tetraedra, u oznaci V, se računa po formuli

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-18| = 3.$$

Odredimo, sada, traženu visinu H iz temena D. Važi sledeća formula za izračunavanje zapremine tetraedra (kao piramide) $V = \frac{B \cdot H}{3}$, gde je B površina osnove na koju se spušta visina. U našem slučaju to je $\triangle ABC$, pa je

$$V = \frac{P_{\triangle ABC} \cdot H}{3} = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| \cdot \frac{H}{3}.$$

Odatle je

$$H = \frac{6V}{\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|}.$$

Odredimo $\left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|$.Prvo, imamo da je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -21\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} = (-21, 9, 3),$$

pa je $\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{441+81+9} = \sqrt{531} = 3\sqrt{59}$.Konačno, dobijamo da je

$$H = \frac{6V}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{18}{3\sqrt{59}} = \frac{6}{\sqrt{59}}.$$

ZADATAK 7 (15 MINUTA)

Određivanje zapremine tetraedra i visine tetraedra.

Date su tačke $A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), D(2,3,8)$. Izračunati zapreminu i visinu piramide određene tim tačkama i odrediti visinu te piramide koja polazi iz vrha D .

Rešenje. Odredimo vektore $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$. Imamo da je

$$\overrightarrow{CA} = (2,0,-6), \overrightarrow{CB} = (0,3,-6), \overrightarrow{CD} = (2,3,2)$$

Zapremina piramide $ABCD$ jednaka je

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}\right| = 14.$$

Da bismo odredili visinu piramide koja polazi iz vrha D , potrebno je da odredimo površinu baze $\triangle ABC$. Površina tog trougla je

$$B = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right\| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}||(18,12,6)|| = 3\sqrt{14}.$$

Neka je H visina piramide koja polazi iz vrha D . Zapremina te piramide, jednaka je $V = \frac{B \cdot H}{3}$, pa je

$$H = \frac{3 \cdot V}{B} = \frac{3 \cdot 14}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

ZADATAK 8 (15 MINUTA)

Određivanje vektora, za koji važe određeni uslovi.

Dati su vektori $\vec{a} = (2,3,-1)$ i $\vec{b} = (1,-2,3)$. Odrediti vektor $\vec{c}$, ortogonalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pri čemu je $\vec{c} \circ (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

Rešenje. Neka je $\vec{c} = (x,y,z)$. Ovaj zadatak je moguće rešiti na više načina.
I način. Dva vektora su ortogonalna ako i samo ako je njihov skalarni proizvod jednak 0 . Zbog toga je

$$(x, y, z) \circ (2, 3, -1) = 0$$
$$(x, y, z) \circ (1, -2, 3) = 0$$
$$(x, y, z) \circ (2, -1, 1) = -6$$

Odatle sledi da je

$$2x + 3y - z = 0$$
$$x - 2y + 3z = 0$$
$$2x - y + z = -6$$

rešavanjem ovog sistema (uraditi za vežbu) dobijamo da je

$$x = -3,\ y = 3,\ z = 3.$$

Odatle sledi da je $\vec{c} = (-3, 3, 3)$.

II način. Vektor $\vec{c}$ je ortogonalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Nije teško utvrditi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni. Svi vektori ortogonalni na dva linearno nezavisna vektora jesu kolinearni sa vektorskim proizvodom tih vektora. U ovom zadatku, zbog ortogonalnosti vektora $\vec{c}$ na linearno nezavisne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, sledi da je

$$\vec{c} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

gde je α neki realan broj.

Važi da je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k} = (7, -7, -7).$$

Iz uslova zadataka važi da je $\vec{c} \circ (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$, tj. $\vec{c} \circ (2, -1, 1) = -6$. S druge strane, dobili smo da je $\vec{c} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (7\alpha, -7\alpha, -7\alpha)$. Odavde dobijamo da važi

$$(7\alpha, -7\alpha, -7\alpha) \circ (2, -1, 1) = 14\alpha = -6.$$

Rešenje te jednačine je $\alpha = -\dfrac{3}{7}$. Zbog toga je

$$\vec{c} = (7\alpha, -7\alpha, -7\alpha) = (-3, 3, 3).$$

ZADATAK 9 (10 MINUTA)

Određivanje ugla koji neki vektor zaklapa sa koorinatnim osama.

Naći normu vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{k}$ i odrediti uglove koje ovaj vektor zaklapa sa koordinatnim osama Ox, Oy i Oz.

Rešenje. Na predavanjima je ukazano na to da ako je neki vektor $\vec{b}$ jedinični vektor, tj. $||\vec{b}|| = 1$, tada je

$$\vec{b} \circ \vec{i} = \cos\alpha, \;\; \vec{b} \circ \vec{j} = \cos\beta, \;\; \vec{b} \circ \vec{k} = \cos\gamma,$$

gde su α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{b}$ zaklapa sa Ox, Oy i Oz osom. Odredimo, najpre, normu vektora $\vec{a} = (1, 1, -\sqrt{2})$. Tada je

$$||\vec{a}|| = \sqrt{1+1+2} = 2.$$

Normirani vektor $\vec{a}$, u oznaci $\vec{a}_0$, glasi $\vec{a}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.Sada, važi da je

$$\cos\alpha = \vec{a}_0 \circ \vec{i} = \frac{1}{2}, \;\cos\beta = \vec{a}_0 \circ \vec{j} = \frac{1}{2}, \;\cos\gamma = \vec{a}_0 \circ \vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tada je $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ i $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba samostalno da provežbaju.

Zadatak 1. Data su tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$: $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ i $C(5,0,2)$. Odrediti koordinate četvrtog temena D.

Rezultat. $D(-1,1,1)$.

Zadatak 2. Dati su vektori $\vec{a}=(1,-3,1)$, i $\vec{b}=(-2,-4,3)$. Odrediti skalarni proizvod vektora $2\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-3\vec{b}$.

Rezultat. $(2\vec{a}+\vec{b})\circ(\vec{a}-3\vec{b})=20$.

Zadatak 3. Dati su vektori $\vec{a}=(4,-3,1)$ i $\vec{b}=(5,-2,-3)$. Odrediti intenzitet vektora $\vec{a}-\vec{b}$.

Rezultat. $||\vec{a}-\vec{b}||=3\sqrt{2}$.

Zadatak 4. Dokazati da su vektori $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$ i $\vec{c}=(0,2,4)$ komplanarni, a zatim zraziti vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rezultat. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Zadatak 5. Izračunati površinu trougla $\triangle ABC$ ako je $A(2,-3,4), B(1,2,-1)$ i $C(3,-2,1)$.

Rezultat. $P_{\triangle ABC}=5\sqrt{2}$.

Vreme izrade: 1. 20 minuta; 2. 20 minuta; 3. 20 minuta; 4. 20 minuta; 5. 20 minuta;

Zaključak za lekciju 12

VEKTORSKA ALGEBRA

Vektorski prostor, unitarni i normirani vektorski prostor, ugao između dva vektora, prostor $\mathbb{R}^n$ ...

Vektorski prostor je nastao kao generalizacija pojmova polja realnih I kompleksnih brojeva. Pojam baze i dimenzije vektorskog prostora, linearne zavisnosti i nezavisnosti vektora, lineala su od suštinskog značaja u vektorskoj algebri. Uvođenjem skalarnog (unutrašnjem) proizvoda u ovaj prostor dolazi se do pojma unitarnog prostora, koji veoma bitan za rad sa vektorima, dok uvođenje pojma norme (intenziteta, dužine) vektora dovodi do normiranog prostora.

U ovoj lekciji su pored skalarnog proizvoda vektora, uvedeni vektorski proizvod i mešoviti proizvod vektora u slučaju prostora $\mathbb{R}^3$ kao i njihove najznačajnije osobine.

Uvođenje ovih pojmova utire put kao proučavanju analitičke geometrije u prostoru.

Literatura (nastavni materijal):

Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.