UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

REKURENTNE RELACIJE

Lekcija 09

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 09

REKURENTNE RELACIJE

Uvod

UVOD

Fokus ove lekcije je na rekurzijama, sa specijalnim osvrtom na rekurentne relacije

Metode za rešavanje nekih rekurentnih relacija, to jest, nalaženje eksplicitnog izraza za opšti član rekurzivno definisanog niza u specijalnim slučajevima

- linearne rekurzije sa konstantnim koeficijentima
- homogene linearne rekurzije sa konstantnim koeficijentima drugog reda

Poglavlje 1

REKURZIJA

DEFINICIJA REKURZIJE

Rekurzija je metod rešavanja problema koji uključuje rastavljanje problema na manje potprobleme

Rekurzija je metod rešavanja problema koji uključuje rastavljanje problema na manje potprobleme, sve dok se ne dođe do dovoljno malog problema koji se može trivijalno rešiti. Rekurzivne funkcije su funkcije koje pozivaju same sebe. One omogućavaju lako i razumljivo rešavanje problema koji su po prirodi stvari rekurzivni.

Problemi koji se mogu rešiti putem rekurzije nazivaju se rekurzivni (rekurentni) problem. Veliki broj programskih rešenja predstavljaju rekurzivne problem.

Prethodno smo izučili rekurentne funkcije: faktorijel, Fibonačijev niz i Akermanovu funkciju. Ovde diskutujemo neke vrste rekurzivno definisanih nizova (a_n) i njihove eksplicitne reprezentacije. Prisetimo se da je niz funkcija definisan nad domenom

N = {1, 2, . . . }

ili

N_0 = N ∪ {0}

Primer

Posmatrajmo niz koji počinje brojem 3,
a svaki sledeći element se dobija množenjem predhodnog elementa sa 2,
to jest, niz
3, 6, 12, 24, 48, ...
Ovaj niz se može definisati rekurzivno na sledeći način
$a_0 = 3$, $a_k = 2a_{k-1}$ za $k \geq 1$,
ili
$a_0 = 3$, $a_{k+1} = 2a_k$ za $k \geq 0$.
Očigledno, opšti član ovog niza je
$a_k = 3 \cdot 2_k$

PRIMERI REKURZIJE U PROGRAMIRANJU

Problemi koji se mogu rešiti putem rekurzije nazivaju se rekurzivni (rekurentni) problemi

Primer

(primena u programiranju)

Jedan od elementarnih programskih problema je sortiranje niza.

Posmatrajmo rastući niz od n članova i neka su njegovi n-1 članovi

1,2,3…n-1

Dodavanjem n-tog člana dobijamo niz od n članova, tako što ćemo pronaći mesto gde treba staviti n-ti član.

Problem sortiranja sveden na pronalaženje mesta u već sortiranom nizu. Problem sortiranja niza od n članova, sveden je na sortiranje niza od n-1 članova.

Istu proceduru primjenjujemo i na taj niz rekurzivno i na kraju ćemo doći do niza zapisa dužine 1.

Primer
(primena u matematici)
Matematički primer rekurzije je definicija faktorijela.
Faktorijel prirodnog broja n, u oznaci n! može se definisati kao
$n! = 1 \cdot 2 \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$
Alternativni način definisanja faktorijela je:
$0! = 1$
$n! = (n - 1)! \cdot n$
gde prvi iskaz definiše najjednostavniji slučaj, a drugi iskaz definiše svođenja problema reda n na jednostavniji problem reda n-1.
Na taj način, ma koliko n bilo veliko nakon konačno mnogo koraka doći ćemo do trivijalnog slučaja i izračunati n!

PRIMER REKURZIJE– KULA HANOJA

Premestite diskove sa prvog na treći štap uz minimalan broj poteza

Primer

Imamo 3 štapa. n diskova je poređano na prvom štapu po veličini tako da je najveći na dnu. Zadatak je premestiti diskove sa prvog na treći štap poštujući sledeća pravila:

- U jednom potezu dozvoljeno je premestiti samo jedan disk

- Nije dozvoljeno staviti veći disk preko manjeg

- Potrebno je odrediti koji je minimalni broj poteza potreban za izvršenje ovog zadatka

Označimo sa T_n broj poteza potreban da se reši zadatak sa n diskova . Za osnovni slučaj n = 1 potreban je jedan potez, pa je $T_1 = 1$.

Za $n = 2$, $T_2 = 3$.

Za n diskova prvo premestimo $n - 1$ diskova na srednji štap u T_{n-1} poteza, zatim najveći disk premestimo na treći štap i na kraju $n - 1$ diskova sa srednjeg štapa premestimo na treći štap u T_{n-1} poteza

Ukupan broj poteza je $T_n = 2T_{n-1} + 1$

Sada imamo rešenje problema u rekurzivnom obliku: $T_1 = 1$,$T_n = 2T_{n-1} + 1$

Rešenje: $T_n = 2^n - 1$

Poglavlje 2

REKURENTNA RELACIJA

KADA SE KORISTE REKURENTNE RELACIJE

Rekurentne relacije se koriste da bi se došlo do rešenje uz pomoć rešavanja njegovih podproblema

Rekurente relacije igraju važnu ulogu u proučavanju algoritama i njihove kompleksnosti. Rekurentne relacije se koriste da bi se došlo do rešenje uz pomoć rešavanja njegovih podproblema. Odnosno, kada se razbije problem na manje delove. Dinamičko programiranje se koristi za rešavanje važnih problema u različitim oblastima poput ekonomije, računarskog vida, prepoznavanja govora, veštačke inteligencije, računarske grafike i bioinformatike. Poreklo naziva "dinamičko programiranje" je zanimljivo, a njega je uveo matematičar Ričard Belman 1950-ih. Belman je radio u RAND korporaciji na projektima za američku vojsku, a tada je sekretar odbrane SAD bio neprijateljski nastrojen prema matematičkim istraživanjima. Kako bi obezbedio finansiranje projekta, Belman je odlučio da naziv za njegovu metodu rešavanja problema raspoređivanja i planiranja ne sadrži reč "matematika". Odlučio se za pridev "dinamičko" jer je smatra da je "nemoguće koristiti reč 'dinamičko' u negativnom smislu", i da je dinamičko programiranje nešto "na šta čak ni kongresmen ne bi mogao da ima primedbe".

Problem koji koristimo za ilustraciju dinamičkog programiranja je da rasporedimo što više predavanja u jednoj sali. Ova predavanja imaju unapred određena vremena početka i kraja. Jednom kada predavanje počne, ono traje dok se ne završi. Dva predavanja ne mogu istovremeno početi. Predavanje može početi u trenutku kada se drugo završi. Ovo se može rešiti korišćenjem pohlepnog algoritma koji uvek proizvodi optimalan raspored.

PRIMER REKURENTNE RELACIJE U IZRAČUNAVANJU ŠTEDNJE U BANCI

Ako neko stavi na štednju 10.000EUR sa godišnjom kamatom od 11%, koliko će ta osoba imati na računu posle 30 godina?

Zadatak

Ako neko stavi na štednju 10.000EUR sa godišnjom kamatom od 11%, koliko će ta osoba imati na računu posle 30 godina?

Rešenje

Kako bi rešili ovaj zadatak, neka P_n označi količinu novca nakon n godina. Ovo znači da suma na računu u n-toj godini je jednaka sumi posle n-1 godine plus interes koji se akumulira u n-toj godini. Ovim vidimo da niz { P_n } ispunjava uslove rekurentne relacije

$P_n = P_{n-1} + 0,11P_{n-1} = (1,11)P_{n-1}$.
Početni uslov je $P_0 = 10.000$.
Možemo koristiti iterativni postupak da pronađeno formulu za P_n . Tako je
$P_1 = (1,11)P_0$
$P_2 = (1,11)P_1 = (1,11)^2P_0$
$P_3 = (1,11)P_2 = (1,11)^3P_0$
...
$P_n = (1,11)P_{n-1} = (1,11)^nP_0$
Kada dodamo i početni uslov $P_0 = 10.000$, tada dobijamo formulu
$P_n = 10.000(1,11)^n$
Sada možemo i izračunati šta će se desiti posle 30 godina, odnosno koliko će biti para na računu. To dobijamo tako što zamenjujemo n = 30 u formulu
$P_n = 10.000(1,11)^n$, pa tako dobijamo

$P_{30} = 10.000(1,11)^{30} = 228.922,97EUR$

DEFINICIJA REKURENTNE RELACIJE

Rekurentna relacija je jednačina u kojoj se n-ti član niza definiše preko svojih prethodnika

Rekurentna relacija je jednačina u kojoj se n-ti član niza definiše preko svojih prethodnika.

Rekurentna relacija za niz { a_n } je jednačina koja je iskazana preko svojih prethodnih članova niza, a to su $a_1, \ldots, a_{n-1}$, za sve cele brojeve n tako da $n \geq n)0$, gde je n_0 ne-negativni celi broj. Niz se naziva rešenjem relacije, ako njegovi članovi zadovoljavaju rekurentnu relaciju.

Jednačina

$a_k = 2a_{k-1}$, ili, ekvivalentno $a_{k+1} = 2a_k$,

kod koje je jedan od elemenata niza definisan preko prethodnih elemenata tog istog niza predstavlja rekurentnu relaciju.

Rekurentna relacija reda k je funkcija oblika

$a_n = \phi(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$
pri čemu je n-ti element an niza (a_k) funkcija predhodnih k elemenata $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$.

Pod rešavanjem rekurentne jednačine podrazumevamo prevođenje funkcije a(n), koja je definisana nad ne-negativnim celim brojevima, iz oblika u kome je opisana rekurzivnom formulom u zatvoren oblik, gde je funkcija a(n) izražena izrazom koji direktno zavisi od n.

Jednačina $a_0 = 2$, koja daje konkretnu vrednost jednog od elemenata niza, se zove *početni uslov.*
Funkcija $a_n = 3 \cdot 2^n$, koja daje formulu za a_n u funkciji od n, se zove *rešenje rekurentne relacije*.

MOGUĆA REŠENJA REKURENTNIH RELACIJA

Može se desiti da postoji mnogo nizova koji zadovoljavaju datu rekurentnu relaciju

Može se desiti da postoji mnogo nizova koji zadovoljavaju datu rekurentnu relaciju. Na primer, oba niza

1, 2, 4, 8, 16, . . .

7, 14, 28, 56, 112, . . .

predstavljaju rešenje rekurentne relacije

$a_k = 2a_{k-1}$.

Sva takva rešenja formiraju takozvano *opšte rešenje* rekurentne relacije.

Obično postoji jedno jedinstveno rešenje rekurentne relacije koje istovremeno zadovoljava i dati početni uslov. Na primer, početni uslov $a_0 = 3$ dovodi do jednistvenog rešenja

3, 6, 12, 24, . . .

rekurentne relacije

$\mathbf{a_k = 2a_{k-1}}$.

Ako je { a_n } niz koji zadovoljava rekurentnu relaciju $a_n = a_{n-1} + 3$ za n = 1, 2, 3, . . . , i ako je $a_0 = 2$, onda su njegovi članovi a_1, a_2 , i a_3
$a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
$a_2 = 5 + 3 = 8$
$a_3 = 8 + 3 = 11$.

KAKO MOŽEMO NA OSNOVU PRVIH ČLANOVA ODREDITI OSTALE ČLANOVE NIZA

Uobičajeni problem u diskretnoj matematici je pronalaženje opšte formule rekurentne relacije

Uobičajeni problem u diskretnoj matematici je pronalaženje opšte formule rekurentne relacije ili neke druge vrste opšteg pravila za određivanje članova niza. Ponekad je poznato samo nekoliko članova niza, a cilj je da se odredi čitav niz. Iako početni članovi niza ne određuju celu sekvencu (uostalom, postoji beskonačno mnogo različitih nizova koji počinju bilo kojim konačnim skupom početnih članova), poznavanje prvih nekoliko termina može vam pomoći da pretpostavite opštu formulu vašeg niza. Jednom kada napravite ovu pretpostavku, možete pokušati da potvrdite da imate tačan niz. Postoji mnogo pitanja koja biste mogli postaviti da odredite ostale članove niza, ali neka od korisnijih su:

- Postoje li podnizovi iste vrednosti? Odnosno, da li se ista vrednost javlja više puta uzastopno?
- Da li su uslovi dobijeni iz prethodnih članova dodavanjem istog iznosa ili iznosa koji zavisi od položaja člana u nizu?

- Da li se članovi dobijaju iz prethodnih pojmova množenjem sa određenom vrednosti?
- Da li se članovi dobijaju kombinovanjem prethodnih članova na određeni način?
- Postoje li ciklusi među članovima?

Zadatak

Kako možemo da odredimo opšti član niza ako su njegovih prvih 10 članova 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

Rešenje

U ovom nizu ceo broj 1 pojavljuje se jednom, ceo broj 2 pojavljuje se dva puta, ceo broj 3 pojavljuje se tri puta, a ceo broj 4 pojavljuje se četiri puta. Prema intuiciji možemo pretpostaviti pravilo za generisanje članova ovog niza tako da se ceo broj n pojavi tačno n puta, pa bi sledećih pet članova niza bilo 5, sledećih šest članova bilo bi 6 i tako dalje. Ovako generisan niz je moguće rešenje ovog zadatka.

Zadatak

Kako možemo da odredimo opšti član niza ako su njegovih prvih 10 članova 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59?

Rešenje
Imajte na umu da se svaki od prvih 10 članova ovog niza nakon prvog se dobija dodavanjem 6 prethodnom èlanu. To bismo mogli da primetimo primećujući da je razlika između uzastopnih članova 6. Prema tome, n-ti èlan mogao bi se proizvesti započinjanjem sa 5 i dodavanjem 6 ukupno n - 1 puta; odnosno ovde je pretpostavka da je n-ti èlan 5 + 6 (n - 1) = 6n - 1.
(Ovo je aritmetička progresija sa a = 5 i d = 6, o kojoj će kasnije biti reči)

PROVERITE SVOJE ZNANJE

Za sledeće nizove odrediti sledeća tri člana niza u navedenoj sekvenci

Zadatak
Za sledeće nizove odrediti sledeća tri člana niza u navedenoj sekvenci
a) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0 , 1 . . . .
b) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, ...
c) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, ...
d) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...
e) 15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, ...
f) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, ...
g) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, ...
Rešenje
a) 1, 1, 1 (niz prati jednu 1 i jednu 0, pa dve 1 i dve 0, pa tri 1 i tri 0, pa se nastavlja sa

uvećanjem broja cifara)
b) 9, 10, 10 (članovi se pojavljuju rastućim redom, tako da se parni brojevi pojavljuju dva puta)
c) 32, 0, 64 (brojevi na neparnim mestima su stepeni 2, brojevi na parnim mestima su uvek 0)
d) 384, 768, 1536 ($a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$)
e) -34, -41, -48 ($a_n = 15 - 7(n-1) = 22 - 7n$)
f) 57, 68, 80 ($a_n = \frac{(n^2+n+4)}{2}$)

BROJANJE KODNIH REČI

Sledeći primer pokazuje kako se rekurentna relacija može koristiti za modelovanje broja kodnih reči koje se mogu koristiti, a da mogu da prođu određene provere validnosti

Zadatak

Računarski sistem smatra niz decimalnih cifara važećom kodnom rečju ako sadrži paran broj od 0. Na primer, 1230407869 je validna, dok 120987045608 nije. Neka je n broj važećih cifara u kodnoj reči. Nađite relaciju ponavljanja za a_n .

Rešenje

Imajte na umu da je $a_1 = 9$ jer postoji 10 jednocifrenih nizova i samo jedan niz 0, koji nije validan. Rekurentna relacija se može izvesti za ovaj niz uzimajući u obzir kako validni niz od n cifara može da se dobije iz nizova od n - 1 cifara. Postoje dva načina da se formira niz sa n cifara iz niza sa jednom cifrom manje, a koji je validan.

Prvi način - validan niz od n cifara može se dobiti dodavanjem validnog niza od n - 1 cifara sa cifrom koja nije 0. Ovo dodavanje se može izvršiti na devet načina. Dakle, validan niz sa n cifara može se formirati na ovaj način na $9a_{n-1}$ načina.
Drugi način - validan niz od n cifara može se dobiti dodavanjem 0 na niz dužine n - 1 koji nije validan. Ovo daje niz sa parnim brojem 0, jer
nevalidni niz dužine n - 1 ima neparan broj od 0 . Broj načina na koje to može izvesti je ustvari broj nevalidnih nizova sa (n - 1) cifara. Zato što ima 10^{n-1} nizova dužina n - 1, i a_{n-1} su valdini, postoji $10^{n-1} - a_{n-1}$ validnih nizova sa n cifara dobijenih dodavanjem 0 na nevalidni niz dužine n - 1. Budući da su svi važeći nizovi dužine n proizvedeni na jedan od ova dva načina, sledi da

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$$

$$= 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

Poglavlje 3

LINEARNA I HOMOGENA REKURENTNA RELACIJA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

REKURENTNA RELACIJA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima k-tog reda je rekurentna relacija oblika $a_n = C_1\, a_{(n-1)} + C_2\, a_{(n-2)}$

Linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima **k-tog** reda je rekurentna relacija oblika

$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k\, a_{n-k} + f(n)$

pri čemu su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ konstante i važi $C_k \neq 0$, a f je funkcija od n.

Linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima je homogena ako je

$f(n) = 0$ za svako n.

Upotreba termina linearan dolazi iz činjenice da se ne javljaju stepeni ili proizvodi elemenata a_j .

Upotreba termina konstantni koeficijenti dolazi iz činjenice da su vrednosti $C_1, C_2, \ldots C_k$ konstantne i ne zavise od n. Očigledno možemo naći izraz za a_n ako znamo vrednosti a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$. Tako, po matematičkoj indukciji, postoji jedinstveni niz koji zadovoljava rekurentnu relaciju ako su date početne vrednosti prvih k elemenata niza.

Primer

Posmatrajmo rekurentnu realciju

$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$

Ovo je rekurentna relacija drugog reda sa konstantnim koeficijentima, koja je nehomogena zbog člana n^2.

Ako su početni uslovi

$a_1 = 1$ i $a_2 = 2$,

onda možemo uspešno naći sledećih nekoliko elemenata niza

$a_3 = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 3^2 = 15$

$a_4 = 5 \cdot 15 - 4 \cdot 2 + 4^2 = 83, \ldots.$

PRIMERI REKURENTNIH RELACIJA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$a_n = C_1\, a_{n-1} + C_2\, a_{n-2} + \ldots + C_k\, a_{n-k} + f(n)$

Primer 1

Posmatrajmo rekurentnu realciju

$a_n = 2a_{n-1}a_{n-2} + n^2$ .M

Ova rekurentna relacija nije linearna zato što postoji proizvod

$a_{n-1} \cdot a_{n-2}$.

Ako su početni uslovi

$a_1 = 1$ i $a_2 = 2$,

onda možemo uspešno naći sledećih nekoliko elemenata niza

$a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3^2 = 13$

$a_4 = 2 \cdot 13 \cdot 2 + 4^2 = 68, \ldots.$

Primer 2

Posmatrajmo rekurentnu relaciju

$a_n = na_{n-1} + 3\, a_{n-2}$

Ovo je homogena linearna rekurentna relacija drugog reda ali nema konstantne koeficijente, zato što je koeficijent uz an-1 jednak o, što nije konstanta.

Ako su početni uslovi

$a_1 = 1$ i $a_2 = 2$,

onda možemo uspešno naći sledećih nekoliko elemenata niza
$a_3 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$
$a_4 = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 42$

Primer 3

Posmatrajmo rekurentnu realciju

$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$

Ovo je homogena linearna rekurentna relacija trećeg reda. Zbog toga su potrebna tri početna uslova za dobijanje jedinstvenog rešenja rekurentne relacije. Ako su početni uslovi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, onda možemo uspešno naći sledećih nekoliko elemenata niza

$a_4 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 6$

$a_5 = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = 5$

$a_6 = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 1 = 34$

PROVERITE SVOJE ZNANJE

Da li su sledeće relacije linearne homogene rekurentne relacije drugog reda?

Da li su sledeće relacije linearne homogene rekurentne relacije drugog reda?

a) $a_k = 3a_{k-1} + 2a_{k-2}$
b) $b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-3}$
c) $c_k = \frac{1}{2}c_{k-1} - \frac{3}{7}c_{k-2}$
d) $d_k = d_{k-1}^2 + d_{k-1} \cdot d_{k-2}$
e) $e_k = 2e_{k-2}$
f) $f_k = 2f_{k-1} + 1$
g) $g_k = g_{k-1} + g_{k-2}$
h) $h_k = (-1)h_{k-1} + (k-1)h_{k-2}$

Rešenje

a. Da; A = 3 i B = 2
b. Ne; nije drugog reda
c. Da; A = $\frac{1}{2}$ i B = - $\frac{3}{7}$
d. Ne; nije linearna
e. Da; A = 0 i B = 2
f. Ne; nije homogena
g. Da; A = 1 i B = 1
h. Ne; nema konstantne koeficijente.

Poglavlje 4

HOMOGENA LINEARNA REKURENTNA RELACIJA DRUGOG REDA

REKURENTNA RELACIJA DRUGOG REDA

Polinom Δ se zove karakterističan polinom rekurentne relacije, a rešenja polinoma Δ(x) se zovu karakteristični koreni

Posmatrajmo homegenu rekurentnu relaciju drugog reda sa konstantnim koeficijentima koja ima oblik

$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$

Ili

$a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$

pri čemu su s i t koeficijenti, i važi $t \neq 0$.

Pridružimo sledeći kvadratni polinom ovoj rekurentnoj relaciji

$\Delta(x) = x^2 - sx - t$.

Polinom Δ se zove *karakterističan polinom* rekurentne relacije, a rešenja polinoma Δ(x) se zovu *karakteristični koreni*. Neka karakteristični polinom

$\Delta(x) = x^2 - sx - t$ rekurentne relacije $a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ **ima dva različita korena (rešenja), r_1 i r_2 .**

Tada je opšte rešenje rekurentne relacije dato sa $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante koje se na jedinstven način određuju iz početnih uslova.

Primer

Posmatrajmo homogenu rekurentnu relaciju

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

Njen karakteristični polinom je

$\Delta(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

koji ima korene $r_1 = 3$ i $r_2 = -1$

Pošto su koreni različiti, možemo primeniti prethodnu teoremu da bi dobili opšte rešenje

$a_n = c_1 3^n + c_2(-1)^n$

sa proizvoljnim konstantama c_1 i c_2

Ako su početni uslovi $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$, onda dobijamo:

Za $n = 0$, $a_0 = 1$: $c_1 3^0 + c_2(-1)^0 = 1$ ili $c_1 + c_2 = 1$

Za $n = 1$, $a_1 = 2$: $c_1 3^1 + c_2(-1)^1 = 2$ ili $3c_1 - c_2 = 2$

Rešavanjem sistema linearnih jednačina po c_1 i c_2 dobijamo $c_1 = 3/4$ i $c_2 = 1/4$, pa, prema tome,

$a_n = \frac{3}{4} 3^n + \frac{1}{4} (-1)^n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}$

je opšte rešenje rekurentne relacije sa početnim uslovima $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$.

PRIMER - REALNI I RAZLIČITI KORENI POLINOMA

Primeri rekurentne homogene linearne rekurentne relacije sa različitim korenima

Primer

Pronaći rešenje za

$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ kada su $a_0 = 3$, $a_1 = 6$

Karakteristični polinom ove rekurentne relacije je

$r^2 - r - 6 = 0$

Koreni ovog karakterističnog polinoma su $r_1 = 3$ i $r_2 = -2$.
S obzirom da su koreni karakterističnog polinoma različiti tada za a_n tražimo rešenje koristeći $a_n = C_1 3^n + C_2(-2)$, za neke konstante C_1 i C_2 .
Imajući u vidu zadate početne uslove, dobijamo sledeći sistem jednačina

$a_0 = 3 = C_1 + C_2$
$a_1 = 6 = 3C_1 - 2C_2$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo da su $C_1 = 2,4$, $C_2 = 0,6$
Pa je opšte rešenje za a_n tada

$a_n = 2,4 \cdot (3^n) + 0,6 \cdot (-2)^n.$

Primer

Pronaći rešenje za

$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, kada su $a_0 = 2$, $a_1 = 1$

Karakteristični polinom ove rekurentne relacije je

$r^2 - 7r + 10 = 0$

Koreni ovog karakterističnog polinoma su $r_1 = 2$ i $r_2 = 5$.
S obzirom da su koreni karakterističnog polinoma različiti tada za a_n tražimo rešenje koristeći $a_n = C_1 2^n + C_2 5^n$, za neke konstante C_1 i C_2 .

Imajući u vidu zadate početne uslove, dobijamo sledeći sistem jednačina

$a_0 = 2 = C_1 + C_2$
$a_1 = 1 = 2C_1 + 5C_2$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo da su $C_1 = 3$, $C_2 = -1$
Pa je opšte rešenje za a_n tada

$a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$.

VIDEO

Rešenje primera rekurentne relacije (video)

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER REKURENTNE RELACIJE – FIBONAČIJEV NIZ

Fibonačijev niz je homogena rekurentna relacija drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo sledeću rekurentnu relaciju za Fibonači-jev niz
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
sa početnim uslovima $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$
To je homogena rekurentna relacija drugog reda sa konstantnim koeficijentima
Njen karakteristični polinom je
$\Delta(x) = x^2 - x - 1$
Opšte rešenje
$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
Početni uslovi nas dovode do sledećeg sistema dve linearne jednačine
Za n=0, a_0=0: $c_1 + c_2$
Za n=1, a_1=1:

1= $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

- Koji ima rešenje

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Prema tome, rešenje Fibonačijeve rekurentne relacije je

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

JEDNAKI KORENI KARAKTERISTIČNOG POLINOMA

JEDNAKI KORENI POLINOMA

Opšte rešenje rekurentne relacije sa jednakim korenima $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$

Kada su koreni karakterističnog polinoma jednaki , važi sledeći rezultat.

Neka karakterističan polinom

$\Delta(x) = x^2 - sx - t$

rekurentne relacije

$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$

ima samo jedan koren r_0, to jest, koreni se poklapaju. Tada je opšte rešenje rekurentne relacije

$a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$

gde su c_1 i c_2 konstante koje se mogu odrediti na jednistven način iz početnih uslova.

Primer
Posmatrajmo homogenu rekurentnu relaciju
$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
Njen karakterističan polinom
$\Delta(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

ima samo jedan koren $r_0 = 3$.
Tako ova rekurentna relacija ima opšte rešenje
$a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$

Ako su početni uslovi $a_1 = 3$ i $a_2 = 27$, onda dobijamo
Za $n = 1$, $a_1 = 3 : 3 = c_1 3^1 + c_1 \cdot 1 \cdot 3^1$ ili $3 = 3c_1 + 3c_2$
Za $n = 2$, $a_2 = 27 : 27 = c_1 3^2 + c_1 \cdot 2 \cdot 3^2$ ili $27 = 9c_1 + 18c_2$

ili, ekvivalentno
$1 = c_1 + c_2$
$9 = 3c_1 + 18c_2$

Rešenja su $c_1 = -1$ i $c_2 = 2$

Tako je opšte rešenje rekurentne relacije sa početnim uslovima
$a_1 = 3$ i $a_2 = 27$
$a_n = -3^n + 2n3^n = 3^n(2n - 1)$

PRIMER - JEDNAKI KORENI POLINOMA

Pronaći rešenje za $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$

Pronaći rešenje za

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, kada su $a_0 = 4$, $a_1 = 1$

Karakteristični polinom ove rekurentne relacije je
$r^2 - 2r + 1 = 0$
Koreni ovog karakterističnog polinoma su $r_{1,2} = 1$.
S obzirom da su koreni karakterističnog polinoma isti tada za a_n tražimo rešenje koristeći
$a_n = C_1 1^n + C_2 n 1^n = C_1 + C_2 n$, za neke konstante C_1 i C_2 .

Imajući u vidu zadate početne uslove, dobijamo sledeći sistem jednačina

$a_0 = 4 = C_1 + C_2(0)$
$a_1 = 1 = C_1 + C_2(1)$
Rešavanjem sistema jednačina dobijamo da su $C_1 = 4$, $C_2 = -3$
Pa je opšte rešenje za a_n tada

$a_n = 4 - 3n$.

PRIMER 2- JEDNAKI KORENI POLINOMA

Primer rekurentne homogene linearne rekurentne relacije sa istim korenima.

Pretpostavimo da niz $b_0, b_1, b_2, \ldots$ zadovoljava rekuretnu relaciju

$b_k = 4b_{k-1} - 4b_{k-2}$ za sve cele brojeve $k \geq 2$

sa početnim uslovima $b_0 = 1$ i $b_1 = 3$

Pronaći jedinstveno rešenje za niz $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Možemo primetiti da se radi o linearnoj homogenoj rekurentnoj relaciji drugog reda sa istim korenima karakterističnog polinoma. Rešenje karakterističnog polinoma
$t^2 - 4t + 4 = 0$

je
$r_{1,2} = 2$

Sledi, da koristimo iskaz

$b_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 n 2^n$za sve cele brojeve $n \geq 0$,
gde su C_1 i C_2 realni brojevi čija se vrednost određuje koristeći početne uslove $b_0 = 1$ i $b_1 = 3$. Kako bi smo odredili C_1 i C_2 postavljamo sistem jednačina

$b_0 = 1 = C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = C$
$b_1 = 3 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C_1 + 2C_2$.
Rešavanjem sistema jednačina dolazimo do toga da je

$C_1 = 1$
i
$2C_1 + 2C_2 = 3$.

Substitucijom $C_1 = 1$ u drugoj jednačini dobijamo

$2 + 2C_2 = 3$,
odnosno, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Sada, substitucijom dobijenih vrednosti za C_1 i C_2 dobijamo opšte rešenje niza
$b_n = 2^n + \frac{1}{2} n 2^n = 2^n (1 + \frac{n}{2})$za sve cele brojeve $n \geq 0$.

Poglavlje 6

VEŽBA – REKURENTNE RELACIJE

ZADATAK 1

Primer rekurentne relacije sa dve nule karakterističnog polinoma

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Naći rešenje rekurentne relacije $\mathbf{a_n = 3a_{n+1} - a_{n+2}}$, sa početnim uslovima $\mathbf{a_0 = 0}$ **i** $\mathbf{a_1 = 1}$**.**

REŠENjE:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

$$a_n = c_1(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$$

$$a_0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$a_1 = c_1\frac{3+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$-c_1\frac{3-\sqrt{5}}{2} - c_2\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0$$

$$c_1\frac{3+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$c_1(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 1$$

$$c_1 = 1/\sqrt{5}$$

$$1/\sqrt{5} + c_2 = 0$$

$$c_2 = -1/\sqrt{5}$$

$$a_n = 1/\sqrt{5}(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 1/\sqrt{5}(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n$$

ZADATAK 2

Rešenje rekurentne relacije $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Naći rešenje rekurentne relacije

a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n sa početnim uslovima a_0 = 5 i a_1 = 6

REŠENJE:

$$a_{(n+2)} - 3a_{(n+1)} + 2a_n = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

$$a_0 = c_1 1^0 + c_2 2^0$$

$$a_0 = c_1 + c_2 = 5$$

$$a_1 = c_1 x_1^{+} c_2 x_2^{=} 6$$

$$-c_1 - c_2 = -5$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 6$$

$$-c_1 - c_2 = -5$$

$$2c_1 + c_2 = 6$$

$$c_1 = 1 \Longrightarrow c_2 = 4$$

$$a_n = 2^n + 4$$

ZADATAK 3

Rešenje rekurentne relacije $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Naći rešenje rekurentne relacije

a_{n+2} = $4a_{n+1}$ - $4a_n$ sa početnim uslovima a_1 = 4 i a_2 = 13

REŠENjE:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 2,$$

$$a_n = c_1(x_1)^n + nc_2(x_1)^n$$

$$a_1 = 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 4$$

$$a_2 = 4c_1 + c_2 \cdot 2 \cdot 4 = 13$$

$$2c_1 + 2c_2 = 4/(-2)$$

$$4c_1 + 8c_2 = 13$$

$$-4 \cdot c_1 - 4 \cdot c_2 = -8$$

$$4c_1 + 8c_2 = 13$$

$$4c_2 = 5 \Longrightarrow c_2 = 5/4$$

$$2c_1 + 2 \cdot 5/4 = 4$$

$$c_1 = 3/4$$

$$a_n = 3/4 \cdot 2^n + 5/4 \cdot n \cdot 2^n$$

ZADATAK 4

Odredjivanje definicije rekurzivnog niza

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Odrediti definiciju rekurzivnog niza **a_n** tako da važi:

$$a_n = \frac{n!}{(n-1)}$$

za n $\in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

REŠENjE:

$$a_n = \frac{n!}{(n-1)}$$

$$a_n = \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n-2)}{(n-1) \cdot (n-2)}$$

$$a_n = \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1)} - a_{n-1}$$

ZADATAK 5

Rešenje rekurentne relacije $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti opšte rešenje rekurentne relacije

$a_n = 5\,a_{(n-1)} - 6\,a_{n-2}$

tako da je **$a_0 = 1$ i $a_1 = 4$.**

Rešenje:

Karakteristična jednačina je:

$x^2 - 5x + 6 = 0$.

Pošto su koreni

x=2 i x=3,

svako rešenje jednačine ima oblik

$a_n = \alpha\, 3^n + \beta\, 2^n$. Stoga,

$a_0 = \alpha + \beta = 1$

$a_1 = 3\alpha + 2\beta = 4$

Rešavanjem sistema jednačina, dobijamo da je **$\alpha = 2$ i $\beta = -1$.** Rešenje jednačine sa datim početnim uslovima je:
$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$.

ZADATAK 6

Rešenje rekurentne relacije $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti opšte rešenje rekurentne relacije:

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

sa početnim uslovima:
$a_0 = 4$ i $a_1 = 6$.

Rešenje:

Karakteristična jednačina je:

$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$.

Obzirom da je **$x = 3$**, jedino realno rešenje, rešenje je oblika:

$a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$

Prema tome,

$a_0 = \alpha = 4$

$a_1 = 3\alpha + 3\beta = 6$

Rešavanjem sistema dobijamo: **$\alpha = 4$ i $\beta = -2$.**

Rešenje jednačine je:
$a_n = 4\cdot 3^n - 2n\cdot 3^n$

ZADATAK 7

Rešavanje determinante reda n

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Izračunati vrednost determinante reda n

$$D_n(-5,10,-5) = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Slika 6.1 Zadatak 8 [Izvor: autor]

Rešenje:

Ako datu determinantu razvijemo prvo po prvoj vrsti, a zatim po
prvoj koloni dobijamo rekurentnu vezu

$D_n = 10D_{n-1} - 25D_{n-2}$

(D_{n-1} i D_{n-2} predstavljaju determinante istog oblika samo manjih redova: $n - 1$ i $n - 2$).

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$t^2 - 10t + 25 = 0$

i ona ima dvostruko realno rešenje
$t_1 = t_2 = 5$, pa je opšte rešenje
$D_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot n \cdot 5^n$.

Nepoznate konstante C_1 i C_2 tražimo iz početnih uslova :

$$D_1 = 10$$

$$D_2 = 75$$

$$-----------------------$$

$$5C_1 + 5C_2 = 10$$

$$25C_1 + 50C_2 = 75$$

$$-------------------------$$

$$C_1 = C_2 = 1 \Rightarrow D_n = 5^n \cdot (n+1).$$

ZADATAK 8

Rešenje rekurentne relacije $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Naći rešenje rekurentne relacije

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$ sa početnim uslovima $a_0 = 1$ i $a_1 = 1 + i$

REŠENJE:

Karakteristična jednačina je: $x^2 - 2x + 2 = 0$. Njena rešenja su konjugovano kompleksni brojevi: $x_1 = 1 + i$ i $x_2 = 1 - i$.

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja:
z = x + iy
z = r(cos θ + i sin θ), r ≥ 0, θ $\boxed{\text{\textbackslash in \{0, 2 \textbackslash pi}}$ }.

Rešenje:
Ako datu determinantu razvijemo prvo po prvoj vrsti, a zatim po
prvoj koloni dobijamo rekurentnu vezu

$D_n = 10D_{n-1} - 25D_{n-2}$

(D_{n-1} i D_{n-2} predstavljaju determinante istog oblika samo manjih redova: $n - 1$ i $n - 2$).

Opšte rešenje ove jednačine je oblika:

$a_n = C_1 \rho^n \cos(n\theta) + C_2 \rho^n \sin(n\theta)$.

Odredimo trigonometrijski oblik ovih rešenja:

$$x_1 = \sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4}), x_2 = \sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} - i \cdot sin\frac{\pi}{4})$$

Pogledajmo kako izgleda opšti izraz za početne uslove

$$a_0 = C_1 \cdot \rho^0 \cdot cos(0 \cdot \theta) + C_2 \cdot \rho^0 \cdot sin(0 \cdot \theta)$$

$$a_1 = C_1 \cdot \rho^1 \cdot cos(\theta) + C_2 \cdot \rho^1 \cdot sin(\theta)$$

$$------------------------------$$

$$a_0 = C_1 = 1$$

$$a_1 = \rho \cdot cos(\theta) + C_2 \cdot \rho \cdot sin(\theta) = 1 + i$$

$$C_2 = 1$$

Rešenje jednačine je:

$$a_n = \sqrt{2}^n \cdot cos(n \cdot \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}^n \cdot sin(n \cdot \frac{\pi}{4})$$

Poglavlje 7

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Naći rešenje rekurente relacije $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, sa početnim uslovima $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

$a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$ sa početnim uslovima $a_0=3$ i $a_1 = 17$

Zadatak 3 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Naći rešenje rekurente relacije $2x_{n+2} = 6x_{n+1} - 4x_n$, sa početnim uslovima $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

ZAKLJUČAK

ZAKLJUČAK

Fokus ove lekcije je bio na pojmu rekurzije. Objašnjene su rekurentne relacije i kardinalnost skupova. U ovoj lekciji je objašnjen pojam beskonačnosti, kardinalnosti, rekurzije. Izložene su rekurentne relacije i njihov pregled. Kao i primena kroz navedene primere.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.