UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

SPECIJALNI GRAFOVI

Lekcija 12

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 12

SPECIJALNI GRAFOVI

Uvod

UVOD

Fokus ovog predavanja je na prikazu raznih tipova grafova, sa specijalnim osvrtom na osnovno pretraživanje grafova

U ovoj lekciji biće obrađeni sledeći pojmovi:

- Težinski grafovi
- Kompletni grafovi
- Regularni grafovi
- Bipartitni grafovi
- Graf stabla
- Sprežna stabla

‘

Poglavlje 1

OZNAČENI GRAFOVI

OZNAČENI I TEŽINSKI GRAFOVI

Graf se zove težinski graf ako je svakoj grani e grafa G pridružen neki ne-negativan broj w(e) koji se zove težina ili dužina grane e

Graf G se zove označen graf ako su njegovim čvorovima ili granama pridruženi neki podaci.

Specijalno, G se zove težinski graf ako je svakoj grani e grafa G pridružen neki ne-negativan broj w(e) koji se zove težina ili dužina grane e.

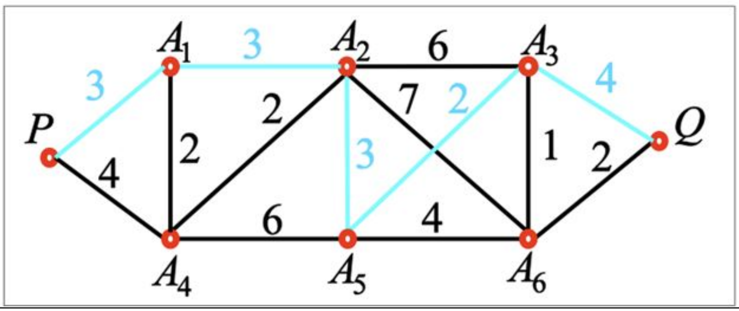
Težina ili dužina puta u težinskom grafu je suma težina grana na tom putu.

Jedan vrlo važan problem u teoriji grafova je nalaženje najkraćeg puta, to jest, puta minimalne dužine, izmedju dva data čvora.

Primer 12.1

Slika 1 pokazuje težinski graf kod koga je težina svake grane data na očigledan način.

Dužina najkraćeg puta izmedju P i Q je 14; jedan takav put je (P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q).



Slika 1.1 Graf iz Primera 12.1 [Izvor: Autor]

Poglavlje 2

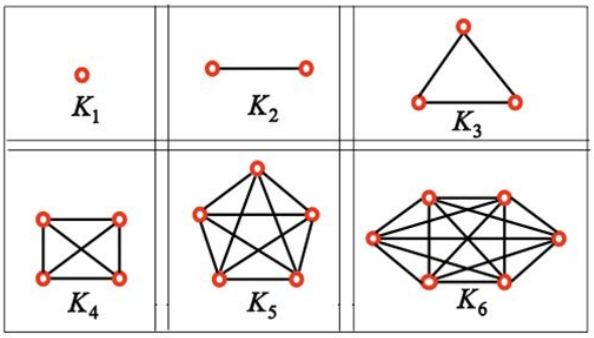
KOMPLETNI GRAFOVI

ŠTA SU KOMPLETNI GRAFOVI?

Graf je kompletan ako je svaki čvor grafa G povezan sa svakim drugim čvorom tog grafa.

Graf G je kompletan ako je svaki čvor grafa G povezan sa svakim drugim čvorom tog grafa.

Kompletan graf koji ima n čvorova se označava sa K_n. Kompletan graf mora biti povezan.



Slika 2.1 Primer kompletnih grafova [Izvor: Autor]

Na slici 1 su navedeni neki od primera kompletnih grafova, gde možemo videti da je K1 ustvari izolovani čvor. Graf K2 sadrži dva čvora, koja da bi predstavljala kompletan graf moraju biti povezana jedan sa drugim, pa tako ovaj graf sadrži dva čvora i jednu granu. Na svim grafovima na slici 1 možemo primetiti da je svaki čvor povezan sa svakim čvorom u tom grafu i isto tako se može primetiti da sa rastom čvorova raste i kompleksnost grafa i njegov broj grana.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

REGULARNI GRAFOVI

KADA JE GRAF REGULARAN GRAF?

Graf je regularan ako svaki čvor ima isti stepen

Graf G je regularan stepena k ili k-regularan ako svaki čvor ima stepen k. Graf je regularan ako svaki čvor ima isti stepen.

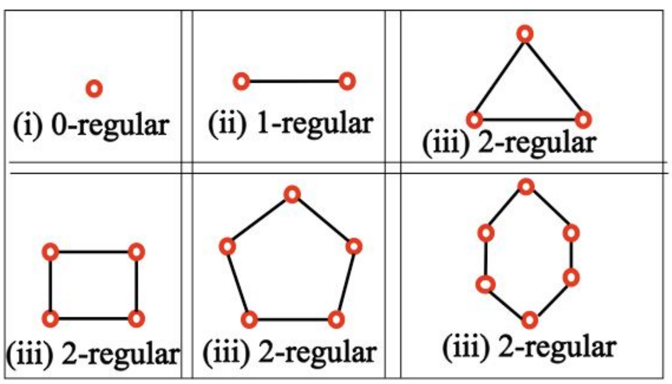
Povezani regularni grafovi stepena 0, 1 i 2 se lako opisuju:

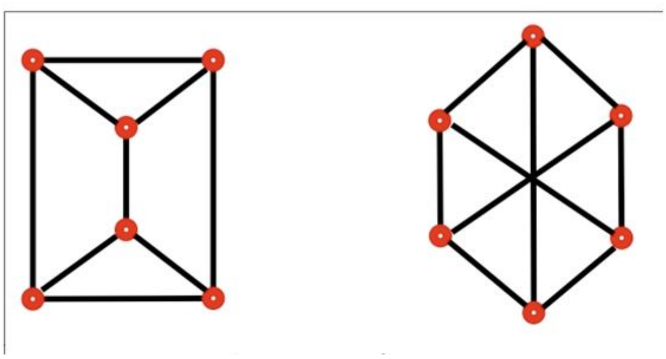
- Povezan 0-regularan graf je trivijalan graf sa samo jednim čvorom i bez grana.
- Povezan 1-regularan graf je graf sa dva čvora i jednom granom, koja ih povezuje.
- Povezan 2-regularan graf sa n čvorova je graf koji se sastoji od jednog jedinog n-ciklusa.

3-regularni grafovi moraju imati paran broj čvorova pošto je suma stepena temena paran broj .

U opštem slučaju, regularni grafovi mogu biti dosta komplikovani. Na primer, postoji devetnaest 3-regularnih grafova sa 10 čvorova.

Primetimo da je kompletan graf sa n čvorova Kn regularan stepena n − 1.





Slika 3.1 Primer regularnih grafova [Izvor: Autor]

Poglavlje 4

BIPARTITIVNI GRAFOVI

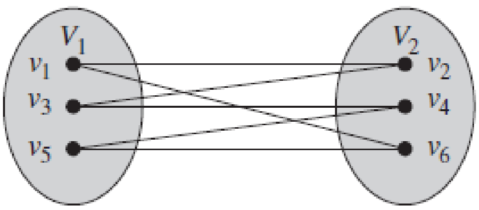
BIPARTITAN I KOMPLETAN BIPARTITAN GRAF

Graf G je bipartitan ako se njegovi čvorovi V mogu podeliti u dva podskupa M i N takva da svaka grana grafa G povezuje neki čvor iz M sa nekim čvorom iz N

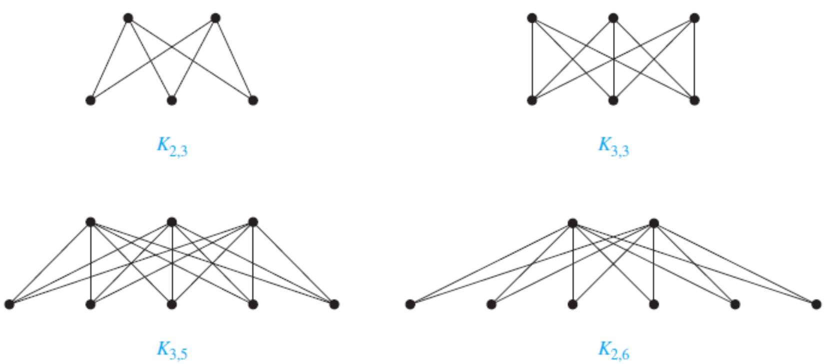
Graf G je bipartitan ako se njegovi čvorovi V mogu podeliti u dva podskupa M i N takva da svaka grana grafa G povezuje neki čvor iz M sa nekim čvorom iz N.

Pod kompletnim bipartitnim grafom podrazumevamo da je svaki čvor iz M povezan sa svakim čvorom iz N ; takav graf se označava sa $K_{m,n}$, gde je m broj čvorova iz M, a n broj čvorova iz N , i obično podrazumevamo m ≤ n.

Graf na sledećoj slici je bipartitan, pošto se njegovi čvorovi mogu podeliti u dva disjunktna skupa $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ i $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, a i svaka grana u grafu povezuje neki čvor iz V_1 sa čvorom u V_2.



Slika 4.1 Bipartitan graf [Izvor: Autor]



Slika 4.2 Primer nekih kompletnih bipartitnih grafova [Izvor: Rosen]

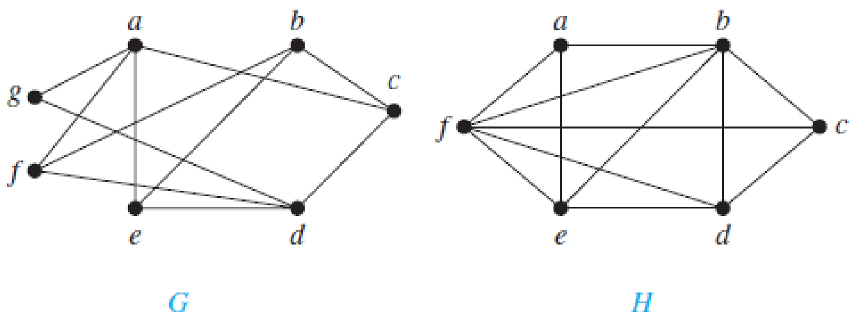
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER

Odrediti da li su grafovi bipartitni

Primer

Odrediti da li su grafovi G i H bipartitni



Slika 4.3 Grafovi G i H [Izvor: Rosen]

Rešenje

Graf G je bipartitan pošto se njegovi čvorovi mogu podeliti u dva disjunktna skupa {a, b, d} i {c, e, f, g}. Takođe, svaka grana povezuje neki čvor iz jednog podskupa u drugi podskup. Treba napomenuti da nije neophodno da svaki čvor iz podskupa {a, b, d} bude povezan sa svakim čvorom iz {c, e, f, g}. Na primer b i g nisu povezani.

Graf H nije bipartitan zato što se njegovi čvorovi ne mogu podeliti u dva disjunktna podskupa.

PRIMER - VIDEO

Primer grafa koji nije bipartitan

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

GRAFOVI STABLA

KADA JE GRAF STABLO?

Graf se naziva stablo ako je povezan i nema ciklične puteve. Komponente povezanosti šume su stabla

Graf T se zove stablo ili drvo (engl. tree) ako je T povezan i nema ciklične puteve.

Šuma G je graf koji nema ciklične puteve; prema tome, komponente povezanosti šume G su stabla.

Graf bez cikličnih puteva se zove i neciklični graf.

Stablo koje se sastoji iz jednog jedinog čvora i koje nema grane se zove degenerisano drvo.

Takođe možemo reći da je stablo graf bez kontura.

Posmatrajmo neko stablo T:

Očigledno, postoji samo jedan prost put izmedju bilo koja dva čvora stabla T, jer bi dva puta formirala cikličan put. Takodje važi:

Ako ne postoji grana {u, v} u stablu T i dodamo granu {u, v} u T , onda bi prost put od u do v u T i novododata grana e formirali cikličan put; pa T ne bi više bilo drvo.

S druge strane, ako postoji grana e = {u, v} u T i obrišemo je, onda T neće više biti povezan graf, pošto više ne bi postojao put od u do v; prema tome T više ne bi bilo stablo

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

5.1 KONAČAN GRAF

KONAČAN NECIKLIČAN GRAF

Konačan neciklični graf sa barem jednom granom ima barem dva čvora stepena 1. Povezan graf sa n čvorova mora imati bar n-1 granu

Neka je G konačan neciklični graf sa bar jednom granom. Tada G ima bar dva čvora stepena 1. Povezan graf sa n čvorova mora imati bar n-1 granu.

Teorema: Neka je G konačan neacikličan graf sa $n \geq 1$ čvorova. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni

- G je drvo.
- G je neacikličan graf koji ima $n - 1$ granu.
- G je povezan graf koji ima $n - 1$ granu.

Dokaz:

Dokaz sledi matematičkom indukcijom po n.

Teorema očigledno važi za graf koji ima samo jedan čvor i koji, prema tome, nema grane. Tako teorema važi za $n = 1$.

Pretpostavimo sada da je $n > 1$ i da teorema važi za grafove sa manje od n čvorova.

Pretpostavimo da je G drvo. Tada je G neacikličan, pa samo treba pokazati da G ima $n - 1$ grana.

G ima čvor stepena 1. Brisanjem tog čvora i njegove grane, dobijamo drvo T koje ima $n - 1$ čvorova.

Teorema važi za T , pa T ima $n - 2$ grana. Prema tome, G ima n-1 grana.

Pretpostavimo da je G neacikličan graf koji ima n-1 granu. Treba pokazati da je G povezan.

Pretpostavimo da G nije povezan i da ima k komponenti povezanosti $T_1, \dots, T_k$, koji su stabla pošto je svaki povezan i neacikličan.

Neka T_k ima n_k čvorova. Primetimo da je $n_k < n$.

Dakle, teorema važi za T_k , pa T_k ima $n_k - 1$ grana.

Tako imamo

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

i

$n-1 = (n_1-1) + (n_2-1) + \dots + (n_k-1) = n_1 + n_2 + \dots + n_k - k$

dakle $k = 1$.

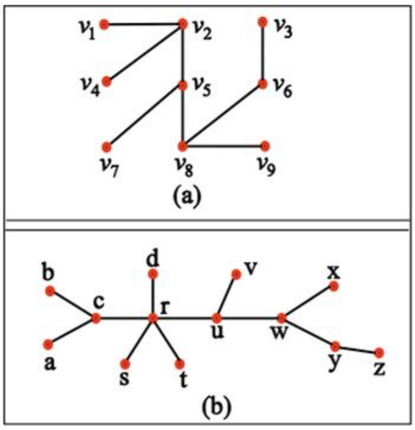
Ali, ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da G nije povezan i da ima $k > 1$ komponenti povezanosti. Prema tome, G je povezan.

PRIMER

Stablo T sa n čvorova mora imati n − 1 granu

Stablo T sa n čvorova mora imati $n - 1$ granu.

Na primer, drvo sa slike (a) ima 9 čvorova i 8 grana, a drvo sa slike (b) ima 13 čvorova i 12 grana.



Slika 5.1.1 Primer konačnog necikličnog grafa [Izvor: Autor]

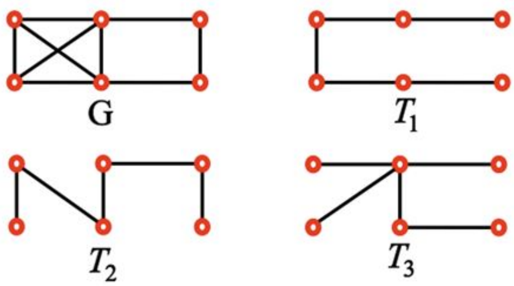
5.2 SPREŽNA STABLA

SPREŽNA STABLA POVEZANOG GRAFA

Sprežno stablo kao podgraf povezanog grafa sadrži sve čvorove tog grafa

Podgraf T povezanog grafa G se zove sprežno drvo (engl. spanning tree) ako je T drvo i T sadrži sve čvorove grafa G.

Slika prikazuje povezan graf G i njegova sprežna stabla T_1, T_2 i T_3.



Slika 5.2.1 Sprežna stabla kao podgrafove grafa G [Izvor: autor]

MINIMALNO SPREŽNO STABLO

Minimalno sprežno stablo grafa je sprežno stablo koje ima najmanju moguću ukupnu težinu

Neka je G povezan težinski graf. Minimalno sprežno drvo grafa G je sprežno drvo koje ima najmanju moguću ukupnu težinu.

Algoritmi (1) i (2) koje ćemo opisati nam omogućavaju da nadjemo minimalno sprežno drvo T povezanog težinskog grafa G, pri čemu G ima n čvorova, a tada T mora imati n−1 granu.

Težina minimalnog sprežnog stabla je jedinstvena, ali samo minimalno sprežno drvo nije.Različita minimalna sprežna stabla se mogu javiti kada dve ili više grane imaju istu težinu.

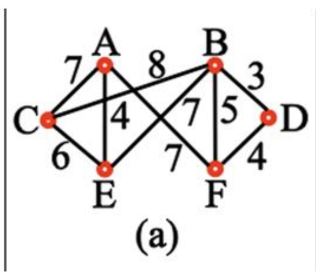
U tom slučaju, raspored grana u koraku 1 algoritma (1) i (2) nije jedinstven, pa zbog toga može prouzrokovati različita minimalna sprežna stabla.

Algoritam (1)
Ulaz je povezan težinski graf G sa n čvorova.
Korak 1. Urediti grane grafa G po opadajućim težinama.
Korak 2. Sekvencijalno se vrši sledeća obrada: iz grafa
se brišu grane koje ne povezuju graf dok
ne ostane n-1 grana.
Korak 3. Kraj.

Algoritam (2)
Ulaz je povezan težinski graf G sa n čvorova.
Korak 1. Urediti grane grafa G po rastućim težinama.
Korak 2. Počinje se samo od čvorova grafa G i
sekvencijalno se vrši sledeća obrada:
u graf se dodaje grana koja ne pravi
ciklični put dok se ne doda n − 1 grana.
Korak 3. Kraj.

PRIMER - ALGORITAM (1)

Naći minimalno sprežno stablo koristeći algoritam (1)



Slika 5.2.2 Graf za Primer 12.2 [Izvor: Autor]

Primer 12.2(a)

Naći minimalno sprežno drvo težinskog grafa Q sa slike

Primetiti da Q ima 6 čvorova, pa minimalno sprežno drvo ima 5 grana.

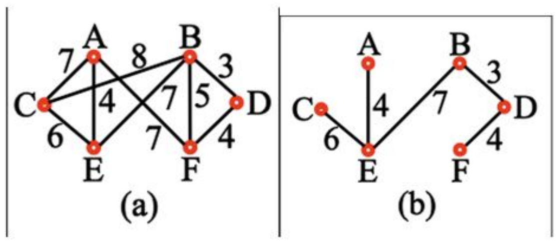
Ovde primenjujemo algoritam (1) :

- Prvo uredimo grane po opadajućim vrednostima težina, a zatim redom brišemo grane vodeći pri tom računa da graf Q ne postane nepovezan.
- Postupak ponavaljamo sve dok ne ostane samo pet grana. Ovaj postupak se šematski može prikazati na sledeći način:

Grana	BC	AF	AC	BE	CE	BF	AE	DF	BD
Težina	8	7	7	7	6	5	4	4	3
Brisati?	Da	Da	Da	Ne	Ne	Da			

Slika 5.2.3 Prikaz rešavanja [Izvor: Autor]

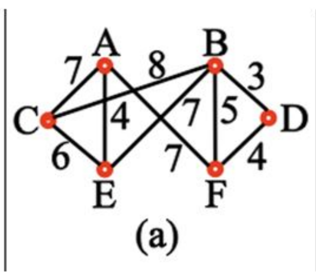
Tako se dobija minimalno sprežno drvo grafa Q a koje sadrži grane BE, CE, AE, DF i BD. Ovo sprežno drvo ima težinu 24



Slika 5.2.4 Stabla grafa sa slike 2 uz primenjen algoritam (1) [Izvor: Autor]

PRIMER – ALGORITAM (2)

Naći minimalno sprežno stablo koristeći algoritam (2)



Slika 5.2.5 Graf za Primer 12.2 [Izvor:autor]

Primer 12.2 (b)

Ovde primenjujemo algoritam (2)

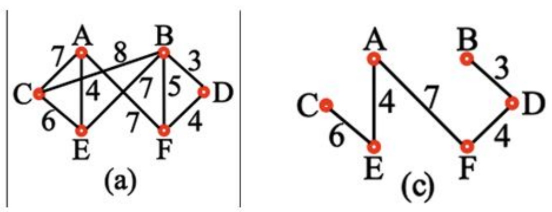
- Prvo uredimo grane po rastućim vrednostima težina, a zatim redom dodajemo grane vodeći pri tom računa da ne napravimo nijedan ciklični put
- Postupak ponavljamo sve dok se ne doda pet grana.

Ovaj postupak se šematski može prikazati na sledeći način:

Grana	BD	AE	DF	BF	CE	AC	AF	BE	BC
Težina	3	4	4	5	6	7	7	7	8
Dodati?	Da	Da	Da	Ne	Da	Ne	Da		

Slika 5.2.6 Prikaz rešavanja [Izvor:autor]

Tako se dobija minimalno sprežno drvo grafa Q a koje sadrži grane BD, AE, DF, C E i AF. Ovo sprežno drvo ima istu težinu kao malopre, 24



Slika 5.2.7 Stabla grafa sa slike 2 uz primenjen algoritam (2) [Izvor:autor]

NAPOMENA:

Navedeni algoritmi se lako primenjuju kada je graf G relativno mali. Ako G ima veći broj čvorova i stotine grana koje su date parovima čvorova koje spajaju, čak i odlučivanje da li je G povezan nije očigledno.

U tom slučaju se može zahtevati neka vrsta DFS (pretraživanje po dubini), (depth-first search) ili BFS (pretraživanje po širini), (breadth -first search) algoritma..

Poglavlje 6

PLANARNI GRAFOVI

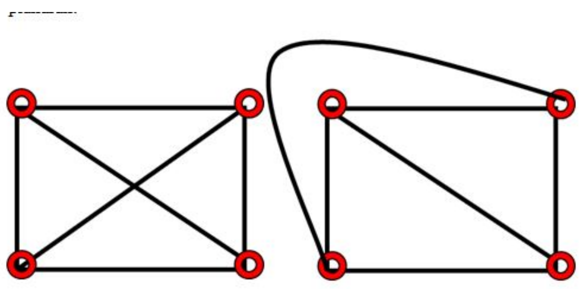
KADA JE GRAF PLANARAN?

Planaran graf je graf koji se može prikazati na takav način da se njegove grane ne seku

Graf ili multigraf koji se može nacrtati u ravni tako da se njegove grane ne presecaju, naziva se planaran graf ili multigraf.

Primer 12.3

Kompletan graf sa 4 čvora, K_4, obično predstavlja tako što se grane presecaju kao na slici levo, on se takodje može nacrtati bez presecanja grana, kao na slici desno, pa je K_4 planaran.



Slika 6.1.1 Primer planargnog grafa [Izvor: Autor]

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

MAPA GRAFA

Mapa predstavlja planarnu reprezenatciju konačnog planarnog multigrafa

Konkretna planarna reprezentacija konačnog planarnog multigrafa bez presecanja grana se zove mapa

Mapa je povezana ako ona predstavlja povezan multigraf.

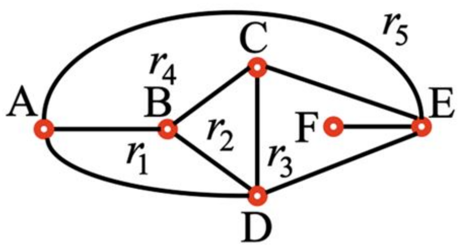
Primer 12.4

Data mapa deli ravan na nekoliko regiona.

6 čvorova i 9 grana deli ravan na 5 regiona.

Primetimo da je 4 regiona ograničeno, dok je peti region koji se nalazi izvan dijagrama, neograničen.

Ne gubi se na opštosti pri prebrojavanju broja regiona ako ne posmatramo celu ravan već pretpostavimo da je mapa grafa smeštena u neki veliki pravougaonik.



Slika 6.1.2 Primer planarnog grafa iz primera 12.4 [Izvor: Autor]

6.1 STEPEN REGIONA

STEPEN REGIONA MAPE

Pod stepenom regiona r, deg(r), podrazumevamo dužinu zatvorenog puta ili puta koji predstavlja granicu regiona r

Primetimo da se granica svakog regiona neke mape grafa sastoji od grana tog grafa. U nekim slučajevima te grane formiraju kružni put, a u nekim ne.

Na primeru 12.5, granice svih regiona osim r_3 su kružni putevi.

Medjutim, ako se krećemo u smeru ili u obrnutom smeru od smera kazaljke na satu oko regiona r_3, počev od nekog čvora, na primer od čvora C , onda se dobija zatvoren put (C, D, E, F, E, C) u kome se grana {E, F } javlja dvaput.

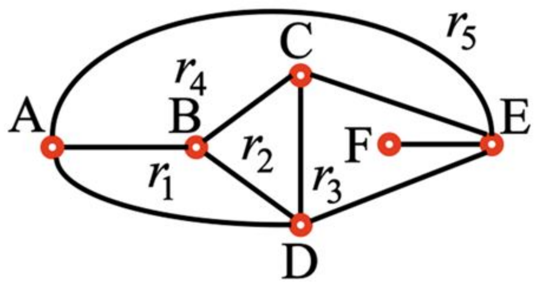
Pod stepenom regiona r, deg(r), podrazumevamo dužinu zatvorenog puta ili puta koji predstavlja granicu regiona r.

Primetimo da svaka grana predstavlja ili granicu izmedju dva regiona ili se nalazi unutar regiona i javlja se dva puta u zatvorenom putu duž granice tog regiona.

Suma stepena regiona neke mape grafa je jednaka dvostrukom broju grana tog grafa.

Primer 12.5

Stepeni regiona na slici iz prethodnog primera su deg(r1) = 3, deg(r2) = 3, deg(r3) = 5, deg(r4) = 4 i deg(r5) = 3.
Suma ovih stepena je 18.
Radi preciznijeg označavanja, čvorove mape predstavljamo tačkama ili malim krugovima ili pretpostavljamo da je svaki presek linija u ravni jedan čvor, ali na jednom grafu ne mešamo reprezentacije.



Slika 6.2.1 Primer planarnog grafa iz primera 12.5 [Izvor: Autor]

6.2 OJLEROVA FORMULA

DEFINICIJA OJLEROVE FORMULE

Ojlerova formula glasi: V − E + R = 2

Ojler je otkrio formulu koja daje vezu izmedju broja čvorova V, broja grana E i broja regiona R proizvoljne povezane mape nekog grafa.

Teorema: Neka je M povezana mapa, i neka V , E i R označavaju brojeve čvorova, grana i regiona mape M , respektivno. Tada važi

V − E + R = 2

Dokaz:

Pretpostavimo da se povezana mapa M sastoji iz samo jednog čvora P kao na slici (a).

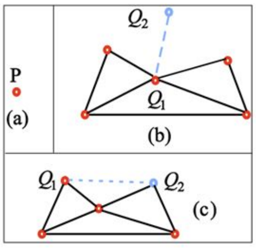
Tada imamo V = 1, E = 0 i R = 1, pa važi V − E + R = 2.

Proizvoljna mapa M se može izgraditi od jednog čvora ponavljanjem sledećih konstrukcionih postupaka:

1. Dodati novi čvor Q_1 i povezati ga sa već postojećim čvorom Q_2 granom koja ne preseca nijednu postojeću granu, kao na slici (b).
2. Povezati dva postojeća čvora Q_1 i Q_2 granom e koja ne preseca ni jednu granu, kao na slici (c).

Nijedna od ove dve operacije ne menja vrednost V − E + R.

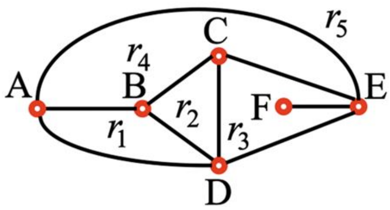
Znači, M ima istu vrednost izraza V − E + R kao i mapa koja se sastoji iz jednog jedinog čvora, to jest, V − E + R = 2.



Slika 6.3.1 Izgrađivanje proizvoljne mape od jednog čvora [Izvor: Autor]

Primer 12.6

V = 6, E = 9 i R = 5, pa važi
V − E + R = 6 − 9 + 5 = 2



Slika 6.3.2 Primer planarnog grafa iz primera 12.6 [Izvor: Autor]

VALIDNOST OJLEROVE FORMULE

Da bi se primenila Ojlerova formula, mapa mora biti povezana

Da bi se primenila Ojlerova formula, mapa mora biti povezana.

Neka je G povezan planaran multigraf sa 3 ili više čvorova, to jest G nije ni K_1 ni K_2.

Neka je M njegova planarna reprezentacija, to jest mapa. Može se dokazati da

1. neki region mape M može imati stepen 1 samo ako njegova granica predstavlja petlju
2. neki region mape M može imati stepen 2 samo ako se njegova granica sastoji iz dve višestruke grane.

Dakle, ako je G graf, a nije multigraf, onda svaki region mape M mora imati stepen 3 ili više.

ODNOS BROJA ČVOROVA I GRANA

Neka je G povezan planaran graf sa p čvorova i q grana, pri čemu je p ≥ 3. Tada važi q ≤ 3p − 6

Neka je G povezan planaran graf sa p čvorova i q grana, pri čemu je $p \geq 3$. Tada važi q $\leq$ 3p − 6

Dokaz:

Neka je r broj regiona u planarnoj reprezentaciji grafa G.

- Tada, po Ojlerovoj formuli, važi p − q + r = 2.
- Suma stepena regiona je jednaka 2q po teoremi
- Ali, kako svaki region ima stepen 3 ili više, važi 2q $\geq$ 3r, pa onda r $\leq$ 2q/3.
- Zamenom ovoga u Ojlerovoj formuli, dobijamo

2 = p − q + r $\leq$ p − q + 2q/3

odnosno 2 $\leq$ p − q/3

- Množenjem poslednje nejednakosti sa 3, dobijamo 6 $\leq$ 3p − q.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

MATRICA SUSEDSTVA

DEFINISANJE MATRICE SUSEDSTVA

Matrica susedstva A grafa G zavisi od redosleda čvorova u predstavljanju grafa G, to jest, drugačiji redosled čvorova, dovodi do drugačijih matrica susedstva

Neka je G graf sa m čvorova i neka su čvorovi uredjeni, $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Tada je matrica susedstva A = [a_{ij}] grafa G matrica reda **m x m** definisana sa

a_{ij} = 1 ako je v_i susedan sa v_j;

a_{ij} = 0 inače

Matrica susedstva A grafa G zavisi od redosleda čvorova u predstavljanju grafa G, to jest, drugačiji redosled čvorova, dovodi do drugačijih matrica susedstva.

Medjutim, bilo koje dve matrice susedstva jednog istog grafa su tesno povezane zato što se od jedne matrice može dobiti druga jednostavnom promenom redosleda vrsta i kolona.

Sa druge strane, matrica susedstva ne zavisi od redosleda zadavanja grana.

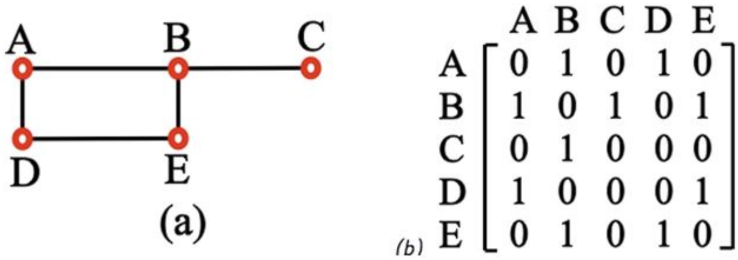
Postoje različite varijacije gore opisanih reprezentacija grafova. Ako je G multigraf, tada a_{ij} obično označava broj grana {v_i, v_j }. Ako je G težinski graf, onda a_{ij} obično označava težinu grane {v_i, v_j}.

Primer 12.7

Posmatrajmo graf G sa slike (a) kod koga su čvorovi uredjeni na sledeći način, A, B, C , D, E.

Slika (b) prikazuje matricu susedstva grafa G. Primetimo da je svaka grana {v_i, v_j } predstavljena duplo, sa a_{ij} = 1 i sa a_{ji} = 1.

Zato je matrica susedstva simetrična.



Slika 7.1.1 Graf i matrica susedstva za primer 12.7 [Izvor: Autor]

7.1 PREDSTAVLJANJE GRAFOVA POMOĆU POVEZANIH LISTA

OSNOVNI KONCEPTI

Ako je graf redak onda se obično predstavlja pomoću povezanih lista

Predstavljanje grafova u memoriji računara

Postoje dva standardna načina predstavljanja grafa G u memoriji računara.

- Jedan način se zove sekvencijalna reprezentacija (engl. sequential representation) grafa G i on predstavlja graf pomoću njegove matrice susedstva (engl. adjacency matrix) A
- Drugi način se zove reprezentacija pomoću povezanih lista ili struktura susedstva (engl. adjancency structure) grafa G i koristi povezane liste susedstva.

Matrice se obično koriste kada je graf gust, što grubo govoreći znači da graf sadrži veliki broj grana.

Kompleksnost grafova

Graf G sa m čvorova i n grana je gust ako $m=O(n^2)$, a redak ako je $m = O(n)$ ili $m = O(n \log n)$.

Bez obzira na način predstavljanja grafa G u memoriji računara, on se uobičajeno učitava u kompjuter prema svojoj formalnoj definiciji, to jest, kao kolekcija čvorova i kolekcija parova čvorova (što predstavlja grane).

KORIŠĆENJE POVEZANIH LISTA ZA PREDSTAVLJANJE GRAFA

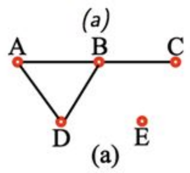
Kada je graf redak on se obično predstavlja u memoriji nekom vrstom reprezentacije pomoću povezanih listi

Neka je G graf sa m čvorova. Predstavljanje grafa G u memoriji računara pomoću matrice susedstva A ima više nedostataka.

Prvo, relativno je teško dodavanje i brisanje čvorova iz G. To je zato što se veličina matrice A menja i čvorovi moraju biti preuredjeni, pa može doći do velikog broja promena u samoj matrici A.

Drugo, ako je broj grana O(m) ili O(m log m), to jest, ako je graf G redak, onda matrica A sadrži veliki broj nula, pa je veliki deo memorijskog prostora nepotrebno zauzet.

Zbog toga, kada je G redak, G se obično predstavlja u memoriji nekom vrstom reprezentacije pomoću povezanih listi (engl. linked representation), koja se zove i struktura susedstva (engl. adjacency structure), kao što je opisano u sledećem primeru.



(b)

Čvor	Lista suseda
A	B, D
B	A, C, D
C	B
D	A, B
E	$\emptyset$

Slika 7.2.1 Graf za Primer 12.8 [Izvor: Autor]

Primer 12.8
Posmatrajmo graf G sa slike (a).
Primetimo da se graf G ekvivalentno može definisati tablicom sa slike (b) u kojoj, uz svaki čvor grafa G, stoji njegova lista susedstva, to jest, lista njegovih susednih čvorova.
Simbol ∅ označava praznu listu.
Ova tablica se može predstaviti i u sledećoj kompaktnoj formi
G = [A : B, D; B : A, C, D; C : B; D : A, B; E : Ø]
gde znak (:) odvaja čvor od njegove liste suseda, a znak (;) odvaja različite liste.
Primetimo da je svaka grana grafa predstavljena dvaput u strukturi susedstva, to jest, svaka grana, recimo {A, B}, je predstavljena sa B u listi susedstva čvora A, ali takodje i sa A u listi susedstva čvora B.
Graf G sa slike (a) ima 4 grane, pa mora biti 8 čvorova u listama susedstva.
Sa druge strane, svaki čvor u nekoj listi susedstva odgovara jednoj jedinoj grani grafa G.
Reprezentacija pomoću povezanih listi grafa G, koja predstavlja G u memoriji računara pomoću listi susedstva, se obično sastoji iz dva fajla ili dva skupa (niza) slogova, od kojih je jedan fajl čvorova, a drugi fajl grana.

7.2 FAJL ČVOROVA I GRANA

FAJL ČVOROVA

Fajl čvorova grafa prestavlja njegove čvorove predstavljene nizom ili povezanom listom

Reprezentacija pomoću povezanih listi grafa G (engl. linked representation of a graph G), koja predstavlja G u memoriji računara pomoću listi susedstva, se obično sastoji iz dva fajla ili dva skupa (niza) slogova, od kojih je jedan fajl čvorova (engl. Vertex File), a drugi fajl grana(engl. Edge File).

Fajl čvorova se sastoji iz čvorova grafa G koji se obično predstavljaju nizom ili povezanom listom.

Svaki slog ovog fajla ima oblik

VERTEX-NEXT-V-PTR-----

gde je VERTEX ime čvora, NEXT −V ukazuje na sledeći čvor u listi čvorova fajla čvorova kada su čvorovi predstavljeni povezanom listom, a PTR ukazuje na prvi element liste susedstva čvorova koja se nalazi u fajlu grana.

Isprekidana linija iza toga označava da može biti dodatnih informacija u slogu o ovom čvoru.

FAJL GRANA

Fajl grana sadrži sve liste susedstva grafa G pri čemu je svaka lista predstavljena u memoriji računara povezanom listom

Fajl grana sadrži grane grafa G.

Specijalno, fajl grana sadrži sve liste susedstva grafa G pri čemu je svaka lista predstavljena u memoriji računara povezanom listom.

Svaki slog fajla grana odgovara jednom čvoru u listi susedstva i, prema tome, indirektno, grani grafa G.

Slog tipično ima oblik

EDGE-ADJ-NEXT----

gde je:

1. **EDGE** ime grane (ako postoji)
2. **ADJ** pokazuje na mesto čvora u fajlu čvorova
3. **NEXT** pokazuje na mesto sledećeg čvora u listi susedstva.

Primetimo da je svaka grana predstavljena dvaput u fajlu grana, ali da svaki slog fajla odgovara jednoj jedinoj listi.

Isprekidana linija iza toga označava da može biti dodatnih informacija u slogu o ovoj grani.

Poglavlje 8

ALGORITMI ZA PRETRAŽIVANJE GRAFOVA

OSNOVNI ALGORITMI ZA PRETRAŽIVANJE GRAFOVA

Osnovni algoritmi koji se izučavaju su algoritmi pretraživanja po dubini i po širini

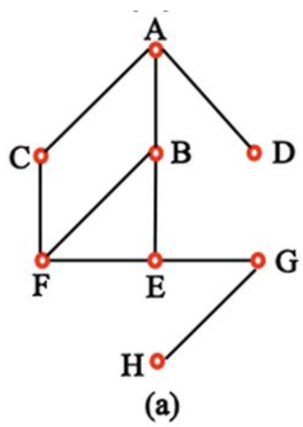
Ovde razmatramo dva vrlo važna algoritma sa grafovima koja sistematski obilaze čvorove i grane grafa.

Jedan se zove depth-first search (DFS) (pretraživanje po dubini), a drugi breadth-first search (BFS) (pretraživanje po širini).

Svaki konkretan algoritam sa grafovima može zavisiti od načina smeštanja grafa u memoriji računara.

Ovde pretpostavljamo da je graf u memoriji predstavljen svojom strukturom susedstva.

U oba slučaja je za svaki čvor potrebno odrediti listu susednih čvorova. Na slici 1 je dat primer grafa i za svaki čvor u tabeli 1 su prikazani njegovi susedi.



Slika 8.1.1 Primer grafa [Izvor: Autor]

Čvor	Lista susedstva
A	D, C, B
B	F, E, A
C	F, A
D	A
E	G, F, B
F	E, C, B
G	H, E
H	G

Slika 8.1.2 Lista susedstva za graf sa slike 1 [Izvor: Autor]

STATUS ČVORA N

Tokom izvršenja algoritma čvor može biti u početnom stanju ili stanju čekanja i obrade.

Tokom izvršenja ovih algoritama, svaki čvor N grafa G može biti u jednom od tri stanja, koje zovemo statusom čvora N:

1. STATUS = 1; Početno stanje (Ready state)

Početno stanje čvora N.

1. STATUS = 2; Stanje čekanja (Waiting state)

Čvor N je na listi čekanja,čeka da bude obrađen.

1. STATUS = 3; Stanje obrade (Processed state)

Čvor N je u toku obrade.

Lista čekanja za algoritam DFS, pretraživanja po dubini, koristi stek STACK, dok lista čekanja za algoritam BFS, pretraživanja po širini, koristi red QUEUE.

8.1 PRETRAŽIVANJE GRAFOVA PO DUBINI

ALGORITAM PRETRAŽIVANJA PO DUBINI

Pretraga po dubini pretražuje veze od poslednjeg ispitanog čvora, dok ima neistraženih veza koje iz njega izlaze. Kada se ispitaju sve iz čvora, pretraga se vraća korak unazad

Algoritam pretraživanja po dubini (Depth First Search (DFS)) u opštim crtama izgleda ovako:

- Obrada počinje u početnom čvoru A.
- Zatim obrađujemo svaki čvor N koji se nalazi na putu P koji počinje u A, to jest, obrađujemo susedni čvor čvora A, zatim susedni čvor susednog čvora čvora A, i tako dalje.
- Kada dođemo do kraja puta (dead end), to jest, do čvora koji nema neobrađene susede, vraćamo se unazad po putu P sve do nekog neobrađenog čvora, odnosno dok ne dođemo do čvora preko koga možemo nastaviti do nekog drugog puta P'
- Nastavljamo postupak na isti način

Povratak unazad (engl. backtracking) se omogućava korišćenjem steka STACK u kome se čuvaju početni čvorovi budućih mogućih puteva. Takođe nam je potrebno polje STATUS za svaki čvor grafa u kome se čuva trenutno stanje čvora, tako da se svaki čvor obrađuje tačno jedanput. Algoritam obrađuje samo one čvorove koji su povezani sa početnim čvorom A, to jest, obrađuju samo komponentu povezanosti koja sadrži čvor A.

Da bi se obradili svi čvorovi grafa G algoritam se mora modifikovati tako da posle obrade jedne komponente povezanosti ponovo počne obradu, ali sada počev od nekog čvora iz neobradjene komponente povezanosti, to jest, od nekog čvora B, koji je jos uvek u početnom stanju (STATE = 1).

Čvor B se može pronaći prolaskom kroz listu čvorova grafa G.

DFS ALGORITAM

DFS algoritam za pretraživanje jedne komponente grafa po dubini koristi stek za obradu čvorova

Ovaj algoritam izvodi pretraživanje jedne komponente povezanosti grafa G po dubini, počev od startnog čvora A.

Korak 1. Postaviti sve čvorove u početno stanje (STATUS = 1).

Korak 2. Staviti početni čvor A na stek STACK i postaviti čvor A u stanje čekanja(STATUS = 2).

Korak 3. Ponavljati korake 4 i 5 sve dok stek STACK ne postane prazan

Korak 4. Uzeti čvor N sa vrha steka STACK. Ako nije već obrađen (STATUS(N) ≠3), obraditi N i postaviti ga na stanje obrade STATUS(N) = 3.

Korak 5. Ispitati sve susede J čvora N

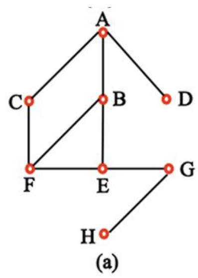
- Ako je STATUS(J) = 1 (početno stanje),staviti J na stek STACK i postaviti J na stanje čekanja STATUS(J) = 2
- Ako je STATUS(J) = 2 (stanje čekanja) ili STATUS(J) = 3 (stanje obrade),ignorisati čvor J

[Kraj petlje.]

Korak 6. Kraj.

DFS - PRIMER

Primer demonstrira način pretrage grafa po dubini



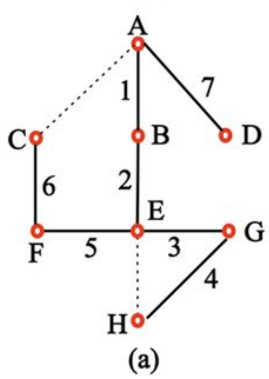
Slika 8.2.1 Graf iz primer 12.9 [Izvor: Autor]

Primer 12.9
Primenom DFS algoritam na graf sa slike 1, čvorovi se obrađuju sledećim redom
A; B; E; G; H; F; C; D:
Na slici 2a je prikazana lista čekanja u steku STACK i čvorovi koji su obrađeni.
Svaki čvor, osim A, dolazi iz neke liste susedstva, pa, prema tome, odgovara nekoj grani grafa.
Ove grane formiraju jedno sprežno drvo grafa G koje je nacrtano na slici 2b.
Brojevi uz njih ukazuju na redosled kojim su grane dodate u drvo, a isprekidane linije ukazuju na povratak

(a)

Čvor	STACK
	A
A	B, C, D
B	E, F, C, D
E	G, F, C, D
G	H, F, C, D
H	F, C, D
F	C, D
C	D
D	

(b)



Slika 8.2.2 (a) Lista čekanja u steku, (b) Sprežno stablo grafa u problemu 12.9 [Izvor: Autor]

8.2 PRETRAŽIVANJE GRAFOVA PO ŠIRINI

ALGORITAM PRETRAŽIVANJA PO ŠIRINI

Za dati graf i određeni izvorni čvor s, pretraga grafa po širini sistematski ispituje veze grafa da bi odredio sve čvorove dostupne iz čvora s

Algoritam pretraživanje po širini (Breadth First Search(BFS)), u opštim crtama izgleda ovako:

- Obrada počinje u početnom čvoru A.
- Zatim obrađujemo sve susede čvora A. Posle toga obrađujemo sve susede suseda čvora A, i tako dalje.
- Potrebno je sačuvati informaciju o susedima čvora, i treba garantovati da se ni jedan čvor ne obradi dva puta. Ovo se postiže korišćenjem reda QUEUE u kome se čuvaju čvorovi koji čekaju na obradu, a u polju STATUS se čuva informacija o trenutnom statusu čvora. Sledi algoritam.

Napomena

BFS, kao i DFS, će obraditi samo one čvorove koji su povezani sa početnim čvorom A, to jest, one komponente povezanosti koje sadrže A.

Ako želimo da obradimo sve čvorove grafa G, onda se algoritam mora modifikovati tako da ponovo počinje nekim drugim čvorom koji je još uvek u početnom stanju (STATE = 1).

Novi pocetni čvor se može pronaći prolaskom kroz listu čvorova grafa G.

Ovaj algoritam izvodi pretraživanje jedne komponente povezanosti grafa G po širini, počev od startnog čvora A.

Korak 1. Postaviti sve čvorove u početno stanje (STATUS = 1).

Korak 2. Staviti početni čvor A u red QUEUE i postaviti čvor A u stanje čekanja(STATUS = 2).

Korak 3. Ponavljati korake 4 i 5 sve dok red QUEUE ne postane prazan.

Korak 4. Uzeti čvor N sa početka reda QUEUE. Obraditi N i postaviti ga na stanje obrade STATUS(N) = 3.

Korak 5. Ispitati sve susede J čvora N

Ako je STATUS(J) = 1 (početno stanje),staviti J na kraj reda QUEUE i postaviti J na stanje čekanja STATUS(J) = 2.

Ako je STATUS(J) = 2 (stanje čekanja) ili STATUS(J) = 3 (stanje obrade),ingorisati čvor J
[Kraj petlje.]
Korak 6. Kraj.

BFS - PRIMER

Primer demonstrira način pretrage grafa po širini

Primer 12.10

Primenom BFS algoritma na prethodni graf čvorovi se obrađuju sledećim redom

A; D; C; B; F; E; G; H:

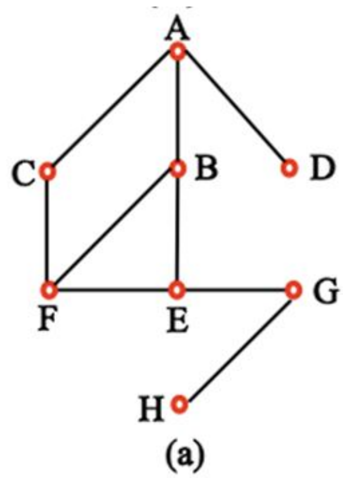
Na slici 2a je prikazana lista čekanja u redu QUEUE i čvorovi koji su obrađeni.

I u ovom slučaju, svaki čvor, osim A, dolazi iz neke liste susedstva, pa, prema tome, odgovara nekoj grani grafa.

Ove grane formiraju jedno sprežno drvo grafa G koje je nacrtano na slici 2b.

Brojevi uz njih ukazuju na redosled kojim su grane dodate u drvo.

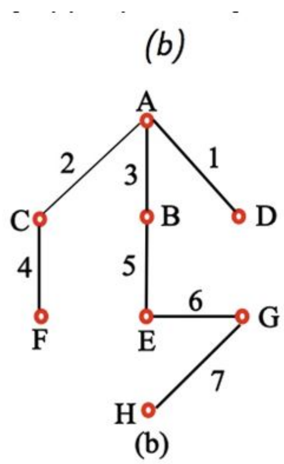
Primetimo da je ovo sprežno drvo različito od onoga koje je dobijeno iz DFS algoritma



Slika 8.3.1 Graf iz primer 12.10 [Izvor: Autor]

(a)

Vertex	QUEUE
	A
A	B, C, D
D	B, C
C	F, B
B	E, F
F	E
E	G
G	H
H	



Slika 8.3.2 (a) Lista čekanja u redu, (b) Sprežno stablo grafa u problemu 12.10 [Izvor: Autor]

Poglavlje 9

VEŽBA – SPECIJALNI GRAFOVI

ZADATAK 1

Primer demonstrira prikaz grafa $K_{2,5}$

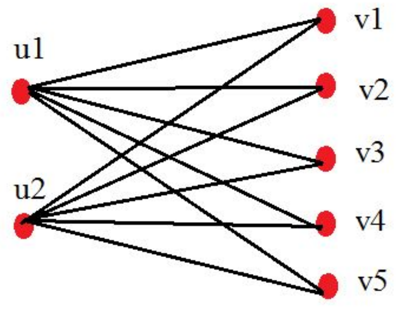
Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Nacrtati graf $K_{2,5}$.

REŠENjE:

Graf $K_{2,5}$ se sastoji od 7 čvorova podeljenih u dva skupa od kojih jedan ima dva, a drugi 5 čvorova.

Graf ima sve moguće čvorove od u_i do v_j.



Slika 9.1 Graf K2,5 [Izvor: Autor]

ZADATAK 2

Analiza grafa koji istovremeno može biti regularan i bipartitan

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Koji povezan graf može istovremeno biti regularan i bipartitni?

REŠENjE:

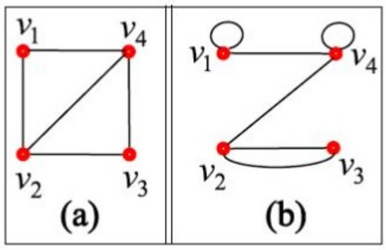
Bipartitivan graf $K_{m,m}$ je regularan stepena m pošto je svaki čvor povezan sa m drugih čvorova, pa je stepen svakog čvora upravo jednak m.

ZADATAK 3

Naći matricu susedstva za dva prikazana grafa

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Naći matricu susedstva A = (a_{ik}) za svaki graf sa Slike 2



Slika 9.2 Graf za zadatak 3 [Izvor: Autor]

REŠENjE:
(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

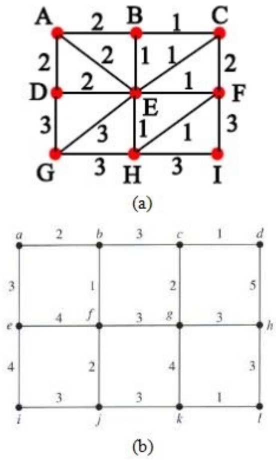
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 4

Primer koji demonstrira pronalaženje minimalnog sprežnog stabla

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Pronaći minimalno sprežno stablo T za težinske grafove sa Slike 3 .



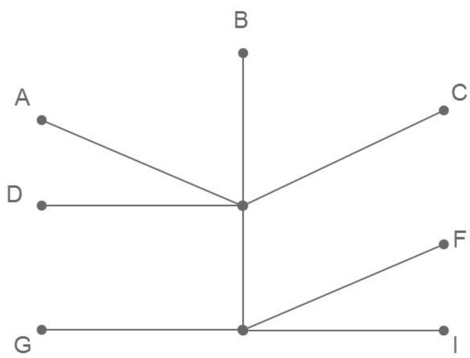
Slika 9.3 Grafovi za zadatak 4 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

(a) Težina minimalnog sprežnog stabla je **14.**

Grana	DG	EG	FI	GH	HI	AB	AD	AE	CF	DE	BC	BE	CE	EF	EH	FH
Težina	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
Brisati	DA	DA	DA	NE	NE	DA	DA	NE	DA	NE	DA	NE	DA	NE	NE	DA

Slika 9.4 Proces brisanja grana zadatak 4 (a) [Izvor: Autor]



Slika 9.5 Minimalno sprežno stablo zadatak 4(a) [Izvor: Autor]

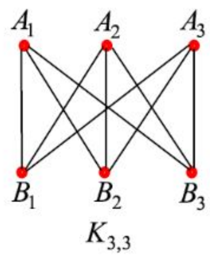
(b) Težina minimalnog sprežnog stable je **24.**

ZADATAK 5

Određivanje da li je graf planaran

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Posmatrajmo graf dostave za tri domaćinstva, koji povezuje tri kuće A_1, A_2 i A_3 sa komunalnim organizacijama za snabdevanje vodom, gasom i električnom energijom (slika 6). Odrediti da li je ovaj graf planaran?



Slika 9.6 Graf za zadatak 5 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Graf je $K_{3,3}$ i ima 6 čvorova i 9 grana.

Pretpostavimo da je graf planaran, tada je po Ojlerovoj teoremi:

V-E+R=2

V=6

E=9

R=5

Pošto ne postoji tri čvora koja su povezana u kružni put, stepen svakog regiona mora biti bar 4.Tada broj grana mora biti bar 10, što je u kontradikciji sa činjenicom da graf ima 9 grana.

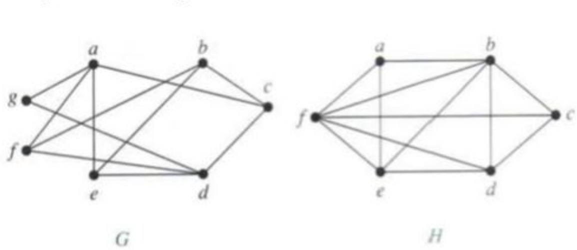
Zaključujemo da graf nije planaran.

ZADATAK 6

Određivanje da li je graf bipartitan

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Da li su grafovi sa Slike bipartitni?



Slika 9.7 Grafovi zadatak 6 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Graf G je bipartitivan gde čvorove možemo grupisati u dva skupa {a,b,d} i {c,e,f,g}.

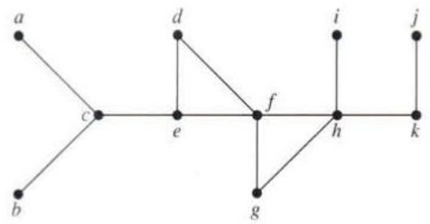
Graf H nije bipartitivan

ZADATAK 7

Pretraga grafa algoritmom DFS

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Koristeći algoritam pretraživanja po dubini pronaći sprežno stablo grafa sa slike 8 (početi od čvora f)

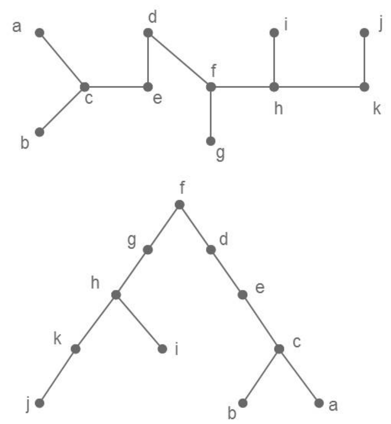


Slika 9.8 Graf za zadatak 7 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Način obrade čvorova i dobijeno sprežno stablo dati su na slici 9.

čvor	stek
	f
f	g h d e
g	h d e
h	k i d e
k	j i d e
j	i d e
i	d e
d	e
e	c
c	a b
a	b
b	∅



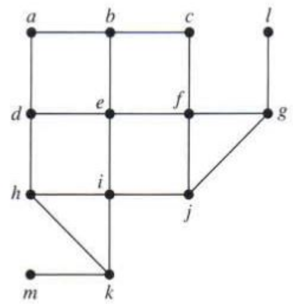
Slika 9.9 Način obrade čvorova i sprežno stablo za zadatak 7 [Izvor: Autor]

ZADATAK 8

Pretraga grafa algoritmom BFS

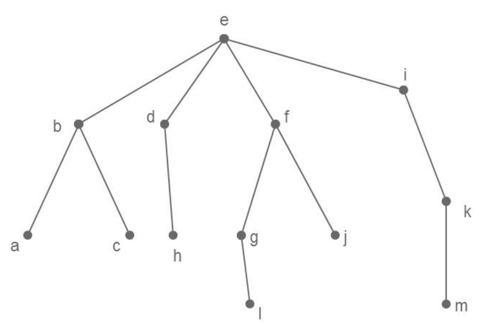
Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Koristeći algoritam pretraživanja po širini, pronaći sprežno stablo grafa sa slike 10 (početi od čvora e)



Slika 9.10 Graf za zadatak 8 [Izvor: Autor]

čvor	red
	e
e	i f d b
b	a c i f d
d	h a c i f
f	g j h a c i
i	k g j h a c
c	k g j h a
a	k g j h
h	k g j
j	k g
g	l k
k	m l
l	m
m	∅



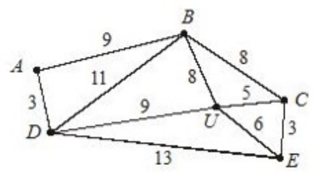
Slika 9.11 Način obrade čvorova i sprežno stablo za zadatak 8 [Izvor: Autor]

ZADATAK 9

Primer demonstrira pronalaženje minimalnog sprežnog stabla

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Neka je G graf zadatak na sledećoj slici:



Slika 9.12 Graf za zadatak 9 [Izvor: Autor]

(a)
Da li je graf Ojlerov? Da li postoji Ojlerova staza?
Ako postoji odredite je.
Da li se može primeniti Ojlerova formula?

(b)
Naći težinu minimalnog sprežnog stabla.

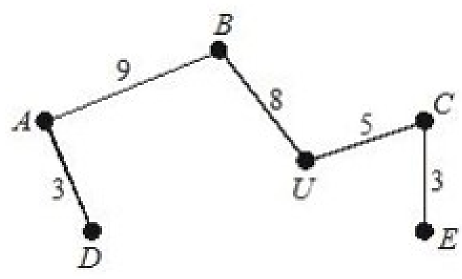
REŠENJE:

(a)

Čvorovi ovog grafa imaju sledeće stepene:

A B C D E U
2 4 3 4 3 4
Obzirom da nisu svi čvorovi parnog stepena, ne postoji Ojlerov ciklus.

(b)
Ukupna težina minimalnog sprežnog drveta je 28.



Slika 9.13 Rešenje zadatka 9c [Izvor: Autor]

Poglavlje 10

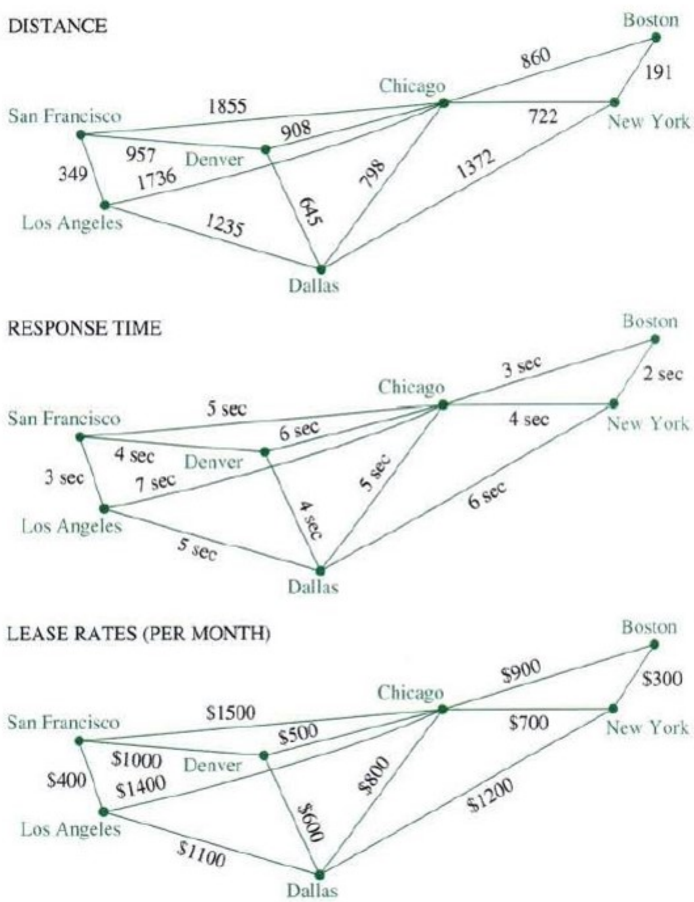
Zadaci za samostalni rad

ZADATAK 1

Zadatak za provežbavanje minimalnih sprežnih stabla

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 20 minuta

Za grafove sa slika odrediti minimalna sprežna stabla



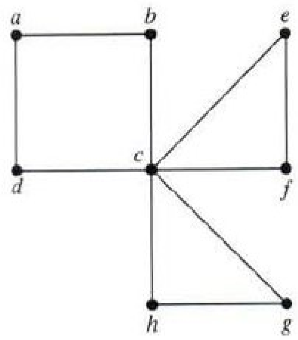
Slika 10.1 Grafovi za zadatak 10 [Izvor: Rosen]

ZADATACI 2 I 3

Pretraga grafova u dubinu i širinu

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 20 minuta

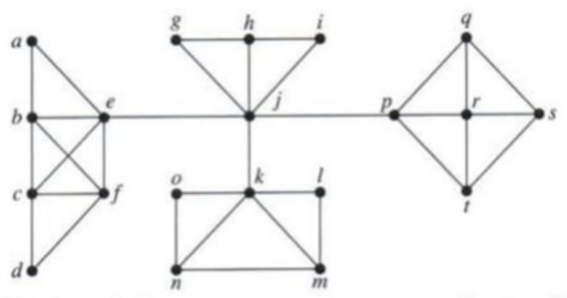
Obići graf sa slike na oba načina, i u dubinu i u širinu počevši od čvora c



Slika 10.2 Graf za zadatak 11a [Izvor: Autor]

Zadatak 3 - predviđeno vreme trajanja 20 minuta

1. Koristeći algoritam pretraživanja po dubini pronaći sprežno stablo grafa (počevši od čvora j)
2. Koristeći algoritam pretraživanja po širini pronaći sprežno stablo grafa (počevši od čvora j)



Slika 10.3 Graf za zadatak 11b [Izvor: Autor]

ZAKLJUČAK

ZAKLJUČAK

U ovoj lekciji je detaljnije objašnjen princip grafova. Dati su primerii povezanih i nepovezanih grafova. Ojlerov graf je istaknut. Takođe, dodatno su pojašnjeni pojmovi koji se odnose na grafove.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.