UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

Lekcija 05

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 05

NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Uvod

NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Matematičko očekivanje, medijana i mod, disperzija, standardna devijacija, koeficijent linearne korelacije.

U dosadašnjem radu sa slučajnim promenljivima potpune informacije o njima pružale su funkcija raspodele, gustina raspodele i raspodele verovatnoća (u zavisnosti kog je tipa slučajna promenljiva). Značajne su, međutim, informacije koje pružaju numeričke karakteristike slučajne promenljive. Svakako, te numeričke karakteristike ne mogu u potpunosti da opišu posmatranu slučajnu promenljivu, kao što to mogu funkcija raspodele, gustina raspodele ili raspodele verovatnoća, ali u praksi i te nepotpune informacije su često dovoljne da okarakterišu posmatranu slučajnu promenljivu. O njima govorimo u nastavku.

Praktični značaj imaju dve grupe parametara

- oni koji ukazuju na centralne tendencije – srednje vrednosti slučajne promenljive
- oni koje mere rasturanje slučajne promenljive oko vrednosti tendencije slučajne promenljive - mere varijacije slučajne promenljive.

Srednja vrednost slučajne promenljive X predstavlja broj oko koga se grupišu vrednosti slučajne promenljive. Parametri koji reprezentuju srednju vrednost slučajne promenljive su: matematičko očekivanje (koje se naziva i srednja vrednost slučajne promenljive), mod i medijana.

U nekim slučajevima srednja vrednost nije dovoljna karakteristika da bi se na zadovoljavajući način opisala neka slučajna promenljiva, tako da se uvode karakteristike koje je u tom smislu bliže određuju. Ovde će biti reči o dva takva parametra: disperzija i standardna devijacija.

Na kraju ćemo govoriti o meri zajedničkog variranja dve ili više slučajnih promenljivih i stepena njihove povezanosti koja se naziva koeficijent linearne korelacije.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Matematičko očekivanje

UVOD

Ovaj broj predstavlja prosečnu (po jednom eksperimentu) vrednost pomenute slučajne promenljive X u velikom broju ponavljanja.

Pre nego što definišemo pojam matematičkog očekivanja, analiziraćemo sledeći primer.

Primer 1. Posmatrajmo eksperiment koji se sastoji u bacanju pravilne kocke, pri čemu pojava određenog broja na gornjoj strani kocke predstavlja slučajnu promenljivu X. Tačnije, neka slučajna promenljiva X predstavlja dobit koju ostvarujemo prilikom bacanja kocke, tj. što veći broj padne na kocki naša dobit je veća. Ako smo recimo deset puta bacili kockicu i pali su brojevi $5, 2, 1, 6, 6, 2, 3, 4, 5, 6,$ tada prosečna dobit u jednom bacanju u seriji od ovih deset bacanja iznosi

$$\frac{1}{10}(5+2+1+6+6+2+3+4+5+6) = 4.$$

Međutim, ako ponovo bacamo kocku deset puta i dobijemo $3, 2, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 5, 2,$ tada imamo da prosečna dobit po jednom bacanju iznosi

$$\frac{1}{10}(3+2+4+6+3+1+4+4+5+2) = 3,4.$$

Odavde vidimo da ne možemo predvideti prosečnu dobit u seriji od deset bacanja, jer dobit u svakom bacanju predstavlja slučajnu promenljivu X. Međutim, ako je broj bacanja veliki i ako ga označimo sa N, tada je, kao što smo već videli na prethodnim predavanjima, broj pojavljivanje svakom od brojeva od 1 do 6 na kocki jednak i iznosi $\frac{N}{6}$. Tada, prosečna dobit po jednom bacanju iznosi

$$\frac{1}{N}\left(1\cdot\frac{N}{6} + 2\cdot\frac{N}{6} + 3\cdot\frac{N}{6} + 4\cdot\frac{N}{6} + 5\cdot\frac{N}{6} + 6\cdot\frac{N}{6}\right) = 3,5.$$

Svakako prosečna dobit je utoliko „bliža“ broju $3,5$ što je broj bacanja veći. Tada, za broj $3,5$ možemo reći da predstavlja jedna numerička karakteristika slučajne promenljive

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ovaj broj predstavlja prosečnu (po jednom eksperimentu) vrednost pomenute slučajne promenljive X u velikom broju ponavljanja.

POJAM MATEMATIČKOG OČEKIVANJA

Uvođenje matematičkog očekivanja na diskretnom slučaju.

Prethodno rečeno ponovimo za bilo koju slučajnu promenljivu diskretnog tipa sa konačnim brojem realizacija i raspodelom

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ako u velikoj seriji od N ponavljanja eksperimenta registrujemo vrednosti za slučajnu promenljivu X i dobijemo niz brojeva

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, \dots, x^{(n)} \qquad (*)$$

gde $x^{(j)}$, za $j = 1, 2, 3, \dots, n$, označava neku od vrednosti x_1, x_2, x_3, ... , x_n koje je slučajna promenljiva uzela u j -tom eksperimentu. Označimo sa N_k broj pojavljivanja vrednosti x_k $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ i $N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n = N$. Srednja vrednost za slučajnu promenljivu X u nizu koji smo označili sa $(*)$ tada iznosi

$$\frac{1}{N}\left(x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + \ldots + x^{(n)}\right)$$
$$= \frac{1}{N}(N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 + \ldots + N_nx_n).$$

Tada prethodna formula glasi

$$\frac{N_1}{N}x_1 + \frac{N_2}{N}x_2 + \frac{N_3}{N}x_3 + \frac{N_4}{N}x_4 + \ldots + \frac{N_n}{N}x_n. \qquad (**)$$

Veličina $\frac{N_k}{N}$ predstavlja relativnu učestanost događaja $\{X = x_k\}$, za $k = 1, 2, 3, \dots, n$ u seriji $(**)$ od N eksperimenata, pa je za veliko N veličina $\frac{N_k}{N}$ „bliska“ verovatnoći $P\{X = x_k\} = p(x_k)$, za $k = 1, 2, 3, \dots, n$, pa je srednja vrednost $(**)$ bliska broju

$$p(x_1)x_1 + p(x_2)x_2 + p(x_3)x_3 + p(x_4)x_4 + \ldots + p(x_n)x_n.$$

MATEMATIČKO OČEKIVANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Matematičko očekivanje u opštem slučaju ne mora da postoji, jer beskonačni red ne mora da konvergira.

Definicija 1. Ako je slučajna promenljiva X diskretnog tipa sa raspodelom

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix}.$$

Veličina, u oznaci $E(X)$, data formulom

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p(x_k) = p(x_1)x_1 + p(x_2)x_2 + p(x_3)x_3 + \ldots + p(x_n)x_n,$$

nazivamo očekivanje slučajne promenljive X (slovo E predstavlja prvo slovo iz engleske reči expectation što znači očekivanje).
Napomenimo da se matematičko očekivanje naziva moment prvog reda i označava se sa m_1. Moment r-tog reda neke diskretne slučajne promenljive X iz Definicije 1 je oblika

$$m_r = \sum_{k=1}^{n} x_k^r \cdot p(x_k).$$

Od interesa u verovatnoći i statistici su i centralni momenti r-tog reda koji u ovom slučaju glase

$$M_r = \sum_{k=1}^{n} \left[x_k - E(X)\right]^r \cdot p(x_k),$$

za $r = 1, 2, 3, \ldots$.
Za diskretnu slučajnu promenljivu sa prebrojivo mnogo realizacija, očekivanje ćemo definisati proširivanjem Definicije 1.

Definicija 2. Ako je slučajna promenljiva X diskretnog tipa sa raspodelom

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \ldots & p(x_n) & \ldots \end{pmatrix}.$$

Njeno matematičko očekivanje definiše se kao broj

$$E(X) = \sum_{k} x_k \cdot p(x_k) = p(x_1)x_1 + p(x_2)x_2 + p(x_3)x_3 + \ldots + p(x_n)x_n + \ldots,$$

Odavde se jasno vidi da matematičko očekivanje u opštem slučaju ne mora da postoji, jer beskonačni red ne mora da konvergira.

Zapravo, veličina $E(X)$ postoji ako i samo ako red $\sum_{k} |x_k| \cdot p(x_k)$ apsolutno konvergira.

PRIMER

Određivanje matematičkog očekivanja jednodimenzionalne diskretne slučajne promenljive.

Primer 2. Neka je

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 & a \end{pmatrix}.$$

Odrediti a, $E(X)$ i $E(X^2)$.

Rešenje. Tražene veličine računamo na sledeći način

$$a = 1 - (0,2 + 0,1 + 0,5) = 0,2,$$

Sada imamo da je

$$E(X) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,2 = 3,9.$$

Slučajna promenljiva X^2 je slučajna pormenljiva koja ima raspodelu

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 & 49 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

i njeno matematičko očekivanje iznosi

$$E(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,5 + 49 \cdot 0,2 = 18,9.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Primer - matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

MATEMATIČKO OČEKIVANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE NEPREKIDNOG TIPA

Matematičko očekivanje u ovom slučaju ne mora da postoji, jer nesvojstveni integral ne mora da konvergira.

Definicija 3. Ako je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi(x), (-\infty < x < +\infty)$. Njeno matematičko očekivanje definiše se kao broj

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx.$$

Odavde se jasno vidi da matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive ne mora da postoji, jer nesvojstveni integral ne mora da konvergira.

Moment r-tog reda neprekidne slučajne promenljive X iz Definicije 3 je oblika

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \varphi(x)dx, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

dok centralni moment r-tog reda neprekidne slučajne promenljive glasi

$$M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r \varphi(x)dx, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Zapravo, veličina $E(X)$ postoji ako i samo integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi(x)dx.$$

konvergira.

MARGINALNO MATEMATIČKO OČEKIVANJE ZA DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Matematička očekivanja slučajnih promenljivih X i Y koje su u sklopu dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) se računaju preko odgovarajućih marginalnih raspodela.

Matematička očekivanja slučajnih promenljivih X i Y koje su u sklopu dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) se računaju preko odgovarajućih marginalnih raspodela, u slučaju da je dvodimezionalna slučajna promenljiva (X,Y) diskretnog tipa. Ako je, na primer, marginalna raspodela za slučajnu promenljivu

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \ldots & p(x_n) \end{pmatrix}.$$

tada je

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i).$$

Slično, Ako je marginalna raspodela za slučajnu promenljivu

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_m \\ q(y_1) & q(y_2) & q(y_3) & \dots & q(y_m) \end{pmatrix}.$$

tada je

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j q(y_j).$$

MOMENTI I CENTRALNI MOMENTI ZA DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Definisanje momenata reda $r+s$ za dvodimenzionalne slučajne promenljive

Moment reda $r+s$ ako je slučajna promenljiva (X, Y) diskretnog tipa je jednak

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^r y_j^s p_{ij}, \quad (m_{11} = E(X \cdot Y)).$$

Pomenimo i centralni moment reda $r+s$, koji u slučaju dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog tipa glasi

$$M_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - E(X)]^r [y_j - E(Y)]^s p_{ij}.$$

Poglavlje 2

Osobine matematičkog očekivanja

VAŽNA SVOJSTVA MATEMATIČKOG OČEKIVANJA. PRIMER

Navedene osobine matematičkog očekivanja važe u opštem slučaju, tj. za slučajne promenljive, kako diskretnog tako i neprekidnog tipa.

Osobine matematičkog očekivanja koje ćemo navesti važe u opštem slučaju, tj. za slučajne promenljive, kako diskretnog tako i neprekidnog tipa. Važi:

1.ako je $X = const$, tada je $E(X) = const$,

2.ako je $X \geq 0$, tada je $E(X) \geq 0$.

Napomena. Da je $X \geq 0$ podrazumeva da važi $X(\omega) \geq 0,$ za svako $\omega \in \Omega$.

3. $X \geq Y$, tada je $E(X) \geq E(Y)$,

4.ako $E(X)$ i $E(Y)$ postoje, tada važi $E(c_1X + c_2Y) = c_1E(X) + c_2E(Y)$, gde su $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

5.ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Napomena. Obrnuto u opštem slučaju ne važi, odnosno ako važi $E(XY) = E(X) \cdot E(Y),$ tada ne moraju X i Y da budu nezavisne promenljive.

Primer. Dati su zakoni raspodela nezavisnih slučajnih promenljivih

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,21 & 0,19 & 0,34 & 0,26 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Naći $E(X \cdot Y)$.

Rešenje. Na osnovu osobine matematičkog očekivanja, s obzirom da suslučajne promenljive X i Y nezavisne imamo da je

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) &= (-1 \cdot 0,21 + 0 \cdot 0,19 + 1 \cdot 0,34 + 2 \cdot 0,26) \\ &\cdot (0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5) = 1,56. \end{aligned}$$

VIDEO KLIP

Snimci sa Youtube-a: matematičko očekivanje

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Medijana i mod

DEFINICIJE MEDIJANE I MODA

Medijana i mod spadaju u tzv. mere centralne tendencije.

Medijana diskretne slučajne promenljive X, u oznaci $M_e(X)$, je rešenje sistema nejednačina

$$P(\{X < M_e\}) \leq \frac{1}{2} \leq P(\{M_e \leq X\}).$$

U slučaju slučajne promenljive neprekidnog tipa, medijana, u oznaci M_e je rešenje jednačine

$$P(\{X \leq M_e\}) = \frac{1}{2},$$

odnosno, medijana je takva vrednost da je verovatnoća podjednaka daslučajna promenljiva da bude veća ili manja od nje.

Mod ili modus diskretne slučajne promenljive X, u oznaci $M_o(X)$, je ona vrednost slučajne promenljive koja ima veću verovatnoću javljanja od susednih vrednosti. Ako je slučajna promenljiva neprekidnog tipa mod je ona vrednost za koju gustina raspodele $\varphi(x)$ ima lokalni maksimum. Slučajna promenljiva X može imati više takvih vrednosti.

PRIMER

Određivanje moda i medijana za slučajnu promenljivu neprekidnog tipa.

Primer 3. Odrediti matematičko očekivanje, medijanu i modus ako slučajna veličina ima funkciju raspodele:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Rešenje. Kako je:

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

tada, matematičko očekivanje računamo na sledeći način

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Medijanu računa iz jednačine $F(Me) = 0,5$. Tada imamo da je:

$$\frac{M_e^2}{4} = 0,5 \;\Rightarrow M_e^2 = 2 \;\Rightarrow M_e = \sqrt{2}.$$

Kako modus predstavlja lokalni maksimum funkcije gustine (ako postoji), njega određujemo iz uslova da je $\varphi'(x) = 0.$ Kako je $\varphi'(x) = \frac{1}{2}$, tada data slučajna promenljiva nema mod.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Medijana i mod. Primer.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Disperzija

POJAM

Disperzija predstavlja drugi centralni moment neke slučajne promenljive.

Jedna slučajna promenljiva X je potpuno određena svojom raspodelom. Matematičko očekivanje $E(X)$, kao broj koji je na neki način "srednja vrednost" slučajne promenljive, je prva i osnovna informacija o slučajnoj promenljivoj, ali je daleko od toga da može da zameni informaciju koju daje raspodela. Pre svega $E(X)$ ne daje uvek podatak o "rasturanju" mogućih vrednosti slučajne promenljive oko "srednje vrednosti". Na primer,

$$X : \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ima matematičko očekivanje

$$E(X) = -100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

što nije dobra numerička karakateristika raspodele X, ako se pogleda njena raspodela.

Stoga se uvode druge karakteristike slučajnih promenljivih kao što je $X - E(X)$ koja predstavlja odstupanje slučajne promenljive X od srednje vrednosti, kao i $|X - E(X)|$ koja predstavlja tu istu veličinu bez obzira na znak. Međutim, kako je nepodesno računati sa apsolutnim vrednostima, uvodi se slučajna promenljiva $[X - E(X)]^2$. Matematičko očekivanje od ove slučajne promenljive predstavlja dobru meru srednje kvadratnog odstupanja slučajne promenljive X od svog matematičkog očekivanja $E(X)$. Nju nazivamo disperzija ili varijansa slučajne promenljive X, u oznaci $\sigma^2(X)$.

IZRAČUNAVANJE DISPERZIJE. STANDARDNA DEVIJACIJA

Veoma važna numerička karakteristika slučajnih promenljivih jeste standardna devijacija koja predstavlja kvadratni koren iz vrednosti disperzije.

Kako je

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= E[X-E(X)]^2 = \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2.\end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Ovaj oblik je pogodniji za izračunavanje disperzije slučajne promenljive. Iz prethodno uvedenih centralnih momenata možemo zaključiti da disperzija, zapravo, predstavlja drugi centralni moment neke slučajne promenljive tj. $\sigma^2(X) = M_2$.

Koristeći poslednju formulu i znajući da je slučajna promenljiva X diskretnog tipa gde je skup realizacija konačan i ima npr. n stanja, možemo dati formulu za određivanje disperzije takve slučajne promenljive

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)\right)^2.$$

Napomena. Prethodno data formula može se proširiti na slučajnu promenljivu sa skupom realizacija koji ima prebrojivo mnogo stanja.

U slučaju da je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa, tada formula za određivanje disperzije glasi

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \varphi(x) dx.$$

Veoma važna numerička karakteristika slučajnih promenljivih je veličina $\sqrt{\sigma^2(X)}$ se naziva standardna devijacija slučajne promenljive.

PRIMER

Određivanje standardne devijacije za slučajne promenljive diskretnog i neprekidnog tipa

Primer 4. Iz primera 2 ako želimo da izračunamo disperziju, tada dobijamo da je: $\sigma^2(X) = E(X^2) - [E[X]]^2 = 18,9 - 3,9^2 = 3,69$.

Primer 5. Slučajna veličina X ima gustinu: $\varphi(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in \{0, 3, \\ 0, & x \notin \{0, 3. \end{cases}$

Odrediti joj k, a zatim standardnu devijaciju $\sigma(X)$.

Rešenje: Odredimo, najpre, koeficijent k:

$\int_0^3 kx^2 dx = 1 \Rightarrow \quad k \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 1 \Rightarrow k \cdot \frac{27}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}.$

Da bismo odredili standardnu devijaciju slučajne promenljive X, potrebno je odrediti njenoi matematičko očekivanje kako bismo odredili varijansu. Tada imamo: $E(X) = \int_0^3 \frac{1}{9}x^2 \cdot x dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{4} = \frac{9}{4}.$

Za odredjivanje varijanse nam je potrebna i veličina: $E\left(X^2\right) = \int_0^3 \frac{1}{9}x^2 \cdot x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^3 = \frac{27}{5}.$

Sada smo u mogućnosti da izračunamo varijansu: $\sigma^2(X) = E\left(X^2\right) - \left[E[X]\right]^2 = \frac{27}{5} + \frac{81}{16} = \frac{27}{80}.$

Konačno, standardna devijacija glasi: $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\frac{27}{80}}.$

Poglavlje 5

Osobine disperzije

VAŽNA SVOJSTVA DISPERZIJE. PRIMER

Navedene osobine disperzije slučajne promenljive važe za slučajne promenljive, kako diskretnog tako i neprekidnog tipa.

Osobine disperzije slučajne promenljive koje ćemo sada navesti važe uopštem slučaju, tj. važe za slučajne promenljive, kako diskretnog tako i neprekidnog tipa. Tada:

1. $\sigma^2(X) \geq 0$,

2. $\sigma^2(X) = 0$, ako i samo ako je $P\{X = const\} = 1$ (tj. ako je X neslučajna promenljiva),

3. $\sigma^2(X + c) = \sigma^2(X)$,

4. $\sigma^2(cX) = c^2 \cdot \sigma^2(X), c \in \mathbb{R}$,

5. ako su X i Y nezavisne promenljive, tada je

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y),$$

6. $E([X - \alpha]^2)$ ima minimum $\alpha = E(X)$, posmatrano kao funkcija od α tj.

$$\sigma^2(X) \leq E[X - \alpha]^2,$$

za svaki broj α.

Primer. Dati su zakoni raspodela nezavisnih slučajnih promenljivih

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,21 & 0,19 & 0,34 & 0,26 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Naći $\sigma^2(X + 2Y)$.

Rešenje. Na osnovu datih osobina 4 i 5 za disperziju, imamo da je

$$\sigma^2(X + 2Y) = \sigma^2(X) + 4\sigma^2(Y).$$

Kako je

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1,1675 \quad \text{i} \quad \sigma^2(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3,04,$$

imamo da je

$$\sigma^2(X+2Y) = 1,1675 + 12,16 = 13,3275.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: određivanje matematičkog očekivanja i disperzije za diskretne i neprekidne slučajne promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

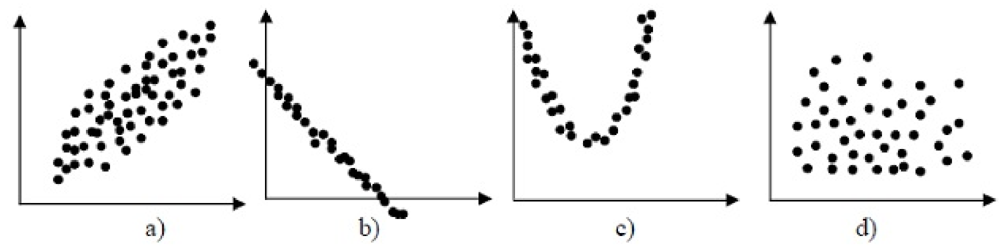
Poglavlje 6

Koeficijent linearne korelacije

POJAM KORELACIJE

Koeficijent korelacije predstavlja broj kojim se na odredjeni način meri stepen zavisnosti slučajnih promenljivih X i Y.

Koeficijent korelacije predstavlja broj kojim se na odredjeni način meri stepen zavisnosti slučajnih promenljivih X i Y. Zamislimo da neki eksperiment ponavljamo mnogo puta i u svakom ponavljanju se registrujemo brojčane vrednosti (x, y) koje uzima dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y). Na slici 1 je skicirano nekoliko (četiri) moguća slučaja zavisnosti dve slučajne promenljive. Posmatrajući te slučajeve možemo da zaključimo da je najmanja zavisnost izmedju slučajnih promenljivih X i Y u slučaju pod d). Što se tiče slučaja pod c) tu je zavisnost najjača i postoji direktna funkcionalna zavisnost (oblika $Y = aX^2 + bX + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$, odredjeni brojevi), kao i u slučaju pod b) (oblika $Y = \alpha X + \beta$, gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, odredjeni brojevi). U slučaju pod a) zavisnost je slabija od onih pod b i c), ali jača od one pod d).



Slika 6.1 Različiti oblici dijagrama rasturanja [Izvor: Autor].

Koeficijent proste linearne korelacije ili Pirsonov koeficijent, služi kao mera linearne zavisnosti između slučajnih promenljivih X i Y.

DEFINICIJA KOEFICIJENTA KORELACIJE

Koeficijent korelacije je definisan preko varijansi i kovarijansi slučajnih promenljivih X i Y.

Koeficijent korelacije je definisan preko varijansi i kovarijansi slučajnih promenljivih X i Y. Kovarijansa se definiše na sledeći način:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big[[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\big] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Napomenimo da je $\mathrm{Cov}(X, Y) = M_{11}$.

Dakle, za slučajne promenljive X i Y koeficijent korelacije, u oznaci, $\rho_{X, Y}$, definiše se sa:

$$\rho_{X, Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}}.$$

Koeficijent proste linearne korelacije može uzeti vrednost samo iz intervala $[-1, 1]$. Ovaj koeficijent ima sledeće osobine:

1) $|\rho_{X, Y}| \leq 1$,

2) $|\rho_{X, Y}| = 1$ ako i samo ako je $Y = \alpha X + \beta$, gde je $\alpha > 0$ za $\rho = 1$, a $\alpha < 0$ za $\rho = -1$,

3) ako su slučajne promenljive X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $\rho_{X, Y} = 0$ (obrnuto ne mora da važi).

Primer da obrnuto u prethodnoj osobini 3) ne važi je slučaju pod c) na Slici 1, gde postoji direktna zavisnost izmedju slučajnih promenljvih, ali kako nije linearna tada je $\rho_{X, Y} = 0$.

PRIMER – I DEO

Određivanje raspodele slučajne promenljive.

Primer 6. Tri kuglice se na slučajan način razmeštaju u kutije A, B i C. Ako je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj kuglica u kutija A, a Y slučajna promenljiva koja predstavlja broj praznih kutija. Odrediti $\rho_{X, Y}$.

Rešenje. Videli smo na prethodnim vežbama da je zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y):

$X \diagdown Y$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
2	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

Marginalne raspodele za slučajne promenljive X i Y su

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

PRIMER – II DEO

Određivanje koeficijenta linearne korelacije

Sada imamo da je

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2\frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = 1,$$
$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 1,2.$$

S druge strane imamo da je

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j),$$

tj. u našem slučaju je

$$E(XY) = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + \\ + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0,1 = 1,2.$$

Kako je

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1,2 - 1,2 = 0,$$

imamo da je $\rho_{X,Y} = 0$.

Poglavlje 7

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Određivanje matematičkog očekivanja i disperzije slučajne promenljive diskretnog tipa.

Slučajna veličina *X* ima sledeću raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Odrediti $E(X)$ i $\sigma^2(X)$.

Rešenje: Odredimo, najpre, veličine $\boldsymbol{E(X)}$ i $\boldsymbol{E\left(X^2\right)}$ koje su nam potrebne da bismo odredili $\boldsymbol{\sigma^2(X)}$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9,$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,1,$$

Sada imamo:

$$\sigma^2(X) = E\left(X^2\right) - [E[X]]^2 = 2,1 - 0,9^2 = 1,29.$$

ZADATAK 2 (20 MINUTA)

Određivanje vrednosti stanja koje slučajna promenljiva diskretnog tipa može da uzme.

Diskretna slučajna promenljiva ima dve moguće vrednosti y_1 i y_2, pri čemu je $y_2 > y_1$. Odrediti y_1 i y_2, ako je $P\left(Y = y_1\right) = 0,6$, $E(X) = 1,4$ i $\sigma^2(X) = 0,24$.

Rešenje: Slučajna promenljiva Y ima raspodelu: $Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Potrebno je odrediti y_1 i y_2. Iz uslova zadatka imamo da je: $E(Y) = 1,4 \quad \Leftrightarrow \quad 0,6y_1 + 0,4y_2 = 1,4,$

kao i $\sigma^2(Y) = 0,24 \quad \Leftrightarrow \quad E(Y^2) - [E[Y]]^2 = 0,24 \quad \Leftrightarrow 0,6{y_1}^2 + 0,4{y_2}^2 - 1,4^2 = 0,24.$

Sada, dobijamo sistem od dve nepoznate, sa dve jednačine:

$0,6y_1 + 0,4y_2 = 1,4,$

$0,6{y_1}^2 + 0,4{y_2}^2 = 2,2.$

Ako iz prve jednačine izrazimo promenljivu y_1 preko promenljive y_2 tj: $y_1 = \frac{1,4 - 0,4y_2}{0,6}$ i to zamenimo u drugoj jednačini prethodnog sistema imamo da je:

$$\frac{1,96 - 1,12y_2 + 0,16y_2^2}{0,6} + 0,4y_2^2 = 2,2 \Leftrightarrow 1,96 - 1,12y_2 + 0,16y_2^2 + 0,24y_2^2 = 1,32,$$

$$0,4y_2^2 - 1,12y_2 + 0,64 = 0, \qquad {y_2}_{1/2} = \frac{1,12 \pm \sqrt{1,2544 - 1,024}}{0,8} = \frac{1,12 \pm 0,48}{0,8} \Leftrightarrow {y_2}_1 = 2 \quad \vee\, {y_2}_2 = 0,8.$$

Tada je ${y_1}_1 = 1 \quad \vee\, {y_1}_2 = 1,8.$ Kako je, po uslovu zadatka $y_2 > y_1$ imamo samo jedno rešenje $y_2 = 2, \quad y_1 = 1,$ tj. raspodela slučajne promenljive Y glasi: $Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$

ZADATAK 3 (5 MINUTA)

Određivanje matematičkog očekivanja i disperzije za različite slučajne promenljive i njihove funkcije.

Date su slučajne promenljive:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 13 \\ 0,4 & 0,25 & 0,15 & 0,2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0,35 & 0,6 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

Odrediti $E(X)$, $\sigma^2(2X)$ i $\sigma^2(Y)$.

Rešenje: Imamo da je

$E(X) = 2 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,25 + 9 \cdot 0,15 + 13 \cdot 0,2 = 6,5$

Na osnovu osobine disperzije imamo da je:

$\sigma^2(2X) = 4\sigma^2(X) = 70,2 \quad (\text{rezultat proveriti za vežbu}).$

Takodje,

$\sigma^2(Y) = \sigma^2(Y) = 1,1771 \quad (\text{rezultat proveriti za vežbu}).$

ZADATAK 4 (5 MINUTA)

Određivanje medijane za slučajnu promenljivu neprekidnog tipa.

Odrediti M_e za slučajnu promenljivu X i $a \in \mathbb{R}$, ako je ona definisana funkcijom raspodele:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-ax}, & x>0. \end{cases}$$

Rešenje: Iz osobine za medijanu slučajne promenljive neprekidnog tipa imamo da je:

$F(M_e) = 0,5.$

Tada imamo da je:

$$1 - e^{-aM_e} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad e^{-aM_e} = 0,5.$$

Ako logaritmujemo prethodnu jednačinu dobijamo da je

$$-aM_e = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow M_e = \frac{\ln 2}{a}.$$

ZADATAK 5 (10 MINUTA)

Određivanje marginalnih raspodela za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu diskretnog tipa i na osnovu toga određivanje traženih matematičkih očekivanja.

zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y) dat sledećom tablicom

$X \diagdown Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

Odrediti $E(XY)$, $E(X)$ i $E(Y)$. Da li su slučajne promenljive X i Y nezavisne?

Rešenje. Na osnovu datog zakona raspodela slučajne promenljive (X,Y) možemo dobiti i marginalne raspodele slučajnih promenljivih X i Y.

$X \diagdown Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Imamo da je

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 \qquad \text{i} \qquad E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

S druge strane imamo da je

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j),$$

tj. u našem slučaju je

$$E(XY) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Kako važi da je

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y),$$

zaključujemo da su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

ZADATAK 6 (10 MINUTA)

Matematičko očekivanje i disperzija neprekidne slučajne promenljive.

Odrediti matematičko očekivanje slučajne promenljive X sa gustinom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Rešenje. Važi da je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{2} x \cdot \frac{3}{8}x^2\, dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3}{32}(2^4 - 0^4) = \frac{3}{2}.$$

Odredimo sa disperziju. Kako važi da je $\sigma(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, odredimo prvo

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{3}{8}x^2\, dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{3}{40}(2^5 - 0^5) = \frac{12}{5}.$$

Konačno dobijamo

$$\sigma(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20}.$$

ZADATAK 7 - I DEO (15 MINUTA)

Određivanje funkcije od neprekidne slučajne promenljive.

Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$$

Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = 2X + 1$, a zatim izračunati matematičko očekivanje i disperziju promenjive Y.

Rešenje. Odredimo, najpre, raspodelu slučajne promenljive X. Tada je

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Tada je

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(2X+1 < y) = P\left(X < \frac{y-1}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \frac{y-1}{2} \le 0 \\ \dfrac{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2}{4}, & 0 < \frac{y-1}{2} \le 2 \\ 1, & \frac{y-1}{2} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{16}, & 1 < y \le 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

ZADATAK 7 - II DEO

Izračunavanje matematičkog očekivanja i disperzije od neprekidnih slučajnih promenljivih..

Važi da je

$$E(X) = \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Tada je

$$E(Y) = E(2X+1) = 2E(X) + E(1) = 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{11}{3}.$$

Dalje, kako je

$$\varphi_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y-1}{8}, & y \in [1,5] \\ 0, & y \notin [1,5] \end{cases}$$

imamo da je

$$E(Y) = \int_1^5 y^2 \cdot \frac{y-1}{8}\, dx = \frac{1}{8}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{625}{4} - \frac{1}{4} - \frac{125}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{43}{3}.$$

Konačno dobijamo

$$\sigma^2(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

ZADATAK 8 (15 MINUTA)

Određivanje koeficijenta linearne korelacije za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu diskretnog tipa.

Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) je zadata zakonom raspodele

$X \diagdown Y$	0	1	2
-1	$0,05$	$0,4$	$0,15$
1	$0,2$	$0,1$	$0,1$

Odrediti koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y).

Rešenje. Iz date tablice odredimo, najpre, marginalna raspodela slučajnih promenljivih X i Y

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Tada, iz marginalne raspodele za slučajnu promenljivu X važi da je

$$E(X) = (-1) \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = -0,6 + 0,4 = -0,2$$

i

$$\sigma^2(X) = (-1)^2 \cdot 0,6 + 1^2 \cdot 0,4 - (-0,2)^2 = 0,6 + 0,4 - 0,04 = 0,96.$$

Slično, iz marginalne raspodele za slučajnu promenljivu Y važi da je

$$E(Y) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 = 0 + 0,5 + 0,5 = 1$$

i

$$\sigma^2(Y) = 0^2 \cdot 0,25 + 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,25 - 1^2 = 0 + 0,5 + 1 - 1 = 0,5.$$

Očekivanje $E(XY)$ se računa po formuli

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$$

gde je $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = yj\}$.Tada je

$$\begin{aligned} E(XY) = (-1) \cdot 0 \cdot 0,05 + (-1) \cdot 1 \cdot 0,4 + (-1) \cdot 2 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 1 \cdot 0,1 \\ + 1 \cdot 2 \cdot 0,1 = -0,4 - 0,3 + 0,1 + 0,2 = -0,4. \end{aligned}$$

Konačno, koeficijent korelacije između slučajnih promenljivih X i Y je

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)} \cdot \sqrt{\sigma^2(Y)}} = \frac{-0,4 - 0,2 \cdot 1}{\sqrt{0,96} \cdot \sqrt{0,5}} = -0,29.$$

Poglavlje 8

Individualna vežba

ZADACI ZA INDIVIDUALNI RAD

Zadaci za samostalan rad studenata.

Zadatak. Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Neka je $Y = 2X + 3$, $Z = X^2$ i $T = X^3 - X^2$.

(a) Naći zakon raspodele za slučajne promenljive Y, Z i T.

(b) Izračunati matematičko očekivanje za slučajne promenljive X, Y, Z i T.

(c) Izračunati disperziju za slučajne promenljive X, Y, Z i T.

Zadatak. Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 2X + 1$.

(b) Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.

Zadatak. Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{\sqrt[3]{x^1}-1}{3}, & 1 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Vreme izrade: 1. 15 minuta; 2. 15 minuta; 3. 15 minuta.

Zaključak

NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Matematičko očekivanje, mod, medijana, disperzija, standardna devijacija, koeficijent linearne korelacije

informacije koje pružaju numeričke karakteristike za neku slučajnu promenljivu ne mogu u potpunosti da opišu posmatranu slučajnu promenljivu, kao što je to mogu funkcija raspodele, gustina raspodele ili raspodele verovatnoća, Međutim, u praksi i te nepotpune informacije su često dovoljne da okarakterišu posmatranu slučajnu promenljivu.

U ovoj lekciji smo obradili sledeće numeričke karakteristike slučajne promenljive:

- Matematičko očekivanje, mod i medijanu koje spadaju u tzv. mere centralne tendencije
- Disperziju i standardnu devijaciju koje spadaju u mere varijacije
- Koeficijent linearne korelacije

O ovim veličinama ćemo govoriti ponovo kada se budemo bavili statistikom.

LITERATURA:

M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.

Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.

Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.

Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.