UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Granične teoreme teorije verovatnoće

Lekcija 08

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 08

GRANIČNE TEOREME TEORIJE VEROVATNOĆE

Uvod

UVOD

Čebiševljeva nejednakost, Zakoni velikih brojeva i cenralna granična teorema.

Na osnovu gradiva koji ćemo ovde izneti moći ćemo da damo odgovore na dva veoma važna problema koja se javljaju u verovatnoći (i statistici). Prvi, aksiomatska definicija verovatnoće ne određuje način na koji će verovatnoće slučajnih događaja biti određene u nekom realnom eksperimentu. Zbog toga treba naći odgovor da li se i pod kojim uslovima, na osnovu rezultata izvođenja eksperimenta može odrediti odgovarajuća verovatnoća posmatranog događaja. Odgovor na ovo pitanje, koje je važno i u verovatnoći i u statistici, daju tzv. Zakoni velikih brojeva o kojima će biti reči u ovoj lekciji.

Za razmišljanje: Uzmite određeni novčić i bacite ga sedam puta. Registrujte koliko je puta palo pismo, a koliko glava. Da li na osnovu ovog eksperimenta možete da zaključite kolika je verovatnoća da kada bacite novčić padne pismo (ili glava)?

Drugi važan problem se javlja prilikom izvođenja samih eksperimenata ili merenja. Naime, vrlo često se dešava da se isti eksperiment izvodi dva puta zaredom, pod potpuno istim uslovima (bar mi tako mislimo), a desi se da dobijamo dva različita rezultata. To može da se desi iz dva razloga. Ili je u pitanju sistemska greška, na primer, uređaj kojim merimo nije dovoljno precizan. Ovakvu greški je generalno moguće otkloniti unošenjem određenih popravki u krajnji rezultat. Na primer, očitanu vrednost sa uređaja umanjiti ili uvećati za vrednost ocenjene nepreciznosti uređaja. S druge strane, mogu se javiti greške pod uticajem određenog broja nekontrolisanih faktora koji nam na početku eksperimenta ili merenja nisu poznate. Na primer, promene uslova pod kojima se eksperiment ili merenje obavlja (npr. temperatura, vlažnost i sl.). Takve greške se nazivaju slučajne greške i uzrokuju određene varijacije u dobijenim rezultatima eksperimenta ili merenja. S tim u vezi je razvijena teorija slučajnih grešaka koja se zasniva na metodama verovatnoće i matematičke statistike, posebno na Zakonima velikih brojeva.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Nejednakost Čebiševa i nejednakost Markova

NEJEDNAKOST ČEBIŠEVA. PRIMER

Nejednakost Čebiševa daje ocenu verovatnoće da se vrednosti slučajne promenljive razlikuje od matematičkog očekivanja više od neke unapred zadate vrednosti.

Prvo ćemo ukazati na jednu nejednakost koju ćemo u daljem izlaganju koristiti.

Stav. Za svaku slučajnu promenljivu X koja ima konačan moment drugog reda, za svako $\varepsilon > 0$ važi nejednakost

$$P\left(|X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

Prethodno data nejednakost se naziva nejednakost Čebiševa. Njenom primenom dobijamo gornja ograničenja za verovatnoću da slučajna promenljiva promenljiva X uzme vrednosti van intervala $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ova nejednakost se može zadati i u raznim drugim oblicima. Naime, ako umesto slučajne promenljive X posmatramo slučajnu promenljivu $|X - E(X)|$, sa disperzijom $\sigma^2(X)$, tada dobijamo

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}. \tag{1}$$

Specijalno, ako uzemo da je $\varepsilon = \sigma^2(X)$ u nejednakosti (1), tada dobijamo da je

$$P\{|X - E(X)| \geq \sigma^2(X)\} \leq \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2(X)} = 1.$$

Formula (1) se može zadati i u sledećem ekvivaletnom obliku

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

za svako $\varepsilon > 0$.

Napomena. Intuitivno, nejednakost Čebiševa nam kaže da slučajna promenljiva X najčešće neće previše odstupati od svog matematičkog očekivanja, tj. najčešće će biti "blizu" njemu.

PRIMER

Korišćenjem nejednakosti Čebiševa se može dobiti "pravilo tri sigma".

Posmatrajmo slučajnu promenljivu $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Tada je $Z^* = \frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1)$. Primenjujući nejednakost Čebiševa dobijamo da važi

$$\begin{aligned} P\big(|X-E(X)| \geq \sigma(X)\big) &= P(|X-m| \geq \sigma) = P\left(\left|\frac{X-E(X)}{\sigma}\right| \geq 1\right) \\ &= P(|Z^*| \geq 1) = 1 - P(|Z^*| < 1) = 1 - 2\Phi(1) = 0,31732, \\ P\big(|X-E(X)| \geq 2\sigma(X)\big) &= P(|X-m| \geq 2\sigma) = P\left(\left|\frac{X-E(X)}{\sigma}\right| \geq 2\right) \\ &= P(|Z^*| \geq 2) = 1 - P(|Z^*| < 2) = 1 - 2\Phi(2) = 0,04550, \\ P\big(|X-E(X)| \geq 3\sigma(X)\big) &= P(|X-m| \geq 3\sigma) = P\left(\left|\frac{X-E(X)}{\sigma}\right| \geq 3\right) \\ &= P(|Z^*| \geq 3) = 1 - P(|Z^*| < 3) = 1 - 2\Phi(3) = 0,00270. \end{aligned}$$

O poslednjem dobijenom rezultatu smo već govorili i to je "pravilo tri sigma." Naime, ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu, tada verovatnoća da ona uzme vrednosti van intervala $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ je manja od $0,3\%$, odnosno da postigne vrednosti u ovom intervalu je veća od $99,7\%$. Ovo znači da gotovo u potpunosti možemo biti sigurni da će slučajna promenljiva koja ima normalnu raspodelu uzeti vrednosti iz intervala $(m-3\sigma, m+3\sigma)$.

Napomena. Ponekad se u praksi vrednosti za slučajnu promenljivu sa normalnom raspodelu koje se nalaze van intervala $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ odbacuju i ne uključuju u dalja izračunavanja.

NEJEDNAKOST MARKOVA. PRIMER

Nejednakost Markova govori o tome da je verovatnoća da slučajna promenljiva bude mnogo veća od svog matematičkog očekivanja mala i pri tom daje kvantitativnu ocenu – koliko mala.

Od interesa je pomenuti još jednu nejednakost, koja je u teoriji verovatnoće poznata kao nejednakost Markova.

Neka je X nenegativna slučajna promenljiva, tj. $P\{X \geq 0\} = 1$. Ako postoji $E(X)$ tada je

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(X)}{\varepsilon},$$

za svako $\varepsilon > 0$.

Slično kao i kod jednakosti Čebiševa, i u ovom slučaju važi

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

Primer. Data je slučajna promenljiva

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0,1 & 0,3 & 0,25 & 0,15 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

Kako odrediti donju granicu za $P\{X < 11\}$?

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} P\{X < 11\} &= P(\{X = 2\}) + P(\{X = 4\}) + P(\{X = 6\}) + P(\{X = 8\}) + P(\{X = 10\}) = \\ &= 0,1 + 0,3 + 0,25 + 0,15 + 0,15 = 0,95. \end{aligned}$$

Takođe, imamo da je

$$E(X) = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,15 + 12 \cdot 0,05 = 6,1.$$

Koristeći nejednakost Markova dobijamo donju granicu ove verovatnoće

$$P\{X < 11\} \geq 1 - \frac{E(X)}{\varepsilon} = 1 - \frac{6,1}{11} = 0,445.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

O nejednakosti Čebiševa i Markova. Primeri.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: O nejednakosti Markova i Čebiševa.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Zakoni velikih brojeva

KONVERGENCIJA U VEROVATNOĆI. SKORO IZVESNA KONVERGENCIJA

Ove dve konvergencije su veoma bitne u zadavanju Zakona velikih brojeva.

Sada ćemo definisati osnovne vrste konvergencije niza slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Postoje četiri osnovne vrste konvergencije niza slučajnih promenljivih:

(i) konvergencija u verovatnoći ,

(ii) skoro izvesna konvergencija ili skoro sigurna konvergencija, sa verovatnoćom 1 ,

(iii) konvergencija u srednjem reda $0 < p < \infty$,

(iv) konvergencija u raspodeli.

Ovde ćemo definisati samo prve dve vrste konvergencija.

Definicija. Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X, kada $n \to +\infty$. u oznaci $X_n \overset{v}{\to} X,$ kada $n \to +\infty$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0) P\{\omega \mid \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Definicija. Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro izvesno (skoro sigurno, sa verovatnoćom 1) kaslučajnoj promenljivoj X, kada $n \to +\infty$, u oznaci $X_n \overset{s.i.}{\to} X$, kada $n \to +\infty$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0) P\{\omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\} \to 1, n \to +\infty.$$

Stav. Iz $X_n \overset{s.i.}{\to} X,$ kada $n \to +\infty$, sledi da je $X_n \overset{v}{\to} X,$ kada $n \to +\infty$.

Napomena. Obrnuto u opštem slučaju ne važi.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Konvergencija u verovatnoći. Skoro izvesna konvergencija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZAKON VELIKIH BROJEVA

Primenom Čebiševljeve nejednakosti na slučajnu promenljivu $\overline{X}$ dobijamo Zakon velikih brojeva.

Ponavljanje nekog eksperimenta možemo posmatrati kao niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $(n \in \mathbb{N})$ iste raspodele, gde promenljiva X_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ predstavlja rezultat i -tog ponavljanja eksperimenta. Pri tome, eksperiment se ponavlja pod neizmenjenim uslovima i rezultat jednog eksperimenta ne utiče na rezultate ostalih. Pod ovim pretpostavkama promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $(n \in \mathbb{N})$,su nezavisne. Pretpostavimo da je $E(X_i) = m$, a $\sigma^2(X_i) = \sigma^2$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Uočimo sada slučajnu promenljivu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}.$$

Koristeći osobine matematičkog očekivanja, možemo pokazati da važi da je $E(\overline{X}) = m$. Slično iz osobina disperzije važi da je $\sigma^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Ono što je veoma važno da uočimo jeste da je matematičko očekivanje promenljive $\overline{X}$ ostalo isto, ali njena standardna devijacija je $\sqrt{n}$ puta manja nego standardna devijacija promenljive X_i, $(i = 1, 2, 3 \ldots, n)$. Na ovaj način se postiže veća preciznost dobijenih rezultata.

Ako sada primenimo Čebiševljevu nejednakost na $\overline{X}$ dobijamo

$$P\{|\overline{X} - E(\overline{X})| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

za svako $\varepsilon > 0$.
Očigledno važi da je $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$, kada $n \to \infty$, bez obzira na vrednosti koje veličina ε uzima. Na ovaj način dobijamo Zakon velikih brojeva.

Stav. Za slučajnu promenljivu $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}$ gde su X_i nezavisne slučajne promenljive za koje važi $E(X_i) = m$, a $\sigma^2(X_i) = \sigma^2$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, važi da je

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\overline{X} - E(\overline{X})| \geq \varepsilon\} = 0,$$

za svako $\varepsilon > 0$.

Napomena. Dokazivanjem ovogstava omogućeno je da se na eksperimentalni način određuju verovatnoće slučajnih događaja, što je dovelo do prihvatanja definicije empirijske verovatnoće. Na ovaj način je otvoren put daljem razvoju verovatnoće i statistike, jer je pokazano da postoje zakonitosti kod pojava i procesa koji se dobijaju iz izvođenja raznih tipova eksperimenata (to su procesi stohastičkog (statističkog) karaktera).

Zakoni velikih brojeva koji važe za konvergenciju u verovatnoći se nazivaju slabi zakoni velikih brojeva, dok oni koji važe za skoro izvesnu verovatnoću se nazivaju jaki zakoni velikih brojeva.

Poglavlje 3

Slabi zakoni velikih brojeva

BERNULIJEV ZAKON

Bernulijev zakon velikih brojeva se dobija kada se posmatra slučajna promenljiva sa Binomnom raspodelom.

Jedna od najznačajnijih zakona velikih projeva je Bernulijev zakon velikih brojeva. On se može dobiti kada u nejednakosti Čebiševa slučajna promenljiva X ima Binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n,p)$. Znajući da je u tom slučaju $E(X) = np$ i $\sigma^2(X) = npq$, tada dobijamo

$$P\big(|X - np| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{npq}{\varepsilon^2},$$

za svako $\varepsilon > 0$. Polazeći od $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ i koristeći prethodnu nejednakost, imamo da je

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P(|X - np| \geq n\varepsilon) \leq \frac{npq}{(n\varepsilon)^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Odavde dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Dakle, imamo da

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0,\ n \to +\infty, \quad \text{tj.} \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1,\ n \to +\infty,$$

Ovde se očigledno radi o konvergenciji u verovatnoći, pa ovaj zakon spada u slabe zakone velikih brojeva. Slučajna promenljiva $Y = \frac{X}{n}$ naziva se relativna frekvencija realizacije posmatranog događaja u Bernulijevoj šemi i važi da je $E(Y) = p$ i $\sigma^2(Y) = \frac{pq}{n}$.

Napomena. Relativna frekvencija, u ovom slučaju, predstavlja vrednost koja se dobija kada se frekvencija realizacija posmatranog događaja u Binomnoj raspodeli podeli sa brojem izvršenih eksperimenata tj.
n. Relativna frekvencija se izražava i u procentima, što se postiže množenjem dobijene vrednosti sa 100.

INDIKATOR DOGAĐAJA

Indikator događaja daje vrednost jedan ako dobijeni elementarni ishod pripada posmatranom događaju, tj. ako dovodi do realizacije tog događaja, a u suprotnom daje vrednost nula.

Neka slučajna promenljiva X ima raspodelu $\mathcal{B}(n,p)$ i neka se ona može dobiti kao zbir n slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ datih tako da su u Bernulijevoj šemi definisani sledeći događaji:

$$\begin{aligned} &A_1 - \text{događaj koji se realizuje kada se u prvom eksperimentu realizuje događaj } A,\\ &A_2 - \text{događaj koji se realizuje kada se u drugom eksperimentu realizuj edogađaj } A,\\ &\quad\vdots\\ &A_n - \text{događaj koji se realizuje kada se u } n\text{-tom eksperimentu realizuje događaj } A. \end{aligned}$$

Definišimo, dalje, sledeće slučajne promenljive:

$$I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i, \\ 0, & \omega \notin A_i, \end{cases}$$

za $i = 1, 2, 3, \ldots$ Slučajna promenljiva I_{A_i} se naziva indikator događaja A_i za $i = 1, 2, 3, \ldots$ Važi da je $I_{A_i} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$, pa je

$$E\left(I_{A_i}\right) = 1 \cdot P(A_i) + 0 \cdot P(\overline{A_i}) = P(A_i) = p,$$

za $i = 1, 2, 3, \ldots$, gde je p verovatnoća realizacije događaja A u svakom od ponovljenih eksperimenata. Kako je

$$I_{A_i}^2 : \begin{pmatrix} 1^2 & 0^2 \\ p & q \end{pmatrix},$$

imamo da je $E(I_{A_i}^2) = p$, kao i $\sigma^2(I_{A_i}^2) = E(I_{A_i}^2) - (E(I_{A_i}^2))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

OPŠTIJI BERNULIJEV ZAKON VELIKIH BROJEVA

Bernulijev zakon velikih brojeva je slab zakon velikih brojeva niz indikatora.

Ako stavimo da je: $X_1 = I_{A_1}$, $X_2 = I_{A_2}$, ..., $X_n = I_{A_n}$, tada je za sve moguće ishode ω: $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega)$.

Odavde možemo pisati

$\overline{X} = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Videli smo da je $X - E(X) = X - np$. Tada je

$\frac{X}{n} - p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i),$

pa se sada Bernulijev zakon velikih brojeva može zapisati u sledećoj formi:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

za svako $\varepsilon > 0,$ ili u ekvivalentnom obliku:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Napomena. Matematičari Borel i Kanteli su pokazali daovaj zakon važi i kada se konvergencija u verovatnoći zameni skoro izvesnom konvergencijom.

ZAKON VELIKIH BROJEVA ČEBIŠEVA I HINČINA

Uopštavanjem Bernulijevog zakona dobijaju se zakoni Čebiševa i Hinčina.

Bernulijev zakon velikih brojeva se može uopštiti i za proizvoljan niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (koje nisu indikatori), pri čemu važi da je $\sigma(X_i) \leq M$, za svako $i \in \mathbb{N}$ i $M \in \mathbb{R}$. Na osnovu prethodno datog uopštenja Bernulijevog zakona velikih brojeva i nejednakosti Čebiševa, imamo da je

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| \geq \varepsilon\right) \\ &= P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{n\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Na ovaj način smo dobili Zakon velikih brojeva Čebiševa.

Slab zakon velikih brojeva važi i za niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ koje su nezavisne, sa istom raspodelom i konačnim matematičkim očekivanjem $E(X_i) = a$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

za svako $\varepsilon > 0$. Na ovaj način smo dobili Zakon velikih brojeva Hinčina.

PRIMER

Provera da li dati niz slučajnih promenljivih zadovolja neki od slabih zakona velikih brojeva.

Dat je niz nezavisnih slučajnih promenljivih zakonom raspodele

$$X_n : \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da li za $X_n,\ n \in \mathbb{N}$važi slab zakon velikih brojeva?

Rešenje. Slučajne promenljive nemaju istu raspodelu (jer zavisi od n), pa ne važi Hinčinov zakon velikih brojeva. Proverimo, sada da li važi zakon Čebiševa, tj. proverimo da li postoji $M \in \mathbb{R}$, takvo da je $\sigma^2(X_n) \leq M,\ n \in \mathbb{N}$. Važi da je

$$E(X_n) = -\sqrt{\ln n} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{\ln n} \cdot \frac{1}{2} = 0,\ \ n \in \mathbb{N}$$

i

$$E(X_n) = (-\sqrt{\ln n})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{\ln n})^2 \cdot \frac{1}{2} = \ln n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, imamo da je $\sigma^2(X_n) = \ln n,\ n \in \mathbb{N}$što znači da broj M ne postoji, pa zakon velikih brojeva Čebiševa ne postoji.

Ostaje još da proverimo da li važi slab zakon velikih brojeva u opštem slučaju. Tada treba proveriti da li važi

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Kako je $E(X_n) = 0,\ n \in \mathbb{N}$ i primenom nejednakosti Čebiševa, imamo da je

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln i}{n^2\varepsilon^2}$$
$$= \frac{\ln n!}{n^2\varepsilon^2}.$$

Na osnovu Stirlingove formule važi da je $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$, kada je $n \to +\infty$, odnosno važi da je $\ln n! \sim \ln(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}) = \frac{\ln(2\pi n)}{2} + n \ln n - n$kada je $n \to +\infty$. Tada je

$$\frac{\ln n!}{n^2\varepsilon^2} \sim \frac{\frac{\ln(2\pi n)}{2} + n \ln n - n}{n^2\varepsilon^2} \to 0,$$

kada $n \to +\infty$. Konačno, dobijamo da je

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

što znači da važi slab zakon velikih brojeva.

AUTORSKI VIDEO KLIP

O slabim zakonima velikih brojeva.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Muavr – Laplasova teorema

UVOD

U Binomnoj raspodeli izračunavanje odgovarajućih verovatnoća za veliko n je teško. Da bi se ovo olakšalo, utvrđen je način koji ovo omogućava, u željenu preciznost.

Kada smo izučavali Binomnu raspodelu, rekli smo da je izračunavanje odgovarajućih verovatnoća za velike vrednosti n dosta teško. Da bi se ovo izračunavanje olakšalo, poželjno je utvrditi način koji ovo omogućava, ali da pritom bude zadovoljena i željena preciznost.

Rešenje ovog problema, ono što mi danas nazivano Muavr-Laplasova teorema, prvi je dao Muavr 1738. godine, za slučaj kada je $p = 0,5$. Ovaj rezultat je bio dosta ispred svoj vremena, tako da je pao u zaborav, sve dok ga Laplas nije ponovo otkrio i uopštio 1812. godine. za bilo koje $0 < p < 1$. Gaus je, takođe, dao svoj doprinos kako u formulaciji, tako i u dokazu opšteg oblika ove teoreme.

Laplas je dao i uopšteniji formulaciju Centralne granične teoreme, ali je imao izvesne propuste u njegov dokazu. Kao i u slučaju Muavra, ovaj Laplasov rezultat nije privukao veliku pažnju njegovih savremenika. Tek krajem 19. i početkom 20. veka je realizovana ideja o uopštenju centralne granične teoreme. Naime, ruski matematičar Ljapunov je dao potpuni dokaz prethodno pominjane Laplasove teoreme. Često se ova teorema u literaturi naziva teorema Ljapunova.

Mađarski matematičar Poja je prvi put 1920. godine u jednom od svojih radova upotrebio naziv Centalna granična teorema, koji je ostao do danas u upotrebi.

U ovom delu ćemo se upoznati sa Muavr-Laplasovom formulom.

LOKALNA MUAVR-LAPLASOVA TEOREMA

Lokalna Muavr-Laplasova teorema omogućava da određenu binomnu verovatnoću približno možemo izračunati preko zakona verovatnoća Normalne raspodele (Gausove funkcije).

Stav. (Lokalna Muavr – Laplasova teorema). Neka je verovatnoća ostvarenja nekog događaja A u svakom od n nezavisnih ponavljanja jednog eksperimenta jednaka p, $(0 < p < 1)$ i neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj eksperimenta u kojima se realizovao događaj A. Tada je niz $\sqrt{npq}\cdot P(\{X=k\}), n\in\mathbb{N}$ uniformno konvergentan za svako $k\in\mathbb{N}$, za koje se $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ nalazi u konačno intervalu. Pri tome važi

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{npq}\cdot P(\{X=k\})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-np)^2}{npq}}=\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

gde je $y=\varphi(x)$ Gausova funkcija.

Iz prethodnog stava važi da se verovatnoće iz binomne raspodele $P(\{X=k\})=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ za dovoljno veliko $n\in\mathbb{N}$ približno mogu izračunavati na sledeći način

$$P(\{X=k\})\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

gde je $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ Gausova funkcija, odnosno zakon verovatnoća Normalne raspodele, za $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Vrednosti Gausove funkcije se zadaju tabelarno. Tabela je data na 6. predavanju. Ova funkcija je parna, tj. važi $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Približne vrednosti binomnih verovatnoća izračunatih preko Gausove funkcije su tačnije što je n veće. Međutim, čak i za relativno male vrednosti n približne vrednosti su dovoljno dobra aproksimacija.

INTEGRALNA MUAVR - LAPLASOVA TEOREMA

Integralna Muavr-Laplasova teorema omogućava da određenu zbir više binomnih verovatnoća približno možemo izračunati preko funkcije Normalne raspodele Φ .

Stav. (Integralna Moavr – Laplasova teorema). Neka je verovatnoća ostvarenja nekog događaja A u svakom od n nezavisnih ponavljanja jednog eksperimenta jednaka p, $(0<p<1)$ i neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj eksperimenta u kojima se realizovao događaj A. Verovatnoća da se vrednost $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ nađe u intervalu $[a,b]$ teži će ka vrednosti

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\int_a^b\varphi(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

kada $n\to+\infty$, tj. važi da je

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left\{a\le\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le b\right\}\right)=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Integralna teorema Moavr – Laplasa ima veoma široku primenu u određivanju verovatnoća različitih događaja vezanih za Bernulijevu šemu nezavisnih ponavljanja jednog eksperimenta. Funkcija $\Phi(x)$ je funkcija raspodele za slučajnu promenljivu $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ koja ima $\mathcal{N}(0,1)$. Kao što smo to već ranije rekli, ona je neparna funkcija tj. važi $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Njene vrednosti se zadaju tabelarno (tablica je data na 6. predavanju).

PRIMER

Aproksimacija Binomne raspodele Normalnom, njena standardizacija i određivanje tražene verovatnoće.

Primer 4. Bacaju se dve kocke 155 uzastopno. Kolika je verovatnoća da će se zbir 8 pojaviti više od 24, a manje od 30 puta?

Rešenje: Skup svih ishoda u ovom slučaju ima 36 mogućnosti (što smo videli na ranijim predavanjima), a povoljni ishodi su: $26,\quad 62,\quad 44,\quad 53 \;\text{ i }\; 35$, tj ima ih 5. Tada je $p=\frac{5}{36}$, $q=\frac{31}{36}$ a $n=155$. Označimo sa X slučajnu promenljivu koja prestavlja pojavljivanje brojeva čiji je zbir 8 na gornjoj strani kocke. Tada traženu verovatnoću računamo na sledeći način:

$$P\{24\leq X\leq 30\}=P\left\{\frac{24-np}{\sqrt{npq}}\leq X^{*}\leq\frac{30-np}{\sqrt{npq}}\right\}=\Phi(1,97)-\Phi(0,57)=0,47558-0,21566=0,25992.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Lokalna i integralna Muavr – Laplasova teorema.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Centralne granične teoreme

UVOD

Centralna granična teorema spada među najvažnije teoreme teorije verovatnoće i ona predstavlja zajedničko ime za čitavu familiju teorema.

Centralna granična teorema spada među najvažnije teoreme teorije verovatnoće i ona predstavlja zajedničko ime za čitavu familiju teorema u kojima se dokazuje da niz parcijalnih suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, pri čemu je $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dati niz slučajnih promenljivih, normiran pogodno izabranim konstantama, ima asimptotski normalnu raspodelu, kad $n \to +\infty$. Slobodnije rečeno, centralna granična teorema tvrdi da zbir velikog broja slučajnih sabiraka, pri čemu je udeo svakog pojedinačnog sabirka u celom zbiru konačan, ima približno normalnu raspodelu. Odatle sledi i veliki značaj koji centralna granična teorema ima u praktičnim primenama, jer u mnogim konkretnim realnim situacijama slučajne veličine jesu rezultat delovanja velikog broja slučajnih faktora, pri postoji uticaj svakog od njih ponaosob.

Integralna Muavr – Laplasova formula

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

gde su $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) i X je slučajna promenljiva koja predstavlja broj realizacija nekog događaja A u Bernulijevoj šemi, predstavlja jednu od centralnih graničnih teorema. Kako je za sve moguće ishode ω :

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega) = I_{A_1}(\omega) + I_{A_2}(\omega) + \ldots + I_{A_n}(\omega),$$

gde se I_{A_i} naziva indikator događaja A_i (za $i = 1, 2, 3, \ldots$) , zatim $E\left(I_{A_i}\right) = p$ i (o ovome smo govorili u prethodnom poglavlju) i $\sigma^2\left(I_{A_i}\right) = pq$ to se integralna Moavr – Laplasova formula može predstaviti u obliku:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left\{\frac{I_{A_1} + I_{A_2} + \ldots + I_{A_n} - nE\left\{I_{A_i}\right\}}{\sqrt{n\sigma^2\left\{I_{A_i}\right\}}} < x\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

UOPŠTENJE MUAVR-LAPLASOVE TEOREME

Uopštenje se ogleda u tome što se indikatori događaja zamenjuju opštijim slučajnim promenljivim.

Postavlja se pitanje da li se integralna Moavr – Laplasova formula može uopštiti tako što će se indikatori I_{A_i} (za $i = 1, 2, 3, \ldots$) zameniti opštijim slučajnim promenljivim X_i (za $i = 1, 2, 3, \ldots$). Odgovor je potvrdan i bez dokaza navodimo jednu od centralnih graničnih teorema.

Stav 3. Neka su slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, definisane nad istim prostorom verovatnoća, sa istom funkcijom raspodele i konačnom disperzijom $\sigma^2(X_i) = \sigma^2 (\forall\, i = 1, 2, 3, \ldots)$. Ako je $E(X_i) = a \quad (\forall\, i = 1, 2, 3, \ldots)$ tada je:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Napomena. Postoje različite verzije prethodne teoreme u kojima, čak, nije ni potrebno da sve slučajne promenljive imaju istu raspodelu verovatnoća. U tom slučaju je bitno jedino da nijedna od slučajnih promenljivih nema dominantan uticaj na njihovu konačnu suma.

U slučaju tzv. retkih verovatnoća, tj. kada je verovatnoća p realizacije nekog događaja A mala, Muavr-Laplasova verovatnoća se pokazala kao nezadovoljavajuća. U tom slučaju se koristi Puasonova aproksimacija za binomne verovatnoće i ona se koristi u situacijama kada je $n \cdot p < 10$, gde je n broj ponavljanja nekog eksperimenta u kome se posmatra realizacija doga]aja A. O njoj smo govorili u 6. lekciji.

PRIMER 1

Primena uopštenja Muavr-Laplasovog stava.

Primer 5. Slučajna promenljiva X je aritmetička sredina 3200 nezavisnih, jednakoverovatnih slučajnih promenljivih, sa matematičkim očekivanjem 3 i disperzijom 2. Naći verovatnoću da je X iz intervala (2,95; 3,075).

Rešenje. Potrebno je odrediti $P\{2,95 < X < 3,075\}$, pri čemu je: $X = \frac{1}{3200}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_{3200}}{3200}$.

$$P(2,95 < X < 3,075) = P\left(2,95 < \frac{S_{3200}}{3200} < 3,075\right) = P\left(2,95 - \frac{\overbrace{E(S_{3200})}^{=3\cdot 3200}}{3200} < \frac{S_{3200} - E(S_{3200})}{3200} < 3,075 - \frac{\overbrace{E(S_{3200})}^{=3\cdot 3200}}{3200}\right) = P\Big(-$$

Kako bismo izvršili standardizaciju slučajne promenljive S_{3200} do kraja potrebno je da ona bude zapisana u obliku: $S_{3200}^{*} = \frac{S_{3200} - E(S_{3200})}{\sqrt{2}\sqrt{3200}}$. Ovo dalje znači da je:

$$\frac{S_{3200} - E(S_{3200})}{3200} = \frac{S_{3200} - E(S_{3200})}{\sqrt{2}\sqrt{3200}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3200}}{\sqrt{2}}} = \frac{S_{3200}^{*}}{\frac{\sqrt{3200}}{\sqrt{2}}}.$$

Kako je $\frac{1}{\frac{\sqrt{3200}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{40}$, tada dobijamo da je

$$P\left(-0,05 < \frac{S_{3200}^{*}}{40} < 0,075\right) = P\left(-2 < S_{3200}^{*} < 3\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2).$$

Vrednosti za $\Phi(3)$ i $\Phi(2)$ čitamo iz tablica za normalnu raspodelu i dobijamo da je:

$P(2,95 < X < 3,075) = 0,49865 + 0,47725 = 0,9759.$

PRIMER 2

Centralna granična teorema se koristiti i za određivanje minimalnog broja eksperimenata koje treba izvršiti, da bi se sa određenom verovatnoćom (unapred datom) pojavio izvesni događaj.

Napomena. Centralna granična teorema, kao i Bernulijev zakon velikih brojeva se pored određivanja verovatnoće pojavljivanja nekog događaja u n ponovljenih eksperimenata (gde je n dati broj) može koristiti i za određivanje minimalnog broja eksperimenata koje treba izvršiti, tako da se sa određenom verovatnoćom (unapred datom) može pojaviti neki događaj. To ilustruje sledeći primer.

Primer 6. Vrši se provera jedne serije računara da bi se odredila srednja dužina trajanja *cooler*-a. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja dužinu rada *cooler*-a u časovima, za koju važi da je $\sigma^2(X) = 6400h$. Koliko računara tj. cooler-a treba ispitati da bi se sa verovatnoćom ne manjom od 0,95 moglo utvrditi da će srednji vek trajanja cooler-a odstupiti od matematičkog očekivanja, tog srednjeg veka, ne više od 10h?

Rešenje. Neka je $X_1, X_2, \dots, X_n$ niz slučajnih promenljivih. Tada je:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \le 10\right\} \ge 0,95,$$

tj. tada je $P\left\{-10 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \le 10\right\} \ge 0,95$. Dalje, imamo da je:

$$P\left\{-10 \le \frac{S_n - E(S_n)}{n} \le 10\right\} \ge 0,95.$$

U našem slučaju je $\sigma(X) = 80$ i moramo izvršiti standardizaciju i imamo:

$$P\left(-10\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{S_n-E(S_n)}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\le 10\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\ge 0,95,$$

tj. dobijamo da je: $P\left(-\frac{\sqrt{n}}{8}\le S_n^* \le\frac{\sqrt{n}}{8}\right)\ge 0,95$. Konačno imamo da je:

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right)\ge 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right)\ge 0,4750 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{8}\ge 1,96 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{n}\ge 15,68 \Rightarrow n\ge 245,8624.$$

Najmanji broj računara koji treba posmatrati 246.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Vežba

1. ZADATAK (8 + 5 MINUTA)

Ocenjivanje datih verovatnoća Čebiševljevom nejednakošću.

Slučajna promenljiva X ima matematičko očekivanje $E(X) = 3$ i standardnu devijaciju $\sigma(X) = 0,01$. Oceniti $P(2,5 < X < 3,5)$.

Rešenje: Uočimo da važi sledeće:

$P(2,5 < X < 3,5) = P\left(E(X) - 0,5 < X < E(X) + 0,5\right) = P\left(|X - E|X|| \leq 0,5\right)$.

Koristićemo Čebiševljevu nejednakost u obliku:

$P\left\{|X - E(X)| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$,

tj. u našem slučaju imamo da je:

$P\left\{|X - E(X)| < 0,5\right\} = 1 - \frac{0,01}{0,5^2} = 0,96$.

Diskretna slučajna promenljiva ima raspodelu verovatnoća $X : \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. Oceniti $P\left\{|X - E(X)| < 0,2\right\}$ pomoću nejednakosti Čebiševa.

Rešenje: Kako je $E(X) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54$ i $E\left(X^2\right) = 0,3^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8 = 0,306$, tada imamo da je $\sigma^2 = 0,0144$. Primenom Čebiševljeve nejednakosti dobijamo da je:

$P\left\{|X - E(X)| < 0,2\right\} \geq 1 - \frac{\mathbf{0,0144}}{0,04} = 0,64$

2. ZADATAK (5 +8 MINUTA)

Primena nejednakosti Markova.

Srednja potrošnja vode u jednom naselju iznosi 50000 litara dnevno. Oceniti verovatnoću da u tom naselju potrošnja vode u toku jednog dana bude manja od 150000 litara.

Rešenje. Prema nejednkosti Markova imamo da je

$$P\{X < 150000\} \geq 1 - \frac{50000}{150000} \geq 1 - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}.$$

Zbir svih uloga u određeni fond iznosi 20000 evra, a verovatnoća da slučajno izabrani ulog ne premašuje 100 evra iznosi 0,8. Šta se može reći o broju ulagača?

Rešenje. Označimo sa X veličinu slučajno odabranog uloga. Tada je, prema uslovu zadatka, $E(X) = \frac{20000}{n}$, gde je n broj ulagača. Kako je $P(\{X < 100\}) = 0,8,$ a po nejednakosti Markova vaŽi da je

$$P(\{X < 100\}) \geq 1 - \frac{E(X)}{100}$$

to je

$$0,8 \geq 1 - \frac{20000}{n}$$

odakle se dobija da je $n \leq 1000$.

3. ZADATAK (10 MINUTA)

Aproksimacija binomne raspodele normalnom raspodelom.

Broj dece u nekoj porodici je 10. Ako je verovatnoća rađanja muškog deteta 0,5 odrediti verovatnoću:

1. da porodica ima 5 dečaka i 5 devojčica,
2. da je broj dečaka u porodici između 5 i 8.

Rešenje:

1. Imamo da je $p = q = 0,5,$ a $n = 10.$ Tada važi da je: $p_{10}(5) = \binom{10}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^5 = 0,246.$
2. Imamo da je $p = q = 0,5,$ a $n = 10.$ Takođe je

$a = \frac{5 - 10 \cdot 0,5}{\sqrt{10 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0$ i $b = \frac{8 - 10 \cdot 0,5}{\sqrt{10 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1,90.$

Imamo sada da je:

$$P\{5 \leq S_{10} \leq 8\} = P\{0 \leq S_{10}^* \leq 1,90\} = \Phi(1,90) - \Phi(0) = 0,47042.$$

4. ZADATAK (8 MINUTA)

Aproksimacija binomne raspodele normalnom raspodelom. Standardizacija slučajne promenljive.

Verovatnoća da neki proizvod ne prođe kontrolu je 0,2. Odrediti verovatnoću da kod 400 slučajno izabranih proizvoda broj onih koji nisu prošli kontrolu bude između 70 i 100.

Rešenje. Imamo da je $\mathrm{p} = 0,2 \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{q} = 0,8,$ a $\mathrm{n} = 400$. Takođe je

$$a = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25 \qquad \mathrm{i} \qquad b = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Imamo sada da je:

$$P\left\{70 \leq S_{400} \leq 100\right\} = P\left\{-1,25 \leq S^*_{400} \leq 2,5\right\} = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,49379 + 0,39435 = 0$$

5. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje tražene verovatnoće primenom Muavr - Laplasove teroeme.

U proizvodnji metalih šipki je prosečno 10% neispravnih. Sa kojom verovatnoćom se može smatrati da će u seriji od 400 slučajno izabranih šipki biti ispravno više od 299?

Rešenje.

Imamo da je $\mathrm{p} = 0,9 \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{q} = 0,1,$ a $\mathrm{n} = 400$. Takođe je

$$a = \frac{300 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -10 \qquad \mathrm{i} \qquad b = \frac{400 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = 6,67.$$

Imamo sada da je:

$$P\left\{300 \leq S_{400} \leq 400\right\} = P\left\{-10 \leq S^*_{400} \leq 6,67\right\} = \Phi(6,67) - \Phi(-10) = \Phi(6,67) + \Phi(10) \approx 1.$$

Napomena: $\mathrm{p} = 0.9$ jer se u zadatku dat procenat neispravnih šipki. Za svako a ili b koje je veće od 5 može se uzeti približna vrednost za Φ da je 0,5.

6. ZADATAK (6 MINUTA)

Primena Muavr-Laplasove teoreme za određivanje verovatnoće pojave događaja određeni broj puta (između 75 i 90).

Neka je verovatnoća pojave događaja A u svakom od 100 nezavisnih opita 0.8. Naći verovatnoću pojave događaja A od 75 do 90 puta.

Rešenje.

Imamo da je $\mathrm{p} = 0,8 \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{q} = 0,2,$ a $\mathrm{n} = 100$. Takođe je

$$a = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25 \qquad \mathrm{i} \qquad b = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Imamo sada da je:

$P\left\{75 \le S_{100} \le 90\right\} = P\left\{-1,25 \le S^*_{400} \le 2,5\right\} = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,8884.$

7. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje minimalnog broja eksperimenata koje treba izvršiti, tako da se sa određenom verovatnoćom može pojaviti neki događaj, primenom centralne granične teoreme.

Naći broj potrebnih ponavljanja eksperimenta da bi se sa verovatnoćom ne manjom od 0,95 moglo tvrditi da je razlika između frekvencija i verovatnoće $p = 0,5$ najviše 0,01.

Rešenje. Imamo da je $p = q = 0,5$ i da je $P(n) \ge 0,95.$ Potrebno je da odredimo n. Imamo da je

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0,01\right) \ge 0,95.$$

Tada je

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| < 0,01\right) = 2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \ge 0,95.$$

Odavde je

$$\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \ge 0,475, \quad \text{odnosno} \quad 0,02\sqrt{n} \ge 1,96.$$

Konačno dobijamo da je $\sqrt{n} \ge 98$, tj. $n \ge 9604.$

8. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje vrednosti odstupanja primenom centralne granične teoreme.

Posejano je 600 zrna kukuruza. Verovatnoća klijanja je 0,9. Naći granicu apsolutnog odstupanja frekvencije proklijalog semena od verovatnoće $p = 0,9$, ako ta granica treba da bude garantovana sa verovatnoćom od 0,995.

Rešenje. Imamo da je $n = 600,\ p = 0,1,\ q = 0,1$ i $P(n) = 0,995,$ a potrebno je odrediti ϵ. Tada je

$$P\left(\left|\frac{m}{600} - 0,9\right|\right) = 0,995.$$

S druge strane, imamo da je

$$P\left(\left|\frac{m}{600}-0,9\right|\right)=2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{600}{0,9\cdot 0,1}}\right).$$

Imamo da je

$$2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{600}{0,9\cdot 0,1}}\right)=0,995,$$

tj.

$$\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{600}{0,9\cdot 0,1}}\right)=0,4975.$$

Sada je $81,65\epsilon=2,81,$ pa je $\epsilon=0,0034.$

9. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje tražene verovatnoće primenom centralne granične teoreme.

Odrediti verovatnoću da pri bacanju novčića 100 puta relativna frekvencija pojave grba odstupa od verovatnoće 0,5 više od 0,1.

Rešenje. Po uslovima zadatka imamo da je $\epsilon=0,1,\ n=100$ i $p=q=0,5.$ Odredićemo $P\left(\left|\frac{m}{100}-0,5\right|\leq 0,1\right)$ .Imamo da je

$$P\left(\left|\frac{m}{100}-0,5\right|\leq 0,1\right)=2\Phi\left(0,1\sqrt{\frac{100}{0,5\cdot 0,5}}\right)=2\Phi(2).$$

Kako je $2\Phi(2)=2\cdot 0,47725=0,9545.$ Tada je

$$P\left(\left|\frac{m}{100}-0,5\right|>0,1\right)=1-P\left(\left|\frac{m}{100}-0,5\right|\leq 0,1\right)=0,0455.$$

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD

Zadaci za samostalan rad studenta.

Zadatak. Neka X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(25,0,6).$ Izračunati verovatnoće $P(X\leq 15),\ P(20\leq X)$ i $P(10\leq X\leq 22)$ koristeći aproksimaciju binomne raspodele normalnom raspodelom.
Rezultat. $P(X\leq 15)=0,5,\ P(20\leq X)=0,0207$ i $P(10\leq X\leq 22)=0,9792.$

Zadatak. Broj sunčanih dana u toku godine u jednom gradu je slučajna promenljiva sa metematičkim očekivanjem jednakim 75 dana. Oceniti verovatnoću da u toku jedne godine u tom gradu bude manje od 200 sunčanih dana.

Rezultat. $\frac{5}{6}$.

Zadatak. Prosečno 80% vozača koristi sigurnosni pojas. Saobraćajna policija je u toku dana zaustavila 500 vozača.

(a) Kolika je verovatnoća da više od 100 vozača ne koristi pojas? **Rezultat.** Približno $0,5$.

(b) Kolika je verovatnoća da bar 300 vozača koristi pojas? **Rezultat.** Približno 1.

(c) Kolika je verovatnoća da je broj vozača koji ne koriste pojas između 100 i 150? **Rezultat.** Približno $0,5$.

Zadatak. U n nezavisnih opita posmatra se događaj A sa verovatnoćom realizacije u jednom opitu $0,8$. Koliko opita treba izvršiti tako da sa verovatnoćom od $0,95$ odstupanje relativne učestalosti $\frac{S_n}{n}$ od verovatnoće realizacije događaja A nije veće od $0,04$?
Rezultat. $n = 385$.

Vreme izrade: 1. 10 minuta; 2. 10 minuta; 3. 15 minuta; 4. 10 minuta.

U nastavku kao dodatak pogledajte sledeće video klipove sa Youtube-a.

VIDEO KLIPOVI 1

Snimci sa Youtube-a: Centralna granična teorema - problemi

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIPOVI 2

Youtube snimci.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Zaključak

GRANIČNE TEOREME U TEORIJI VEROVATNOĆE

Centralna granična teorema, Zakon velikih brojeva.

Čebiševljeva i Makovljeva nejednakost, zakoni velikih brojeva i cenralna granična teorema su važni alati kojima se otkrivaju svojstva diskretnih ili neprekidnih slučajnih promenljivih koje imaju konačno matematičko očekivanje i varijansu, ako nije poznata njihova raspodela.

Čebiševljeva nejednakost daje ocenu verovatnoće da se vrednosti slučajne promenljive razlikuje od matematičkog očekivanja više odneke unapred zadate vrednosti ε.

Zakoni velikih brojeva predstavljaju skup teorema koje se odnose nagranične vrednosti niza slučajnih promenljivih. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisna merenja slučajne promenljive X u ponovljenim eksperimentima. Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su nezavisne i sve imaju istu raspodelu kao i slučajna promenljiva X. Može se uočiti da njihova aritmetička sredina

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

ima osobinu da ukazuje na tendenciju raspodele i da je verovatnoća da se vrednost $\overline{X}$ razlikuje od matematičkog očekivanja slučajne promenljive X, više od unapred zadate vrednosti ε, jednaka nuli kada $n \to \infty$.

Centralne granične teoreme se odnose na granične zakone raspodela niza slučajnih promenljivih. Suma velikog broja slučajnih promenljivih ima standardizovanu normalnu raspodelu. Teoremama ovakvog tipa zadaju se određeni uslovi koji treba da važe za članove zbira u takvoj sumi.

LITERATURA:

M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.
Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.