UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

RELACIJE

Lekcija 04

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 04

RELACIJE

Uvod

UVOD

Fokus ove lekcije je na osobinama i tipovima relacija

U ovoj lekciji biće obrađene sledeće teme:

- Proizvod skupova
- Uvod u relacije
- Grafička reprezentacija relacija
- Kompozicija relacija
- Tipovi relacija
- Osobine zatvorenja
- Relacije ekvivalencija

Relacije između ljudi, brojeva, skupova i mnogih drugih entiteta mogu biti formalizovani u ideji binarne relacije. Važnost relacija je takođe i u činjenici da one predstavljaju generalizaciju koncepta funkcija, koje ćemo izučavati.

Postoje tri vrste relacija koje igraju vodeću ulogu u našoj teoriji:

- relacije ekvivalencije (engl. equivalence relations)
- relacije poretka (engl. order relations)
- funkcije

Na ovom predavanju uglavnom razmatramo relacije ekvivalencije i relacije poretka.

Poglavlje 1

PROIZVOD SKUPOVA

DEKARTOV PROIZVOD

Skup svih uređenih parova (a, b) gde a ∈ A i b ∈ B se zove Dekartov proizvod skupova A i B

Dekartov proizvod skupova je fundamentalan za relacije.

Neka su A i B proizvoljni skupovi.

Definicija
Skup svih uređenih parova (a, b) gde a ∈ A i b ∈ B se zove Dekartov proizvod (engl. Cartesian product), ili samo proizvod skupova A i B
A x B
("A krst B")

Po definiciji imamo

$A \times B = (a, b) : a \in A i b \in B.$

Međutim, imamo slučaj i kada je potrebno da prikažemo proizvod nekog skupa sa samim sobom pa tada možemo da napišemo A^2 umesto A x A

$A \times A = A^2$
Primer

Neka je A = {1, 2} i B = {a, b, c}. Potrebno je pronaći sledeće proizvode skupova: $A \times B, B \times A$ i $A \times A$.
Rešenje:
$A \times B = (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)$
$B \times A = (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)$
$A \times A = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$

Iz Primera se vidi da $A \times B \neq B \times A$. U Dekartovom proizvodu se javljaju uređeni parovi, pa je prirodno da je bitan i redosled zadavanja skupova.
Ako sa n(A) i n(B) označimo brojeve elemenata konačnih skupova A i B, onda imamo
$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
Pošto za uređen par $(a, b) \in A \times B$ postoji n(A) mogućnosti za a, a za svaki od njih postoji n(B) mogućnosti za b. Tako, u prethodnom primeru (Primer 4.1) imamo
$n(A \times B) = 2 \cdot 3 = 6$.
Ideja proizvoda skupova može biti proširena na konačan broj skupova.

PROIZVOD N SKUPOVA

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Definicija
Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ proizvoljni skupovi.
Skup svih uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots a_n)$
gde $a_k \in A_k$ za k = 1, 2,...,n
zove se proizvod skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Kada je svih n faktora A_k jednako skupu A tada pišemo

$$A^n = \prod_{k=1}^{n} A$$

Poglavlje 2

BINARNE RELACIJE

UVOD U RELACIJE

Za zapisivanje da su dva elementa u relaciji koristi se uređeni par

Za skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$, postoji mnogo poznatih relacija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Jedan primer je “manje od”, što se uobičajeno označava sa “<“, tako da x je u relaciji sa y ako x < y.

Spomenimo i druge relacije uređenja kao što su >, ≥, ≤ i =.

Jedina stvar koja je bitna kod relacija je da tačno znamo koji elementi skupa A su u relaciji sa kojim elementima skupa B.
Primer
Neka je dat skup A sa elementima A = {1, 2, 3, 4}, a relacija R koja je definisana nad skupom A je definisana “iz A u A”.
Ako znamo da je

1R2, 1R3, 1R4, 2R3, 2R4, i 3R4,

tada znamo sve što nam je potrebno o relaciji R. Dovoljno je da imamo listu parova elemenata koji su u relaciji.
Možemo reći da je relacija R potpuno određena ako su poznati svi parovi elemenata koji su u relaciji R. Možemo napisati

R = {(1, 2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}

Svaki uređeni par specificira da je njegov prvi element u relaciji sa njegovim drugim elementom, i treba da budu dati svi parovi koji su u relaciji. Ovaj metod specificiranja relacija ne zahteva nikakav specijalan simbol ili opis, pa je zbog toga pogodan za bilo koju relaciju između dva skupa.

Sa ove tačke gledišta, relacija iz A u B je jednostavno podskup A $\times$ B (zadaju se parovi koji su u relaciji). I obrnuto, svaki podskup A $\times$ B se može smatrati relacijom.

PRIMER

Odrediti Dekartov proizvod AxB

Primer

Neka su dati skupovi A i B sa sledećim elementima
A={a,b,c}
B={1,2,3}

Tada možemo odrediti Dekartov proizvod AxB kao sledeći skup uređenih parova

$$A \times B = (a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)$$

Dekartov proizvod je skup uređenih parova a (jedna od) relacija je

R={(a,1),(a,2),(b,2),(c,2)}

OSNOVNI POJMOVI

Binarna relacija, domen relacije, rang relacije, „biti u relaciji"

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Razmotrimo neke osnovne pojmove.

Binarna relacija *R*, ili prosto relacija iz A u B je podskup A $\times$ B. Ako je *R* relacija iz skupa A u samog sebe, to jest ako je *R* podskup $A^2 = A \times A$, onda kažemo da je *R* relacija nad skupom A. **Domen** D_R **relacije** *R* je skup svih prvih elemenata uređenih parova koji pripadaju relaciji *R*, to jest

$D_R = a, b \in A : (a,b) \in R$

Rang relacije je skup svih drugih elemenata uređenih parova koji pripadaju relaciji *R*.

Za dva elementa kažemo da ili jesu ili nisu u relaciji. Neka je relacija R definisana kao relacija iz A u B. Tada je R skup svih uređenih parova kod kojih svaki prvi element dolazi iz A, a svaki drugi element dolazi iz B. To jest, za svaki par (a, b) ∈ A x B, važi tačno jedno od sledećih tvrđenja
$(a,b) \in \mathbb{R}$; a je u relaciji R sa b
$(a,b) \notin \mathbb{R}$; a nije u relaciji R sa b
Primer
Neka su
A = {1, 2, 3},B = {x, y, z }, R = {(1, y), (1, z), (3, y)}
Tada je R relacija iz A u B, i važi
1Ry, 1Rz , 3Ry
ali
(1,x),(2,x),(2,y),(2,z),(3,x),(3,z) $\notin$ R
Primer
Dve države su susedne ako imaju zajedničku granicu. Tada je "biti susedna" relacija R nad skupom svih država na svetu. Tako
(Italija, Švajcarska) $\in$ R,
ali
(Kanada,Meksiko) $\notin$ R

IDENTITET (DIJAGONALNA RELACIJA)

$\Delta_A = E = (a, a') \in A \times A : a = a'$

Neka je A proizvoljan skup. Jedna važna relacija nad skupom A je jednakost

$\Delta_A = E = (a, a') \in A \times A : a = a'$

Ova relacija se zove i identitet ili dijagonalna relacija i označava se sa Δ_A ili jednostavno Δ .

Takođe možemo reći da $A \times A$ i $\varnothing$ su podskupovi $A \times A$, pa prema tome, te relacije nad A se zovu univerzalna relacija i prazna relacija.

INVERZNE RELACIJE

$S = (b, a) \in B \times A : (a, b) \in R$

Definicija
Neka su A i B proizvoljni skupovi i neka je R relacija iz A u B. Inverz S relacije R je relacija iz B u A koja se sastoji iz onih uređenih parova koji, zapisani u obrnutom redosledu, pripadaju relaciji R, to jest
$S = (b, a) \in B \times A : (a, b) \in R$

Neka su dati skupovi A i B i relacija R iz A u B. Inverzna relacija relacije R je jedinstvena, i označava se sa R^{-1}. Domen i rang relacije R^{-1}, su respektivno jednaki rangu i domenu relacije R. Takođe, ako je R relacija nad skupom A, onda je i R^{-1} relacija nad A.

Primer

Ako imamo relaciju

R = {(1, y), (1, z), (3, y)}

Inverzna relacija relacije R je

R^{-1} = {(y, 1), (z , 1), (y, 3)}

2.1 PREDSTAVLJANJE RELACIJA

REPREZENTACIJA RELACIJA NAD KONAČNIM SKUPOVIMA

Dva načina predstavljanja relacije je matricom relacije i dijagramom strelica

Kada su A i B konačni skupovi, postoje dva standardna načina predstavljanja relacije R iz A u B:

- Matrica relacije - Formiramo matricu čije vrste označavamo elementima skupa A a kolone elementima skupa B. Ako je aRb na odgovarajućem mesto stavljamo 1, inače stavljamo 0.
- Dijagram strelica - Nacrtajmo elemente skupova A I B u dva odvojena diska I nacrtajmo strelice od a ∈ A do b ∈ B kad god je aRb.

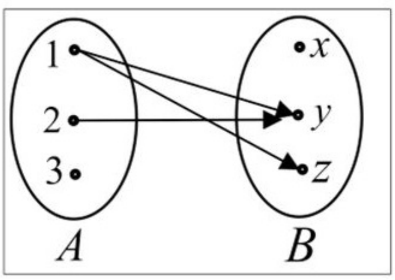
Primer
Posmatrajmo relaciju
R= {(1, y), (1,z), (2, y)}
Koja je definisana nad skupovima A i B, kao iz A u B.
A = {1, 2, 3}
B= {x, y, z}

Relaciju R možemo prikazati matricom i dijagramom kao što je prikazano na slici

(i) matrica

	x	y	z
1	0	1	1
2	0	1	0
3	0	0	0

(ii) dijagram strelica



Slika 2.1.1 Rešenje primera sa grafičkim prikazom relacije R [Izvor: Autor]

USMERENI GRAFOVI RELACIJA NAD SKUPOVIMA

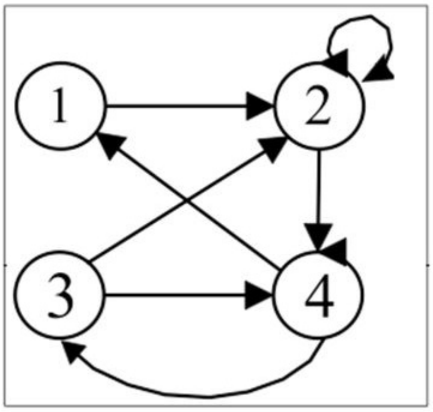
Kad god su dva elementa u relaciji tada ih povezujemo sa strelicom, nacrtamo strelice iz svakog elementa x do svakog elementa y kad god je x u relaciji sa y

Postoji još jedan način predstavljanja relacije R iz konačnog skupa u sebe samog. Prvo nacrtamo elemente skupa, a zatim nacrtamo strelice iz svakog ovog elementa X do svakog elementa Y kad god je X u relaciji sa Y. Ovakav dijagram se zove usmereni graf relacije.

Primer
Neka je relacija R definisana nas skupom A tako da A sadrži sledeće elemente
A = {1, 2, 3, 4}
Relacija R je definisana sa
R = {(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)}

Prikazati relaciju R sa usmerenim grafom.

Rešenje je dato na slici.



Slika 2.1.2 Digraf relacije R zadatoj u primeru [Izvor: Autor]

2.2 KOMPOZICIJA RELACIJA

DEFINICIJA KOMPOZICIJA RELACIJA

Relacija T se zove kompozicija relacija R i S i označava sa T = S ◦ R

Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Neka je R relacija iz A u B i S relacija iz B u C . Tada možemo definisati relaciju T iz A u C na sledeći način

aTc ako aRb i bSc za neko b ∈ B.

Relacija T se zove kompozicija relacija R i S i označava sa

T = S ◦ **R**, ili jednostavno

T = SR.

Tako imamo

T = S ◦ R={(a, c) ∈ A × C : postoji b ∈ B za koje važi (a, b) ∈ R i (b, c) ∈ S }.

Ako je R relacija nad skupom A, onda je R ◦ R uvek definisano, a nekad se označava sa R^2. Na sličan način, možemo definisati

$R^n = R \circ R^{n-1}$

za sve n ∈ N pri čemu je n ≥ 2.

Ovde treba napomenuti da u nekim knjigama se kompozicija relacija R i S označava sa R ◦ S umesto sa S ◦ R.

Dijagrami strelica nam daju geometrijsku reprezentaciju kompozicije relacija.

PRIMER

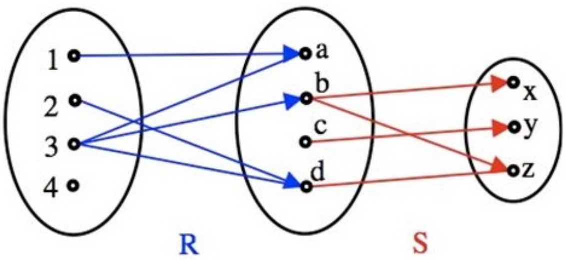
Pomoću dijagrama strelica nacrtati relacije R i S

Primer
Neka su dati skupovi A, B i C
A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}, C = {x, y, z }

Kao i relacije R i S
R = {(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)} S = {(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)}

Pomoću dijagrama strelica nacrtati relacije R i S. Rešenje je dato na sici.
Postoji strelica od 2 do d i strelica od d do z, pošto 2Rd i dSz, pa je 2(S ◦ R)z ∈ S ◦ R. Tako, ove strelice možemo posmatrati kao put koji povezuje element 2 ∈ A sa elementom z ∈ D. Slično, postoji put od 3 do x, pošto 3Rb i bSx, pa je 3(S ◦ R)x, i put od 3 do z, pošto 3Rb i bSz, pa je 3(S ◦ R)z. Nema drugih elemenata skupa A koji su povezani sa nekim elementom skupa D. Prema tome, dobijamo

S ◦ R = {(2, z), (3, x), (3, z)}.



Slika 2.2.1 Graf relacija R i S iz primera [Izvor: Autor]

PRIMER KOMPOZICIJE

Odrediti kompoziciju relacije R i S

Odrediti kompoziciju relacije R i S, gde je relacija R definisana iz {1,2,3} u {1,2,3,4} sa R ={ (1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)},a S je relacija iz {1, 2, 3, 4} u{0, 1, 2} sa S ={ (1, 0) ,(2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}?

Rešenje:

$S \circ R$ čine svi uređeni parovi iz R i uređeni parovi iz S, a kojima je drugi element ustvari prvi element uređenih parova u S. Na primer, uređeni parovi (2,3) iz R i (3,1) iz S daju uređeni par (2,1) za $S \circ R$.

Određujući na ovaj način sve uređene parove, dobijamo da kompozicija sadrži

$S \circ R = \{ (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$.

Poglavlje 3

OSOBINE RELACIJA

VAŽNI TIPOVI RELACIJA

Refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne

Važni tipovi relacija definisani nad datim skupom A:

- refleksivne relacije
- simetrične relacije
- antisimetrične relacije
- tranzitivne relacije

3.1 REFLEKSIVNE RELACIJE

DEFINICIJA REFLEKSIVNIH RELACIJA

Relacija R nad skupom A je refleksivna ako aRa za svako a ∈ A

Definicija
Relacija R nad skupom A je refleksivna ako aRa za svako a ∈ A, to jest, ako (a,a)∈R za svako a ∈ A.

Prema tome, relacija R nad skupom A nije refleksivna ako postoji neki element a ∈ A takav da (a, a) ∉ R

Primer

Odrediti koje su od sledećih relacija nad skupom A = {1, 2, 3, 4} refleksivne:

R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (4, 4)},

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

R_3 = {(1, 3), (2, 1)}

R_4 = ∅ , prazna relacija

R_5 = A x A, univerzalna relacija

Rešenje:

Kako A sadrži četiri elementa 1, 2, 3 i 4, relacija R nad A je refleksivna ako i samo ako sadrži četiri para (1, 1), (2, 2), (3, 3) i (4, 4). Tako su samo R2 i univerzalna relacija R_5 refleksivne.

Takođe primetimo da R_1, R_3 i R_4 nisu refleksivne, pošto postoji par, na primer (2, 2), koji ne pripada ni jednom od njih.

Primer

Odrediti koje su od sledećih relacija refleksivne

$\leq$ nad skupom Z

$\subset$ nad nekom kolekcijom skupova

Rešenje:

Pošto je $x \leq x$ za sve $x \in Z$, i pošto je $A \subset A$ za sve $A \in C$, obe relacije su refleksivne

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER

Odrediti koje su od sledećih relacija refleksivne

Odrediti koje su od sledećih relacija refleksivne nad skupom A = {1, 2, 3, 4}

R_1 = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)},

R_2 ={ (1, 1), (1, 2), (2, 1)},

R_3 ={ (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)},

R_4 ={ (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)},

R_5 ={ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)},

R_6 ={ (3, 4)}.

Rešenje:

Relacije R_3 i R_5 su refleksivne pošto sadrže sve parove oblika (a,a), odnosno (1, 1), (2, 2), (3, 3), i (4, 4). Druge relacije nisu refleksivne, pošto ne sadrže sve parove oblika (a, a). Odnosno R_1, R_2, R_4 i R_6 nisu refleksivne pošto ne sadrže (3,3).

PRIMER - REFLEKSIVNE RELACIJE

Koje od navedenih relacija su refleksivne?

Razmotrimo sledeće relacije, gde je $(a, b) \in \mathbb{R}$

R_1 = {(a, b) : a $\leq$ b },
R_2 = {(a, b) : a $>$ b },
R_3 = {(a, b) : a = b ili a = - b },
R_4 = {(a, b) : a = b },
R_5 = {(a, b) : a = b + 1 },
R_6 = {(a, b) : a + b $\leq$ 3 },

Koje od navedenih relacija su refleksivne?

Rešenje:

Refleksivne relacije su R_1, R_3, R_4.

3.2 SIMETRIČNE RELACIJE

DEFINICIJA SIMETRIČNIH RELACIJA

Kadgod je (a, b) ∈R onda (b, a) ∈ R.

Definicija

Relacija R nad skupom A je simetrična ako, kad god je aRb onda bRa, to jest, kad god je

(a, b) ∈ R onda (b, a) ∈ R.

Prema tome, R nije simetrična ako postoje a,b ∈ A takvi da
(a, b) ∈ R ali (b, a) ∉ R.

Primer

Odrediti koje su od sledećih relacija simetrične:

R_1 = (1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (4, 4),
R_2 = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)
R_3 = (1, 3), (2, 1)
R_4 = ∅ , prazna relacija
R_5 = A x A univerzalna relacija

Rešenje:

Relacija R_1 i R_3 nisu simetrične, zato sto (2, 3) ∈ R_1 ali (3, 2) ∉ R_1 , a (1, 3) ∈ R_3, ali (3, 1) ∉ R_3 . Ostale relacije su simetrične

Primer

Odrediti koje su od sledežih relacija simetrične:

1. ≤ nad skupom Z
2. ⊂ nad nekom kolekcijom skupova C

Rešenje:

Obe relacije nisu simetrične. Na primer, 3 ≤ 4 ali 4 ≥ 3.

PRIMER

Odrediti koje su od sledećih relacija simetrične

Odrediti koje su od sledećih relacija simetrične nad skupom A = {1, 2, 3, 4}
R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)},
R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)},
R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4,4)},
R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)},
R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4,4)},
R_6 = {(3, 4)}.

Rešenje:

Relacije R_2 i R_3 su simetrične zato što u oba slučaja (b, a) pripadaju relaciji kad god i (a, b). Za R_2 jedino treba proveriti da li su uređeni parovi (2, 1) i (1, 2) elementi ove relacije za R_3 treba proveriti sledeće parove (1, 2) i (2, 1), (1, 4), (4, 1), a koji su elementi ove relacije.

Relacije R_1, R_4, R_5 i R_6 nisu simetrične. R_1 sadrži (3, 4), ali ne sadrži (4, 3). R_4 sadrži (2, 1), ali ne sadrži (1, 2). R_5 sadrži (1, 2), ali ne sadrži (2, 1). R_6 sadrži (3, 4), ali ne sadrži (4, 3).

Napomena: dovoljno je naći jedan par, ne moraju se ispitivati svi parovi.

PRIMER - SIMETRIČNIH RELACIJA

Koje od navedenih relacija su simetrične?

Razmotrimo sledeće relacije:
$R_1 = \{(a, b) : a \leq b\}$,
$R_2 = \{(a, b) : a > b\}$,
$R_3 = \{(a, b) : a = b$ ili $a = -b\}$,
$R_4 = \{(a, b) : a = b\}$,
$R_5 = \{(a, b) : a = b + 1\}$,
$R_6 = \{(a, b) : a + b \leq 3\}$,

Koje od navedenih relacija su simetrične?

Rešenje:

Relacije R_3 i R_4 i R_6 su simetrične.
R_3 je simetrična, kada je $a = b$ ili $a = -b$ onda je $b = a$ ili $b = -a$.
R_4 je simetrična, kada je $a = b$ implicira da je $b = a$
R_6 je simetrična zato što $a + b \leq 3$ implicira da $b + a \leq 3$

Student treba da proveri da li su i ostale relacije simetrične.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

3.3 ANTISIMETRIČNE RELACIJE

DEFINICIJA ANTISIMETRIČNIH RELACIJA

Kad god je (a, b), (b, a) ∈ R onda a = b

Definicija
Relacija R nad skupom A je antisimetrična kad god je:
aRb i bRa onda a = b,

to jest, kad god je,

(a, b), (b, a) ∈ R onda a = b.

Prema tome, R nije antisimetrična ako postoji a,b ∈ A takva da
(a, b), (b, a) ∈ R ali a $\neq$ b

Primer
Odrediti koje su od sledećih relacija antisimetrične:
R_1 = (1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (4, 4),
R_2 = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)
R_3 = (1, 3), (2, 1)
R_4 = $\emptyset$ prazna relacija
R_5 = A x A, univerzalna relacija

Rešenje: Relacije R_1, R_2 i R_5 nisu antisimetrične, pošto (1, 2), (2, 1) ∈ R_1, R_2, R_5, ali 1 $\neq$ 2. Ostale relacije su antisimetrične.

Primer

Odrediti koje su od sledećih relacija antisimetrične:

1. $\leq$ nad skupom
2. $\subset$ nad nekom kolekcijom skupova C

Rešenje:

Obe relacije su antisimetrične, pošto iz x $\leq$ y I y $\leq$ x sledi x = y za sve x, y ∈ $\mathbb{Z}$ i pošto iz A $\subset$ B I B $\subset$ A sledi A = B za sve A, B ∈ C.
Osobine relacija "biti simetrična"i "biti antisimetrična" nisu inverzne jedna drugoj.
Na primer, relacija R = {(1, 2), (3, 1), (2, 3)} nije ni simetrična ni antisimetrična. Sa druge stranje R_0 = {(1, 1), (2, 2)} je I simetrična I antisimetrična.

PRIMER - ANTISIMETRIČNE RELACIJE

Koje od navedenih relacija su antisimetrične?

Razmotrimo sledeće relacije:
$R_1 = \{(a, b) : a \leq b\}$,
$R_2 = \{(a, b) : a > b\}$,
$R_3 = \{(a, b) : a = b$ ili $a = -b\}$,
$R_4 = \{(a, b) : a = b\}$,
$R_5 = \{(a, b) : a = b + 1\}$,
$R_6 = \{(a, b) : a + b \leq 3\}$

Koje od navedenih relacija su antisimetrične?
Relacije R_1, R_2, R_4 i R_5 su antisimetrične.
R_1 je antisimetrična zbog nejednakosti $a \leq b$ i $b \leq a$ implicira da je a b.
R_2 je antisimetrična zbog toga što je nemoguće istovremeno $a > b$ i $b > a$.
R_4 je antisimetrična zbog toga što su dva elementa u relaciji R4 samo ako su jednaka.
R_5 je antisimetrična zbog toga što je nemoguće da $a = b + 1$ i $b = a + 1$.

Student treba da proveri da li su i ostale relacije antisimetrične.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

3.4 TRANZITIVNE RELACIJE

DEFINICIJA TRANZITIVNIH RELACIJA

Relacija R nad skupom A je tranzitivna, ako je aRb i bRc onda aRc

```
Definicija
Relacija R nad skupom A je tranzitivna, ako je
               aRb i bRc onda aRc.
Odnosno, ako su
        (a, b), (b, c) ∈R onda (a, c) ∈ R.
```

Prema tome, R nije tranzistivna ako postoje a, b, c $\in$ A takvi da

$(a, b), (b, c) \in$ R, ali (a, c) $\notin$ R.

Osobina tranzistivnosti relacije se takođe može izraziti u terminima kompozicije relacije R nad skupom A. Relacija R nad skupom A je tranzistivna ako I samo ako $R^n \subset R$ za $n \geq 1$

Primer

Odrediti koje su od sledećih relacija tranzistivne:

- $\leq$ nad skupom Z
- $\subset$ nad nekom kolekcijom skupova C

Rešenje:
Obe relacije su tranzistivne pošto iz $x \leq y$ i $y \leq z$ sledi $x \leq z$ za sve $x, y, z \in Z$, i pošto iz $A \subset B$ i $B \subset C$ sledi $A \subset C$ za sve $A, B, C \in C$.

Primer

Odrediti koje su od sledećih relacija tranzitivne:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 2), (4, 4)\}$,

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \emptyset$, prazna relacija

$R_5 = A \times A$, univerzalna relacija

Rešenje:
Relacija R_3 nije tranzitivna, pošto (2, 1), (1, 3) R_3 ali $(2, 3) \notin R_3$. Relacija R_1 nije tranzitivna, pošto nedostaje (1,3). Ostale relacije su tranzitivne.

PRIMER

Odrediti koje su od sledećih relacija tranzitivne

Odrediti koje su od sledećih relacija tranzitivne nad skupom $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$,

$R_2 =\{ (1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$,

$R_3 =\{ (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$,

$R_4 =\{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$,

$R_5 =\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,

$R_6 =\{ (3, 4)\}$.

Rešenje:

Relacije R_4, R_5 i R_6 su tranzitivne. Za svaku od ovih relacije možemo pokazati da ako su (a,b) i (b,c) elementi relacije, tada je (a,c) element te relacije. Na primer , R_4 je tranzitivna zato što su (3,2) i (2,1), (4,2) i (2,1), (4,3) i (3,1), (4,3) i (3,2) predstavljaju takve uređene parove, a i (3,1), (4,1) i (4,2) pripadaju R_4.
R_1 nije tranzitivna relacija zato što (3,4) i (4,1) pripadaju R_1, ali (3,1) ne pripada. R2 nije tranzitivna zato što su (2,1) i (1,2) elementi R_2, ali (2,2) nije. R_3 nije tranzitivna zato što su (4,1) i (1,2) elementi R_3, ali (4,2) nije.

PRIMER - TRANZITIVNE RELACIJE

Koje od navedenih relacija su tranzitivne?

Razmotrimo sledeće relacije

R_1 = {(a, b) : a $\leq$ b },
R_2 = {(a, b) : a $>$ b },
R_3 = {(a, b) : a = b ili a = - b },
R_4 = {(a, b) : a = b },
R_5 = {(a, b) : a = b + 1 },
R_6 = {(a, b) : a + b $\leq$ 3 },

Koje od navedenih relacija su tranzitivne?

Relacije R_1 , R_2 , R_3 i R_4 su tranzitivne.
R_1 je tranzitivno zato što nejednakosti $a \leq b$ i $b \leq c$ implicira da je $a \leq c$.
R_2 je tranzitivno zato što nejednakosti a $>$ b i b $>$ c implicira da je $a > c$
R_3 je tranzitivno zato što $a = \pm b$ i $b = \pm c$ implicira da je $a = \pm c$.

Student treba da proveri da li su i ostale relacije tranzitivne.

Poglavlje 4

OSOBINE ZATVORENJA

ZATVORENJE RELACIJE

P zatvorenje proizvoljne relacije R ∈ R, u oznaci P(R), je P-relacija takva da R ⊂ P(R) ⊂ S

Ako je R relacija nad skupom A koja nije refleksivna, ili nije simetrična, ili nije tranzitivna, onda je interesantno naći najmanju relaciju S nad A koja sadrži R i pri tom je refleksivna, ili simetrična ili tranzitivna.

Neka je A dati skup. Označimo sa *R* kolekciju svih relacija nad A. Označimo sa *P* neku osobinu tih relacija, kao što je biti simetrična ili biti tranzitivna. Relaciju koja ima osobinu *P* zvaćemo *P-relacija.*

P zatvorene proizvoljne relacije **R** $\in$ *R*, u oznaci *P*(**R**), je *P*-relacija takva da

R ⊂ P(R) ⊂ S

za sve P-relacije S sa osobinom

R ⊂ S

U opštem slučaju, *P*(R) ne mora da postoji. Ali postoji situacija kada *P*(R) uvek postoji.

Neka je *P* osobina da postoji bar jedna *P*-relacija koja sadrži R i da je presek bilo kojih *P*-relacija takođe *P*-relacija. Onda imamo

$P(R) = \bigcap\{S : S \supset R$je P - relacija $\}$

4.1 REFLEKSIVNO I SIMETRIČNO ZATVORENJE

REFLEKSIVNO I SIMETRIČNO ZATVORENJE RELACIJE

$R \cup \Delta_A$ je refleksivno zatvorenje relacije R

Sledeća teorema nas uči kako da lako dobijemo refleksivno i simetrično zatvorenje relacije. Neka je R relacija nad skupom A. Označimo sa:

$$\Delta_A = (a, a) : a \in A$$

Dijagonalnu relaciju nad A. Tada:

1. $R \cup \Delta_A$ je refleksivno zatvorenje relacije R
2. $R \cup R^{-1}$ je simetrično zatvorenje relacije R

Drugim rečima, refleksivnost se dobija jednostavnim dodavanjem u relaciju R onih elemenata (a, a) sa dijagonale koji ne pripadaju relaciji R, a simetričnost se dobija dodavanjem u relaciju R svih parova (b, a) kad god je (a, b) ∈ R

Primer
Neka je relacija R nad skupom A = {1, 2, 3, 4} definisana sa
R = {(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3)}
Tada imamo sledeća zatvorenja:
$R \cup \Delta_A - R \cup (2,2),(4,4)$
$R \cup R^{-1} - R \cup (4,2),(3,4)$

4.2 TRANZITIVNO ZATVORENJE

TRANZITIVNO ZATVORENJE RELACIJE

$R^* = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$

Neka je R relacija nad skupom A. Tranzitivno zatvorenje relacije R je jednako relaciji povezanosti R*. Tako, ako sa R* označimo tranzitivno zatvorenje relacije R i kažemo da je A konačan skup tako da n(A)=n, tada

$$R^* = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$$

Treba napomenuti da nalaženje tranzitivnog zatvorenja može oduzeti mnogo vremena kada A ima veliki broj elemenata.

Primer

Neka je relacija R nad skupom A= {1, 2, 3} definisana sa:

R = {(1, 2), (2, 3), (3, 3)}

Tada imamo:
R^2 = {(1, 3), (2, 3), (3, 3)}
$R^3 = R^2 \cdot R$ = {(1, 3), (2, 3), (3, 3)} = R^2

Samim tim kako bi dobili tranzistivno zatvorenje relacije R tražimo uniju R, R^2, R^3
Tranzistivno(R) = $R \cup R^2 \cup R^3$
= $R \cup R^2$ = {(1, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 3)}

Poglavlje 5

RELACIJA EKVIVALENCIJE

KADA JE RELACIJA RELACIJA EKVIVALENCIJE?

Relacija R nad nepraznim skupom S je relacija ekvivalencije ako je R refleksivna, simetrična i tranzitivna

Relacija R nad nepraznim skupom S je relacija ekvivalencije ako je R refleksivna, simetrična i tranzitivna, to jest ako ima sledeće osobine:

1. aRa za sve a $\in$ S
2. ako aRb, onda bRa
3. ako aRb i bRc, onda aRc.

Osnovna ideja relacije ekvivalencije je da je to klasifikacija objekata koji su na neki način jednaki. U stvari, relacija jednakosti, =, nad proizvoljnim skupom S $\neq \emptyset$ je relacija ekvivalencije, pošto

1. a = a za sve a $\in$ S
2. ako a = b, onda b = a
3. ako a = b i b = c, onda a = c.

Relacija kongruencije po modulu m je relacija ekvivalencije

- Refleksija: $a \equiv a \pmod{m}$
- Simetričnost: ako $a \equiv b \pmod{m}$, onda $b \equiv a \pmod{m}$
- Tranzitivnost: ako $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, onda $a \equiv c \pmod{m}$

Primer
a) Neka su L i T skupovi pravih trouglova u ravni
Relacije "je paralelna sa" ili "se poklapa sa" i "je konguentno sa" (odnosno podudarno sa) su relacije ekvivalencije nad skupovima L i T.

b) Klasifikacije životinja po vrsti, to jest, relacija "je iste vrste kao" je relacija ekvivalencije nad skupom životinja

c) Relacija podskupova skupova, $\subset$, nije relacija ekvivalencije. Ona je refleksivna i tranzistivna, ali nije simetrična, jer iz A $\subset$ B ne sledi da je B $\subset$ A
Primer

Neka je dat m $\in \mathbb{N}$. Dva cela broja a i b su kongruentna po modulu m ,u oznaci
a $\equiv$ b(mod m)

ako m deli razliku a – b.
Na primer, imamo

11 ≡ 3(mod 4), pošto 4

5.1 KLASE EKVIVALENCIJA

KLASA EKVIVALENCIJE ELEMENTA

R se zove klasa ekvivalencije elementa a, $[a] = x \in S : (a, x) \in R$

Neka je R relacija ekvivalencije nad skupom S $\neq \emptyset$ I neka je a $\in$ S proizvoljan. Tada se skup svih elemenata skupa S sa kojima je a u relaciji R zove klasa ekvivalencije elementa I označava se sa

[a] = {x $\in$ S : (a, x) $\in$ R}

Svaki b $\in$ [a] je reprezentativni element klase ekvivalencije [a]. Kolekcija svih klasa ekvivalencije elemenata skupa S u odnosu na relaciju ekvivalencije R se zove količinski skup skupa S po R.

S/R = {[a] : $\in$ S}

Neka je R relacija ekvivalencije skupom S $\neq \emptyset$. tada je količinski skup S/R particija skupa S, to jest

(i) a $\in$ [a] za svaki a $\in$ S

(ii) [a] = [b] ako I samo ako (a, b) $\in$ R;

(iii) ako [a] $\neq$ [b] onda [a] $\cap$ [b] = $\emptyset$

Primer

Neka je relacija R definisana nad skupom S = {1, 2, 3} data sa

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}

Može se pokazivati da je R refleksivna, na simetričan i tranzistivna, to jest, da je R relacija ekvivalencije.

- Imamo [1] = {1, 2}, [2] = {1, 2} i [3] = {3}.
- Primetimo da [1] = [2] i da S/R = {[1], [3]} particija skupa S. Može se izabrati bilo {1, 3} bilo {2, 3} za skup predstavnika klase ekvivalencije.

Svaka klasa je neprazna klasa elementa x jer sadrži makar taj element. Za svaki x $\in$ A, zbog refleksivnosti imamo da je xRx, pa je x $\in$ [x]

JEDNAKOST KLASA

Ukoliko su dva elementa x i y u relaciji R, tada su njihove klase jednake, tj. one određuju jednu istu klasu [x]=[y]

Ukoliko su dva elementa x i y u relaciji R, tada su njihove klase jednake, tj. one određuju jednu istu klasu [x] = [y]. Neka je a $\in$ [x], odnosno aRx. Prema pretpostavci da je xRy, iz tranzitivnosti dobijamo da je aRy, tj. da je a $\in$ [y]. Odavde zaključujemo da je [x] $\subseteq$ [y] (na isti način dokazujemo i obratnu inkluziju).

Ukoliko x i y nisu u relaciji R onda su njihove klase disjunktne.

Pretpostavimo da je

a $\in$ [x] $\cap$ [y].

Tada je aRx i aRy, pa na osnovu simetričnosti i tranzitivnosti dobijamo da je xRy što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Primer

Neka je R_5 relacija definisana nad skupom Z data sa x $\equiv$ y (mod 5). Tada postoji tačno pet klasa ekvivalencije u količinskom skupu Z/R_5 , konkretno
A_0 = {..., -10, -5, 0, 5, 10, ...},
A_1 = {..., -9, -4, 1, 6, 11, ...},
A_2 = {..., -8, -3, 2, 7, 12, ...},
A_3 = {..., -7, -2, 3, 8, 13, ...},
A_4 = {..., -6, -1, 4, 9, 14, ...}
Znamo da se svaki element x može na jedinstven način izraziti u obliku x = 5q + r, gde je 0 $\leq$ r $\leq$ 5 član klase ekvivalencije A_r gde r predstavlja ostatak pri deljenju broja x sa 5.

Uobičajeno je da se bira skup {0, 1, 2, 3, 4} ili {2, 1, 0, 1, 2} za skup predstavnika klasa ekvivalencije.

Poglavlje 6

PARCIJALNO UREĐENE RELACIJE

KADA JE RELACIJA PARCIJALNO UREĐENA?

Relacija R nad nepraznim skupom S je parcijalno uređena ili predstavlja parcijalno uređenje ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna

Relacija R nad nepraznim skupom S je parcijalno uređena ili predstavlja parcijalno uređenje ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Skup S zajedno sa parcijalnim uređenjem na njemu, R, se zove parcijalno uređen skup.

Primer

Relacija podskupova $\subset$ je parcijalno uređena nad bilo kojom kolekcijom skupova, zato što važi

1. A $\subset$ A za bilo koji skup A;
2. ako A $\subset$ B i B $\subset$ A onda A = B;
3. ako A $\subset$ B i B $\subset$ C onda A $\subset$ C;

Relacija $\leq$ nad skupom $\mathbb{R}$ je parcijalno uređena

Relacija a deli b je parcijalno uređena nad skupom $\mathbb{N}$, ali nije nad skupom $\mathbb{Z}$, pošto iz a deli b i b deli a, ne sledi a = b, na primer 3 deli -3 i -3 deli 3, ali 3 $\neq$ -3

Poglavlje 7

VEŽBE-RELACIJE

ZADATAK 1

Određivanje proizvoda skupova

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Naći proizvod $A \times B \times C$ za date skupove

A={0,1}

B={1,2}

C={0,1, 2}
REŠENjE:

$$A \times B \times C = \left\{ \begin{matrix} (0,1,0) & (0,1,1) & (0,1,2) \\ (0,2,0) & (0,2,1) & (0,2,2) \\ (1,1,0) & (1,1,1) & (1,1,2) \\ (1,2,0) & (1,2,1) & (1,2,2) \end{matrix} \right\}$$

ZADATAK 2

Određivanje matrice, dijagrama strelica i domena i rana relacije R

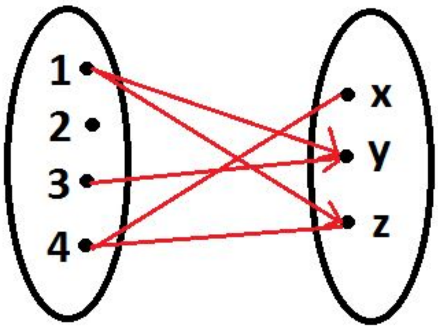
Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta
Dati su skupovi
A = {1, 2, 3, 4}
B = {x, y, z},
i relacija R iz A u B
R = {(1, y), (1, z), (3, y), (4, x),(4, z)}.

a) Odrediti matricu relacije.
b) Nacrtati dijagram strelica relecije R.
c) Naći inverznu relaciju R^{-1} relacije R.
d) Odrediti domen i rang relacije R.
e) Nacrtati usmereni graf realcije R.

REŠENJE:

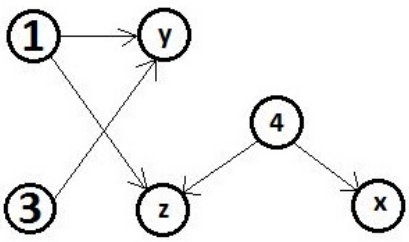
a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 7.1 Rešenje (b) [Izvor: Autor]

c) R^{-1} = {(y, 1), (z, 1), (y, 3), (x, 4), (z, 4)}
d) $D(R)$={1, 3, 4}, $r(R)$={x, y, z}
e)



Slika 7.2 Rešenje (e) [Izvor: Autor]

ZADATAK 3

Prikaz određivanja kompozicije relacija i njihovih matrica

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Dati su skupovi **A = {1, 2, 3},**

B = {a, b, c}

C = {x, y, z},

i relacije R i S

R = {(1, b), (2, a), (2, c)}

S = {(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)}.

Odrediti kompoziciju relacija S ∘ R.

Naći matrice

Mr , Ms i Ms∘r

kao I odgovarajućih relacija

R, S i R ∘ S.

REŠENJE:

S ∘ R = {(2, y), (1, x), (2, z)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_{SR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 4

Određivanje tipova relacije

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Neka je:

A = {1, 2, 3, 4} i neka je relacija R nad A definisana sa

R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)}.

Da li je R

- refleksivna,

- simetrična

- transitivna

- antisimetrična?

Odrediti R^2 = R ∘ R.

REŠENjE:

R nije refleksivna jer (3, 3) ∉ R

R nije simetrična jer (4, 2) ∈ R, a (2, 4) ∉ R

R nije tranzitivna, (4, 2) ∈ R, (2, 3) ∈ R, a (4, 3) ∉ R

R nije antisimetrična, (2, 3) ∈ R, (3,2) ∈ R, 2 ≠ 3

R ∘ R = {(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4) }

ZADATAK 5

Odrediti da li su sledeće relacije tranzitivne, simetricne, antismitricne i refleksivne

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Ako je dat skup A = { 1, 2, 3, 4 } i sledeće relacije koje su definisane nad skupom A. Odrediti da li su sledeće relacije tranzitivne, simetricne, antismitricne i refleksivne:

a) R_1 = { (1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4) }

b) R_2 = { (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) }

c) R_3 = { (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (4,1) }

d) R_4 = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4) }

REŠENjE:

R_1 - refleksivna, nije simetrična, antisimetrična, tranzitivna

R_2 −nije refleksivna, simetrična, nije antisimetrična, nije tranzitivna

R_3 −nije refleksivna, nije simetrična, nije antisimetrična, nije tranzitivna

R_4 −refleksivna, simetrična, nije antisimetrična, nije tranzitivna

ZADATAK 6

Ispitivanje da li je relacija relacija ekvivalencije

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Neka Z = {..., −2, −1, 0, 1, 2, ... } označava skup celih brojeva, i neka je dat ceo broj m, m > 1.

Kažemo da je x kongruentno sa y po modulu m, u oznaci:

x ≡ y(mod m),

ako **je x − y deljivo sa m**, to jest, ako postoji a ∈ Z takav da:

x − y = a • m.

Pokazati da je ova relacija, relacija ekvivalencije na skupu Z.

REŠENjE:

1. $x \equiv x \pmod{m}$

$x - x = 0 \; \frac{0}{m} \in Z \qquad \rightarrow \boldsymbol{jeste \;\; refleksivna}$

2. $x \equiv y \pmod{m}$ $\quad x - y$ je deljivo sa m

$y \equiv x \pmod{m}$ $\quad y - x$ je deljivo sa m $\quad \rightarrow$ ***relacija je simetrična***

3. $x \equiv y \pmod{m}$ $\quad x - y$ je deljivo sa m

$y \equiv z \pmod{m}$ $\quad y - z$ je deljivo sa m

$x - y = am, \quad y - z = bm \quad \rightarrow \quad c = a + b \quad \in Z$

$(x - z) = (x - y) + (y - z) = am + bm = cm$ $\quad \rightarrow$ ***relacija jeste tranzitivna***

ZADATAK 7

(a, b) ~ (c, d) → $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Neka je *S* = {(*x*, *y*) | *x*, *y* iz R}, i neka su (*a*, *b*), (*c*, *d*) ~*S*.

Definisati relaciju ~ na skupu *S* na sledeći način:

(*a, b*) ~ (*c, d*) ↔ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

(a) Pokazati da je ~ relacija ekvivalencije.

(b) Odrediti sve uređene parove (x, y) gde (x, y) ~ (1, 2).

(c) Opisati particiju koju ova relacija određuje u (x, y) ravni.

Rešenje:

(a) Da bi pokazali da je ova relacija relacija ekvivalencije treba pokazati refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost:

Refleksivnost: (a, b) ~ (a, b)

obzirom da je

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

Simetričnost:

(a, b) ~ (c, d) → $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ →

$c^2 + d^2 = a^2 + b^2$ → (c, d) ~ (a, b)

Tranzitivnost:

(a, b) ~ (c, d) i (c, d) ~ (e, f) →$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ i $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ →

$a^2 + b^2 = e^2 + f^2$ →(a, b) ~ (e, f)

(b) To je skup uređenih parova (x, y) takvih da je $x^2 + y^2 = 5$. Ovakav skup određuje kružnicu poluprečnika koren iz 5.

(c) Particija je skup svih koncentričnih krugova u ravni sa centrom u koordinatnom početku.

Poglavlje 8

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 20 minuta

Za svaku od sledećih relacija definisanih nad skupom R, odrediti da li su date relacije refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne i relacije ekvivalencije.

a) xRy ako $x = 2y$.

b) xRy ako $x = kyzak \in \mathbb{Z}$.

c) xRy ako $x - y \in \mathbb{Z}+$.

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 20 minuta

Odredite relaciju R koja je definisana nad skupom A={a,b,c,d,e,f,g}, tako da je relacije R iz A u A:

a) refleksivna

b) simetrična

c) antisimetrična

d) tranzitivna

e) relacije ekvivalencije.

f) Odredite domen i rang za svaku od prethodnih relacija (a)-e))

g) Nacrtati graf svih pronađenih relacija (a)-e))

h) Odrediti matrice svih pronađenih relacija (a)-e))

ZAKLJUČAK

Fokus ove lekcije su bile relacije. Dati su osnovni pojmovi relacija. Cilj je da se poznaje kako se razlikuju tipovi relacija i da se mogu odrediti njihove osobine. Od tipova relacija obrađene su refleksivne, simetrične, antisimetrične i tranzitivne relacije.Pored pregleda tipova relacija, objašnjeni su i tipovi zatvorenja.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.