UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

GRAFOVI

Lekcija 10

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 10

GRAFOVI

Uvod

UVOD

Fokus ove lekcije jeste na pojmu grafa i načinu predstavljanja istog, sa fokusom na korišćenje matrica

U ovoj lekciji izučavamo sledeće matematičke objekte koji se takođe javljaju u mnogim oblastima kompjuterskih nauka:

- Grafove
- Usmerene grafove.

Dajemo motivacije za uvođenje i izučavanje ovih objekata. Jedna motivacija je matematička. Ona posmatra grafove kao sredstvo za opisivanje relacija. Kasnije dajemo motivaciju koja pripada oblasti kompjuterskuih nauka. Ona posmatra grafove kako nacin cuvanja podataka i mogucnost lake manipulacije njima.

Cilj predavanja je da se student upozna sa pojmom grafa. Biće obradjena veza relacija i grafova.

Takodje, grafovi će biti predstavljeni preko matrice. Objasnićemo pojam stepena ulaznih i izlaznih čvorova.

U ovoj lekciji biće obrađene sledeće teme:

- Matrice relacija
- Stepen ulaznih i izlaznih elemenata
- Putevi u digrafu
- Kružni putevi
- Relacija povezanosti
- Matrice i logički proizvod
- Spajanje matrica
- Relacija dostižnosti
- Kompozicija puteva

Poglavlje 1

RELACIJE I GRAFOVI

ELEMENTI GRAFA

Kolekcija čvorova sa granama između nekih čvorova na prirodan način određuje jednu relaciju

Prisetimo se činjenice da, ako je A konačan skup i R reacija nad skupom A, R možemo grafički prikazati.

Za svaki element skupa A nacrtamo krug i označimo ga odgovarajućim elementom iz A. Ovi krugovi se zovu *čvorovi*.

Zatim nacrtamo strelicu od čvora a_i do čvora a_k ako i samo ako

$a_i R a_k$, odnosno, $(a_i, a_k) \in R$

ako i samo ako su a_j i a_k u relaciji R. Svaka takva strelica se zove *grana* (engl. edge).

Grafička reprezentacija relacije R koju smo dobili na ovakav način se zove usmeren graf (engl. directed graph), ili kraće digraf (engl. digraph).

Ako je R relacija nad konačnim skupom A, grane digrafa koji predstavlja relaciju R odgovaraju uređenim parovima iz R, a čvorovi elementima skupa A.

Ponekad, kada želimo da naglasimo geometrijsku prirodu neke osobine relacije R, možemo se pozivati na grane odgovarajućeg digrafa kao na same parove iz R, a na njegove čvorove kao na elemente skupa A. Obrnuto, kolekcija čvorova sa granama između nekih čvorova na prirodan način određuje jednu relaciju.

NAPOMENA:

Za sada jednostavno smatramo da je digraf geometrijska reprezentacija neke relacije, pa je bilo koje tvrđenje o nekom digrafu, u stvari, tvrđenje o odgovarajućoj relaciji.

Ovo je specijalno značajno za teoreme i njihove dokaze.

U neki slučajevima je lakše i čistije iskazati rezultat u grafičkim terminima, ali ćemo se u dokazu uvek pozivati na relaciju koja leži u pozadini.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

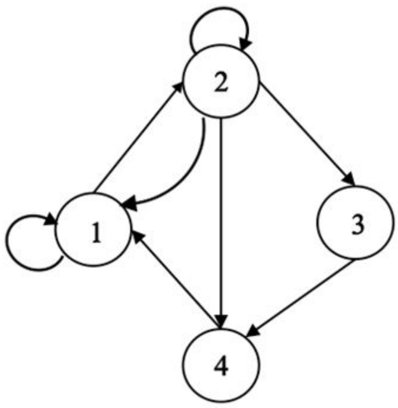
PRIMERI GRAFOVA

Odredjivanje digrafa relacije R

Primer 1

Neka su
A = {1, 2, 3, 4}
R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1)}

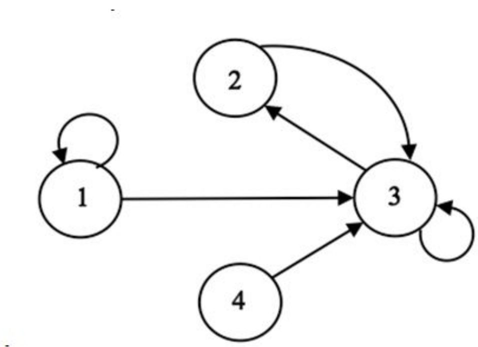
Tada je digraf relacije R dat na slici1 .



Slika 1.1 Digraf relacije iz primera 1 [Izvor: Autor]

Primer 2

Naći relaciju određenu slikom2 .



Slika 1.2 Digraf relacije iz primera 2 [Izvor: Autor]

Rešenje:

Pošto $a_j R a_k$ ako i samo ako postoji grana od a_j do a_k, imamo

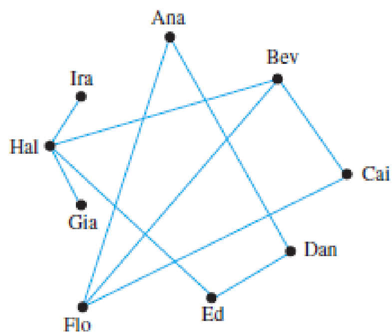
R = {(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 3)}.

PRIMER GRAFA KOJI OPISUJE ZAJEDNIČKI RAD U FIRMI

Razmotrimo organizaciju koja želi da uspostavi timove sa tri člana kako bi radili na nekim projektima

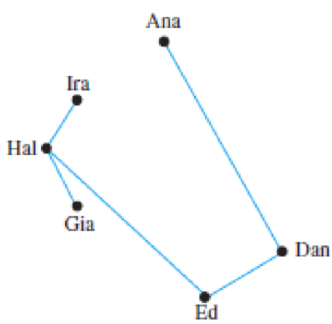
Razmotrimo organizaciju koja želi da uspostavi timove sa tri člana kako bi radili na nekim projektima. Kako bi maksimalno iskoristili zaposlene koji već imaju dosta radnog iskustva u zajedničkom radu, direktor je tražio da mu se dostave imena ljudi koji su već sarađivali. Ova informacija je prikazana i na slici i na grafu.

Name	Past Partners
Ana	Dan, Flo
Bev	Cai, Flo, Hal
Cai	Bev, Flo
Dan	Ana, Ed
Ed	Dan, Hal
Flo	Cai, Bev, Ana
Gia	Hal
Hal	Gia, Ed, Bev, Ira
Ira	Hal



Slika 1.3 Imena zaposlenih koji su već sarađivali na projektima [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Sa dijagrama je lako uočljivo da Bev, Cai i Flo čine tročlanu grupu koja je prethodno sarađivala i oni verovatno treba da čine jedan od timova. Sledeći dijagram pokazuje rezultat kada se ova tri imena izbrišu sa grafa.



Slika 1.4 Rezultat bez Bev, Cai i Flo [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

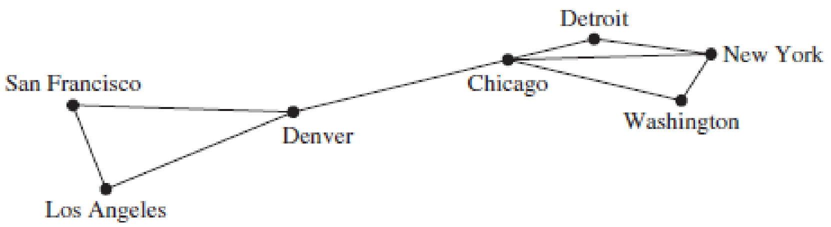
Sledeća grupa koja ima najviše iskustva u prethodnom radu su Hai, Ira i GIa. Verovatno bi dobar kandidat bio i Ed, ali onda bi Dan i Ana ostali bez trećeg člana sa kojim bi prethodno radili.

Iz ovog primera možemo videti da su čvorovi ustvari radnici koji rade u ovoj formi: Ana, Ira, Bev, Cai, Hai, Gia, Flo, Ed i Dan. Veze između čvorova ustvari predstavljaju grane, a u ovom slučaju su definisane sa "prethodno su radili zajedno na projektu".

PRIMER RAČUNARSKE MREŽE PRIKAZANE GRAFOM

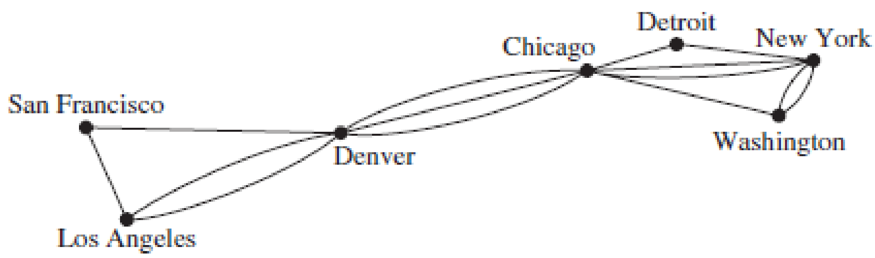
Grafovi su veoma korisni i u opisu rada, pa čak i raznih algoritama u radu računarske mreže

Grafovi su veoma korisni i u opisu rada, pa čak i raznih algoritama u radu računarske mreže. Razmotrimo mrežu koju čine data centri i koji su povezani međusobno. Možemo prikazati ovu mrežu tako što će čvorovi predstavljati data centre (obeležimo ih imenima gradova gde se nalaze) , a komunikacioni linkovi između njih predstavimo granama. Na ovaj način grana predstavlja relaciju "biti povezan". Primer ovakve mreže je prikazan na slici 5.



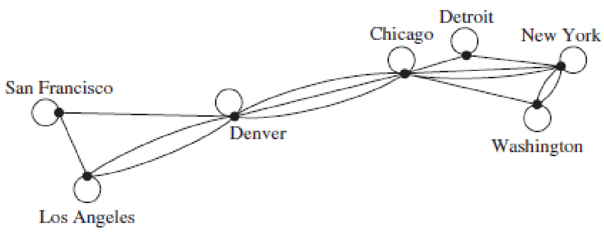
Slika 1.5 Primer računarske mreže prikazane grafom [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Računarska mreža može da sadrži više linkova između data centara, kao što je prikazano na slici 6. Kako bi modelovali takvu mrežu potrebno je da čvorove povežemo sa više grana. Grafovi koje imaju više grana koje povezuju iste čvorove se nazivaju multigrafovi.



Slika 1.6 Računarska mreža sa data centrima koji su povezani sa više linkova [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

U računarskim mrežama je nekad potrebno da je data centar povezan sam sa sobom, ovo se nekad radi radi dijagnostike problema u mreži. Ovakvu mrežu možemo prikazati kao što se vidi na slici 7.



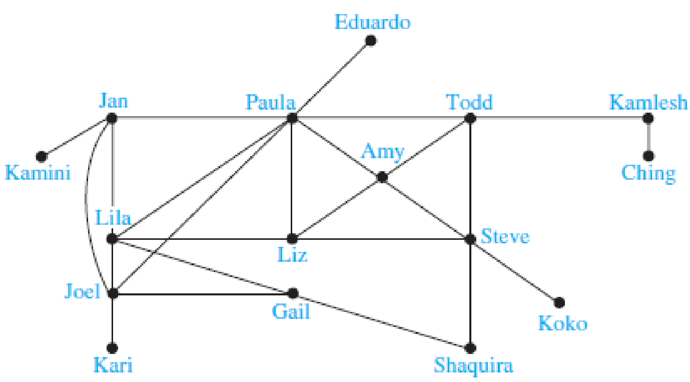
Slika 1.7 Računarska mreža sa linkovima za dijagnostiku [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER GRAFOVA ZA MODELOVANJE DRUŠTVENIH MREŽA

Grafovi se koriste da modeluju strukture različitih socijalnih struktura, koristeći različite relacije između korisnika ili grupe korisnika

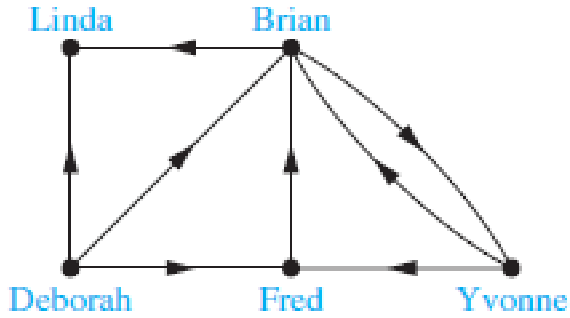
Grafovi se koriste da modeluju strukture različitih socijalnih struktura, koristeći različite relacije između korisnika ili grupe korisnika. Grafovi koji predstavljaju socijalne strukture se nazivaju socijalne mreže. U ovom modelu, individue ili organizacije su predstavljeni kao čvorovi, a relacije između njih kao grane. Izučavanje društvenih mreža je jedna od multidisciplinarnih oblasti koja se sve više primenjuje, naročito zbog velike popularnosti različitih socijalnih mreža.

Ako želimo, na primer, da pokažemo da li se dve osobe poznaju (bilo u stvarnom svetu ili putem društvene mreže kao što je Facebook), možemo koristiti graf koji nema više grane između istih čvorova, niti postoje petlje,



Slika 1.8 Graf poznanstva [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Prilikom izučavanja ponašanja grupa, primećeno je da određene individue imaju uticaj na razmišljanje drugih u toj grupi. Usmereni graf koji se naziva graf uticajnosti (engl. influence graph) se može koristiti u svrhe modelovanja ponašanja. Svaka individua u grupi je predstavljena kao čvor, a između njih se nalaze usmerene grane od čvora a do čvora b, kada osoba koja je predstavljena čvorom a ima uticaj na osobu koja je predstavljena čvorom b. Ovaj graf nema petlje i višestruke grane. Primer ovakvog grafa je predstavljen na sledećoj slici



Slika 1.9 Graf uticajnosti [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Na slici 9 je prikazana grupa koja je modelovana. Na Deborahu ne može niko uticati, ali ona može uticati na Brian,
Fred i Linda. Takođe, Yvonne i Brian mogu da utiču jedno na drugo.

GRAF SARADNJE

Graf saradnje (eng. collaboration graph) se koristi za modelovanje društvenih mreža gde su dvoje ljudi povezani ukoliko su sarađivali

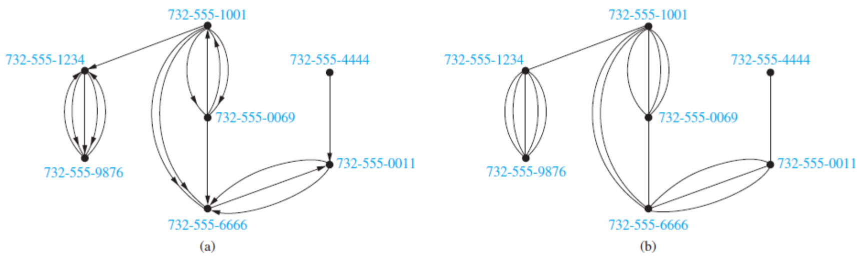
Graf saradnje (engl. collaboration graph) se koristi za modelovanje društvenih mreža gde su dvoje ljudi povezani ukoliko su sarađivali. Grafovi saradnje su jednostavni grafovi, pošto su grane u ovim grafovima neusmerene i nema višestrukih grana, kao ni petlji. Čvorovi u ovim grafovima predstavljaju ljude, a dve osobe su povezane neusmerenom granom ako su prethodno sarađivali. Holivudski graf takođe predstavlja graf saradnje, koji predstavlja glumce kao čvorove i povezuje dva glumca granom ako su zajedno radili na filmu ili TV emisiji. Holivudski graf je veliki graf sa više od 2 miliona čvorova.
U akademiji graf saradnje čvorovima predstavlja ljude (možda ograničen članovima određene akademske zajednice), a grane povezuju dvoje ljudi ako su zajedno objavili naučni rad. Graf saradnje za ljude koji su objavili naučne radove iz matematike rađen u 2004. godini ima više od 400.000 čvorova i 675,000 grana. Ove brojke su znatno porasle od 2004. godine.
Grafovi saradnje su korišćeni u sportu, gde se smatra da su dva profesionalna sportista sarađivala, ako su ikada tokom redovne sezone igrali u istom timu.

GRAF TELEFONSKIH POZIVA

Grafovi se mogu koristiti da modeluju pozive u okviru jednog telekomunikacionog provajdera

Grafovi se mogu koristiti da modeluju pozive u okviru jednog telekomunikacionog provajdera. Na primer, svaki telefonski broj se može prikazati kao čvor, a svaki telefonski poziv kao usmerena grana. Grana poziva počinje od čvora, odnosno telefonskog broja, koji je inicirao poziv, a završava se u čvoru koji je taj poziv primio. Grana je usmerena zbog toga što je važno da znamo ko je poziv inicirao. Primer jednog manjeg grafa telefonskih poziva je prikazan na slici 10(a), gde je prikazano 7 brojeva. Ovaj graf prikazuje, na primer, da je bilo tri poziva od broja 732-555-1234 do 732-555-9876 i dva u suprotnom pravcu, ali nije bilo poziva od 732-555-4444 ka bilo kom drugom broju osim ka 732-555-0011.

Ako nam je važno da prikažemo sam da je bilo poziva između dva broja, a nije nam važno ko je poziv inicirao, onda možemo koristiti neusmereni graf. Ova verzija grafa je prikazana na slici 10 (b). Graf telefonskih poziva koji modeluju postojeće pozive su ogromni. Na primer, jedan od ovakvih grafova koji je izučavao pozive u okviru AT&T mreže, prikazao je pozive tokom 20 dana i imao je oko 290 miliona čvorova i 4 milijarde grana.

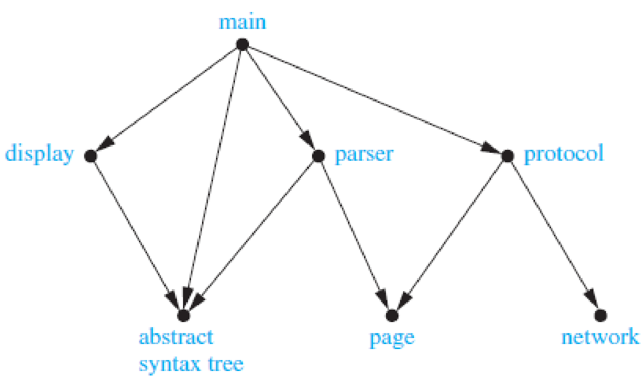


Slika 1.10 Graf telefonskih poziva [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMENA GRAFOVA U SOFTVERSKIM APLIKACIJAMA

Grafovi se mogu koristiti kao koristan alat u razvijanju softvera

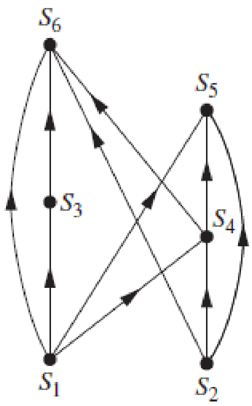
Grafovi se mogu koristiti kao koristan alat u razvijanju softvera. Ovde ćemo kratko prikazati dva takva modela. Graf zavisnosti modula može pomoći u samoj strukturi softvera i njegovih različitih komponenti. Važno je za svakog programera da zna kako različite komponente funkcionišu jedna sa drugom, ne samo zbog projektovanja softvera, nego i zbog njegovog testiranja i održavanja. U ovom grafu svaki modul je prikazan kao čvor, a između njih postoje usmerene grane. Grana je usmerena od jednog ka drugom čvoru ukoliko drugi čvor zavisi od prvog. Primer ovakvog grafa za web čitač, odnosno njegov izvorni kod, je prikazan na slici 11.



Slika 1.11 Graf zavisnosti za softverske module veb čitača [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

U proceduralnom programiranju kod se može izvršiti brže ako se određeni iskazi izvršavaju istovremeno. Važno je da se ne izvrši deo koda koji je uslov za izvršenje nekog drugog iskaza. Zavisnost između ovih iskaza se može prikazati usmerenim grafom. Svaki iskaz je prikazan kao čvor, a grana između čvorova je usmerena od prvog ka drugom čvoru, ako se drugi čvor ne može izvršiti pre prvog. Ovakav graf se naziva graf prednosti (engl. precedence graph). Primer ovakvog grafa je prikazan na slici 12. Na primer, prikazano je da se iskaz S_5 ne može izvršiti pre iskaza S_1, S_2, i S_4.

S_1 $a := 0$
S_2 $b := 1$
S_3 $c := a + 1$
S_4 $d := b + a$
S_5 $e := d + 1$
S_6 $e := c + d$



Slika 1.12 Graf prednosti za programski kod i njegove iskaze [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Poglavlje 2

STEPEN ULAZA I IZLAZA

ODREĐIVANJE STEPENA ULAZA I IZLAZA

Stepen ulaza nekog čvora je broj grana koje se završavaju u tom čvoru (ulaze u čvor) Stepen izlaza nekog čvora je broj grana koje napuštaju taj čvor (izlaze iz čvora)

Jedan koncept koji je važan za relacije je inspirisan vizuelnim oblikom digrafova. Ako je R relacija nad skupom A, i a ∈ A, onda je stepen ulaza elementa (engl. in-degree of element) a (u odnosu na relaciju R) broj elemenata b ∈ A takvih da (b, a) ∈ R.

Stepen izlaza elemenata (engl. out-degree of element) a je broj elemenata b ∈ A takvih da (a, b) ∈ R.

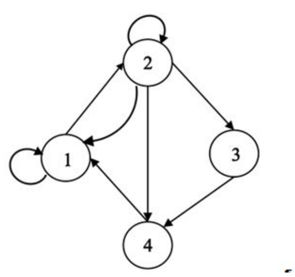
Šta ovo znači u terminima digrafa relacije R?

Stepen ulaza nekog čvora je broj grana koje se završavaju u tom čvoru (ulaze u čvor).

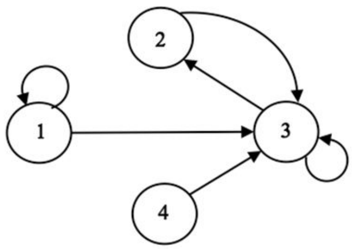
Stepen izlaza nekog čvora je broj grana koje napuštaju taj čvor (izlaze iz čvora).

Primetimo da je stepen izlaza elementa a jednak $|R(a)|$.

Primer 3
Posmatrajmo digraf sa slike 1 i 2
Slika 1 - Čvor 1 ima stepen ulaza 3 a stepen izlaza 2.
Slika 2 - Čvor 3 ima stepen ulaza 4 a stepen izlaza 2, dok čvor 4 ima stepen ulaza 0, a stepen izlaza 1.



Slika 2.1 Digraf relacije iz primera 3 [Izvor: Autor]

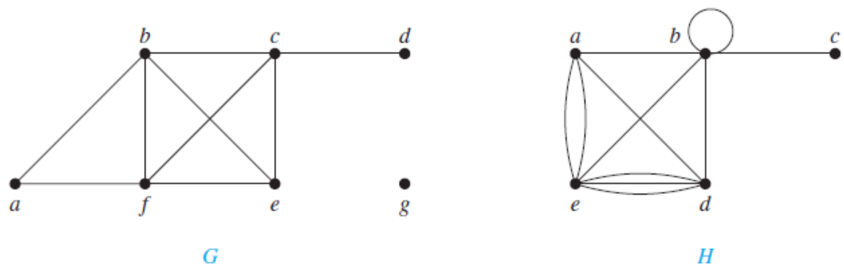


Slika 2.2 Digraf relacije iz primera 3 [Izvor: Autor]

PRIMER

Odrediti stepene čvorova i njihove susede

Koji su stepeni čvorova, kao i njihovi susedi za čvorove prikazane na grafovima G i H na slici 3?



Slika 2.3 Neusmereni grafovi G i H [Izvor: Autor]

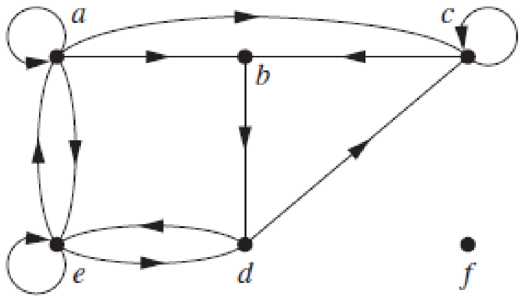
Graf G

deg(a) = 2, deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4, deg(d) = 1, deg(e) = 3, i deg(g) = 0. Susedi ovih čvorova su

N(a) = {b, f }, N(b) = {a, c, e, f }, N(c) = {b, d, e, f }, N(d) = {c}, N(e) = {b, c, f }, N(f) = {a, b, c, e}, i N(g) = ∅ .

Graf H
deg(a) = 4, deg(b) = deg(e) = 6, deg(c) = 1, and deg(d) = 5. Susedi ovih čvorova su N(a) = {b, d, e}, N(b) = {a, b, c, d, e}, N(c) = {b}, N(d) = {a, b, e}, i
N(e) = {a, b, d}.

Odrediti stepene ulaza i izlaza čvorova prikazanih na grafu na slici 4.



Slika 2.4 Usmereni graf [Izvor: Autor]

Stepeni ulaza su $\deg^-(a) = 2$, $\deg^-(b) = 2$, $\deg^-(c) = 3$, $\deg^-(d) = 2$, $\deg^-(e) = 3$, i $\deg^-(f) = 0$.

Stepeni izlaza su $\deg^+(a) = 4$, $\deg^+(b) = 1$, $\deg^+(c) = 2$, $\deg^+(d) = 2$, $\deg^+(e) = 3$, i $\deg^+(f) = 0$.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

MATRICA RELACIJE

DEFINICIJA I PRIMER MATRICE RELACIJE

Relacija se može predstaviti i matricom M

Prisetimo se da se neka relacija takođe može predstaviti matricom M, kod koje se element m_{ik} nalazi u i−tom redu i k-toj koloni, i važi

$$m_{ik} = \begin{cases} 1 & ako \quad (a_i, a_k) \in R \\ 0 & ako \quad (a_i, a_k) \notin R \end{cases}$$

Primer

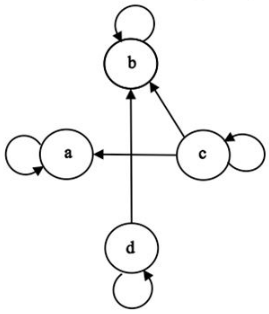
Neka je A = {a, b, c, d}, i neka je R relacija nad skupom A, to jest, matrica relacije R je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Konstruisati digraf relacije R, i odrediti liste svih stepena ulaza i svih stepena izlaza svih čvorova.

U sledećoj tabeli su dati stepeni ulaza i stepeni izlaza svih čvorova. Primetimo da suma stepena ulaza svih čvorova mora biti jednaka sumi stepena izlaza svih čvorova.

	a	b	c	d
stepen ulaza	2	3	1	1
stepen izlaza	1	1	3	2



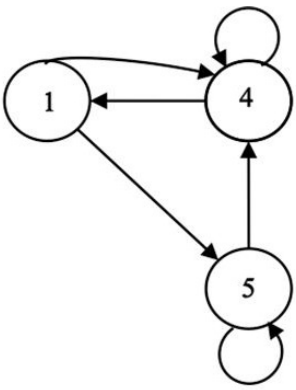
Slika 3.1 Primer [Izvor: Autor]

PRIMER MATRICE RELACIJE

Primer predstavlja graf preko njegove matrice

Primer

Neka je A={1, 4, 5} i neka je relacija R data digrafom sa slike. Naći matricu M_R i relaciju R.



Slika 3.2 Graf za primer [Izvor: Autor]

Rešenje

R = {(1, 4), (1, 5), (4, 1), (4, 4), (5, 4), (5, 5)}

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICA SUSEDSTVA

U matrici susedstva se piše 1 kada su dva čvora susedna, a 0 kada nisu

Slično kao i kod matrice relacije, možemo prikazati matricu susedstva. U matrici se piše 1 kada su dva čvora susedna, a 0 kada nisu. Razmotrimo matricu susedstva

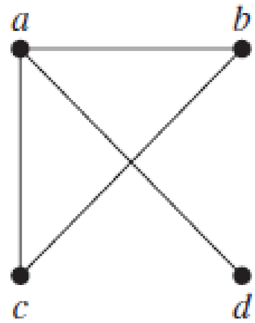
$$A = [a_{ij}]$$

gde su elementi a_{ij} definisani kao

$$a_{ij} = \begin{cases} a & ako\,\{v_i, v_j\}\ grana\ u\ grafu\ G \\ 0 & u\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Primer

Odrediti matricu susedstva za sledeći graf



Slika 3.3 Jednostavni graf za primer [Izvor: Autor]

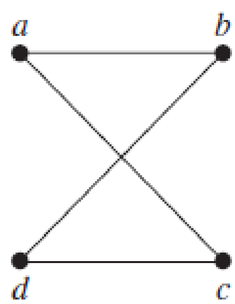
Rešenje

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer

Nacrtati graf čija je matrica susedstva

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Slika 3.4 Rešenje primera [Izvor: Autor]

Poglavlje 4

PUTEVI U GRAFU

PUT I DUŽINA PUTA

Dužina puta je jednaka broju grana na putu, pri čemu čvorovi na putu ne moraju biti različiti medju sobom

Pretpostavimo da je R relacija nad skupom A.

Put dužine n u relaciji R od elementa (čvora) a do elementa b je konačan niz

$\pi : a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$

koji počinje sa a i završava se sa b, takav da

$aRx_1, x_1Rx_2, \ldots, x_{n-1}Rb$

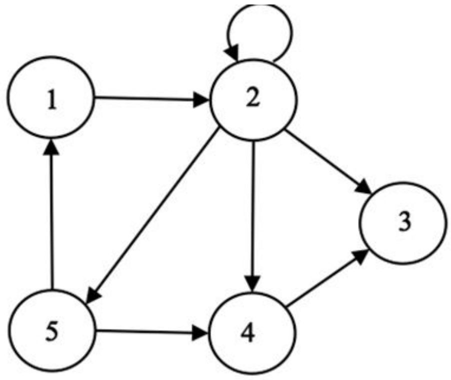
Primetimo da se put dužine n sastoji od n + 1 elementa skupa A, mada ovi elementi ne moraju biti različiti.

Put se najlakše vizualizuje pomoću digrafa relacije. Predstavlja se kao geometrijski put koji se sastoji iz grana digrafa nadovezanih jedna na drugu, pri čemu se sledi naznačeni smer grana.

Dužina puta je jednakabroju grana na putu, pri čemu čvorovi na putu ne moraju biti različiti medju sobom.

Primer

Pronaći dužinu puta izmedju čvorova 1-3,1-1,2-2
Rešenje:
1-3: π_1 : 1, 2, 5, 4, 3 (Dužina puta: 4)
1-1: π_2 : 1, 2, 5, 1 (Dužina puta: 3)
2-2: π_3 : 2, 2 (Dužina puta: 1)



Slika 4.1 Graf iz primera [Izvor: Autor]

KRUŽNI PUTEVI

Put koji počinje i završava se u istom čvoru se zove kružni put ili ciklični put.

Put koji počinje i završava se u istom čvoru se zove kružni put ili ciklični put (engl. cycle).

Jasno je da se putevi dužine 1 u digrafu relacije R mogu izjednačiti sa uređenim parovima (x, x) ∈ R.

Putevi u relaciji R se mogu iskoristiti za definisanje novih relacija što može da bude vrlo korisno.

Ako je n dati pozitivan ceo broj, možemo definisati relaciju Rn nad skupom A na sledeći način:

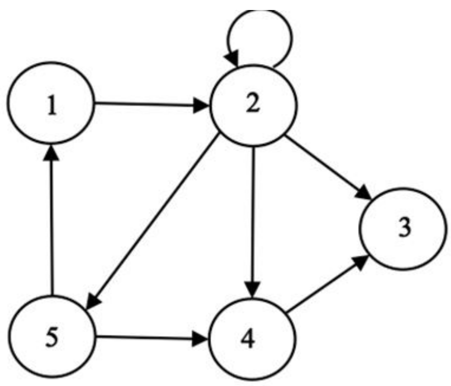
xR^ny

znači da postoji put dužine n od čvora x do y.

Primer

Kružni putevi na digrafu

1-1: π_2 : 1, 2, 5, 1 (Dužina puta: 3)
2-2: π_3 : 2, 2 (Dužina puta: 1)



Slika 4.2 Graf iz primera [Izvor: Autor]

Poglavlje 5

RELACIJA POVEZANOSTI

DEFINICIJA RELACIJE POVEZANOSTI

Relacija R^∞ se zove relacija povezanosti relacije R

Relaciju povezanosti relacije R obeležavamo sa R^∞ . Relacija povezanosti, R^∞, nad skupom A se može opisati sa

$xR^\infty y$

i znači da postoji bar jedan put od x do y.

Dužina puta, u opštem slučaju, zavisi od elemenata x i y.

Primetimo da se $R^n(x)$ sastoji iz svih čvorova do kojih se može doći iz čvora x putevima iz relacije R dužine n.

Skup $R^\infty(x)$ sastoji iz svih čvorova do kojih se može doći iz čvora x nekim putem iz R.

Primer

Neka je A skup svih živih ljudi na svetu, i neka je R relacija uzajamnog poznanstva.

Drugim rečima, aRb znači da a i b poznaju jedan drugoga.

Tada aR^2b znači da a i b imaju zajedničkog poznanika.

U opštem slučaju, aR^nb znači da a poznaje neku osobu x_1, koja poznaje x_2, koja poznaje x_3,..., koja poznaje x_{n-1}, koja poznaje b.

Primer

Neka je A skup evropskih gradova.

Neka xRy ako postoji direktna avionska linija bar jedne avio kompanije od grada x do grada y.

Tada su gradovi x i y u relaciji R^n ako osoba može leteti od x do y sa tačno $n-1$ usputnih sletanja.

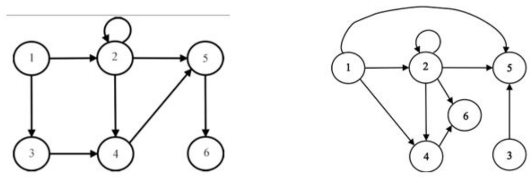
Gradovi su u relaciji R^∞ ako osoba može stići od grada x do grada y avionom.

PRIMERI RELACIJE POVEZANOSTI

Objašnjenje relacije povezanosti kroz primere

Primer 1

Neka je A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Odrediti digraf relacija R i R^2.
Digraf relacija R (levo) i R2 (desno) su prikazane na sledećoj slici.



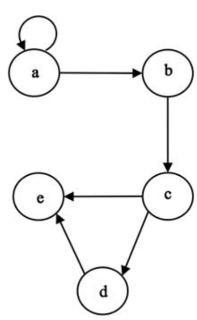
Slika 5.1 Digraf primer 1 [Izvor: Autor]

$1R^2 2 : 1R2\,i\,2R2$
$1R^2 4 : 1R2\,i\,2R4$
$1R^2 5 : 1R2\,i\,2R5$
$2R^2 2 : 2R2\,i\,2R2$
$2R^2 4 : 2R2\,i\,2R4$
$2R^2 5 : 2R2\,i\,2R5$
$2R^2 6 : 2R5\,i\,5R6$
$3R^2 5 : 3R4\,i\,4R5$
$4R^2 6 : 4R5\,i\,5R6$

Primer2

Neka je
A = {a, b, c, d, e}
R = {(a, a),(a, b), (b, c), (c, e), (c, d), (d, e)}
Odrediti R^2 (digraf relacije R je prikazan na slici 2).

$aR^2a : aRa\,i\,aRa$
$aR^2b : aRa\,i\,aRb$
$aR^2c : aRb\,i\,bRc$
$bR^2e : bRc\,i\,cRe$
$bR^2d : bRc\,i\,cRe$
$cR^2e : cRd\,i\,dRe$



Slika 5.2 Digraf primeri 2 [Izvor: Autor]

Primer 3

Neka je A = {a, b, c, d, e}

R = {(a, a), (a, b),(b, c), (c, e), (c, d), (d, e)}

Odrediti R^∞.

Da bi odredili R^∞ treba naći sve uređene parove čvorova za koje važi da postoji put bilo koje dužine od prvog čvora do drugog.

Sa digrafa (slika 2), vidimo da je

R^∞ = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e),

(b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e) }

Na primer, (a, d) $\in R^\infty$, pošto postoji put dužine 3 od a do d: a, b, c, d.

Slično, (a, e) $\in R^\infty$, pošto postoji put dužine 3 od a do e: a, b, c, e, ali i put dužine 4 od a do e: a, b, c, d, e.

Poglavlje 6

MATRICE I LOGIČKI PROIZVOD

DEFINICIJA LOGIČKE MATRICE I LOGIČKOG PROIZVODA

Logička matrica ili 0-1 matrica je matrica koja za elemente ima samo brojeve 0 i 1

Ako je |R| veliko, može biti zamorno i teško odrediti R^∞, a možda čak i R^2, iz skupovne reprezentacije relacije R. Tada se 0 −1 matrica relacije R, M_R, može iskoristiti za efikasnije izvršavanje ovih zadataka.Takodje, uvodimo logički proizvod (engl. Boolean product) **dve matrice.**

Logička matrica ili *0 − 1 matrica* (engl. Boolean matrix) je matrica koja za elemente ima samo brojeve 0 i 1.

Neka je $A = (a_{ij})$; A je 0 - 1 matrica veličine m x p

Neka je $B = (b_{ij})$; B je 0 - 1 matrica veličine p x n

Tada je logički proizvod matrica A i B (engl. Boolean product of A and B), u oznaci A ⊙ B, 0 - 1 matrica $C = (c_{ij})$ veličine m x n, tako da
$C = A \odot B$

Matrica C je definisana na sledeći način

c_{ij} = 1 ako a_{ik} = 1 i b_{kj} = 1 za neko k, 1 ≤ k ≤ p

c_{ij} = 0 inače

Jednostavan metod za izračunavanje logičkog proizvoda dve 0 − 1 matrice je:

- Posmatrati red i i kolonu j . Zamislite ih kao nizove koji stoje jedan do drugoga. Pa će se tako na primer proveriti prvi red matrice A, sa prvom kolonom matrice B, na sledeći način

$c_{11} = (a_{11} \wedge b_{11}) \vee (a_{12} \wedge b_{21}) \vee \ldots . \vee (a_{1p} \wedge b_{p1})$

- Uporediti odgovarajuće elemente. Ako postoji bar jedan par odgovarajućih elemenata koji se sastoji iz dve 1, onda je c_{ij} = 1. Inače je c_{ij} = 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Slika 6.1.1 Prikaz logičkog proizvoda [Izvor: Autor]

PRIMER LOGIČKOG PROIZVODA MATRICA

Logička matrica ili 0-1 matrica je matrica koja za elemente ima samo brojeve 0 i 1.

Primer 1

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \odot B = ((1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0))((1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1))((0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0))((0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1))$$

$$A \odot B = (0 \vee 0)(1 \vee 0)(0 \vee 0)(0 \vee 1)$$

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 2

Pronaći logički proizvod matrica A i B

a) A ⊙ B i

b) B ⊙ A

ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rezultat

a)

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

IZRAČUNAVANJE R^2 POMOĆU LOGIČKE MATRICE

$M_R \odot M_R = M_R^2$

Neka je R relacija nad konačnim skupom A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Neka je M_R matrica veličine n x n koja predstavlja relaciju R. Pokazaćemo kako se matrica M_R^2 relacije R^2 može izračunati iz M_R.

Teorema

Ako je R relacija nad skupom A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, onda

$M_R^2 = M_R \odot M_R$.

Dokaz:

Označimo $M_R = (m_{ij})$ i $M_R^2 = (n_{ij})$.

Po pomenutoj metodi izračunavanja logičkog proizvoda matrica, element p_{ij} matrice $M_R \odot M_R$ je jednak 1 ako i samo ako red i i kolona j matrice M_R imaju 1 na istom mestu.

Na primer, na mestu k, to jest, ako i samo ako je $m_{ik} = 1$ i $n_{kj} = 1$ za neko k koje je $1 \leq k \leq n$.

Po definiciji matrice M_R, ovi uslovi znače $a_i R a_k$ i $a_k R a_j$, pa je $a_i R^2 a_j$.

Tako smo pokazali da je element p_{ij} matrice $M_R \odot M_R$ jednak 1 ako i samo ako je element n_{ij} matrice M_R^2 jednak 1. To znači da je MR ⊙ MR = MR^2.

PRIMER

Odrediti M_R^2

Ako je M_R poznata odrediti M_R^2

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^2 = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PRIMER - VIDEO

Primer određivanja M_R^2

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

IZRAČUNAVANJE R^n POMOĆU LOGIČKE MATRICE

M_R^n = M_R ⊙ M_R ⊙ ... ⊙ M_R (n faktora)

Neka je n ≥ 2 i neka je R relacija nad nekim konačnim skupom.

Tada imamo

M_{Rn} = M_R ⊙ M_R ⊙ ... ⊙ M_R (n faktora)

Dokaz:

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za neko n $\geq$ 2. Označimo M_R^{n+1} = (x_{ij}), M_R^n = (y_{ij}) i M_R = (m_{ij}).

Ako je x_{ij} = 1, mora postojati put dužine n + 1 od a_i do a_j

Ako sa a_s označimo čvor na ovom putu koji se nalazi neposredno pre poslednjeg čvora a_j, onda postoji put dužine n od a_i do a_s i put od a_s do a_j.

Tako je y_{is} = 1 i m_{sj} = 1, pa M_R^n ⊙ M_R ima 1 na mestu i, j , onda x_{ij} = 1. Ovo znači da je M_R^{n+1} = M_R^n ⊙ M_R.

Neka je n ≥ 2 i neka je R relacija nad nekim konačnim skupom

Tada imamo

M_R^n = M_R ⊙ M_R ⊙ ... ⊙ M_R (n faktora)

imamo

$M_R{}^{n+1} = M_R{}^{n} \odot M_R$.

$= (M_R \odot M_R \odot \ldots \odot M_R) \odot M_R$

odakle sledi

$M_R{}^{n+1} = M_R \odot M_R \odot \ldots \odot M_R$ (n+1 faktora)

6.1 SPAJANJE MATRICA

OPERACIJA SPAJANJA MATRICA

Operaciju spajanja matrica A i B, u oznaci A ∨ B = C = (c_{ij})definišemo na sledeći način c_{ij} = 1 ako a_{ij} = 1 ili b_{ij} = 1 c_{ij} , inače $c_{ij} = 0$

Da bi mogli da izračunamo matricu relacije R^∞ iz matrice relacije R, treba uvesti još jednu operaciju nad 0 − 1 matricama, takozvanu operaciju spajanja matrica (engl. join of matrices).

Neka su A = (a_{ij}) i B = (b_{ij}) dve 0 − 1 matrice veličine m x n

Operaciju spajanja matrica A i B, u oznaci

A ∨ B = C = (c_{ij})

definišemo na sledeći način

c_{ij} = 1 ako a_{ij} = 1 ili b_{ij} = 1

c_{ij} = 0 inače

Relacija R^∞

Pretpostavimo da je R relacija nad konačnim skupom A, i neka x, y $\in$ A.
Znamo da $xR^\infty y$ znači da su x i y povezani nekim putem iz R dužine n za neko n.

U opštem slučaju, n zavisi od x i y, ali je jasno da $xR^\infty y$ ako i samo ako

xRy ili xR^2y ili xR^3y ili . . .

pa onda važi

$R^\infty = R \cup R2 \cup R3 \cup \ldots = \cup^n R^n$ za n=1,... ∞

Ako su R i S relacije nad skupom A, relacija R ∪ S je definisana sa x(R ∪ S)y ako i samo ako xRy ili xSy.

Tada je lako videti $M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$

Tako imamo

$MR\infty = MR \vee MR^2 \vee MR^3 \vee \dots$

$= MR \vee (MR \odot MR) \vee (MR \odot MR \odot MR) \dots$

RELACIJA DOSTIŽNOSTI R*

Relacija dostižnosti R^* nad skupom je definisana na sledeći način x R^* y znači x = y ili x R^∞ y

Relacija dostižnosti R^* (engl. reachability relation) relacije R nad skupom A koji ima n elemenata je definisana na sledeći način

xR^*y znači $x = y$ ili $xR^\infty y$

Znači, y je dostižno iz x ako je y jednako x ili ako postoji neki put od x do y. Lako je videti da

$M_{R^*} = I_n \vee M_{R\infty}$

gde je $I_n = (a_{ij})$ jedinična matrica veličine nxn, to jest, matrica sa elementima

$a_{ij} = 1$ za $j = i$

$a_{ij} = 0$ za $j \neq i$

$(i = 1, 2, . . . , n)$

Tako imamo

$MR^* = I_n \vee MR \vee (MR \odot MR) \vee (MR \odot MR \odot MR) \dots$

Kompozicija (spajanje) puteva

Neka je

$\pi_1 : a, x_1, x_2, . . . , x_{n-1}, b$

put u relaciji R dužine n od a do b, i neka je

$\pi_2 : b, y_1, y_2, . . . , y_{m-1}, c$

put u relaciji R dužine m od b do c

Tada je kompozicija (spajanje) puteva π1 i π2 put

$\pi_2 \circ \pi_1 : a, x_1, x_2, . . . , x_{n-1}, b, y_1, y_2, . . . , y_{m-1}, c$

dužine n + m. To je put od a do c.

PRIMER

Prikaz primera puteva u digrafu

Primer

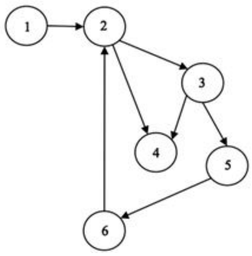
Posmatrajmo relaciju čiji je graf dat na digrafu, i puteve

π_1 : 1, 2, 3

π_2 : 3, 5, 6, 2, 4.

Tada je kompozicija puteva π_1 i π_2 put od 1 do 4 dužine 6

$\pi_2 \circ \pi_1$: 1, 2, 3, 5, 6, 2, 4



Slika 6.2.1 Digraf relacije iz primera [Izvor: Autor]

Poglavlje 7

VEŽBA - GRAFOVI

ZADATAK 1

Primeri disjunkcije i konjunkcije matrica

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

Neka su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Izračunati:
a) A ˅ B
b) A ˄ B

Rešenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 2

Primer logičkog proizvoda matrica

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta
Neka su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunati: A ⊙ B .
REŠENjE:

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 3

Odrediti matricu M_R relacije R

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta
Neka su

A={1, 2, 3},

B = {r, s},

R={(1,r), (2, s), (3, r)}

Odrediti matricu M_R relacije R.

REŠENjE:

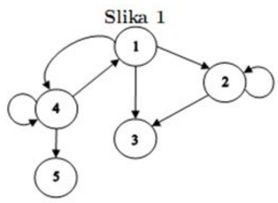
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 4

Primer prikazuje određivanje matrice relacije R.

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti relaciju R i matricu M_R digrafa na Slici 1.



REŠENjE:

$$Mr = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

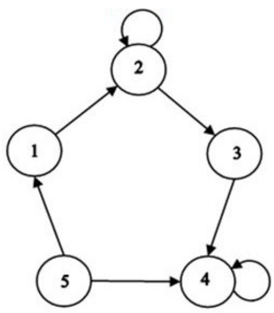
Slika 7.1 Prikaz zadatka 4 [Izvor: Autor]

ZADATAK 5

Primer prikazuje određivanje stepena ulaza i izlaza cvorova u grafu

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti stepen ulaza i stepen izlaza svakog od čvorova na digrafu sa slike



REŠENjE:

čvor	1	2	3	4	5
stepen ulaza	1	2	1	3	0
Stepen izlaza	1	2	1	1	2

Slika 7.2 Prikaz zadatka 5 [Izvor: Autor]

ZADATAK 6

Kompozicija puteva u grafu

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Ako su dati putevi

π_1 =1, 7, 5 i π_2 =5, 6, 4, 3.

Odrediti njihovu kompoziciju .

REŠENjE:

$\pi_2 \circ \pi_1$ = 1, 7, 5, 6, 4, 3

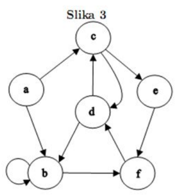
ZADATAK 7

Kombinovani zadaci

Predviđeno vreme trajanja: 25 minuta

Digraf relacije R je prikazan na slici:

- Odrediti sve puteve dužine 3.
- Naći kružni put dužine 3 koji počinje u d.
- Naći digraf M_r^2
- Izračunati M_r^∞



Slika 7.3 Digraf relcija R [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Putevi dužine 3:

a, c, d, c; a, c, d, b; a, c, e, f;
a, b, b, b; a, b, b, f; a, b, f, d;
b, b, b, b; b, b, b, f; b, b, f, d;
b, f, d, b; b, f, d, c;
c, d, c, d; c, d, c, e; c, d, b, b;
c, d, b, f; c, e, f, d;
d, b, b, f; d, b, f, d; d, c, e, f;
d, c, d, c; d, c, d, b;
d, b, b, b;
e, f, d, c; e, f, d, b;
f, d, c, d; f, d, c, e; f, d, b, b; f, d, b, f;

Kružni putevi dužine 3 koji pocinju u d
d, b, f, d;

(c) $Mr = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $M_{r^2} = M_r \odot M_r$

$$M_{r^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) Kako ne postoji strelica koja se završava u čvoru a i ne postoji ni put koji se završava u tom istom čvoru, a postoje putevi koji povezuju ostale čvorove, dakle matrica je

$$M_{r^\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 7.4 Rešenje [Izvor: Autor]

Poglavlje 8

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Nad skupom A={1,2,3,4,5} je definisana relacija R={(1,2),(1,3)(3,2),(3,5),(4,3),(4,4),(5,4),(5,1)}.

Nacrtati digraf relacije R, matricu za R ^{2} i matricu za R^∞ .

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

Nad skupom A={1,2,3,4,5} je definisana relacija R={(1,2),(1,5)(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),(5,4),(5,5)}.

Nacrtati digraf relacije R, matricu za R^2 i matricu za R^∞ .

Zadatak 3 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

a) Nacrtati graf čija je matrica susedstva

b) Odrediti matricu za R^2 i matricu za R^∞ .

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4 - predviđeno vreme trajanja 10 minuta

a) Nacrtati graf čija je matrica susedstva

b) Odrediti matricu za R ^{2} i matricu za R^∞

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ZAKLJUČAK

ZAKLJUČAK

U ovoj lekciji je objašnjen je princip grafova.

Predstavljeni su grafovi preko relacija i matrica povezanosti.

Objašnjen je stepen ulaznih i izlaznih čvorova, putevi u grafu, relacije povezanosti.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.