UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Jednodimenzionalne slučajne promenljive

Lekcija 03

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 03

JEDNODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Uvod

UVOD

Jednodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog i neprekidnog tipa.

U slučaju da svakom elementarnom ishodu ω u skupu svih ishoda Ω pridružujemo određeni realni broj, tada definišemo funkciju koja se naziva $\text{slučajna promenljiva}$ ili $\text{stohastička promenljiva}$. Slučajne promenljive se često nazivaju i slučajne veličine. Pojam slučajne promenljive je jedan od osnovnih pojmova u teoriji verovatnoće. Slučajna promenljiva se označavaju sa $X, Y, Z, \ldots$ Ako neka slučajna promenljiva X svakom ishodu $\omega \in \Omega$ korespondira jednu njegovu numeričku karakteristiku ili numeričko obeležje tj. realan broj u oznaci $X(\omega)$, takvu slučajnu promenljivu nazivamo $\text{jednodimezionalna slučajna promenljiva}$. Dakle, jednodimenzionalna slučajna promenljiva je realna funkcija, jer je njen kodomen skup rralnih brojeva.

Postoje dva osnovna tipa jednodimenzionalnih slučajnih promenljivih: diskretne i neprekidne slučajne pormenljive. Diskretne slučajne promenljive predstavljaju preslikavanja prebrojivog skupa svih ishoda u skup realnih brojeva. U ovom slučaju slučajna promenljiva uzima vrednosti iz konačnog skupa vrednosti ili iz beskonačnog (prebrojivog) skupa. Primer takvih skupova su recimo skup vrednosti od 0 do n (n - ceo pozitivan broj) ili skup celih brojeva. S druge strane, neprekidne slučajne promenljive preslikavaju neprebrojivi skup ishoda u realnih brojeva. U ovom slučaju slučajna promenljiva uzima vrednosti iz beskonačnog skupa vrednosti. Primer takvog skupa je recimo interval $(0,1)$ ili 0 skup realnih brojeva i neprekidna promenljiva se definiše na intervalu tada na $(-\infty, +\infty)$. Postoje i slučajne promenljive koje predstavljaju kombinacija ovih tipova, ali njih ovde nećemo razmatrati. U ovoj lekciji ćemo govoriti o opštim osobinama jednodimezionalnih slučajnih promenljivih, a zatim ćemo govoriti posebno o onima koje su diskretnog tipa i o onima koje su neprekidnog tipa.

Šire gledano, može se definisati funkcija koja svakom elementarnom ishodu pridružuje dve ili više njegovih numeričkih karakteristika, pa bi u tom slučaju slučajna promenljiva bila realna funkcija dve ili više promenljivih. O njima ćemo govoriti na narednom času.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

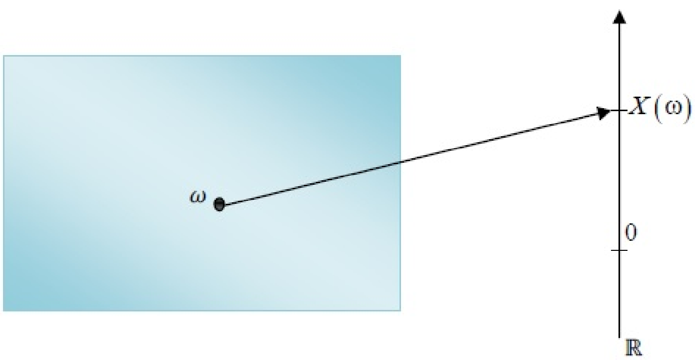
Pojam jednodimenzionalne slučajne promenljive

DEFINICIJA. PRIMER

Slučajna promenljiva je funkcija koja svakom elementarnom ishodu iz skupa svih ishoda dodeljuje realan broj.

Definicija 1. Slučajna promenljiva X je funkcija koja svakom elementarnom ishodu $\omega \in \Omega$ dodeljuje realan broj $X(\omega)$ (videti sliku).

Slučajne promenljive označavaćemo velikim slovima abecede X, Y, Z sa indeksima ili bez njih.



Slika 1.1 Prikaz definicije jednodimenzionalne slučajne promenljive [Izvor: Autor].

Primer 1. Novčić se baca dva puta. Neka je X broj pojava pisma na gornjoj strani novčića. Tada je skup svih ishoda $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, gde P predstavlja da je u odgovarajućem bacanju palo pismo, a da je u odgovarajućem bacanju pala glava. Tada imamo:

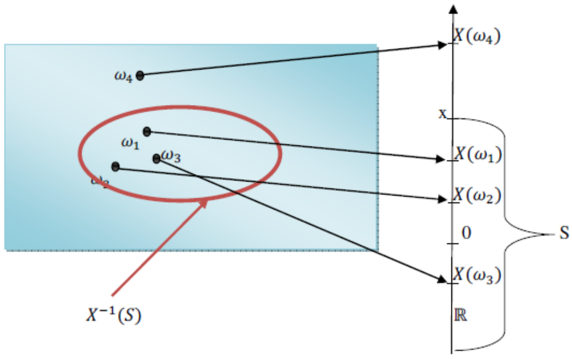
$$X(PP) = 2, \quad X(PG) = X(GP) = 1, \quad X(GG) = 0.$$

Neka je $S = (-\infty, x)$ podskup skupa realnih brojeva, gde je $x \in \mathbb{R}$. Tada sa $\{X \in S\}$ označimo događaj da slučajna promenljiva “uzme” vrednosti u skupu S. Slučajne događaje smo definisali kao podskupove skupa svih ishoda Ω, koji sadrže elementarne događaje ω. Tada se $\{X \in S\}$ može shvatiti kao skup svih onih realnih brojeva takvih da je, $X(\omega) \in S$ tj. $X(\omega) < x$, gde je $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $\{X \in S\}$ je kraći zapis za $\{\omega | X(\omega) \in S\} = \{\omega | X(\omega) < x\}$. Tada možemo slučajnu promenljivu definisati na sledeći način.

Definicija 2. Slučajna promenljiva $X = X(\omega)$ je funkcija koja skup svih ishoda Ω preslikava u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, takva da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \{X < x\} = X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathscr{F},$$

gde $\mathscr{F}$ označava klasu događaja koja se naziva polje događaja (videti sliku 2).



Slika 1.2 Jednodimenzionalna slučajna promenljiva [Izvor: Autor].

AUDIO VIDEO KLIP

Pojam jednodimenzionalne slučajne promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMERI – JEDNODIMENZIONALNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Slučajna promenljiva nema određenu realnu vrednost, već se govori o verovatnoći da ona uzme neku realnu vrednost.

Primer 2. Posmatrajmo ponovo Primer 1 i uzmimo da je $S = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$. Tada je

$$\{X \in S\} = \left\{X(\omega) < \frac{3}{2}\right\} = \{GG, PG, GP\},$$

jer je $X(GG) = 0 < \frac{3}{2}$, $X(PG) = X(GP) = 1 < \frac{3}{2}$, dok je $X(PP) = 2 > \frac{3}{2}$.

U radu sa slučajnim promenljivima potrebno je odgovoriti na pitanje kolika je verovatnoća da vrednost slučajne promenljive X bude manja od nekog, unapred zadatog, realnog broja x, tj. koliko iznosi $P\{X \in S\}$.

Primer 3. Posmatrajmo ponovo Primer 2. Tada je

$$P\{X \in S\} = P\left\{X(\omega) < \frac{3}{2}\right\} = P\{X = GG\} + P\{X = PG\} + P\{X = GP\}.$$

Kako su

$$P\{X = GG\} = P\{X = PG\} = P\{X = GP\} = \frac{1}{4},$$

tada je $P\{X \in S\} = \frac{3}{4}$.

Napomena. U raznim problemima (zadacima) mogu se i sledeći slučajevi sresti $S = (\infty, x]$ $S = [x_1, x_2]$, $S = (x_1, x_2)$, $S = [x_1, x_2)$, $S = (x_1, x_2]$, $S = (x, \infty)$ ili $S = [x, \infty)$. Tada važi da je

$$\begin{gathered} P\{X \in S\} = P\left\{X(\omega) \leq x\right\} \\ P\{X \in S\} = P\left\{x_1 \leq X(\omega) \leq x_2\right\} \\ P\{X \in S\} = P\left\{x_1 < X(\omega) < x_2\right\} \\ P\{X \in S\} = P\left\{x_1 \leq X(\omega) < x_2\right\} \\ P\{X \in S\} = P\left\{x_1 < X(\omega) \leq x_2\right\} \\ P\{X \in S\} = P\left\{x > X(\omega)\right\} = 1 - P\left\{X(\omega) \leq x\right\} \\ P\{X \in S\} = P\left\{x \geq X(\omega)\right\} = 1 - P\left\{X(\omega) < x\right\}. \end{gathered}$$

FUNKCIJA RASPODELE

Funkcija raspodele je jedna karakteristika slučajne promenljive koja omogućava da se izračuna verovatnoća da slučajna promenljiva uzme vrednost na nekom podskupu skupa $\mathbb{R}$.

Važnu ulogu pri izučavanju slučajnih promenljivih ima funkcija raspodele koja se može dodeliti svakoj slučajnoj promenljivoj.

Definicija 3. Neka je $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ slučajna promenljiva. Funkcija, u oznaci F_X, pri čemu $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$, definisana sa

$$F_X(x) = P\left(\{X < x\}\right),$$

za svako $x \in \mathbb{R}$, naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkcija raspodele je poznata i kao kumulativna funkcija ili distribuanta. Osobine funkcije raspodele su sledeće:

1. Za svaka dva realna broja x_1 i x_2 takva da je $x_1 \leq x_2$, važi da je $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$. Dakle, funkcija raspodele je neopadajuća.

2. Važi da je

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1,$$

3. Funkcija raspodele je naprekidna funkcija sleva u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$, tj. važi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x).$$

U primenama se najčešće sreću dva tipa slučajnih promenljivih: slučajne promenljive diskretnog tipa i slučajne promenljive neprekidnog tipa .

Napomena: Vrednosti slučajne promenljive ne može se predvideti pre obavljenog eksperimenta, jer u svakom pojedinačnom eksperimentu slučajna promenljiva X je slučajna vrednost. Međutim, funkcija raspodele je poznata i ona odražava sve bitne osobine slučajne promenljive. Zato se ponašanja slučajne promenljive posmatra u velikom broju ponovljenih eksperimenata i opisuje pomoću verovatnoće. Iz ovih razloga predmet proučavanja u teoriji verovatnoće nisu slučajne promenljive, već njihove funkcije raspodela.

Poglavlje 2

Jednodimezionalne slučajne promenljive diskretnog tipa

POJAM SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Slučajna promenljiva diskretnog tipa može da "uzme" vrednosti samo u diskretnom skupu.

Slučajna promenljiva X je diskretnog tipa ako postoji diskretan (prebrojiv) skup brojeva $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$takav da je $P\{X \in R_X\} = 1,$ (tj. $P\{X \in R_X^C\} = 0$). Dakle, slučajna promenljiva X može da "uzme" vrednosti samo u diskretnom skupu R_X.

Primer 4. U Primeru 1 imamo da je $R_X = \{0, 1, 2\}$.

Raspodela verovatnoća slučajne promenljive X diskretnog tipa određena je verovatnoćama $p(x_k) = P\{X = x_k\}, x_k \in R_X, k = 1, 2, \ldots$ tj.

$$F_X(S) = \sum_{x_k \in S} p(x_k),$$

za $X^{-1}(S) \in \mathscr{F}$. Slučajne promenljive diskretnog tipa se često zadaju u sledećem obliku

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \ldots & p(x_n) & \ldots \end{pmatrix},$$

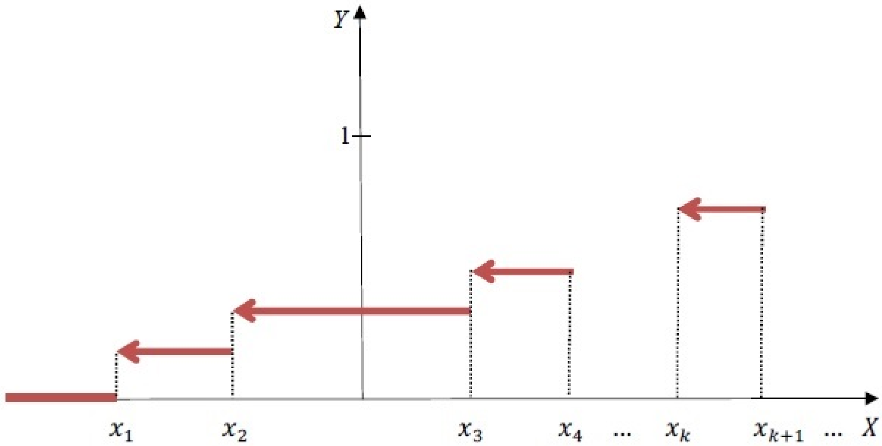
gde važi da je

$$\sum_k p(x_k) = 1.$$

FUNKCIJA RASPODELE SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Kod slučajnih promenljivih diskretnog tipa funkcija raspodele je stepenasta funkcija.

Kod slučajnih promenljivih diskretnog tipa funkcija raspodele je stepenasta funkcija.Veličina skoka u tački x_k je $P\{X = x_k\}$ (videti sliku).



Slika 2.1 Funkcija raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa [Izvor: Autor].

Za diskretnu slučajnu promenljivu kod koje je $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$ gde je $p_1 = p(x_1)$, $p_2 = p(x_2)$, ..., $p_n = p(x_n)$, imamo da je

$$F_X(x) = P(\{X < x\}) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \le x_1, \\ p_1, & \text{za } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{za } x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & \text{za } x_3 < x \le x_4, \\ \vdots & \vdots \\ 1, & \text{za } x > x_n, \end{cases}$$

Dakle, imamo da je

$$\begin{aligned} F_X(x_1) &= P(\{X < x_1\}) = 0, \\ F_X(x_2) &= P(\{X < x_2\}) = P(\{X < x_1\}) + P(\{x_1 < X \le x_2\}) = p_1, \\ F_X(x_3) &= P(\{X < x_3\}) = P(\{X < x_1\}) + P(\{x_1 < X \le x_2\}) \\ &\quad + P(\{x_2 < X \le x_3\}) = p_1 + p_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

PRIMER 1

Primer određivanje raspodele i funkcije raspodele za slučajnu promenljivu diskretnog tipa.

Primer 5. Iz prethodnog primera imamo da je

$$\begin{aligned} P\{X = 0\} &= P\{X = GG\} = \frac{1}{4}, \\ P\{X = 1\} &= P\{X = PG\} + P\{X = GP\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ P\{X = 2\} &= P\{X = PP\} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

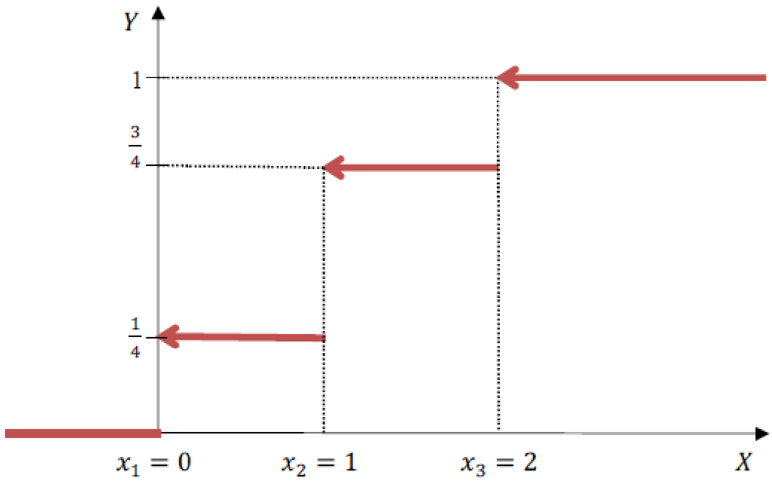
Dakle, u odnosu na prethodno uvedenu notaciju imamo da je $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$, kao i $p(x_1) = \frac{1}{4}$, $p(x_2) = \frac{1}{2}$ i $p(x_3) = \frac{1}{4}$. To zapisujemo u sledećem obliku

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Uočimo da je funkcija raspodele slučajne promenljive za Primer 5. Tada je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{za } 0 < x \leq 1, \\ \frac{3}{4}, & \text{za } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{za } x > 2. \end{cases}$$

Grafički, funkcija raspodele za datu slučajnu promenljivu je predstavljena na narednoj slici.



Slika 2.2 Funkcija raspodele za datu slučajnu promenljivu diskretnog tipa [Izvor: Autor].

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

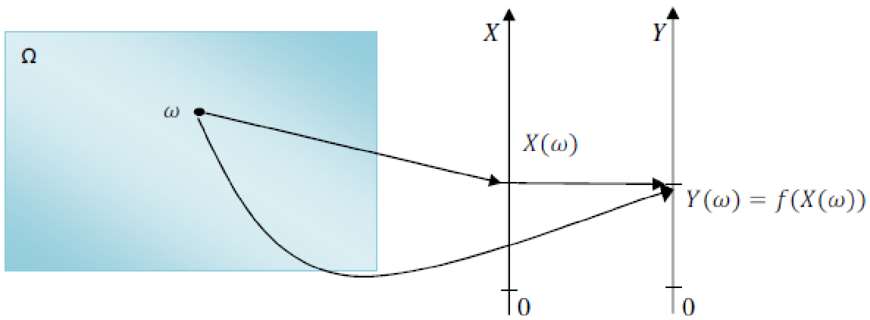
Funkcije slučajne promenljive diskretnog tipa

POJAM

Neka je data slučajna promenljiva X tj. njena raspodela ili gustina. U nekim situacijama je bitno odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = f(X)$.

Pomenimo i sledeći problem koji se javlja kod slučajnih promenljivih bez obzira na to da li su diskretnog ili neprekidnog tipa. Neka je data slučajna promenljiva X tj. njene raspodela ili gustina. Treba odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = f(X)$. Na primer, $Y = |X|$, $Y = X^2$ ili $Y = e^X$ i sl.

Slučajnu promenljivu $Y = f(X)$ treba shvatiti tako da svakom ω nekog slučajnog opita odgovara broj $X(\omega)$ koji uvrstimo kao argument funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i dobijamo broj $Y(\omega) = f(X(\omega))$ (videti sliku).



Slika 3.1 Grafički prikaz kako se vrši formiranje novih slučajnih promenljivih [Izvor: Autor].

Primer. Neka je data raspodela

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X^2 - 2.$

Rešenje. Kako X uzima vrednosti $R_X = \{-1, 0, 1\}$, to promenljiva Y uzima vrednosti $R_Y = \{-2, 1\}$. Dalje, kako je

$$\{Y = -2\} = \{X = 0\} \quad \text{i} \quad \{Y = 1\} = \{X = -1\} + \{X = 1\},$$

imamo da je

$$P\{Y = -2\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2},$$
$$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Tada je raspodela slučajne promenljive

$$Y : \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

FUNKCIJA SLUČAJNE PROMENLJIVE DISKRETNOG TIPA

Ako je X slučajna promenljiva diskretnog tipa i funkcija f je neprekidna funkcija, tada je $Y = f(X)$ takođe slučajna promenljiva diskretnog tipa.

U opštem slučaju važi da je

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \dots & p(x_n) & \dots \end{pmatrix}$$

i $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tada je slučajna promenljiva $Y = f(X)$, definisana na sledeći način

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_m & \dots \\ q(y_1) & q(y_2) & q(y_3) & \dots & q(y_m) & \dots \end{pmatrix},$$

gde je $y \in R_Y$ ako i samo ako je $y_j = f(x_i)$, za neko $x_j \in R_X$, $(i, j \in \mathbb{N})$.

Iz prethodnog primera je očigledno da ako funkcija nije obostrano jednoznačna i ako skup vrednosti slučajne promenljive R_X ima n $(n \in \mathbb{N})$ elemenata, tada važi da skup vrednosti slučajne promenljive R_Y ima m $(m \in \mathbb{N})$ elemenata, pri čemu je $m < n$. Takođe je

$$q(y_j) = P(\{Y = y_j\}) \sum_{i: f(x_i) = y_j} P(\{X = x_i\}), \quad y_j \in R_Y, \qquad (*)$$

jer je $\{Y = y_j\} = \bigcup_{i: f(x_i) = y_j} \{X = x_i\}$.

Dakle, ako je X slučajna promenljiva diskretnog tipa i funkcija f je neprekidna funkcija, tada je $Y = f(X)$ takođe slučajna promenljiva diskretnog tipa, čija je raspodela određena formulom (*).

AUTORSKI VIDEO KLIP

Funkcije slučajne promenljive diskretnog tipa.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Funkcija slučajne promenljive diskretrnog tipa.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Slučajne promenljive neprekidnog tipa

POJAM SLUČAJNE PROMENLJIVE NEPREKIDNOG TIPA

Slučajna promenljiva apsolutno-neprekidnog tipa može da "uzima" vrednosti u neprekidnom skupu. Zato se izračunavanje odgovarajućih verovatnoća vrši integralnim računom.

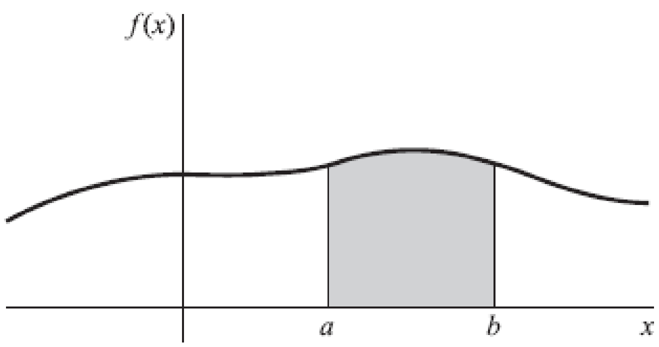
Slučajna promenljiva X je (apsolutno) neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$ takva da za svaki interval $[a, b)$ važi

$$F_X([a,b)) = P\{a \leq X < b\} = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Funkcija $\varphi(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ se naziva gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X i važi da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Geometrijski, pomenuta verovatnoća je jednaka površini ispod krive koja je grafik funkcije gustine na intervalu $[a, b)$.



Slika 4.1 Vrednost verovatnoće je jednaka površini ispod krive koja je grafik funkcije gustine na intervalu $[a, b)$ [Izvor: Autor].

Napomena. Ova verovatnoća će ostati nepromenjena ako umesto intervala $[a,b)$ uočimo interval (a,b) ili $(a,b]$ ili $[a,b]$, jer za slučajnu promenljivu apsolutno neprekidnog tipa za svaki prebrojiv skup $S=\{x_1,x_2,\ldots\}$ važi

$$P\{X\in S\}=\int_S \varphi(x)dx=\sum_k \int_{xk}^{xk} \varphi(x)dx=0.$$

PRIMER 1

Provera da li neka funkcija može biti gustina neke neprekidne slučajne promenljive.

Proverite je li funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana izrazom

$$\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\\ 0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\end{cases}$$

funkcija gustine neke neprekidne slučajne promenljive.

Rešenje.

1. data funkcija je nenegativna;

2. funkcija je normirana jer važi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{6}}\varphi(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\varphi(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\varphi(x)dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx=\sin x|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=1.$$

Dakle, data funkcija može da bude funkcija gustine neke neprekidne slučajne promenljive.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Pojam slučajne promenljive neprekidnog tipa i primer.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FUNKCIJA RASPODELE SLUČAJNE PROMENLJIVE NEPREKIDNOG TIPA

Funkcija raspodele se izražava (izračunava) pomoću funkcije gustine.

Ako slučajna promenljiva X ima gustinu $\varphi(x),$ tada se funkcija raspodele

$$F_X(x) = P(\{X < x\}),$$

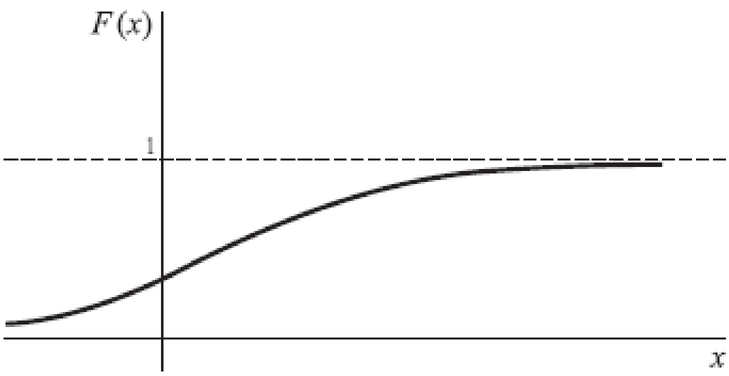
izražava pomoću gustine, na sledeći način

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du.$$

Odavde sledi da u svakoj tački neprekidnosti gustine $\varphi(x)$ važi $F'(x) = \varphi(x).$ Primetimo da simbol $\int_S dF(x)$ u apsolutno neprekidnom slučaju znači

$$\int_S dF(x) = \int_S \varphi(x)dx.$$

Funkcije raspodele je je monotono rastuća funkcija, čije vrednosti rastu od 0 do 1, za $x \in (-\infty, +\infty)$ (videti sliku).



Slika 4.2 Funkcija raspodele [Izvor: Autor].

PRIMER 2 – I DEO

Određivanje funkcije gustine slučajne promenljive neprekidnog tipa.

Primer 8. Slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele, na sledeći način

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{mx}{2}+\frac{1}{4}, & -1<x\le 0,\\ \frac{1}{4}+mx-\frac{x^2}{4}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

Odrediti nepoznatu konstantu m, funkciju gustine i nacrtati njen grafik, verovatnoću $P(X>\frac{m}{2})$.

Rešenje. Da bi funkcija $F(x)$ bila neprekidna mora da budu ispunjeni uslovi $F(-1)=0$ i $F(1)=1$. Tada imamo da je za $x=-1$: $\frac{(-1)^2}{4}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}=0$, tj. $m=1$. Za $x=1$: $\frac{1}{4}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}=0$,tj. $m=1$.

Napomenimo da je potrebno da funkcija bude neprekidna i u tački $x=0$, što je zadovoljeno za svako $m\in\mathbb{R}$.

Ukupno, za $m=1$ data funkcija predstavlja funkciju raspodele i glasi

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}, & -1<x\le 0,\\ \frac{1}{4}+x-\frac{x^2}{4}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

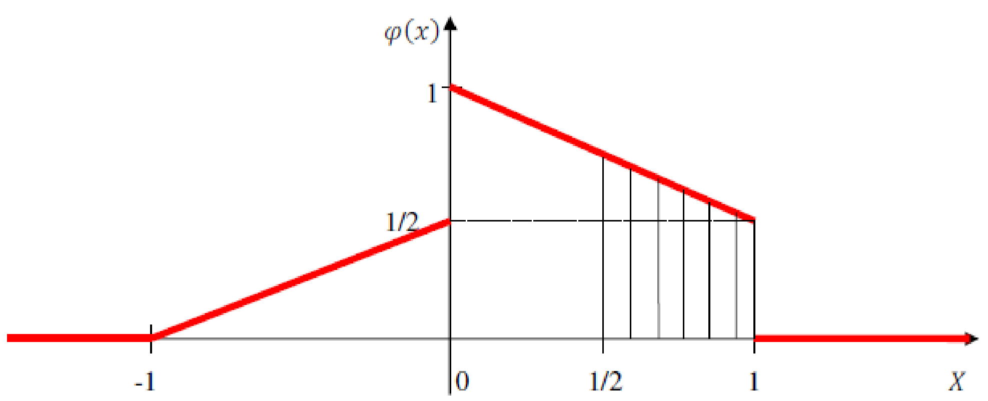
PRIMER 2 – II DEO

Određivanje funkcije raspodele.

Funkcija gustine se dobija iz osobine da je $\varphi(x)=F'(x)$. Tada je

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\le -1, x>1,\\ \frac{x}{2}+\frac{1}{2}, & -1<x\le 0,\\ 1-\frac{x}{2}, & 0<x\le 1,\end{cases}$$

Grafik funkcije gustine dat je na sledećoj slici.



Slika 4.3 Grafik funkcije gustine $\varphi(x)$ [Izvor: Autor].

Tražena verovatnoća predstavlja šrafirani deo na datoj slici i tada imamo, za $m = 1$, da je

$$P\left(\left\{X > \frac{m}{2}\right\}\right) = P\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{16}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtebe-a: neprekidna slučajna promenljiva.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Funkcije slučajne promenljive neprekidnog tipa

USLOVI POD KOJIMA ĆE FUNKCIJA OD SLUČAJNE PROMENLJIVE NEPREKIDNOG TIPA BITI SLUČAJNA PROMENLJIVA NEPREKIDNOG TIPA

Ako je funkcija monotona ili deo po deo monotona tada će se slučajna promenljiva neprekidnog tipa preslikati u slučajnu promenljivu neprekidnog tipa.

Videli smo da, ako je X slučajna promenljiva diskretnog tipa i funkcija f je neprekidna funkcija, tada je $Y = f(X)$ takođe slučajna promenljiva diskretnog tipa. Međutim, u opštem slučaju ovo ne važi ako je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa. Tada je potrebno da funkcija f ispuni i neke dodatne uslove. Ovde ćemo razmotriti dva specijalna slučaja u vezi sa time.

1° Funkcija f je monotona rastuća funkcija.

Neka $m = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ i $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, pri čemu je $-\infty \leq m \leq M \leq \infty$. S obzirom da monotone funkcije imaju inverzne funkcije, tada postoji funkcija $f^{-1} : (m, M) \mapsto \mathbb{R}$ koja je, takođe, monotona. Za promenljivu $Y = f(X)$, označimo sa $g(y)$ njenu gustinu raspodele, a sa $G(y)$ funkciju raspodele slučajne promenljive Y. Tada je $G(y) = P(\{Y < y\}) = P(\{f(X) < y\})$, odakle dobijamo

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m, \\ \int\limits_{-\infty}^{f^{-1}(y)} \varphi_X(x)\, dx, & m < y < M, \\ 1, & y \geq M, \end{cases}$$

gde je $\varphi_X(x)$ funcija gustine raspodele slučajne promenljive X.
Iz $g(y) = G'(y)$, ako postoji $(f^{-1}(y))'$, sledi da je

$$g(y) = \begin{cases} \varphi_X\left(f^{-1}(y)\right) \cdot (f^{-1}(y))', & m < y < M \\ 0, & y \leq m \text{ ili } y \geq M. \end{cases}$$

2° Funkcija f monotono opadajuća funkcija.

Analogno prethodnom može se pokazati da važi

$$g(y) = \begin{cases} -\varphi_X\left(f^{-1}(y)\right) \cdot (f^{-1}(y))', & m < y < M, \\ 0, & y \leq m \text{ ili } y \geq M. \end{cases}$$

PRIMER

Određivanje gustine raspodele za slučajnu promenjivu koja je funkcija slučajne promenljive neprekidnog tipa.

Neka je data gustina raspodele slučajne promenljive X

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Uočimo funkciju $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, datu sa $f(x) = 3X - 2$. Ova funkcija je očigledno neprekidna i monotono rastuća funkcija. Za nju važi da je $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$, pa je $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{3}$. Na osnovu prethodno rečenog, važi da je

$$g(y) = \varphi\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(f^{-1}(y)\right)'$$

odakle je

$$g(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{y-2}{3}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{y-2)^2}{18}},$$

za svako $y \in \mathbb{R}$.

Poglavlje 6

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (5 MINUTA)

Raspodela diskretne slučajne promenljive

Da li funkcija

$$f(n) = \frac{1}{2^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ \dots),$$

definiše zakon raspodele diskretne slučajne promenljive?

Rešenje. Kako je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ \dots \ = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

i važi da je $0 < f(n) < 1$, za $n = 1, 2, 3, \ \dots$ tada data formula predstavlja raspodelu verovatnoće. Tada možemo zapisati da je zakon ove diskretne slučajne promenljive:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \end{pmatrix}$$

U formuli (1) smo koristili da se suma beskonačnog geometrijskog reda računa po formuli:

$$a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ \dots \ = \frac{a_1}{1 - q}.$$

ZADATAK 2 (5 MINUTA)

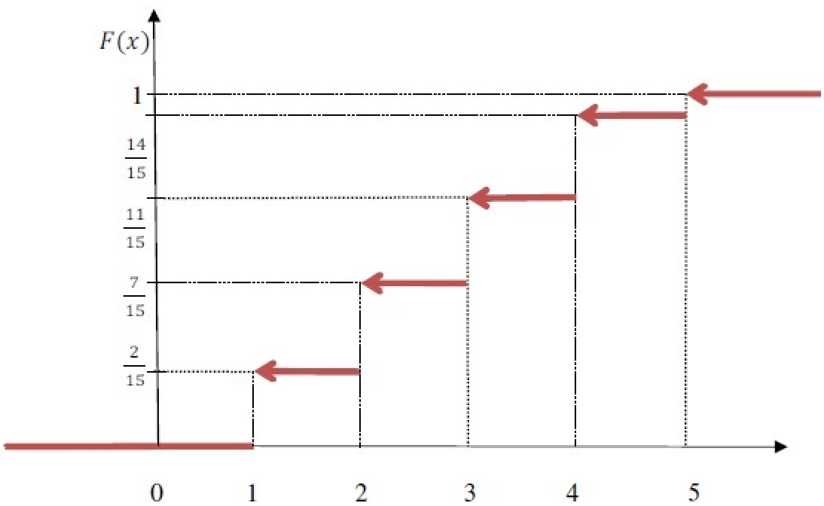
Određivanje zakona raspodele i funkcije raspodele diskretne slučajne promenljive.

Kutija sadrži kuglice numerisane brojevima $1, 2, 3, 4$ i 5, čiji je odnos zastupljenosti u kutiji $2:5:4:3:1$. Ako definišemo slučajnu promenljivu X tako da njene vrednosti budu cifre označene na kuglicama, naći zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive X.

Rešenje. Raspodela verovatnoće ove diskretne slučajne promenljive je: $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{15} & \frac{5}{15} & \frac{4}{15} & \frac{3}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$. Funkcija raspodele za slučajnu promenljivu

$$X: \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \le 1, \\ \frac{2}{15}, & \text{za } 1<x \le 2, \\ \frac{7}{15}, & \text{za } 2<x \le 3, \\ \frac{11}{15}, & \text{za } 3<x \le 4. \\ \frac{14}{15} & \text{za } 4<x \le 5, \\ 1 & \text{za } x>5. \end{cases}$$

Grafik funkcije raspodele je:



Slika 6.1 Grafik funkcije raspodele [Izvor: Autor].

ZADATAK 3 (10 MINUTA)

Određivanje raspodela verovatnoća slučajne promenljive diskretnog tipa.

Iz partije od 100 proizvoda, od kojih su 10 škart, izabran je na slučajan način uzorak od pet proizvoda. Ako sa X označimo broj škartova u uzorku, naći zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive.

Rešenje. Moguće vrednosti diskretne slučajne promenljive X, što označavamo sa R_X, su

$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

tj. slučajna promenljiva X može da uzme te vrednosti. Da bismo odredili zakon raspodele ove slučajne promenljive moramo odrediti verovatnoće da slučajna promenljiva uzme te vrednosti. Stoga, imamo:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}}, \quad P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{4}}{\binom{100}{5}}, \quad P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}},$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{90}{1}}{\binom{100}{5}}, \quad P(X = 5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{90}{0}}{\binom{100}{5}}.$$

Sa tačnošću od 10^{-3} dobijamo sledeću raspodelu verovatnoća:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,583 & 0,340 & 0,070 & 0,007 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Određivanje raspodela verovatnoće diskretne slučajne promenljive.

Strelac, koji ima četiri metka, gadja u cilj dok ne pogodi. Broj utrošenih metaka je slučajna promenljiva X. Naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X, pod uslovom da je verovatnoća pogotka cilja pri svakom gadjanju jednaka 0,8.

Rešenje. Ovde se radi o diskretnoj slučajnoj promenljivoj, za koju je $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$. Ako sa $\{X = 1\}$ označimo dogadjaj da je meta pogodjena iz prvog pokušaja, tada je $P(\{X = 1\}) = 0,8$. Dalje, ako sa $\{X = 2\}$ označimo dogadjaj da je meta pogodjena drugim metkom (a promašena prvim), tada je $P(\{X = 2\}) = (1 - 0,8) \cdot 0,8 = 0,16$. Na isti način možemo zaključiti da je $P(\{X = 3\}) = (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,8) \cdot 0,8 = 0,032$, kao i $P(\{X = 4\}) = (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,8) \cdot 1 = 0,008$.

Raspodela verovatnoće je tada:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,8 & 0,16 & 0,032 & 0,008 \end{pmatrix}.$$

ZADATAK 5 - I DEO (15 MINUTA)

Primer određivanje raspodele za deo zadatka pod a).

Primer 6. Iz kutije u kojoj su četiri cedulje numerisane brojevima 1,2,3 i 4 se na slučaj način izvlači jedna po jedna cedulja, bez vraćanja, sve dok se ne izvuče cedulja sa neparnim brojem. Naći zakon raspodele:
a) Slučajne promenljive X zbir izvučenih brojeva,
b) Slučajne promenljive Y broj izvlačenja.

Rešenje. a) Skup svih ishoda ovog opita je:

$$\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\}.$$

Posmatrajući skup svih ishoda vidimo da zbir izvučenih brojeva može biti 1, 3, 5, 7 i 9. Dakle, $R_X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Odavde imamo da ako je zbir jednak 1, treba da se izvuče broj 1 od četiri moguća, pa je $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}$.

Ako je zbir jednak 3, to znači da je odmah izvučen broj tri ili je izvučen broj 2, pa zatim broj 1. Kako su ovo disjunktni događaji (može da se desi samo jedan od njih) imamo

$$P\{X = 3\} = P\{3, 21\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3+1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ako je zbir jednak 5, tada se desilo da je izvučena ili kombinacija 23 ili 41, pa onda imamo

$$P\{X = 5\} = P\{23, 41\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Ako je zbir 7, tada je izvučena jedna od kombinacija 43 ili 241 ili 421, pa imamo da je:

$$P\{X = 7\} = P\{43, 241, 421\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+1+1}{24} = \frac{1}{6}.$$

Konačno, ako je zbir 9, tada je izvučeno ili 243 ili 423, pa imamo da je

$$P\{X = 9\} = P\{243, 423\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1+1}{24} = \frac{1}{12}.$$

Tada dobijamo

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Provera da li su verovatnoće dobro izračunate jeste ta da zbir svih ovih verovatnoća mora biti jednak 1. Zaista

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1.$$

ZADATAK 5 – II DEO

Primer određivanje raspodele za deo zadatka pod b).

b) Na sličan način imamo da je $R_Y = \{1, 2, 3\}$. Gledajući skup svih ishoda, imamo da ako je bilo jedno izvlačenje tada je izvučen broj 1 ili broj 3, pa je

$$P\{Y = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ako je bilo dva izvlačenja tada je izvučena jedna od sledećih kombinacija 21 ili 23 ili 41 ili 45. Tada imamo

$$P\{Y = 2\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ako je bilo tri izvlačenja tada je izvučena kombinacija 241 ili 243 ili 421 ili 423. Tada imamo da je

$$P\{Y = 3\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Ukupno imamo da je:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ovde, takođe, imamo da je $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

ZADATAK 6 – I DEO (15 MINUTA)

Određivanje konstante a tako da data funkcija bude funkcija gustine.

Primer 7. Odrediti konstantu a tako da funkcija:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a \cdot x^2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x < 0,\ x > 2, \end{cases}$$

budu gustina raspodele verovatnoće slučajne promenljive X. Zatim, nađimo funkciju raspodele i izračunajmo verovatnoću $P(\{0 < X < 1\})$.

Rešenje. Kao što smo već rekli je:

$$F_X(x) = P(\{X < x\}) = P(\{-\infty < X < x\}) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du.$$

Odavde je $F_X'(x) = \varphi(x)$. Takođe je: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$. Ovaj uslov se naziva i normirajući uslov.

U ovom slučaju je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 ax^2dx = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8a}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8}.$$

Dakle, imamo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot x^2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x < 0,\ x > 2. \end{cases}$$

ZADATAK 6 – II DEO

Određivanje funkcije raspodele slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa, kao i skiciranje njenog grafika.

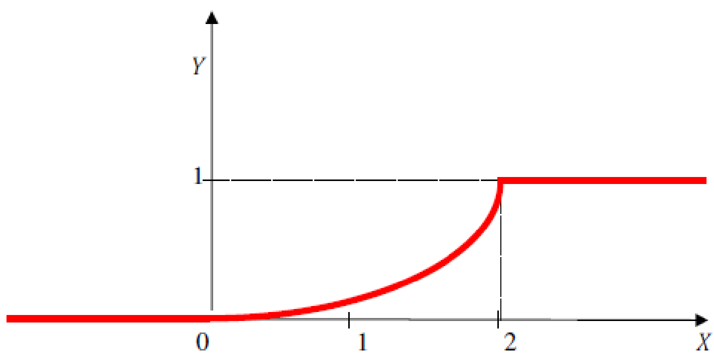
Tada je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x \frac{3}{8} \cdot t^2 dt, & 0 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^3}{8}, & 0 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Konačno, tražena verovatnoća je:

$$P(\{0 < X < 1\}) = \int_0^1 \frac{3}{8} \cdot x^2 dx = \frac{1}{8}.$$

Grafik funkcije raspodele slučajne promenljive X je predstavljen na sledećoj slici.



Slika 6.2 funkcije raspodele slučajne promenljive X [Izvor: Autor].

ZADATAK 7 (15 MINUTA)

Postavka zadatka i određivanje konstante A tako da data funkcija bude funkcija gustine, a zatim za tako određenu konstantu, određivanje funkcije raspodele slučajne promenljive.

Neprekidna slučajna promenljiva X zadata je gustinom (videti sliku):

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \cdot \cos 2x, & \text{za} \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{za} \quad x < -\frac{\pi}{4} \ \text{ i } \ x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Odrediti konstantu A.

Naći funkciju raspodele $F(x)$.

Izračunati verovatnoću $P\left(0 < X < \frac{\pi}{8}\right)$.

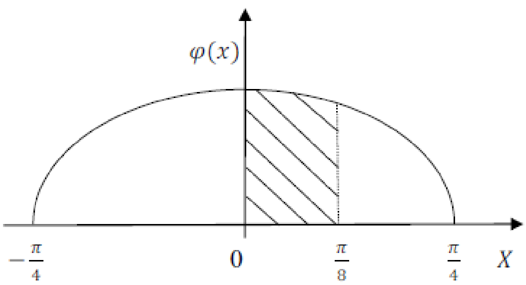
Rešenje. Iz uslova:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} A \cdot \cos 2xdx = 1 \Rightarrow \quad A\frac{\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}}{2} = 1 \qquad A\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = 1,$$

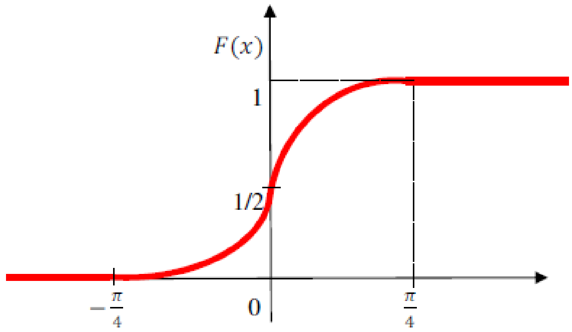
i tada je $A = 1$. Funkcija raspodele je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \cos 2xdx = \frac{1}{2}\{\sin 2x + 1, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \end{cases}$$

Grafik funkcije raspodele slučajne promenljive X dat je na sledećoj slici:



Slika 6.3 Grafički prikaz funkcije raspodele [Izvor: Autor].



Slika 6.4 Grafik funkcije raspodele slučajne promenljive X [Izvor: Autor].

Tražena verovatnoća je

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{8}\right) = F\left(\frac{\pi}{8}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

ZADATAK 8 – I DEO (15 MINUTA)

Određivanje konstanti tako da funkcije raspodele neprekidna funkcija.

Funkcija raspodele ima oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a, \\ A + B\arcsin\frac{x}{a}, & -a < x < a \\ 1, & x \geq a. \end{cases},$$

Odrediti: za koje vrednosti A i B je funkcija raspodele neprekidna; verovatnoću da se X nadje na intervalu $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, gustinu raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.

Rešenje. Da bi funkcija $F(x)$ bila neprekidna mora da budu ispunjeni uslovi: $F(-a) = 0$ i $F(a) = 1$. Tada je:

$$A + B\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right) = 0,$$

$$A + B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right) = 1,$$

Kako je $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ i $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, tada je:

$$A - \frac{\pi}{2}B = 0,$$

$$A + \frac{\pi}{2}B = 1,$$

odakle je $A = \frac{1}{2}$ i $B = \frac{1}{\pi}$.

Funkcija raspodele slučajne promenljive X, tada je

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -a,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & -a<x<a\\ 1, & x\geq a.\end{cases},$$

ZADATAK 8 – II DEO

Određivanje tražene verovatnoće, kao i gustine raspodele.

Tražena verovatnoća je:

$$P\left(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right)=F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\frac{a}{2}}{a}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{-\frac{a}{2}}{a}\right),$$

tj.

$$P\left(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}.$$

Gustina raspodele slučajne verovatnoće:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leq -a,\\ \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right\}', & -a<x<a\\ 0, & x\geq a.\end{cases},$$

tj.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leq -a,\\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a\\ 0, & x\geq a.\end{cases}$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Slučjana promenljiva neprekidnog tipa.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Zadaci za samostalan rad studenata.

Zadatak. Firma na raspolaganju ima šest telefonskih linija. Neka je X broj linija zauzetih u određženom trenutku. Zakon raspodele za X dat je sa

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunati verovatnoće sledećih događaja
A - „bar tri linije su zauzete”,
B - „manje od dve linije su zauzete”,
C - „najmanje četiri linije nisu zauzete”,
D - „zauzeto je između dve i pet linija”.

(b) Izračunati $F_X(1,3),\ F_X(3)$ i $F_X(4,6)$.

(c) Naći funkciju raspodele $F_X(x),\ x \in \mathbb{R}$ i grafički je predstaviti.

Rezultat.(a) $P(A) = 0,55,\ P(B) = 0,25,\ P(C) = 0,45$ i $P(D) = 0,71$.

(b) $F_X(1,3) = 0,25,\ F_X(3) = 0,45$ i $F_X(4,6) = 0.9$.

Zadatak. U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3 i jedna kuglica označena brojem 5. Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.
(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.
(b) Izračunati $F_X(2),\ F_X(4),\ F_X(8)$ i $F_X(16,375)$.
(c) Naći funkciju raspodele, FX (x), za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.
Zadatak. Slučajna promenljiva X data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} k(1-(x-3)^2), & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odrediti konstantu k i skicirati grafik funkcije $\varphi_X(x)$.
(b) Izračunati $P(2.5 < X < 3)$ i $P(X > 3)$.
(c) Odrediti funkciju raspodele F_X i skicirati njen grafik.

Zadatak. Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata” autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{25}, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{x}{25}, & 5 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta?
(b) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” između 3 i 8 minuta?
(c) Naći funkciju raspodele F_X.
(d) Grafički predstaviti funkcije φ_X i F_X.

Vreme izrade: 1. 15 minuta; 2. 20 minuta; 3. 20 minuta; 4. 25 minuta

Zaključak

JEDNODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Jednodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog i neprekidnog tipa, formiranje novih slučajnih promenljivih.

Da bi se izbegla obaveza poznavanja svakog eksperimenta za koji se vezuju verovatnoće, uobičajeno je da se verovatnoće vezuje za pojam koji svi poznaju i koriste – za realne brojeve. Na ovaj način se račun sa verovatnoćama je znatno olakšan.

Slučajna promenljiva je funkcija definisana nad skupom elementarnih događaja čije vrednosti određuju numerički podaci korespondirani slučajnim događajima.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa jednodimenzionalnim slučajnim promenljivim diskretnog I neprekidnog tipa.

Takođe, od poznatih slučajnih promenljivih se mogu formirati nove slučajne promenljive, kao njihove funkcije.

LITERATURA:

M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.
Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.