UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Algebarske strukture. Prirodni, celi i racionalni brojevi

Lekcija 03

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 03

ALGEBARSKE STRUKTURE. PRIRODNI, CELI I RACIONALNI BROJEVI

UVOD

Skup prirodnih, celih, racionalnih i realnih brojeva.

Operacijsko-relacijske strukture prestavljaju osnov daljeg izlaganja gradiva. Ovde ćemo se baviti algebarskim strukturama koje imaju jednu, odnosno binarne operacije.

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova i on se u matematici ne definiše (predstavlja osnovni pojam), ali se proučavaju svojstva brojeva i operacije s njima. Brojevni skupovi i uvedene operacije s njima predstavljaju jedan od osnovnih matematičkih aparata. Znanja usvojene o brojevnim skupovima omogućavaju nesmetano praćenje izlaganja u daljim lekcijama. U ovoj lekciji će biti obnovljenje najvažnije činjenice vezane za brojne skupove i to

- Skup prirodnih brojeva,
- Skup celih brojeva,
- Skup racionalnih brojeva,

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Algebarske strukture sa jednom binarnom operacijom

BINARNA OPERACIJA. PRIMER

Binarne operacije zadate na skupu sa konačnim brojem elemenata možemo predstaviti preko Kelijeve tablice.

Definicija. Neka je G neprazan skup. Svaka funkcija $f : G^n \rightarrow G$ naziva se n -arna operacija (operacija dužine n) skupa G. U slučaju da je $n = 1$ funkcija $f : G \rightarrow G$ se naziva unarna operacija, za $n = 2$ funkcija $f : G^2 \rightarrow G$ se naziva binarna operacija.

Napomena. Na jednom skupu može biti definisano više operacija.

Primer. Logička operacija negacija je unarna operacija u skupu svih iskaza, a skupovna operacija komplement je unarna operacija u univerzalnom skupu U. Logičke operacije konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija su binarne operacije u skupu svih iskaza, dok su presek i unija binarne operacije u univerzalnom skupu U.

Ako je G skup sa konačnim brojem elemenata, tada se neka binarna operacija $* : G^2 \rightarrow G$ može zadati pomoću tablice koja se zove Kelijeva tablica.

Primer. Sledeća tablica

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

definiše binarnu operaciju $* : G^2 \rightarrow G$ u skupu $G = \{a, b, c\}$. Za ovu operaciju, na osnovu date tablice, važi

$$a * a = a, a * b = b, a * c = c,$$
$$b * a = b, b * b = b, b * c = a,$$
$$c * a = c, c * b = a, c * c = c.$$

tj. na ovaj način treba čitati datu tablicu. Predstavljanje neke operacije preko Kelijeve tablice definisane u skupu sa konačnim brojem elemenata je preglednije i ekonomičnije.

Generalno govoreći, neki skup G u kome je definisana jedna binarna operacija $*$ označavamo sa $(G, *)$ i nazivamo algebarska struktura sa jednom binarnom operacijom. O njima, najpre, govorimo u nastavku. Nakon toga, govorićemo o algebarskim strukturama u kojima su definisane dve binarne operacije.

GRUPOID.SEMIGRUPA. MONOID. PRIMER

Grupoid je struktura koja je okarakterisana samo zatvorenošću skupa u odnosu na operaciju. Asocijativni grupoid se naziva semigrupa, dok se semigrupa sa jedinicom naziva monoid.

Definicija. Neka je G neprazan skup i $*$ binarna operacija u skupu G. Uređen par $(G,*)$ naziva se grupoid ako i samo važi

$$(\forall x, y \in G)\ x * y \in G.$$

Grupoid $(G,*)$ je veoma opšta algebarska struktura koja je okarakterisana samo prethodnom osobinom koja se naziva zatvorenost skupa G u odnosu na operaciju $*$. Drugim rečima, ako na bilo koja dva elementa iz skupa G primenimo binarnu operaciju $*$, tada ponovo dobijamo element koji pripada skupu G.

Primer. Uređeni parovi $(PA,\cap)$, kao i $(PA,\cup)$ jesu grupoidi, gde je PA partitivni skup skupa A, a $\cap$ i $\cup$ operacije preseka i unije skupova, tim redom.
Definicija. Neka je $(G,*)$ grupoid.

i) $(G,*)$ je grupoid sa jedinicom, ako postoji jedinični (neutralni) element $e \in G$ takav da važi: $(\forall x \in G) x * e = e * x = x$.
ii) $(G,*)$ je komutativni grupoid ako je $(\forall x, y \in G) x * y = y * x$.
iii) $(G,*)$ je asocijativan grupoid ako je $(\forall x, y, z \in G) x * (y * z) = (x * y) * z$.

Napomena. Ako važi samo $(\forall x \in G) x * e = x$, tada se element e naziva desni jedinični element. Slično, ako samo važi $(\forall x \in G) e * x = x$, tada se element e naziva levi jedinični element. Ako je binarna operacija zadata Kelijevom tablicom tada je ona komutativna, ako je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Za proveru asocijativnosti neke operacije zadate Kelijevom tablicom koristi se Lajtov test o kome ovde neće biti reči.

Napomena. Ako postoji jedinični element za neki grupoid on je jedinstven. Grupoid koji zadovoljava osobinu $iii)$ se naziva semigrupa ili polugrupa. Grupoid koji zadovoljava osobine $i)$ i $iii)$ se naziva monoid.

Primer. Grupoidi (PA,∩), kao i (PA,∪) su grupoidi sa jedinicom, komutativni grupoidi, semigrupe, kao i monoidi. Neutralni element za operaciju ∩ je prazan skup, dok je za operaciju ∪ to skup A. Ranije smo istakli da su operacije ∩ i ∪ komutativne i asocijativne operacije.

GRUPA

Semigrupa koja ima neutralni element i kod koje svaki element ima svoj inverzni element naziva se grupa.

Definicija. Neka je $(G,*)$ grupoid sa jediničnim elementom. Element $x' \in G$ naziva se inverzni element elementa $x \in G$, ako važi:

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G)\, x' * x = x * x' = e$$

Definicija. Ako važi samo

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G)\, x' * x = e,$$

tada je x' inverzni element sa leve strane. Slično, ako samo važi

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G)\, x * x' = e$$

tada je x' inverzni element sa desne strane.

Napomena. Može se dokazati da ako postoji jedinični element, tada je on jedinstven.

Poznajući pojmove asocijativnost, neutralni element i inverzni element za neku binarnu operaciju $*$ može se dati definicija jedne veoma važne algebarske strukture u matematici.
Definicija. Grupoid $(G,*)$ naziva se grupa ako važi

1. $(\forall x, y, z \in G)\, x * (y * z) = (x * y) * z,$

2. $(\exists e \in G)(\forall x \in G) x * e = e * x = x,$

3. $(\forall x \in G)(\exists x' \in G) x' * x = x * x' = e.$

Grupa $(G,*)$ u kojoj je operacija $*$ komutativna naziva se komutativna grupa ili Abelova grupa.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Šta je to apstraktna algebra?

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Teorija grupa - apstraktna algebra.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Dokaz da je određena struktura Abelova grupa.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 3

Youtube snimak: O grupi permutacija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Algebarske strukture sa dve binarne operacije

POLUPRSTEN

Ako u skupu u kome su definisane dve asocijativne binarne operacije važi levi i desni distributivni zakon tada se takva struktura naziva poluprsten.

Postoje veoma važne algebarske strukture sa dve binarne operacije. U takvim algebarskim strukturama ove operacije će biti označavane sa $+$ i $\cdot$. Takođe, neutralni element za operaciju $+$ (ako postoji) označava se sa 0, a za operaciju $\cdot$ sa 1.

Definicija. Neka je P neprazan skup u kome su definisane dve asocijativne binarne operacije $+$ i $\cdot$. Uređena trojka $(P, +, \cdot)$ se naziva poluprsten ako zadovoljava sledeći uslov

$$(\forall x, y, z \in P)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Prethodne formule su tim redom levi distributivni zakon i desni distributivni zakon operacije $\cdot$ prema operaciji $+$.

PRSTEN I POLJE

Poluprsten $(P, +, \cdot)$ je prsten ako važi da je $(P, +)$ Abelova grupa i $(P, \cdot)$ semigrupa. Prsten $(P, +, \cdot)$ je polje ako je $(P \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelova grupa.

Definicija. Neka je P neprazan skup u kome su definisane binarne operacije $+$ i $\cdot$. Uređena trojka $(P, +, \cdot)$ se naziva prsten ako zadovoljava sledeća tri uslova:

1. $(P, +)$ je Abelova grupa,

2. $(P, \cdot)$ je semigrupa,

3.

$$\begin{aligned} &(\forall x, y, z \in P)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot y, && \text{(levi distributivni zakon)} \\ &(\forall x, y, z \in P)\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + y \cdot x, && \text{(desni distributivni zakon).} \end{aligned}$$

Uređena trojka $(0, +, \cdot)$ se naziva trivijalni prsten i za nju važi da je $0 + 0 = 0$ i $0 \cdot 0 = 0$.

Nije teško pokazati da u prstenu važi:

1. $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

2. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$,

3. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$, gde su $(-x)$ i $(-y)$ tim redom inverzni elementi elementima x i y u odnosu na operaciju $+$,

4. ako je $(P, +, \cdot)$ netrivijalni prsten, tada je $0 \neq 1$.

Sledećom definicijom uvodimo jednu strukturu sa strožijim zahtevima za njene operacije, ali veoma značajnu.

Definicija. Prsten $(P, +, \cdot)$ je polje ako je $(P \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelova grupa.

Poglavlje 3

Skup prirodnih brojeva

PRIRODNI BROJ

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova koji se u matematici ne definiše, ali se proučavaju svojstva brojeva i operacije sa njima. Skup prirodnih brojeva se označava sa $\mathbb{N}$.

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova koji se u matematici ne definiše, ali se proučavaju svojstva brojeva i operacije sa njima.

Skup prirodnih brojeva se označava sa $\mathbb{N}$ tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Često se u matematici posmatra skup prirodnih brojeva kome je dodata nula. U tom slučaju važi oznaka $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

U skupu prirodnih brojeva definišu se binarne operacije sabiranja, odnosno množenja brojeva u oznaci $+$, odnosno $\cdot$, za koje važi komutativnost, asocijativnost, leva i desna distrubutivnost množenja prema sabiranju prirodnih brojeva, kao i levi i desni zakon kancelacije. Broj 0 je neutralni element za sabiranje (mada ne pripada skupu) $\mathbb{N}$, dok je broj 1 neutralni element za množenja.

Stoga, struktura $(\mathbb{N}, +)$ predstavlja komutativan i asocijativan grupoid, bez neutralnog elementa.

Struktura $(\mathbb{N}, \cdot)$ predstavlja komutativan i asocijativan grupoid sa jedinicom, ali bez inverznog elementa.

Struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ predstavlja poluprsten.

UREĐENOST SKUPA PRIRODNIH BROJEVA

Najmanji prirodan broj je 1 i on nema svog predhodnika u skup prirodnih brojeva. S druge strane, ne postoji najveći prirodan broj. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo.

Skup prirodnih brojeva je uređen skup. Za njega važi Zakon trihotomije, tj, za svaka dva prirodna broja važi jedno i samo jedno od naredna tri tvrđenja:
$a = b$, ili
$a < b$ (tj. postoji prirodan broj c takav da je $a + c = b$), ili

$a > b$ (tj. postoji prirodan broj d takav da je $b + d = a$).

Skup prirodnih brojeva je dobro uređen relacijom $<$. Ovo znači da svaki neprazan podskup M skupa prirodnih brojeva sadrži najmanji element, tj. postoji broj $k \in M$, takav da je za svako $m \in M$, zadovoljeno da je $k < m$. Za prirodne brojeve važi poredak:

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < n + 1 < \ldots$$

Najmanji prirodan broj je 1 i on nema svog prethodnika u skup prirodnih brojeva, tj. ako je, $k < n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $k = 1$. S druge strane, ne postoji najveći prirodan broj. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo.

Oduzimanje prirodnih brojeva a i b je operacija kojom se ovim prirodnim brojevima, dodeljuje broj $a - b$, koji nazivamo razlika brojeva a i b, takav da je $(a - b) + b = a$. Ako su prirodni brojevi a i b takvi da je $a > b$ tada je i broj $a - b$ prirodan broj. Dakle, jednačina

$$x + b = a,$$

samo u slučaju $a > b$ ima rešenja u skupu prirodnih brojeva, dok u ostalim slučajevima nema rešenja u skupu prirodnih brojeva. Stoga, algebarska struktura $(\mathbb{N}, -)$ nije grupoid.
Prirodan broj b je deljiv prirodnim brojem a, ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $b = k \cdot a$. To označavamo sa " $a|b$ " i čitamo "a deli b". Binarnu relaciju " $|$ ", nazivamo relacija deljivosti i ona predstavlja relaciju poretka u skupu prirodnih brojeva o čemu je već bilo reči.

Prirodni broj koji je deljiv samo brojem 1 i samim sobom se naziva prost broj.

Ako broj nije prost, on je složen broj. Broj 1 nije ni prost, ni složen broj. Svaki složen broj se može izraziti kao proizvod prostih brojeva i oni se nazivaju njegovim prostim činiocima.

3.1 Euklidov algoritam

ODREĐIVANJE NZD ZA DVA PRIRODNA BROJA

Zajednički delilac prirodnih brojeva a i b je svaki prirodan broj c koji istovrememo deli broj a i broj b. Najveći od njih se naziva najveći zajednički delilac brojeva a i b.

Stav o ostacima. Za svaka dva prirodna broja a i b jednoznačno su određeni brojevi $q, r \in \mathbb{N}_0$, takvi da važi $a = b \cdot q + r$, gde je $0 \leq r < b$.

Zajednički delilac prirodnih brojeva a i b je svaki prirodan broj c koji istovrememo deli broj a i broj b, tj. $c|a$ i $c|b$. Najveći među ovim brojevima se naziva najveći zajednički delilac brojeva a i b i označava se sa $NZD(a, b)$. Postavlja se pitanje određivanja NZD za dva prirodna broja a i b ($a > b$).

Ako je broj a deljiv sa b, tada je $NZD(a,b)=b$. S druge strane, ako dati brojevi nisu deljivi jedan drugim tada važi sledeći stav.
Stav. Ako je $a=bq+r,\ (0<r<b)$ tada je

$$NZD(a,b)=NZD(b,r).$$

Za određivanje najvećeg zajedničkog delioca prirodnih brojeva a i b ($a>b$) primenjuje se sledeći postupak (algoritam):

1. broj a delimo brojem b i pritom dobijamo količnik q_1 i ostatak r_1,

2. broj b delimo brojem r_1 i pritom dobijamo količnik q_2 i ostatak r_2,

3. ostatak r_1 delimo brojem r_2 i pritom dobijamo količnik q_3 i ostatak r_3,

4. ovaj postupak nastavljamo tako da dobijamo sledeći niz deljenja:

$$\begin{array}{rc}
a=bq_1+r_1, & 0\le r_1<b,\\
b=r_1q_2+r_2, & 0\le r_2<r_1,\\
r_1=r_2q_3+r_3, & 0\le r_3<r_2,\\
\vdots & \vdots\\
r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, & 0\le r_n<r_{n-1},\\
r_{n-1}=r_nq_{n+1}. &
\end{array}$$

POSTUPAK IZVRŠENJA EUKLIDOVOG ALGORITMA

Ako za dva broja važi da je $NZD(a,b)=1$ tada se oni nazivaju uzajamno prosti brojevi.

Iz prethodnog niza deljenja imamo da je $r_1>r_2>r_3>\ldots$,pa će se ovaj niz nakon konačnog broja koraka završiti i to tako što ćemo stići do ostatka koji je jednak nuli tj. do jednakosti $r_{n-1}=r_nq_{n+1}$.
Tada važi sledeći stav.

Stav. Poslednji ostatak r_n koji je različit od nule u prethodnim jednakostima jeste najveći zajednički delilac brojeva a i b.

Prethodno izloženi postupak se naziva Euklidov algoritam.

Primer. Primenom Euklidovog algoritma odrediti $NZD(1242,136)$.

Rešenje. Primenom postupka opisanog Euklidovog algoritma dobijamo:

$$\begin{aligned}1242 &= 136 \cdot 9 + 18,\\ 136 &= 18 \cdot 7 + 10,\\ 18 &= 10 \cdot 1 + 8,\\ 10 &= 8 \cdot 1 + 2,\\ 8 &= 2 \cdot 4.\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je $NZD(1242, 136) = 2$.

Napomena. Ako za dva broja važi da je $NZD(a, b) = 1$, tada njih nazivamo uzajamno prostim brojevima. Dakle, najveći broj koji brojeve a i b istovremeno deli je broj 1.

3.2 Pozicioni brojni sistemi

POZICIONI DEKADNI SISTEM

U ovom sistemu se uz pomoć deset znakova $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tj. cifara, a na osnovu pozicione (mesne) vrednosti može zapisati svaki prirodan broj.

Postoje razni brojni sistemi za zapisivanje prirodnih brojeva. U svakodnevnoj upotrebi je dekadni brojni sistem. U ovom sistemu se uz pomoć deset znakova $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, a na osnovu pozicione (mesne) vrednosti može zapisati svaki prirodan broj na sledeći način:

$$(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_{10} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

gde su $a_k \neq 0$ i $a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $(j \in \{0, 1, 2 \ldots, k-1, k\}$).

Leva strana ove jednakosti predstavlja tzv. pozicioni dekadni oblik broja, a desna strana je isti taj broj napisan u obliku polinoma po stepenima osnove 10 . Cifru a_0 nazivamo cifra jedinica, a_1 cifra desetica, a_2 cifra stotina i tako dalje.

Prema broju cifara, prirodne brojeve nazivamo jednocifrenim, dvocifrenim, trocifrenim itd.

Primer.

$$27453 = 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3.$$

POZICIONI BINARNI SISTEM

Binarni sistem je uveo nemački matematičar Lajbnic.

Pored dekadnog brojnog sistema u nekim primenama se koriste binarni (dijadski), oktalni, heksadecimalni brojni sistem i dr.

U računarskoj tehnici se koristi binarni brojni sistem, tj. sistem sa osnovom dva, pa će ovde biti više reči o njemu. To je brojni sistem gde za zapisivanje svih prirodnih brojeva koriste samo dve cifre 0 i 1. Dakle, svaki prirodan broj se može jednoznačno zapisati u obliku:

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2 = a^k \cdot 2^k + a^{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

gde je $a_k \neq 0$ i $a_j \in \{0, 1\}$, $(j \in \{0, 1, 2, \dots, k-1, k\})$.

Nedostatak binarnog brojnog sistema je u tome što se relativno mali prirodni brojevi zapisuju pomoću dugačkog niza 0 i 1. Operacije množenja i sabiranja prirodnih brojeva su dosta jednostavnije u dekadnom brojnom sistemu, nego u binarnom.

Međutim, za registrovanje cifara ovog brojnog sistema u elektronskim računarima potrebne su ćelije sa samo dva diskretna stabilna stanja 0 i 1. Fizički principi na kojima se zasniva rad računara dozvoljavaju mnogo lakše realizovanje dva stabilna stanja, nego tri, četiri ili više.

PRIMER

Prevođenje prirodnih brojeva iz dekadnog u binarni brojni sistem i obrnuto.

Primer. Broj 215 iz dekadnog brojnog sistema, prevodimo u binarni na sledeći način

$$\begin{aligned} 215 = (215)_{10} &= 128 + 64 + 6 + 4 + 2 + 1 = \\ &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= (1100111)_2. \end{aligned}$$

Obrnuto, na primer broj $(101101)_2$ prevodimo iz binarnog brojnog sistema u dekadni na sledeći način

$$\begin{aligned} (101101)_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 32 + 8 + 4 + 1 = \\ &= (45)_{10} = 45. \end{aligned}$$

3.3 Binomni obrazac

FAKTORIJEL I BINOMNI KOEFICIJENTI

Za definisanje binomnog obrasca potrebno je uvesti pojmove faktorijel prirodnog broja, kao i binomni koeficijent.

Definicija. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veličinu $n!$ (koja se čita n faktorijel) definišemo na sledeći način:

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1, n! = n \cdot (n-1)!, n \in \mathbb{N}.$$

Ovo je takozvano rekuretno definisanje faktorijela, i na osnovu prethodne definicije imamo da je

$$1! = 1, n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, n \geq 2.$$

Na osnovu date definicije imamo da je

$$2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2! = 6, 4! = 4 \cdot 3! = 24, 5! = 4 \cdot 4! = 120, \ldots$$

Ako je $k \leq n$ i $n, k \in \mathbb{N}$ tada se količnik

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

naziva binomni koeficijent i označava sa $\binom{n}{k}$ i čita se " n nad k. "

Po definiciji je $\binom{n}{0} = 1.$

Za binomne koeficijente važi da je:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

kao i

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Napomena. Za $k < 0$ i $k > n$, gde je $k \in \mathbb{N}$, binomni koeficijent se ne definiše. Broj k je obavezno prirodan broj. S druge strane, binomni koecijent se može zadavati u situacijama kada n nije nužno prirodan broj. Na primer, može se definisati:

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)}{3!},$$

ili

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}-2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}-3\right)}{3!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}.$$

BINOMNA FORMULA

Binomni obrazac se dokazuje primenom Principa matematičke indukcije.

Sada ćemo dati jednu veoma važnu formulu (obrazac) koja se naziva Binomna formula ili Binomni obrazac. Ona se dokazuje Principom matematičke indukcije. Ovde navodimo samo njen iskaz.

Stav. Za $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

ili kraće zapisano

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Ako u prethodnoj formuli stavimo da je $a = b = 1$, dobijamo

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Posledica ovog stava je

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Ako u prethodnoj formuli stavimo da je $a = b = 0$, dobijamo

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Binomna formula dokazana matematičkom indukcijom.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

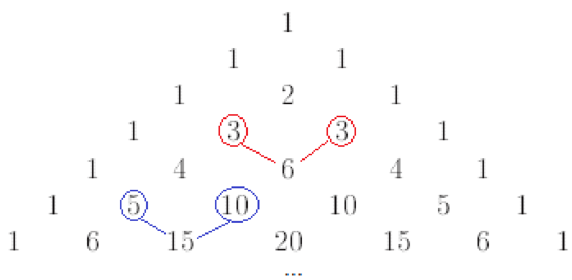
PASKALOV TROUGAO

Jedan postupak za određivanje vrednosti binomnih koeficijenata u Binomnoj formuli dao je čuveni francuski matematičar Blez Paskal.

Paskalov trougao predstavlja način za određivanje vrednosti binomnih koeficijenata koji stoje uz odgovarajuće članove u Binomnoj formuli. Naime, iz Binomne formule možemo uočiti sledeće

$$
\begin{gathered}
(a+b)^0 = 1, \\
(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b \\
(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\
(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 6 \cdot a^3 b + 10 \cdot a^2 b^2 + 6 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \\
\cdots
\end{gathered}
$$

Ako uočimo samo koeficijente u prethodnom zapisu, možemo formirati sledeću trougaonu šemu ovih brojeva koju nazivamo Paskalov trougao, koja je predstavljena na narednoj slici.



Slika 3.1.1 Paskalov trougao (izvor Autor).

Sa slike je moguće uočiti kako se na osnovu prvih nekoliko zadatih vrednosti za stepen *n* u Binomnoj formuli i njihovih poznatih binomnih koeficijenata, može odrediti proizvoljan binomni koeficijent za neki od sledećih stepena. Na slici je ukazano na pravilo kako se takvo određivanje vrši: zbir dva susedna člana u nekom redu Paskalovog trougla, daje vrednost člana koji se nalazi u narednom redu između njih.

Poglavlje 4

Zasnivanje teorije prirodnih brojeva

PEANOVA AKSIOMATIKA PRIRODNIH BROJEVA

Aksiom indukcije je jedan od klasičnih i veoma važnih metoda za izvođenje zaključka u matematici.

Postoji više načina zasnivanje teorije prirodnih brojeva, ali sve one polaze sa stanovišta da za operacije sabiranja i množenja prirodnih brojeva važe određene osobine (o kojima smo govorili). Ovde ćemo izgradnju teorije prirodnih brojeva bazirati na sistemu aksioma (koji je postavio italijanski matematičar Peano). Skupom prirodnih brojeva, nazivamo svaki skup $\mathbb{N}$ za čije elemente važi sledeći sistem aksioma:

(I) 1 je prirodan broj,

(II) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x' \in \mathbb{N},$ (ako je x prirodni broj, tada je i njegov sledbenik, u oznaci x' , prirodan broj),

(III) za prirodan broj $x,$ važi $x' \neq 1,$ (1 nije sledbenik nijednog prirodnog broja),

(IV) $x' = y' \Rightarrow x = y$(ako su sledbenici dva prirodna broja jednaki, tada su i oni jednaki),

(V) (Aksiom indukcije) Ako je $T(x)$ svojstvo koje mogu imati neki prirodni brojevi x i važi:

(i) prirodan broj 1 ima to svojstvo, tj. važi $T(1),$

(ii) ako za proizvoljan prirodan broj $x,$ iz uslova da važi $T(x)$ sledi da važi $T(x')$

tada svojstvo $T(x)$ imaju svi prirodni brojevi.

Napomena.U nekim situacijama Aksiom indukcije pod (i) se može proveravati od prvog prirodnog broja $k > 1$ za koji važi $T(k),$ a ne od $k = 1,$ ako za njega nije zadovoljeno posmatrano svojstvo. Nekada, čak, neko svojstvo važi i za $k = 0.$

Navedena aksioma indukcije predstavlja jedan od klasičnih oblika zaključivanja u matematici, koji nazivamo Princip matematičke indukcije.

Principom matematičke indukcije dokazuju se mnoge, u matematici, značajne jednakosti i nejednakosti.

PRIMER - BERNULIJEVA NEJEDNAKOST

Principom matematičke indukcije dokazuju se mnoge značajne jednakosti i nejednakosti. Ovde ćemo dokazati jednu veoma bitnu nejednakost koja se naziva Bernulijeva nejednakost.

Stav. Važi da je:

$$(1+h)^n > 1+nh,$$

za $h > -1,\ h \neq 0$ i $n \in \{2,3,4,5\ldots\}$.

Dokaz. Primenićemo princip matematičke indukcije

Za $n=2$ imamo da je $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$,jer je $h \neq 0$. Nejednakost je tačna za $n=2$ i $h > -1$.

Pretpostavimo da je Bernulijeva nejednakost tačna za $n=k$, tj. važi da je

$$(1+h)^k > 1+kh, \quad \text{(indukcijska pretpostavka)}$$

za $h > -1,\ h \neq 0$ i k proizvoljan prirodan broj, $k \geq 2$. Sada ćemo dokazati da nejednakost važi i za $n=k+1$. Proširimo indukcijsku pretpostavku sa $1+h$. Kako je $h > -1$, imamo $1+h > 0$, pa je

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) = 1+h+kh+kh^2 = 1+(k+1)h+kh^2 > 1 + (k+1)h,$$

Dakle, dobili smo da važi

$$(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h,$$

pa na osnovu Principa matematičke indukcije, dobili smo da Bernulijeva nejednakost važi za svako $n \in \{2,3,4,5\ldots\}$.

Poglavlje 5

Skup celih i racionalnih brojeva

SKUP CELIH BROJEVA

Skup celih brojeva je neograničen i sleva i zdesna i između bilo koja dva neuzastopna cela broja postoji konačno mnogo celih brojeva.

Kao što smo već rekli u skupu prirodnih brojeva nije uvek izvodljiva operacija oduzimanja, tj. jednačina $x+b=a$ nema uvek rešenja u skupu prirodnih brojeva, već samo u slučaju $a>b$. Stoga se ovom skupu pridružuju novi elementi, tj. on se proširuje, tako što se u slučaju $a=b$ uvodi broj 0, a u slučaju $a<b$ uvode se negativni celi brojevi $\ldots,-(n+1),-n,\ldots,-3,-2,-1,$ tako da jednačina $x+b=a$ u njemu uvek ima rešenja.

Ovaj novi skup nazivamo skup celih brojeva, u oznaci $\mathbb{Z}$, tj.

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}.$$

Skup celih brojeva je neograničen i sleva i zdesna i između bilo koja dva neuzastopna cela broja postoji konačno mnogo celih brojeva. Ovaj skup je zatvoren za operacije sabiranja, oduzimanja i množenja, odnosno za bilo koja dva broja $a,b\in\mathbb{Z}$ važi da $a+b\in\mathbb{Z},a-b\in\mathbb{Z}$ i $a\cdot b\in\mathbb{Z}$.

Napomenimo da smo se prilikom proširivanja skupa $\mathbb{N}$ do skupa $\mathbb{Z}$ rukovodili principom da svi zakoni za operacije $+$ i $\cdot$ (komutativnost, asocijativnost, distributivnost množenja prema sabiranju) ostaju da važe i u skupu $\mathbb{Z}$.

Primer. S obzirom da svi zakoni za operacije $+$ i $\cdot$ ostaju da važe i u skupu $\mathbb{Z}$ dobijamo da su strukture $(\mathbb{Z},+)$ i $(\mathbb{Z},\cdot)$ grupe, a struktura $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ je prsten.

Na kraju recimo da proširenje skupa $\mathbb{N}$ do skupa $\mathbb{Z}$ po iznetim pravilima jeste minimalno proširenje skupa $\mathbb{N}$ od svih mogućih, koja zadovoljavaju prethodno pomenute uslove. Zapravo, skup $\mathbb{Z}$ predstavlja prvo proširenje skupa $\mathbb{N}$.

SKUP RACIONALNIH BROJEVA

Zahtev da skup brojeva $\mathbb{Z}$ bude zatvoren u odnosu na operaciju deljenja dva broja, dovodi do novog proširenja ovog skupa brojeva.

Zahtev da skup brojeva $\mathbb{Z}$ bude zatvoren u odnosu na operaciju deljenja dva broja, dovodi do novog proširenja pojma broja.

Naime, deljenje celih brojeva je operacija kojom se svakom paru celih brojeva a i $b \neq 0$ dodeljuje broj $\frac{a}{b}$ takav da je

$$b \cdot \frac{a}{b} = a,$$

koji se naziva razlomak i u kome je a brojilac, dok je b imenilac. Drugim rečima, postavlja se pitanje određivanja nepoznate x tako da jednačina

$$b \cdot x = a,$$

ima rešenja u skupu celih brojeva. Očigledno je da će samo u nekim slučajevima rešenje ove jednačine biti ceo broj.

Dakle, skup celih brojeva moramo proširiti razlomcima, tj. brojevima oblika $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,$ da bi u njemu operacija deljenja dva broja bila zatvorena.

Takav skup brojeva nazivamo skup racionalnih brojeva i označavamo ga sa $\mathbb{Q}$. On sadrži sve prirodne brojeve, nulu, sve cele negativne brojeve (to su razlomci sa imeniocem 1) i sve pozitivne i negativne razlomke.
Ako za neke cele brojeve a, b, c i d, pri čemu je $b \neq 0$ i $d \neq 0$ važi $a \cdot d = b \cdot c,$ tada razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ nazivamo ekvivalentnim razlomcima (i važi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$).
Odatle zaključujemo da se pod racionalnim brojem $\frac{a}{b}$ podrazumeva klasa svim razlomaka koji su ekvivalentni sa njim. Pod pretpostavkom da za razlomak $\frac{a}{b}$ važi $NZD(a, b) = 1$ i da je imenilac b pozitivan ceo broj, svaki ovakav razlomak jednoznačno predstavlja racionalan broj (takav racionalan broj se naziva redukovan ili nesvodljiv).

Dakle, možemo pisati:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Primer. Brojevi

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$$

su svi ekvivalentni međusobno, a za njihovog predstavnika (redukovani razlomak ili nesvodljivi razlomak) se uzima $\frac{1}{2}$.
Binarna relacija jednakosti racionalnih brojeva $\frac{n}{m}$ и $\frac{p}{q}$ uvodi se na sledeći način

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \ \Leftrightarrow \ n \cdot q = m \cdot p.$$

Ova relacija je relacija ekvivalencije u skupu $\mathbb{Q}$, što ostavljamo čitaocu za vežbu.

ARITMETIČKE OPERACIJE SA RACIONALNIM BROJEVIMA

Skup racionalnih brojeva je gusto uređen. Ovo znači da se između bilo koja dva racionalna broja može postaviti beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Za proizvoljne cele brojeve $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, operacije $+$ i $\cdot$ u skup racionalnih brojeva se uvodi na sledeći način:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, \quad \text{i} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

a takodje važi i

$$\frac{a}{a} = 1, \ (a \neq 0) \quad \text{i} \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \ (b \neq 0, c \neq 0),$$

Jasno je da za ove operacije važe zakoni komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. Dakle, skup racionalnih brojeva je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja (izuzev deljenja nulom). Stoga, strukture $(\mathbb{Q}, +)$ i $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ su Abelove grupe, a struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje. U skupu racionalnih brojeva se na prirodan način može uvesti poredak. Za bilo koja dva racionalna broja a i b važi samo jedan od ova tri odnosa: $a < b$ ili $a = b$ ili $a > b$. Takođe, za bili koja tri racionalna broja važi: $a > b$ ($a < b$) i $b > c$ ($b < c$), tada je $a > c$ ($a < c$).

Veoma bitno svojstvo skupa racionalnih brojeva jeste **skup racionalnih brojeva je gusto uredjen.**

Ovo znači da se između bilo koja dva racionalna broja može postaviti beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Tako, na primer, ako uzmemo bilo koja dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, tada je i njihova aritmetička sredina

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2 \cdot b \cdot d}.$$

racionalan broj.

Ovaj postupak se može beskonačno mnogo puta ponavljati. Odavde proizilazi, da se za proizvoljan racionalan broj, za razliku od prirodnih i celih brojeva, ne može ukazati na njegovog sledbenika, niti na njegovog prethodnika.

Napomena. Važi da je $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, tako da je skup $\mathbb{Q}$ minimalno proširenje skupa $\mathbb{Z}$, a drugo proširenje skupa $\mathbb{N}$. Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv skup, jer se između njega i skupa $\mathbb{N}$ može uspostaviti bijektivno preslikavanje.

DECIMALNI ZAPIS RACIONALNIH BROJEVA. PRIMER

Predstavljanje razlomaka kao decimalnih brojeva

Svaki razlomak se može predstaviti decimalnim zapisom. U tom slučaju **Stav o ostacima** o kome smo govorili ranije je od presudnog značaja, pri čemu deljenje produžavamo i na ostatak, jer se radi o racionalnim brojevima.

U decimalnom zapisu nekog razlomka javlja ili konačan broj decimala iza decimalne zapete.

Primer. Brojevi $\frac{3}{4}=0,75$ i $\frac{1}{8}=0,125$ jesu racionalni brojevi.

Takođe, može se desiti da se jedna ili više decimala (istim redosledom) beskonačno mnogo puta periodično ponavlja, počevši od nekog decimalnog mesta. U ovom slučaju se broj decimala, nakon koga se javlja ponavljanje, naziva perioda. Takav decimalan broj se naziva beskonačan periodičan decimalan broj. Njega skraćeno zapisujemo tako što stavimo tačkicu iznad prve i poslednje cifre koje se ponavljaju. Označavanje u ovom slučaju se može vršiti i stavljanjem nadvučene crte iznad grupe cifara koja se ponavlja.
Primer. Predstaviti razlomak $\frac{14}{111}$ kao decimalni broj.

Rešenje. S obzirom da dati razlomak nema celih delova, pomnožićemo 14 sa 10 i podeliti dobijeni broj sa 111 primenom Stava o ostacima za prirodne brojeve. Tada je $140=1\cdot 111+29.$

Sada, dobijeni ostatak 29 množimo sa 10 i dobijeni broj delimo sa $111.$ Imamo da je $290=2\cdot 111+68.$ Dalje, 68 pomnožimo sa 10 i podelimo 680 sa $111.$ Tada imamo $680=6\cdot 111+14.$

Množenjem broja 14 sa 10 , imamo da je $140=1\cdot 111+29.$ Ovde možemo da stanemo, jer se odavde ceo postupak ponavlja. Dakle, dobijamo da je $\frac{14}{111}=0,126126126\ldots$

Perioda u ovom decimalnom broju je 3, počevši od prve decimale. Ovaj razlomak se zapisuje $\frac{14}{111}=0,\overline{126}$ ili $\frac{14}{111}=0,\dot{1}2\dot{6}.$

PREVOĐENJE BESKONAČNOG PERIODIČNOG DECIMALNOG ZAPISA U RAZLOMAK. PRIMER

Postupak za prevođenje beskonačnog periodičnog decimalnog zapisa u razlomak.

Sada ćemo objasniti kako se izvršava obrnut proces, tj. kako se beskonačan periodičan decimalni broj može predstaviti razlomkom. Postupak se sastoji od sledećih koraka:

- traženi razlomak označimo sa x i izjednačimo sa datim dacimalnim zapisom,
- odredimo $10^{n+m}\cdot x-10^{n}\cdot x$, gde je $n\in\mathbb{N}_0$ broj decimala koji prethodi periodi, a

$m \in \mathbb{N}$ je dužina periode,

- na kraju izrazimo veličinu x i predstavimo je u obliku nesvodljivog razlomka.

Primer. Broj $0,351351351351\ldots$ je racionalan broj.

Primenimo prethodno opisani postupak. Imamo da je

$$x = 0,351351351351\ldots, \quad \text{odakle dobijamo} \quad 1000x = 351,351351351\ldots$$

Oduzimanjem prethodne dve jednačine imamo

$$1000x - x = 351, \quad \text{tj.} \quad 999x = 351, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{351}{999}.$$

Kako je poslednji razlomak ekvivalentan sa nesvodljivim razlomkom $\frac{39}{111}$, dobijamo da je

$$0,351351351351\ldots = \frac{39}{111}.$$

PRIMER

Važi da je $0,999\ldots = 1$.

Poznato je da važi $0,111\ldots = \frac{1}{9}$. Ako prethodnu jednakost pomnožimo sa 9, tada dobijamo

$$0,999\ldots = 1. \tag{*}$$

Primenimo prethodno izloženi postupak kako bismo decimalan broj $0,999\ldots$ predstavili kao razlomak. Neka je $x = 0,\overline{9}$, gde je x traženi razlomak. Tada, množenjem (*) sa 10 dobijamo da je $10x = 9,\overline{9}$ odakle je $10x = 9 + x$, odnosno $9x = 9$, pa je $x = 1$.

Odavde zaključujemo da broj 1 (ili $1,0$ ili $1,00$) i beskonačan periodičan decimalni broj $0,\overline{9}$, predstavljaju isti broj.

Štaviše, svaki decimalan broj koji ima konačan broj decimala, a sam tim i razlomak, se može predstaviti u obliku periodičnog decimalnog broja kod koga se počev od neke decimale beskonačno mnogo puta ponavlja cifra 9. Najpre, uočimo da je

$$\begin{aligned} 0,09999\ldots &= 0,1, && \text{(deljenjem jednakosti (*) sa 10)},\\ 0,00999\ldots &= 0,01, && \text{(deljenjem jednakosti (*) sa 100)},\\ 0,00099\ldots &= 0,001, && \text{(deljenjem jednakosti (*) sa 1000)}, \end{aligned}$$

i tako redom. Na osnovu prethodnog, na primer, važi

$$\begin{aligned} \frac{16}{5} &= 3,2 = 3,1 + 0,1 = 3,1 + 0,0999\ldots = 3,1999\ldots,\\ \frac{447}{100} &= 4,47 = 4,46 + 0,01 = 4,46 + 0,00999\ldots = 4,46999\ldots \end{aligned}$$

POLJE RACIONALNIH BROJEVA

Algebarska struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ se naziva polje racionalnih brojeva.

Skup $\mathbb{Q}$ je zatvoren u odnosu na operaciju sabiranja, oduzimanja. množenja i deljenja (osim deljenja nulom). Stoga, od interesa je posmatrati algebarsku strukturu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
Algebarska struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zadovoljava sledeće zahteve:

- $(\mathbb{Q}, +)$ je komutativna grupa, gde je 0 neutralni element za sabiranje racionalnih brojeva,
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativna grupa, gde je 1 neutralni element za množenje racionalnih brojeva,
- važe levi i desni distributivni zakoni, tj. važi

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) \;\; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$
$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) \;\; (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Algebarska struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ se naziva polje racionalnih brojeva.

Kako je polje racionalnih brojeva uređeno relacijom $<$ (kao i relacijom $\leq$), tada se algebarska struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ (kao i struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$) naziva uređeno polje racionalnih brojeva.

U skupu racionalnih brojeva važi Arhimedova aksioma koja glasi

$$(\forall x \in \mathbb{Q})\, (\exists n \in \mathbb{Z}) \; n \leq x < n + 1.$$

Poglavlje 6

Pokazna vežba

1. ZADATAK – 1. DEO (20 MINUTA)

Postupak dokazivanja da je neka struktura Abelova grupa.

Pokazati da skup

$$G = \left\{ f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = -\frac{1}{x} \right\}$$

zajedno sa operacijom slaganja funkcija $\circ$ predstavlja Abelovu grupu.

Rešenje. Važi da je

$$\begin{aligned}
(f_1 \circ f_1)(x) &= f_1(x), & (f_3 \circ f_1)(x) &= f_3(x),\\
(f_1 \circ f_2)(x) &= f_1(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{1}{x} = f_2(x), & (f_3 \circ f_2)(x) &= f_3(\tfrac{1}{x}) = -\tfrac{1}{x} = f_4(x),\\
(f_1 \circ f_3)(x) &= f_1(-x) = -x = f_3(x), & (f_3 \circ f_3)(x) &= f_3(-x) = x = f_1(x),\\
(f_1 \circ f_4)(x) &= f_1(-\tfrac{1}{x}) = -\tfrac{1}{x} = f_4(x), & (f_3 \circ f_4)(x) &= f_3(-\tfrac{1}{x}) = \tfrac{1}{x} = f_2(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1)(x) &= f_2(x), & (f_4 \circ f_1)(x) &= f_4(x),\\
(f_2 \circ f_2)(x) &= f_2(\tfrac{1}{x}) = x = f_1(x), & (f_4 \circ f_2)(x) &= f_4(\tfrac{1}{x}) = -x = f_3(x),\\
(f_2 \circ f_3)(x) &= f_2(-x) = -\tfrac{1}{x} = f_4(x), & (f_4 \circ f_3)(x) &= f_4(-x) = \tfrac{1}{x} = f_2(x),\\
(f_2 \circ f_4)(x) &= f_2(-\tfrac{1}{x}) = -x = f_3(x), & (f_4 \circ f_4)(x) &= f_4(-\tfrac{1}{x}) = x = f_1(x).
\end{aligned}$$

1. ZADATAK – 2. DEO

Pravljenje Kelijeve tablice i analiza osobina grupoida.

Odavde se uočava da je skup G zatvoren u odnosu na operaciju slaganja funkcija $\circ$, tako da je uređeni par $(G, \circ)$ grupoid. Kelijeva tablica za ovako definisanu operaciju glasi

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Operacija slaganja funkcija je asocijativna operacija.

Dalje, da je f_1 jedinični element za operaciju slaganja funkcija iz tablice je lako uočiti (prva kolona i prva vrsta). Naime, $f_1 \circ f_j = f_j \circ f_1 = f_j$za $j = 1, 2, 3, 4$.

Svaki element je sam sebi i inverzni element, jer važi $f_j \circ f_j = f_j$ za $j = 1, 2, 3, 4$, što se vidi iz glavne dijagonale.

Na kraju, treba proveriti i komutativnost operacije slaganja funkcija. Naime, ova operacija nije komutativna u opštem slučaju. Međutim, u ovom jeste, jer je Kelijeva tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

Dakle, struktura $(G, \circ)$ je Abelova (komutativna) grupa.

2. ZADATAK (15 MINUTA)

Dokazivanje da je neka struktura Abelova grupa.

Zadate su fukcije:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}, \quad f_2 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}, \quad f_3 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}, \quad f_4 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

Dokazati da je skup $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ operacijom slaganja funkcija $\circ$ grupa. Da li je ova grupa Abelova ?

Rešenje Napisaćemo neka od slaganja ovih funkcija: $f_2(f_3(1)) = f_2(3) = 4$, $f_2(f_3(2)) = f_2(4) = 3$ $f_2(f_3(3)) = f_2(1) = 2$ i $f_2(f_3(4)) = f_2(2) = 1$. Dakle, dobijamo da je $f_2 \circ f_3 = f_4$. Računajući sva moguća slaganja od po dve funkcije dolazimo do sledeće Kelijeve tablice

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

1) grupoid (zatvoren za operaciju) Svi rezultati koji se dobiju primenom operacije slaganja funkcija pripadaju ovom skupu funkcija,

2) važi asocijativni zakon – operacija slaganja funkcija je asocijativna,

3) neutralni element je f_1,

4) svaki element ima inverzni element (svaki od elemenata su sami sebi inverzni),

Posmatrana struktura jeste grupa. Kako važi komutativni zakon (tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu), ova grupa jeste I Abelova grupa.

3. ZADATAK (10 MINUTA)

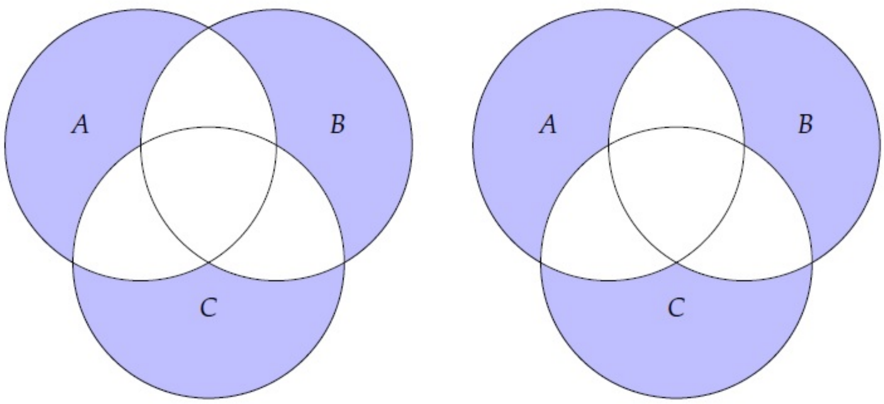
Dokazivanje da je neka struktura komutativna grupa.

Dokazati da je algebarska struktura $(P(S), \Delta)$ Abelova grupa, ako je $P(S)$ partitivni skup proizvoljnog skupa S, a Δ operacija simetrična razlika skupova koja se definiše kao $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Rešenje. Grupoidnost (zatvorenost za operaciju) važi jer je

$$\big(\forall A, B \in P(S)\big)\ A \setminus B, B \setminus A \in P(S) \ \Rightarrow\ A \setminus B \cup B \setminus A \in P(S) \ \Rightarrow\ A\Delta B \in P(S).$$

Asocijativnost važi, što se vidi sa date Slike 1.



Slika 6.1 Grafički prikaz asocijativnosti operacije simetrična razlika $(A\Delta B)\backslash\text{dekta}C = A(\Delta B\backslash\text{dekta}C)$ (izvor autor).

Neutralni element postoji i to je $\varnothing$, jer važi da je $A\Delta\varnothing = \varnothing\Delta A = A$.

Svaki element ima svoj inverzni element. Naime, svaki skup je je sam sebi inverzni element u ovoj operaciju, jer važi $A\Delta A = \varnothing$.

Prethodno dokazane osobine ukazuju na to da je struktura $(P(S), \Delta)$ grupa. Kako komutativni zakon za operaciju Δ , jer je $(\forall A, B \in P(S))\ A\Delta B = B\Delta A$, tada je ova grupa i Abelova grupa.

4. ZADATAK (15 MINUTA)

Dokazivanje da je neka struktura grupa.

Neka je skup G skup svih realnih brojeva oblika $x + y\sqrt{2}$ gde su x i y racionalni brojevi, koji nisu istovremeno 0 i neka je $\cdot$ klasično množenje brojeva. Dokazati da je $(G, \cdot)$ grupa.
Rešenje. Dokažimo da je algebarska struktura $(G, \cdot)$ grupa.
Grupoidnost:

$$(\forall a, b \in G)\ a \cdot b = (x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{2}) = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + 2y_1x_2)\sqrt{2} \in G.$$

Asocijativnost: operacija množenja realnih brojeva je generalno asocijativna, pa je samim tim asocijativna i u ovom skupu.

Neutralni element:

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) e \cdot a = a \cdot e = a.$$

U pitanju je množenja realnih brojeva, tako da je broj 1 neutralni element za množenje. Jedino se postavlja pitanje da li broj 1 pripada ovom skupu. Kako važi $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in G,$ zaključujemo da ova struktura ima neutralni element.

Inverzni element:

$$(\forall a \in G)(\exists a' \in G) a' \cdot a = a \cdot a' = a.$$

Poznato je da je inverzni element za množenje, za neki broj iz skupa realnih brojeva, jednak recipročnoj vrednosti tog broja. Postavlja se jedino pitanje da li takav element pripada skupu G. Imamo da je za svako $a \in G$

$$a' = \frac{1}{a} = \frac{1}{x_1 + y_1\sqrt{2}} \cdot \frac{x_1 - y_1\sqrt{2}}{x_1 - y_1\sqrt{2}} = \frac{x}{x^2 + 2y^2} + \frac{-y}{x^2 + 2y^2}\sqrt{2} \in G$$

Svakako, svaki broj $a \in G$ ima svoj inverzni (recipročan) element, jer imenilac u prethodnim razlomcima nikada ne može biti 0, jer bi u suprotnom imali da je $x = \pm y\sqrt{2}$, pa bi x bio iracionalan broj, ako je y racionalan broj i obrnuto, što nije dozvoljeno, jer su po uslovu zadatka x i y racionalni brojevi.

5. ZADATAK (10 MINUTA)

Racionalni i iracionalni brojevi.

Dokazati da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Rešenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\sqrt{2}$ je jeste racionalan broj. Svaki racionalan broj se može zapisati u obliku nesvodljivog razlomka p/q (p i q su uzajamno prosti brojevi tj. nemaju zajedničke delioce sem broja 1). Tada imamo da je:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2.$$

Dakle, p^2 je paran broj. Zaključujemo da i p mora biti paran, pa se može zapisati u obliku $p = 2m$ za neki prirodan broj m. Tada imamo da je:

$$2q^2 = (2m)^2 \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = 4m^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2m^2$$

Dakle, q^2 je paran broj. Zaključujemo da i q mora biti paran, pa se može zapisati u obliku $q = 2n$ za neki prirodan broj n. Tada imamo da je:

$\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$.

Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da su p i q uzajamno prosti. Dakle, broj √2 se ne može zapisati u obliku razlomka tj. nije racionalan broj.

6. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena Principa matematičke indukcije za dokazivanje datog identiteta.

Dokazati matematičkom indukcijom da važi sledeća jednakost:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \dots \ + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rešenje. Podsećamo da se Princip matematičke indukcije sastoji od dva koraka. Prvi korak podrazumeva da se proveri tačnost date jednakosti za $n = 1$, što je trivijalno zadovoljeno, jer važi:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6},$$

pa indukcija može da krene.

Drugi korak podrazumeva da za neko $k \in \mathbb{N}$ pretpostavimo da data jednakost važi tj. da važi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \dots \ + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Što nazivamo indukcijskom hipotezom (ili pretpostavkom), a da onda dokažemo da važi i za $k + 1 \in \mathbb{N}$. Tada imamo, koristeći indukcijsku hipotezu da je

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ \dots \ + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\left[2k^2 + k + 6k + 6\right]}{6}$$

Dakle, dokazali smo da jednakost važi za, $k + 1$, pa na osnovu Principa matematičke indukcija zaključujemo da data jednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

7. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena Principa matematičke indukcije za dokazivanje deljivosti u skupu $\mathbb{N}$.

Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$133 \mid \left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Rešenje. Najpre ćemo proveriti da li tvrđenje važi za $n = 0$. Tada imamo:

$$133 \mid \left(11^{0+2} + 12^{2 \cdot 0 + 1}\right) \Rightarrow 133 \mid \left(11^2 + 12^1\right) \Rightarrow 133 \mid 133.$$

Iz poslednjeg vidimo da dato tvrđenje važi za, $n = 0$, pa indukcija može da krene.

U drugom koraku indukcije iz pretpostavke da tvrđenje

$$133 \mid \left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right)$$

važi za neko, $k \in \mathbb{N}$, dokazaćemo da ono važi i za slučaj $k + 1 \in \mathbb{N}$, tj. dokazaćemo da važi:

$$133 \mid \left(11^{k+3} + 12^{2k+3}\right),$$

koristeći indukcijsku pretpostavku. Tada imamo

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2} \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + (11 + 133) \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot \left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right) + 133 \cdot 12^{2}$$

Po pretpostavci 133 deli prvi sabirak, očigledno je da 133 deli i drugi sabirak pa samiim tim deli zbir.

Dakle, dokazali smo da jednakost važi za, $k + 1$, pa na osnovu Principa matematičke indukcija zaključujemo da data jednakost važi za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

8. ZADATAK (10 MINUTA)

Primena Principa matematičke indukcije za dokazivanje identiteta.

Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)!\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Rešenje :

1) Proverimo da li je tvrđenje tačno za $n = 1$

$$1 + 1 \circ 1! = (1 + 1)! \Longrightarrow 1 + 1 = 2! \Longrightarrow 2 = 2$$

što je tačno, pa indukcija može da krene.

2) Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k + 1)!$$

i dokažimo da je tvrđenje tačno za, $k + 1$, tj. da važi

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1 \cdot)(k + 1)! = (k + 2)!\,.$$

koristeći indukcijsku pretpostavku. Tada imamo da je:

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1 \cdot)(k + 1)! = (k + 1)! + (k + 1)(k + 1)! = (k + 2)(k + 1)! = (k + 2)!\,.$$

Dakle, dokazali smo da jednakost važi za, $k + 1$, pa na osnovu Principa matematičke indukcija zaključujemo da data jednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

9. ZADATAK - I DEO (15 MINUTA)

Princip matematičke indukcije - situacija kada na u identitetu ima više od n sabiraka.

Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+3n=n(4n+1)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Primetimo da je broj sabiraka na levoj strani datog identiteta jednak $2n$. Najpre ćemo proveriti da li tvrđenje važi za $n=1$. Tada imamo da je

$$(1+1)+(2+1)=1\cdot(4+1)$$

što je tačno, tako da imamo indukcijsku bazu.

Drugi korak podrazumeva da iz pretpostavke da data jednakost važi za neko $k \in \mathbb{N}$, tj. da važi

$$(k+1)+(k+2)+\ldots+3k=k(4k+1)$$

sledi da važi i za $k+1$, tj. da važi

$$(k+1+1)+(k+1+2)+\ldots+3(k+1)=(k+1)(4(k+1)+1),$$

odnosno

$$(k+2)+(k+3)++\ldots+(3k)+(3k+1)+(3k+2)+(3k+3)=(k+1)(4k+5)(*)$$

9. ZADATAK - II DEO

Princip matematičke indukcije - drugi korak.

Krenućemo od leve strane jednakosti (*) i dokazati da je jednaka desnoj, pri čemu ćemo iskoristiti indukcijsku pretpostavku (označeno crvenom bojom).Tada je

$$\begin{aligned}(k+2)+(k+3)+\ldots+(3k)+(3k+1)+(3k+2)+(3k+3) &= (k+1)+(k+2)+(k+3)+\ldots+(3k \\ &\quad +(3k+3) \\ &= k(4k+1)-(k+1)+(3k+1)+(3k+ \\ &= 4k^2+k-k-1+9k+6=4k^2+9k+ \\ &= 4(k+1)\left(k+\frac{5}{4}\right)=(k+1)(4k+5).\end{aligned}$$

Na osnovu Principa matematičke indukcije zaključujemo da polazni identitet važi.
****

Iskoristili smo da važi $4k^2+9k+5=4(k+1)\left(k+\frac{5}{4}\right)$. Naime, iz $4k^2+9k+5=0$ dobijamo da je

$$x_{1/2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-80}}{8}=\frac{-9\pm 1}{8}$$

Tada je $x_1=-1$ ili $x_2=-\frac{5}{4}$. Koristeći Vietovu formulu $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, dobijamo da je $4k^2+9k+5=4(k+1)\left(k+\frac{5}{4}\right)=(k+1)(4k+5)$.
****

10. ZADATAK (5 MINUTA)

Primena binomne formule.

Razloži po binomnoj formuli $(a+b)^4$.

Rešenje: Binomna formula glasi

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ \dots\ +\binom{n}{n-2}a^2b^{n-2}+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

Za $n=4$ imamo

$$(a+b)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\ +\binom{4}{4}b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

11. ZADATAK (10 MINUTA)

Određivanje odgovarajućeg člana u Binomnom razvoju.

Odrediti peti član u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$.

Rešenje. Peti član je oblika

$$\binom{9}{4}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{9-4}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4}=126\sqrt[3]{x}$$

Napomena. Peti član u binomnu razvoju se posmatra za $k=4$, jer se prvi član posmatra za $k=0$.

Odrediti član u razvoju binoma $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$ koji ne sadrži x .

Rešenje. U razvoju binoma $(k+1)$. član je oblika

$$\binom{12}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x}\right)^k=\binom{12}{k}x^{-(12-k)}x^{k/2}=\binom{12}{k}x^{-12+k+k/2}=\binom{12}{k}x^{-12+\frac{3}{2}k}.$$

Ovaj član ne zavisi od x ako je $-12+\dfrac{3}{2}k=0$, tj. ako je $k=8$. Traženi član je deveti po redu u razvoju izraza $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

12. ZADATAK (5 MINUTA)

Određivanje članova koji su racionalni u Binomnom razvoju.

Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

Rešenje. Opšti član je

$$\binom{100}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{100-k}\left(\sqrt[4]{3}\right)^{k}=\binom{100}{k}2^{\frac{100-k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}.$$

Taj broj je racionalan ako je k deljivo sa četiri. U skupu $\{0,1,2,\ldots,99,100\}$ brojevi deljivi sa četiri su $0,4,8,\ldots,96,100$ i ima ih ukupno 26 pa je toliko sabiraka u prethodnom razvoju koji su racionalni brojevi.

Poglavlje 7

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koji se ostavljaju studentu za samostalan rad.

Zadatak 1. Odrediti x u izrazu $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ ako je treći član razvoja 240 .

Rezultat. $x=2$.

Zadatak 2. U razvoju binoma $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ binomni koeficijenti petog i desetog člana su jednaki. Odrediti onaj član razvoja koji ne sadrži x .

Rezultat. $k=7$, pa je traženi član $\binom{13}{7}=1716$.

Zadatak 3. Principom matematičke indukcije dokazati da važi da $3|(11\cdot 10^{2n}+1)$, za $n\in\mathbb{N}_0$.

Zadatak 4. Dokazati da je skup $S=\left\{\frac{1+2m}{1+2n}\mid m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ grupa u odnosu na operaciju množenja racionalnih brojeva.

Zadatak 5. Principom matematičke indukcije dokazati da važi da

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

za $n\in\mathbb{N}$.

Vreme izrade:

Zadatak 1. 15 minuta

Zadatak 2. 15 minuta

Zadatak 3. 15 minuta

Zadatak 4. 15 minuta
Zadatak 5. 15 minuta

VIDEO KLIP - ZADATAK ZA DODATNI RAD (5 MINUTA)

Snimak sa Youtube-a: Princip matematičke indukcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Zaključak za lekciju 03

ALGEBARSKE STRUKTURE. BROJEVNI SKUPOVI

Algebarske strukture s jednom i dve binarne operacije. Skup prirodnih, celih i racionalnih brojeva.

Operacijsko-relacijske strukture prestavljaju osnov daljeg izlaganja gradiva.

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova i on se u matematici ne definiše, ali se proučavaju svojstva brojeva i operacije sa njima.

Brojni skupovi i uvedene operacije sa njima predstavljaju jedan od osnovnih matematičkih aparata. Znanja usvojene o brojevnim skupovima omogućavaju nesmetano praćenje izlaganja u daljim lekcijama.

Literatura:

1. Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje.
2. P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
3. Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
4. M.Petrović, Osnovi nastave matematike (Matematička logika, Skupovi, Algebarske strukture, Realni brojevi), Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, Učiteljski fakultet, Jagodina, 1998.
5. Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.