UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

TEORIJE GRAFOVA

Lekcija 11

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 11

TEORIJE GRAFOVA

www.metropolitan.ac.rs

Uvod

UVOD

Fokus ove lekcije će biti na grafovima iz aspekta njihove primene u računarskim naukama

U ovoj lekciji izučavamo grafove sa aspekta njihove primene u računarskim naukama. Za početak ćemo se prisetiti pojmova pointera, povezanih listi, stekova, redova i redova prioriteta Grafovi, usmereni grafovi, stabla i binarna stabla se javljaju u mnogim oblastima matematike i kompjuterske nauke. Da bi razumeli kako se ovi objekti mogu smestiti u memoriju računara i da bi razumeli algoritme nad njima, potrebno nam je osnovno znanje o odredjenim strukturama podataka.

Pretpostavljamo da su linearni (jednodimenzionalni) i dvodimenizonalni nizovi (engl. arrays) poznati. Dvodimenzionalni nizovi se mogu prikazati i kao matrice. Diskutovaćemo o pointerima (engl. pointers), povezanim listama (engl. linked lists), stekovima (engl. stacks) i redovima (engl. queues).

Poglavlje 1

POKAZIVAČ (POINTER)

ULOGA POINTERA

Uloga pointera je da čuva adresu memorijske lokacije neke druge promenljive

Promenljive se mogu objasniti kao lokacija u memoriji računara kojoj se može pristupiti identifikator (njihovim imenom). Na ovaj način, program ne treba da brine o fizičkoj adresi podatka u memoriji; jednostavno koristi identifikator kad god joj je potrebno da radi sa tom promenljivom.

Za program pisanim u jeziku C ++, memorija računara je kao niz sukcesivnih memorijskih ćelija koja ima svoju jedinstvenu adresu. Svaka ćelija se može lako pronaći u memoriji na osnovu njene jedinstvene adrese.

Kada je promenljiva deklarisana, memorija koja je potrebna da se njena vrednost smesti se dodeljuje na određenoj lokaciji u memoriji (memorijska adresa). Generalno, programi u C ++ ne dodeljuju aktivno memorijske adrese na kojima se čuvaju njegove promenljive. Srećom, taj zadatak ima okruženje koje je zaduženo za pokretanje programa - obično, operativni sistem. Međutim, u nekim slučajevima može biti korisno da program može da dobije memorijsku adresu promenljive za vreme rada.

Pokazivač (engl. pointer) je promenljiva specijalnog tipa koja je koristi u programskim jezicima kao što su C, C++, itd.

Njegova svrha je da čuva adresu memorijske lokacije neke druge promenljive.

Osnovna svojstva pointera:

- Može da menja vrednost
- Preko njega se može dobiti vrednost promenljive čiju adresu čuva
- Preko njega se može promeniti vrednost na koju pokazuje

PRIMER UPOTREBE POINTERA

Adresa promenljive se može dobiti tako što se ispred imena promenljive stavi znak &

Adresa promenljive se može dobiti tako što se ispred imena promenljive stavi znak &, poznat kao adresa-operatora. Na primer:

```
foo = &myvar;
```

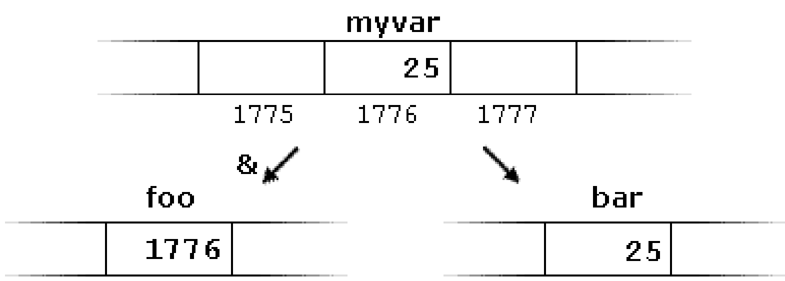
To bi dodelilo adresu promenljive myvar promenljivoj **foo** na taj način više ne dodeljujemo sam sadržaj varijabli foo, nego njegovu adresu.

Stvarna adresa promenljive u memoriji se ne može znati pre pokretanja koda, ali ćemo pretpostaviti neke vrednosti, kako bi pojasnili ovaj koncept. Pretpostavimo da je myvar dodeljena ćelija sa adresom 1776.

U ovom slučaju, razmotrite sledeće fragmente koda:

```
myvar = 25;
foo = &myvar;
bar = myvar;
```

Vrednosti koje se nalaze u svakoj promenljivoj nakon izvršenja ovog koda su date u sledećoj šemi:



Slika 1.1.1 Vrednosti koje se nalaze u promenljivoj myvar i foo [Izvor: autor]

Prvo, smo dodelili vrednost 25 promenljivoj myvar (promenljiva za koju smo pretpostavili da se nalazi na memorijskoj adresi 1776).

Drugi iskaz dodeljuje **foo** adresu **myvar** (1776).

Konačno, treći iskaz dodeljuje vrednost koja se nalazi u myvar, promenljivoj bar.

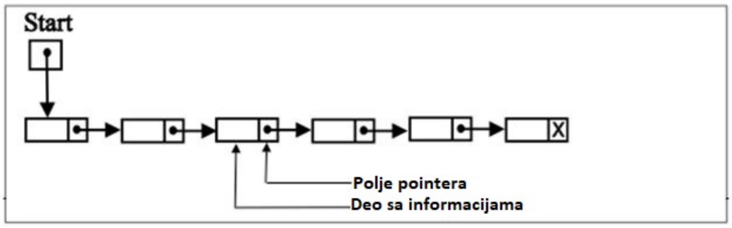
1.1 POVEZANE LISTE

OPIS POVEZANIH LISTA

Povezana lista je linearna kolekcija elemenata sa podacima, koji se zovu čvorovi, pri čemu se linearni redosled postiže pomoću polja pointera unutar svakog od elemenata liste

Povezana lista (engl. linked list) je linearna kolekcija elemenata sa podacima, koji se zovu čvorovi, pri čemu se linearni redosled postiže pomoću polja pointera (engl. pointer) unutar svakog od elemenata liste.

Šematski dijagram povezane liste sa šest čvorova



Slika 1.2.1 Povezana lista [Izvor: Autor]

Svaki čvor podeljen na dva dela:

- Prvi deo sadrži informaciju o podacima koji se u njemu čuvaju(na primer NAME, ADDRESS ,. . .)
- Drugi deo, koji se zove polje za povezivanje ili polje linka ili polje pointera (engl. link field ili engl. next-pointer field), sadrži adresu sledećeg polja u listi.

Vrednost polja za povezivanje se naznačava strelicom koja počinje iz tog polja i pokazuje na sledeći čvor u listi.

Postoji i promenljiva tipa pointer, koja se zove START, koja daje adresu prvog elementa u listi.

Polje pointera poslednjeg čvora sadrži specijalnu vrednost koja ukazuje na to da taj pointer ne pokazuje ni na jedan element, takozvani null pointer, i obeležava se krstićem, kao što je prikazano na slici.

Null pointer označava kraj liste.

PRIKAZ SMEŠTANJA PODATKA KROZ ANALIZU PRIMERA

Postavimo pitanje kako da za određenu mušteriju znamo sa kim prodavcem radi, kao i da za datog prodavca dobijemo listu njegovih mušterija

Pointeri (engl. pointers) i povezane liste (engl. linked lists) uvodimo pomoću primera. Pretpostavimo da se neka firma oslanja na dokumentaciju koja u svakom zapisu sadrži imena mušterije i prodavca, na primer

Mušterija	Andrej	Boris	Cvjetan	Darko	Edin	Fedor	Goran	Hranisav	Ivan
Prodavac	Sava	Ratko	Ratko	Jovan	Sava	Jovan	Ratko	Sava	Ratko

Slika 1.2.2 Povezane liste [Izvor: Autor]

Postoje dve osnovne operacije koje želimo da izvršavamo nad ovim podacima: Operacija A: Za datu mušteriju, naći prodavca. Operacija B: Za datog prodavca, naći listu njegovih mušterija.

Razmatramo broj načina na koje podaci mogu biti smešteni u kompjuter, i lakoću sa kojom se mogu izvršavati operacije A i B nad ovako smeštenim podacima u memoriji. Jasno je da se ova dokumentacija može smestiti u kompjuter u obliku matrice koja ima dve vrste (ili dve kolone) od kojih svaka sadrži po devet imena. Pošto su imena mušterija data alfabetskim redom, operacija A se lako izvršava. Međutim, da bi izvršili operaciju B mora se pretražiti ceo niz. Drugi način smeštanja ovih podataka u memoriju računara je korišćenjem dvodimenzionalne matrice čije vrste (redovi) odgovaraju listi mušterija poređanih po alfabetskom redosledu imena, a čije kolone odgovaraju listi prodavaca poređanih po alfabetskom redosledu imena. Elementi matrice su samo brojevi 0 i 1. 1 ukazuje na to da je prodavac prodao robu mušteriji, a 0 da nije. Glavni nedostatak ovakve reprezentacije podataka je što se nepotrebno troši mnogo memorijskog prostora zato što će u matrici biti mnogo 0. Na primer, ako firma ima 1000 mušterija i 20 prodavaca, matrica će imati 20 000 elemenata za smeštaj ovih podataka, ali će samo 1000 njih biti korisno.

PRIKAZ MUŠTERIJA KROZ POVEZANU LISTU

Lista mušterija za svakog prodavca je povezana lista. Specijalno, postoji niz pointera START uz polja Prodavac; postoji niz pointera NEXT koji ukazuje na lokaciju sledeće mušterije

Primetimo da postoje dva posebna niza, jedan za mušterije, a drugi za prodavce, oba uređena po alfabetskom redosledu imena.

Takođe, postoji niz pointera (indeksa elemenata niza) **Prodavac** uz polja **Mušterija**; svaki od njih ukazuje na lokaciju prodavca za datu mušteriju; zbog toga se operacija A može izvršavati vrlo lako i brzo.

Lista mušterija za svakog prodavca je povezana lista. Specijalno, postoji niz pointera ***START*** uz polja **Prodavac**.

Svaki od njih ukazuje na prvu mušteriju datog prodavca, a zatim, postoji niz pointera ***NEXT*** koji ukazuje na lokaciju sledeće mušterije za tog prodavca, ili sadrži 0 kao indikaciju kraja liste. Ovo je ilustrovano strelicama na slici 2 za prodavca Ratka.

	Mušterija	Prodavac	NEXT
1	Andrej	3	5
2	Boris	2	3
3	Cvjetan	2	7
4	Darko	1	6
5	Edin	3	8
6	Fedor	1	0
7	Goran	2	9
8	Hranisav	3	0
9	Ivan	2	0

	Prodavac	START
1	Jovan	4
2	Ratko	2
3	Sava	1

Slika 1.2.3 Ilustrovan primer za prodavca Ratka [Izvor: Autor]

Ovo je ilustrovano sledećim algoritmom koji je napisan u pseudokodu:

Učitava se ime prodavca i štampa njegovih mušterija

Korak 1. Učitati ime XYZ .

Korak 2. Naći K takvo da PRODAVAC[K] = XYZ

Korak 3. Postaviti PTR := START [K]. (Inicijaliziranje pointera PTR)

Korak 4. Ponavljati dok PTR ≠ NULL.

(a) Štampati MUSTERIJA[PTR]

(b) Postaviti PTR := NEXT [PTR] (Ažuriranje PTR)

(Kraj petlje)

1.2 STEK I RED

ŠTA JE STEK?

Stek je linearna lista kod koje se operacije dodavanje i brisanja elemenata mogu izvršiti samo na jednom mestu, na vrhu liste

Pored nizova i povezanih lista, u algoritmima sa grafovima se javljaju i druge strukture podataka.

Te strukture su stekovi (engl. stacks), redovi (engl. queues) i redovi prioriteta (engl. priority queues).

Stek je struktura podataka, nad kojom se mogu izvršiti dve operacije: operacija smeštanja na stek (engl. push), i operacija uzimanja sa steka (engl. pop).

Stek se zove last-in first-out (LIFO) (poslednji unutra, prvi napolje)sistem. Dodavanje i brisanja elemenata se može izvršiti samo na jednom mestu, na vrhu liste.

Primer

Uspravna crta prikazuje dno steka, a elementi se ubacuju s desna u levo:
Empty() |
Push(4) |4
Push(2) |4 2
Pop() |4
Push(7) |4 7
Push(5) |4 7 5
Pop() |4 7
Pop() |4

ŠTA JE RED?

Red je linearna lista kod koje se brisanje elementa može izvršiti samo na početku liste, a umetanje elementa se može izvršiti samo na kraju liste

Red se zove i first-in first-out (FIFO) (prvi unutra, prvi napolje) sistem.

Nad redovima se mogu vršiti dve operacije: umetanje u red (engl. Insert) i operacija uklanjanja iz reda (engl. delete).

Red je linearna lista kod koje se brisanje elementa može izvršiti samo na početku liste, a umetanje elementa se može izvršiti samo na kraju liste.

Red prioriteta (red sa prioritetom) je red kod koga se mogu dodavati novi elementi, ali kod koga se uvek briše element sa najvećim prioritetom.

.

Primer
Red (početak---)
Empty()
Insert(4) - 4
Insert(2) - 4 2
Delete() - 2
Insert(7) - 2 7
Insert (5) - 2 7 5
Delete() - 7 5
Delete() – 5

Poglavlje 2

ELEMENTI GRAFA

OD ČEGA SE SASTOJI GRAF?

Graf se sastoji od skupa čvorova i skupa grana grafa

Graf G se sastoji iz

- skupa V = V (G) čiji se elementi zovu temena, tačke ili čvorovi grafa G.
- skupa E = E(G) neuređenih parova različitih čvorova koji se zovu grane grafa G.

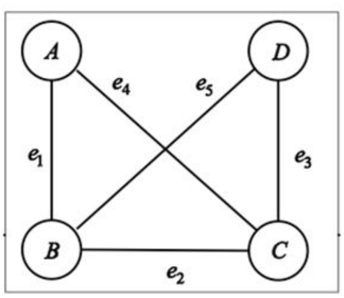
Ovakav graf označavamo sa G(V, E) kada želimo da naglasimo da se G sastoji iz skupa čvorova i skupa grana.

Čvorovi u i v su susedni ako postoji grana e = {u, v}.

U tom slučaju se u i v zovu krajnje tačke grane e, a za granu e se kaže da spaja čvorove u i v.

Takođe se kaže da je grana e dodirna za svaku od krajnjih tačaka u i v, odnosno da grana e sadrži čvorove u i v.

Grafovi se ilustruju dijagramima u ravni na prirodan način. Konkretno, svaki čvor v iz V se predstavlja tačkom ili malim krugom, a svaka grana e = v_1, v_2 se predstavlja krivom koja spaja njene krajnje tačke $v_1 i v_2$.



Slika 2.1.1 Graf iz primera [Izvor: Autor]

Primer
Slika predstavlja graf G(V , E), pri čemu se
(i) V sastoji od čvorova A, B, C, D.
(ii) E sastoji od grana STERM e $_1$ = {A, B}, e $_2$ = {B, C} , e $_3$ = {C, D}, e $_4$ = {A, C} i e $_5$= {B, D}.ETERM

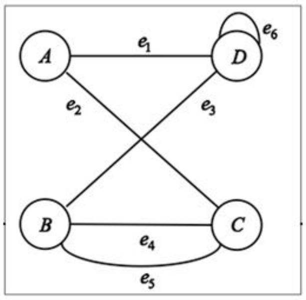
2.1 MULTIGRAFOVI

DEFINICIJA MULTIGRAFA

Formalna definicija grafa ne dopušta ni višestruke grane ni petlje. Tako se graf može definisati kao multigraf bez višestrukih grana i bez petlji

Grane e_4 i e_5 se zovu višestruke grane pošto one povezuju iste krajnje tačke, a grana e_6 se zove petlja (engl. loop) pošto se njene krajnje tačke poklapaju. Ovakav dijagram se zove multigraf.

Formalna definicija grafa ne dopušta ni višestruke grane ni petlje. Tako se graf može definisati kao multigraf bez višestrukih grana i bez petlji.



Slika 2.2.1 Primer multigrafa [Izvor: Autor]

2.2 OSOBINE ČVORA U GRAFU

STEPEN ČVORA

Stepen čvora v grafa G je jednak broju grana grafa G koji za krajnju tačku imaju v

Stepen čvora v grafa G, u oznaci deg(v) ili d(v) (engl. degree) je jednak broju grana grafa G koji za krajnju tačku imaju v, to jest, koji dodiruju v.

Najmanji stepen čvora u grafu G obeležavamo sa $\delta(G)$.

Najveći stepen čvora u grafu G obeležavamo sa $\Delta(G)$.

Graf G je r-regularan ako je stepen svakog čvora u grafu r, odnosno

$$\delta(G) = \Delta(G) = r$$

Pošto se svaka grana računa dva puta pri prebrojavanju stepena svih čvorova grafa G, važi sledeći rezultat:

Teorema:
Suma stepena svih čvorova nekog grafa je jednaka dvostrukom broju grana.

TIPOVI ČVOROVA

Čvor može biti paran ili neparan u zavisnosti od njegovog stepena

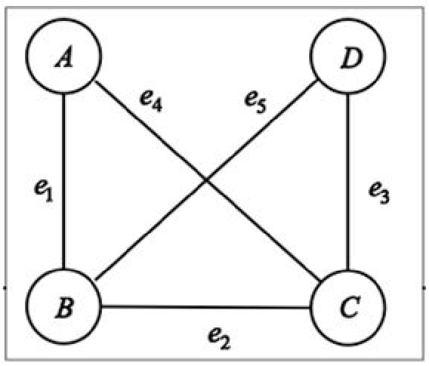
U nekim knjigama se koristi termin graf za multigraf u smislu naše definicije, a termin jednostavan graf ili prost graf, za graf bez višestrukih grana i bez petlji.

Za dati čvor se kaže da je paran, odnosno neparan u zavisnosti od toga da li je njegov stepen paran ili neparan broj.

Čvor stepena nula se zove izolovani čvor**.**

Primer

Odrediti stepen čvorova na datom grafu. Koji su čvorovi parni a koji neparni?
Rešenje:
deg(A) = 2, deg (B) = 3, deg (C) = 3 i deg (D) = 2.
Suma stepena svih čvorova grafa je jednaka 10, što je jednako dvostrukom broju grana.
A i D parni čvorovi, a B i C su neparni čvorovi.



Slika 2.3.1 Prikaz rešenja primera 1 [Izvor: Autor]

STEPEN ČVORA MULTIGRAFA

Suma stepena svih čvorova nekog grafa je jednaka dvostrukom broju grana. Važi i za multigrafove, pri čemu se petlja računa dvaput u stepenu njene krajnje tačke

Suma stepena svih čvorova nekog grafa je jednaka dvostrukom broju grana. Ovo važi i za multigrafove, pri čemu se petlja računa dvaput u stepenu njene krajnje tačke.

Primer

deg(D) = 4, pošto se grana e6 računa dvaput; dakle D je paran čvor.
deg(A) = 2, deg (B) = 3, deg(C) = 3
deg(A) + deg(B) + deg(C) + deg(D) = 12.

S obzirom da ima 6 grana, tada važi da je suma stepena svih čvorova jednaka dvostrukom broju grana.

Poglavlje 3

RAZNI GRAFOVI

PODGRAFOVI

Graf H je podgraf grafa G ako su čvorovi, odnosno grane grafa H istovremeno i čvorovi, odnosno grane grafa G

Ponekad nam je dovoljno da koristimo samo deo grafa kako bi rešili neki problem. Na primer, možda nam je potrebno da razmotrimo samo deo računarske mreže koja uključuje računare u centrima Beograda, Novog Sada i Niša. U tom slučaju možemo ignorisati računarske centre u drugim gradovima, kao i linkove koje povezuju te druge centre. Ako čitavu mrežu modelujemo grafom, tada tu mrežu možemo redukovati tako što brišemo sve druge čvorove, osim čvorove koji predstavljaju Beograd, Novi Sad i Niš, kao i grane koje ulaze i izlaze iz svih drugih čvorova osim ova tri navedena. Na ovaj način dobijamo manji graf, koji nazivamo podgraf originalnog grafa.

Neka je **G = G(V , E)** proizvoljan graf.

Graf **H = H (V ‘, E’)** je podgraf grafa G ako su čvorovi, odnosno grane grafa H istovremeno i čvorovi, odnosno grane grafa G, to jest, ako **V ‘⊂ V** i **E’⊂ E**.

Podgraf H (V‘, E’) grafa G(V, E) se zove podgraf indukovan svojim čvorovima V′ ako se njegov skup grana E’ sastoji iz svih onih grana grafa G čije krajnje tačke dodiruju čvorove grafa H .

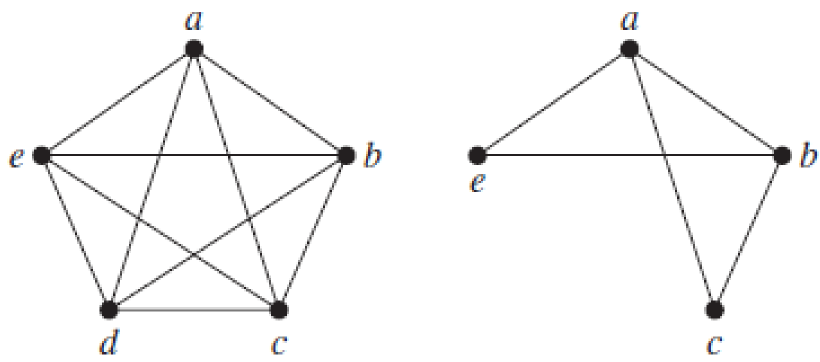
Ako je v čvor grafa G, onda je G − v podgraf grafa G koji se dobija brisanjem čvora v iz grafa G i brisanjem svih grana iz G koje dodiruju v.

Ako je e grana grafa G, onda je G − e podgraf grafaG koji se dobija prostim brisanjem grane e iz grafa G.

PRIMER DOBIJANJA PODGRAFA DODAVANJEM I BRISANJEM GRANE

Ako imamo graf G = (V ,E) i granu e ∈ E, možemo da napravimo podgraf G time što ćemo obrisati granu e

Ako imamo graf G = (V ,E) i granu e ∈ E, možemo da napravimo podgraf G time što ćemo obrisati granu e. Dobijeni podgraf, koji se obeležava sa **G − e**, ima isti skup čvorova V kao i G, a skup grada je E − e. Tako dobijamo, **G − e = (V ,E − {e}).**



Slika 3.1.1 Primer grafa i njegovog podgrafa [Izvor: Autor]

Takođe možemo dodati granu e grafu kako bi dobili složeniji graf. Novi graf tada obeležavamo sa

G + e

Tako dobijamo,

G + e = (V ,E ∪ {e}).

Skup čvorova grafa G + e je isti kao i skup čvorova grafa G , a skup grana predstavlja uniju skupa grana G i skupa {e}.

PRIMER DOBIJANJA PODGRAFA DODAVANJEM I BRISANJEM ČVORA

Kada obrišemo čvor v i sve njegove grane iz grafa G = (V ,E), tada dobijamo graf koji obeležavamo sa G − v.

Kada obrišemo čvor v i sve njegove grane iz grafa G = (V ,E), tada dobijamo graf koji obeležavamo sa

G − v.

Možemo primetiti da

G − v = (V − v,E‘)
gde E‘ predstavlja skup grada grafa G koji nisu u vezi sa v. Slično, ako je V‘ podskup od V, tada je graf G − V‘ podgraf (V − V‘ , E‘), gde je E‘ skup grana u G koje nisu u vezi sa čvorovima iz V.

UNIJA GRAFOVA

Unija dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf sa skupom čvorova $V_1 \cup V_2$ i skupom grana $E_1 \cup E_2$

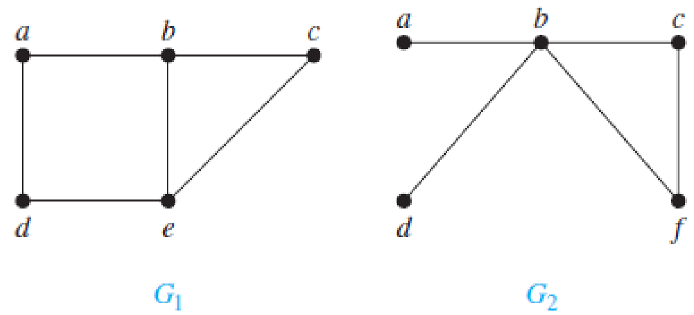
Dva ili više grafova se mogu kombinovati na različite načine. Novi graf koji sadrži sve čvorove i grane ovih grafova se naziva unija grafova.

Definicija

Unija dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf sa skupom čvorova $V_1 \cup V_2$ i skupom grana $E_1 \cup E_2$. Unija grafova G_1 i G_2 se označava kao $G_1 \cup G_2$.

Primer

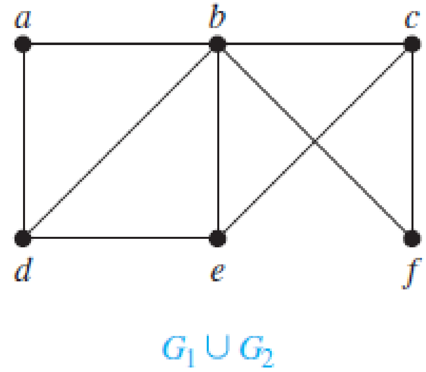
Pronaći uniju grafova prikazanoj na slici



Slika 3.1.2 Grafovi G_1 i G_2 [Izvor: Autor]

Rešenje

Skup čvorova unije $G_1 \cup G_2$, predstavlja unija njihova dva skupa čvorova, odnosno {a, b, c, d, e, f }. Skup grana unije predstavljanja unije njihovih skupova grana. Tako dobijamo graf na slici



Slika 3.1.3 Unija grafova G_1 i G_2 [Izvor: Autor]

3.1 IZOMORFNI GRAFOVI

ZNAČAJNOST IZOMORFNIH GRAFOVA

Određivanje da li su dva grafa izomorfna je značajan problem u teoriji grafova.

Ponekad, dva grafa imaju identičnu formu, u smislu da postoji 1-1 korespondencija između njihovih čvorova, koji održavaju njihove grane. U tim slučajevima kažemo da su dva grafa izomorfna.

Često je potrebno da znamo da li je dva grafa moguće nacrtati na isti način. Odnosno, da li dva grafa imaju istu strukturu kada zanemarimo identitet njihovih čvorova? Na primer, u hemiji, grafovi se koriste da modeluju hemijska jedinjenja. Različita jedinjenja mogu imati istu molekularnu formulu, ali se mogu razlikovati u strukturi. Ovakva jedinjenja se mogu prikazati grafovima koji se ne mogu prikazati na isti način. Grafovi već postojećih jedinjenja se mogu izučavati kako bi se odredilo da li se radi o novom ili o već postojećem jedinjenju.

ŠTA SU IZOMORFNI GRAFOVI?

Grafovi G(V , E) i G (V*, E*) su izomorfni ako postoji 1-1 korespondencija f : V → V* takva da je {u, v} grana grafa G ako i samo ako {f (u), f (v)} je grana grafa G**

Grafovi G(V , E) i G* (V*, E*) su izomorfni ako postoji 1-1 korespondencija f : V → V* takva da je {u, v} grana grafa G ako i samo ako {f (u), f (v)} je grana grafa G*.

Funkcija f senaziva izomorfizam grafova.

Uobičajeno, ne pravimo razliku između izomorfnih grafova, čak i ako dijagrami izgledaju dosta različito.

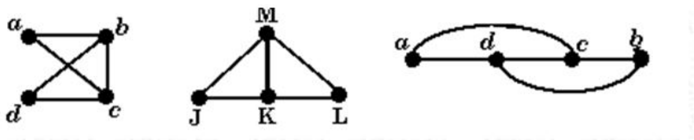
Primer

Sledeća slika prikazuje izomorfne grafove, a preslikavanje izomorfizma se može videti kroz:

#1-a,b,c,d

#2-a u J, b u K, c u M, i d u L

#3-b u d i d u b



Slika 3.2.1 Rešenje primera 1 [Izvor: Autor]

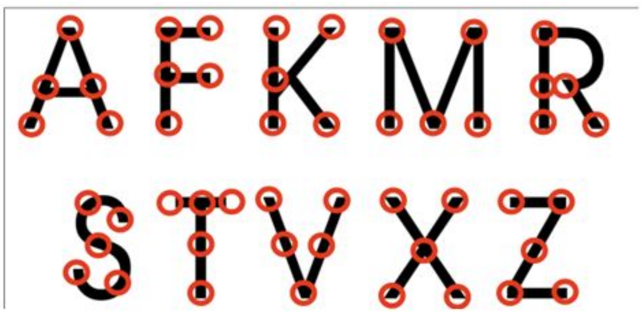
Primer

Koji su grafovi izomorfni?

Rešenje:

Primetimo da su A i R izomorfni grafovi. Takođe, F i T , K i X , i M, S , V i Z su izomorfni grafovi.

Pronađite ostatak.



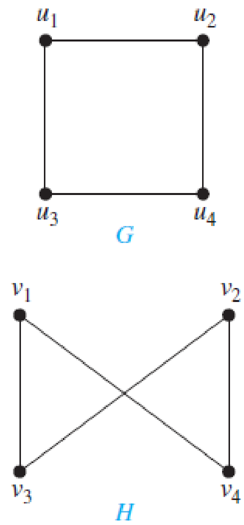
Slika 3.2.2 Rešenje primera 2 [Izvor: Autor]

PRIMER

Odrediti da li su dva grafa izomorfna.

Primer

Odrediti da li su grafovi G = (V ,E) i H = (W, F), izomorfni



Slika 3.2.3 Grafovi G i H [Izvor: Autor]

Rešenje

Funkcija f sa f (u_1) = v_1, f (u_2) = v_4, f (u_3) = v_3 i f (u_4) = v_2 predstavlja 1-1 korespondenciju između V i W. Kako bi videli da ova korespondencija održava susedstvo, obratimo pažnju da su susedni čvorovi u G u_1 i u_2, u_1 i u_3, u_2 i u_4, kao i u_3 i u_4. Svaki od parova f (u_1) = v_1 i f (u_2) = v_4, f (u_1) = v_1 i f (u_3) = v_3, f (u_2) = v_4 i f (u_4) = v_2 i f (u_3) = v_3 i f (u_4) = v_2 se sastoji od dva susedna čvora u H.

Na ovaj način smo pokazali da su dva grafa G = (V ,E) i H = (W, F), izomorfna.

ODREĐIVANJE DA LI SU DVA GRAFA IZOMORFNA

Dva izomorfna grafa moraju da imaju: isti broj čvorova, isti broj grana, stepeni čvorova moraju biti isti, broj kružnih puteva, iste dužine mora biti isti.

Često je teško odrediti da li su dva grafa izomorfna direktnim putem, kada postoji mnogo različitih kombinacija koje treba ispitati. Međutim, postoji nekoliko karakteristika koje je lako ispitati, a koja će nam pomoći da utvrdimo postojanje izomorfizma kod neka dva grafa.

Dva izomorfna grafa moraju da imaju:

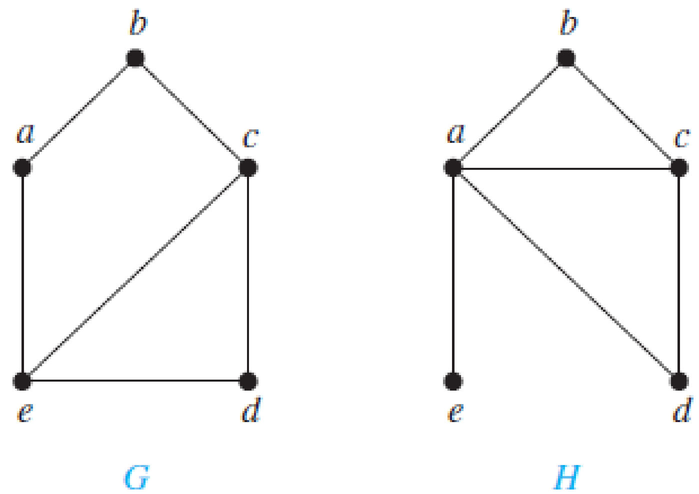
- isti broj čvorova
- isti broj grana
- stepeni čvorova moraju biti isti (čvor v stepena d u G mora da odgovara čvoru f(v) stepena d u H, zato što je čvor w u G sused čvoru v, ako i samo ako su f(v) i f(w) susedi u H)
- broj kružnih puteva, iste dužine mora biti isti.

PRIMER ODREĐIVANJA DA DVA GRAFA NISU IZOMORFNA

Pokazati da dva grafa nisu izomorfna

Primer

Pokazati da dva grafa G i H prikazana na slici nisu izomorfna



Slika 3.2.4 Grafovi G i H [Izvor: Rosen]

Rešenje

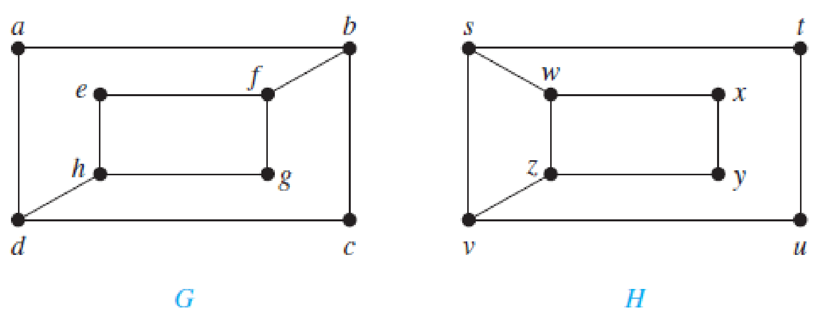
I G i H imaju 5 čvorova i 6 grana. Međutim, H ima čvor stepena 1, a to je čvor e, dok G nema ni jedan čvor stepena 1. Iz ovoga sledi da G i H nisu izomorfni.

PRIMER ODREĐIVANJA DA LI SU DVA GRAFA IZOMORFNA

Odrediti da li su dva grafa izomorfna

Primer

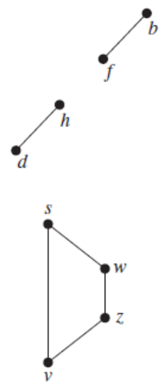
Odrediti da li su dva grafa G i H na slici izomorfna



Slika 3.2.5 Grafovi G i H [Izvor: Rosen]

Grafovi G i H imaju oba 8 čvorova i 10 grana. Ova dva grafa takođe imaju 4 čvora stepena 2 i četiri čvora stepena 3. S obzirom da su ovi osnovni parametri jednaki, moguće je da su grafovi G i H izomorfni. Međutim, G i H nisu izomorfni.
Ovde se može utvrditi tako što deg(a) = 2 u G, što mora da odgovara jednom od čvorova t , u, x, ili y u H, koji su stepena 2 u H. Međutim, svaki od ovih čvorova u H je sused sa jednim čvorom stepena 2, što nije slučaj u grafu G. Čvor a u grafu G je sused sa dva čvora, od kojih su oba stepena 3.

Još jedan način gde se vidi da G i H nisu izmorfni je preko njihovih podgrafova. Podgrafovi od G i H koji su sačinjeni od čvorova stepena 3 i grana koje su na njih povezani moraju takođe biti izomorfni, ako su G i H izomorfni. Međutim, ovi podgrafovi nisu izomorfni i prikazani su na slici niže



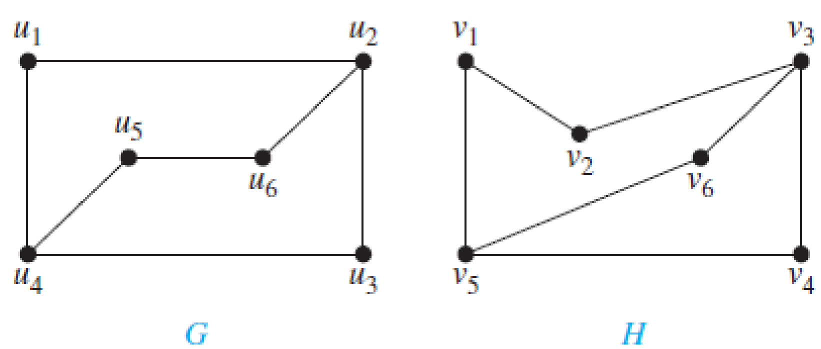
Slika 3.2.6 Podgrafovi od G i H [Izvor: Autor]

PRIMER ODREĐIVANJA IZOMORFIZMA

Odrediti izomorfizam izomorfnih grafova

Primer

Odrediti da li su dva grafa G i H izomorofni. Ako jesu, odrediti njihov izomorfizam.



Slika 3.2.7 Grafovi G i H [Izvor: Autor]

Rešenje

Oba grafa G i H imaju 6 čvorova i 7 grana. Oba imaju 4 čvora stepena 2 i 2 čvora stepena 3. Takođe se može uočiti da su podgrafovi od G i H koji se sastoje od svih čvorova stepena 2 i njihovih grana da su takođe izomorfni. Kako su ovi uslovi zadovoljeni, možemo pokušati da odredimo izomorfizam.

Zato što je deg(u_1) = 2 i zato što u_1 nije sused sa bilo kojim drugim čvorom stepena 2, slika od u_1 mora biti ili v_4 ili v_6, jedina dva čvora stepena 2 u H koja nisu susedna sa čvorovima stepena 2. Biramo f (u_1) = v_6. [Ako odredimo da ovaj izbor ne zadovoljava izomorfizam, vratićemo se na ovaj korak i probati sa drugom opcijom, odnosno f (u_1) = v_4.] Zato što je u_2 sused u_1, moguće slike u_2 su v_3 i v_5. Biramo f (u_2) = v_3. Nastavljamo dalje u ovom stilu, koristeći karakteristike susedstva i stepene čvorova kao vodilju i dobijamo f (u_3) = v_4, f (u_4) = v_5, f (u_5) = v_1 i f (u_6) = v_2. Na ovaj način dobijamo 1-1 korespondenciju između skupova čvorova od G i H, odnosno

f (u_1) = v_6, f (u_2) = v_3, f (u_3) = v_4, f (u_4) = v_5, f (u_5) = v_1, f (u_6) = v_2.

Kako bi videli da li je f održao i svojstva grana, ispitaćemo matricu susedstva od G i H, koje možemo da vidimo da su iste. Ove dve matrice ne bi bile iste da nismo postigli izomorfizam sa f.

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 HOMEOMORFNI GRAFOVI

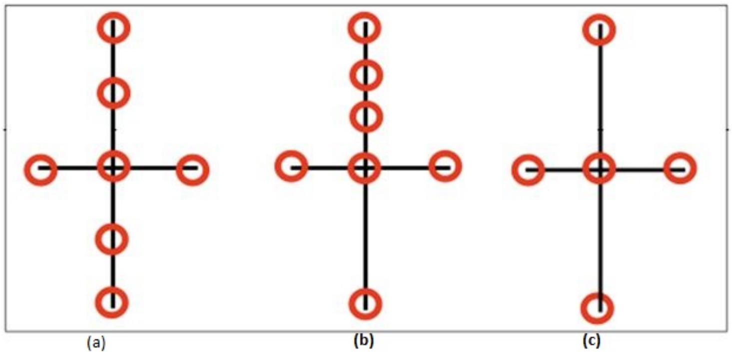
ŠTA SU HOMEOMORFNI GRAFOVI?

Dva grafa G i G su homeomorfna ako se mogu dobiti iz istog ili iz izomorfnih grafova podelom grana dodatnim čvorovima*

Od datog proizvoljnog grafa G, možemo dobiti novi graf deljenjem proizvoljne grane dodatnim čvorovima.

Dva grafa G i G* su homeomorfna ako se mogu dobiti iz istog ili iz izomorfnih grafova podelom grana dodatnim čvorovima.

Grafovi (a) i (b) sa slike nisu izomorfni, ali jesu homeomorfni, pošto mogu biti dobijeni iz grafa (c) dodavanjem odgovarajućih čvorova.



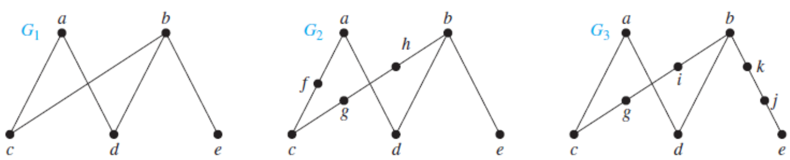
Slika 3.3.1 Primer različitih vrsta grafova [Izvor: Autor]

PRIMER 1

Ispitati da li su grafovi homeomorfni

Primer

Ispitati da li su grafovi G1, G2 i G3 prikazani na slici homeomorfni



Slika 3.3.2 Grafovi G1, G2 i G3 [Izvor: Autor]

Rešenje

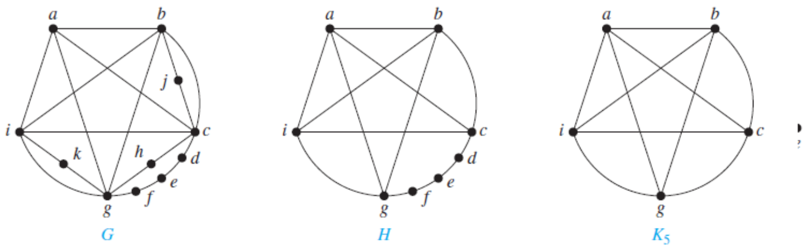
Ova tri grafa su homeomorfna zato što se sva tri mogu dobiti iz grafa G1. G1 se može dobiti od samog sebe. G2 se može dobiti od G1 na sledeći način: (i) izbrisati granu {a, c}, dodati čvor f i dodati grane {a, f } i {f, c}; (ii) izbrisati granu {b, c}, dodati čvor g i dodati grane {b, g} i {g, c}; i (iii) izbrisati granu {b, g}, dodati čvor h i dodati grane {g, h} i {b, h}.

Za vežbu možete proveriti na koji način se dobija graf G3 iz G1.

PRIMER 2

Ispitati da li su grafovi homeomorfni.

Primer
Ispitati da li su grafovi G, H i K5 prikazani na slici homeomorfni



Slika 3.3.3 Grafovi G, H i K_5 [Izvor: Autor]

Rešenje

H je podgraf grafa G. H je homeomorfan sa K_5 . H je dobijen brisanjem čvorova h, j i k i svih grana koje su u vezi sa tim čvorovima. H je homeomorfan sa K_5 zato što se može dobiti iz K_5 (sa čvorovima a, b, c, g, i) dodavanjem čvorova d, e i f .

Poglavlje 4

PUT

DEFINICIJA PUTA I TIPOVI PUTEVA

Ako nema dvosmislenosti, put označavamo nizom čvorova na njemu ($v_0, v_1, \ldots, v_n$)

Put u multigrafu G se sastoji iz niza čvorova i grana u obliku $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, gde svaka grana e_k dodiruje čvorove v_{k-1} i v_k koji su mu susedni u gornjem nizu.

Broj n grana gornjeg niza je dužina puta.

Ako nema dvosmislenosti, put označavamo nizom čvorova na njemu (v_0, v_1, . . . , v_n).

Put je *zatvoren*ako v_0 = v_n.

Ako put nije zatvoren, onda kažemo da je to put od v_0 do v_n, ili između v_0 i v_n, ili da povezuje v_0 i v_n.

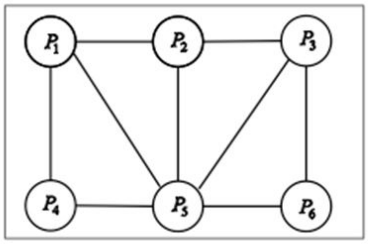
Prost put je put kod koga su svi čvorovi različiti.

Put kod koga su sve grane različitese zove staza ili trag.

Kružni put ili krug je zatvoren put dužine 3 ili više kod koga su svi čvorovi različiti osim v_0 = v_n.

Kružni put dužine k se zove k-kružni put ili k-krug.

Primer
Posmatrajmo graf G sa slike i nizove
$\alpha = (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$
$\beta = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$,
$\gamma = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$,
$\delta = (P4, P1, P5, P3, P6)$.
Niz α je put od P_4 do P_6 , ali nije staza jer je grana { P_1, P_2 } korišćena dva puta.
Niz β nije put pošto ne postoji grana { P_2, P_6 }.
Niz γ je staza jer se nijedna grana ne koristi dva puta, ali nije prost put zato što se čvor P_5 koristi dva puta.
Niz δ je prost put od P_4 do P_6 , ali nije najkraći put od P_4 do P_6 .
Najkraći put od P_4 do P_6 je prost put (P_4, P_5, P_6) čija je dužina 2.



Slika 4.1.1 Prikaz rešenja primera [Izvor: Autor]

4.1 POVEZANOST GRAFA

KADA KAŽEMO ZA GRAF DA JE POVEZAN

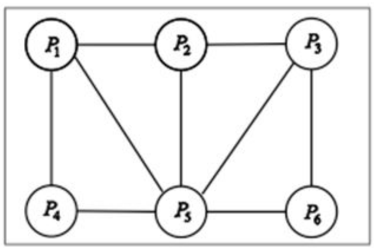
Graf G je povezan ako postoji put između bilo koja dva njegova čvora

Graf G je povezan ako postoji put između bilo koja dva njegova čvora.

Podgraf H grafa G se zove komponenta povezanosti grafa G ako se H ne sadrži u nekom većem povezanom podgrafu grafa G.

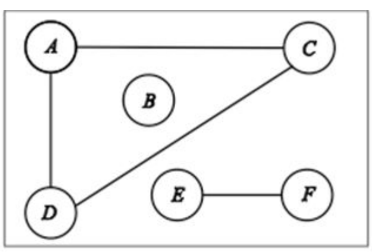
Čvor A grafa se zove izolovani čvor (isolated vertex) ako ne dodiruje ni jednu granu, ili, drugim rečima, ako je deg A = 0.

Intuitivno je jasno da se bilo koji graf G može podeliti na delove od kojih svaki sadrži jednu njegovu povezanu komponentu.



Slika 4.2.1 Primer povezanog [Izvor: Autor]

Na slici 2 graf ima tri odvojene komponente. Tako na primer, ne postoji put između čvorova D i E. 3 komponente povezanosti su podgrafovi indukovani skupovima čvorova {A, C, D}, {E, F } i {B}. Čvor B je izolovan čvor, zato što B ne dodiruje ni jednu granu; B, sam za sebe, formira jednu komponentu povezanosti grafa.



Slika 4.2.2 Primer nepovezanog grafa [Izvor: Autor]

Formalno govoreći, pod pretpostavkom da je svaki čvor u povezan sa samim sobom, relacija “u je povezan sa v” je relacija ekvivalencije nad skupom čvorova grafa G, a klase ekvivalencije ove relacije formiraju komponente povezanosti grafa G.

4.2 RASTOJANJE I DIJAMETAR GRAFA

DEFINICIJA I PRIMERI RASTOJANJA I DIJAMETRA GRAFA

Dijametar grafa je najveće rastojanje između bilo koja dva čvora grafa. Rastojanje je dužina najkraćeg puta između dva čvora

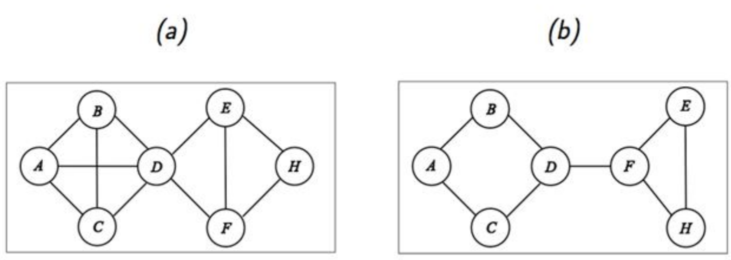
Rastojanje između čvorova u i v u oznaci d(u, v), je dužina najkraćeg puta između u i v.

Dijametar grafa G, u oznaci diam(G), je najveće rastojanje između bilo koja dva čvora grafa G.

Primer

Na slici (a), imamo d(A, F) = 2 i diam(G) = 3.

Na slici (b), imamo d(A, F) = 3 i diam(G) = 4.



Slika 4.3.1 Prikaz grafova a i b [Izvor: Autor]

4.3 TAČKA PREKIDA GRAFA I MOST GRAFA

DEFINICIJA I PRIMER TAČKE PREKIDA I MOSTA

Tačka prekida i most definišu čvor i granu bez kojih bi graf bio nepovezan

Neka je G povezan graf.

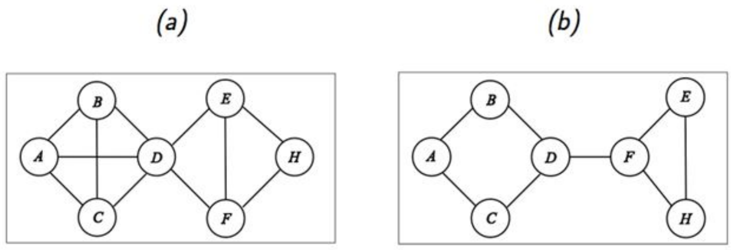
Čvor v grafa G se zove tačka prekida grafa ako je graf G − v nepovezan.

Grana e grafa G se zove most ako je graf G − e nepovezan

Primer

Na slici (a), čvor D je tačka prekida, i na ovom grafu nema mostova.

Na slici (b), grana e = {D, F} je most. Krajnje tačke mosta, D i F moraju biti tačke prekida.



Slika 4.4.1 Prikaz grafova a i b [Izvor: Autor]

Poglavlje 5

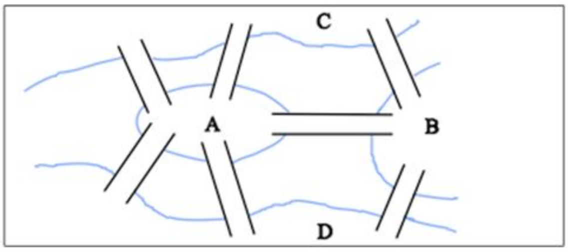
OJLEROV I HAMILTONOV GRAF

KENIGSBERGOVI MOSTOVI

Problem Kenigsbergovih mostova: Prošetati se gradom, a da se pri tom pređe svih sedam mostova, ne prelazeći ni preko jednog mosta dva puta

U osamnaestom veku, istočno-pruski grad Kenigsberg, koji leži na reci koja u gradu ima dva ostrva, je imao sedam mostova raspoređenih kao na slici.

Pitanje: Da li se neka osoba može prošetati gradom, a da pri tom pređe svih sedam mostova, ne prelazeći ni preko jednog mosta dva puta? Početna i krajnja tačka šetnje su proizvoljne.

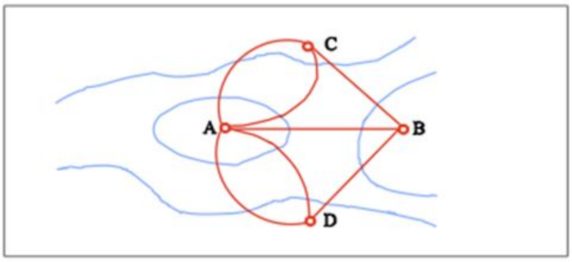


Slika 5.1 Kenigsbergovi mostovi [Izvor: Autor]

Ojler je 1736 godine dokazao da je takva šetnja nemoguća.

On je zamenio ostrva i dve obale reke tačkama, a mostove krivama, i pri tom dobio graf kao na slici.

Primetimo da je graf na slici 2 multigraf.



Slika 5.2 Prikaz mostova grafom [Izvor: Autor]

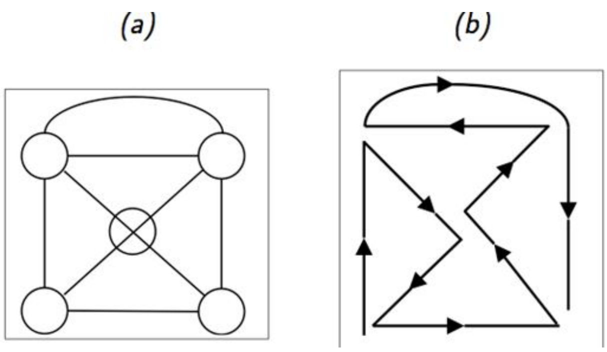
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PROLAZAK MULTIGRAFA I OJLEROV GRAF

Multigraf se može proći ako se može nacrtati u obliku krive bez bilo kakvog prekida i bez ponavljanja grana

Multigraf se može proći ako se može nacrtati u obliku krive bez bilo kakvog prekida i bez ponavljanja grana, to jest, ako postoji put koji sadrži sve čvorove i koristeći svaku granu tačno jedanput. Takav put mora biti staza, pošto se ni jedna grana ne koristi dva puta, pa se zato zove staza prolaska. Jasno je da multigraf koji se može preći mora biti konačan i povezan.

Slika (b) prikazuje stazu prolaska multigrafa sa slike (a). Da bi naznačili način prolaska, na dijagramu nisu nacrtani čvorovi preko kojih se prelazi. Sada ćemo pokazati kako je Ojler dokazao da se multigraf sa slike (b) ne može proći, odnosno da je opisana šetnja kroz Kenigsberg nemoguća.



Slika 5.3 Staza prolaska [Izvor: Autor]

Pretpostavimo da se multigraf može proći i da staza prolaska ne počinje i ne završava se u čvoru P. Tvrdimo da je P paran čvor. Kad god da staza prolaska uđe u čvor P, mora postojati grana, preko koje još nismo prešli, preko koje se može napustiti čvor P. Tako se grane na stazi prolaska koje prolaze kroz P moraju javljati u paru, pa je P paran čvor. Prema tome, ako je čvor Q neparan, staza prolaska mora ili počinjati ili se završavati u njemu. Zbog toga, multigraf sa više od dva neparna čvora se ne može proći. Primetimo da je multigraf koji odgovara problemu Kenigsbergovih mostova ima 4 neparna čvora. Zbog toga opisana šetnja nije moguća.

Ojler je u stvari dokazao obrnuto tvrđenje od gore iskazanog, koje je izraženo u sledećoj teoremi i njenoj posledici.

Graf G se zove Ojlerov graf ako postoji zatvorena staza prolaska, koja se zove Ojlerova staza.

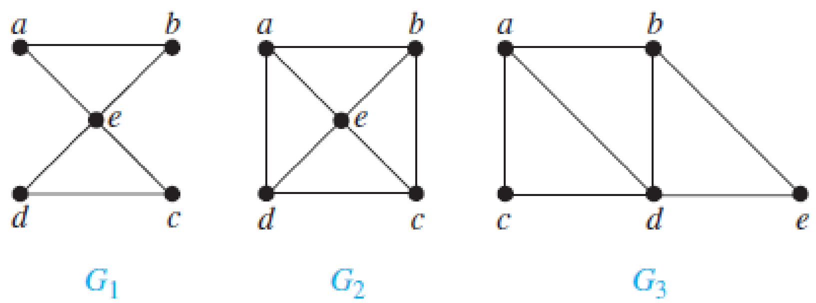
Teorema:
Konačan povezan graf je Ojlerov ako i samo ako svaki čvor ima paran stepen.

PRIMER - OJLEROVI GRAFOVI

Ispitati da li su grafovi Ojlerovi

Primer

Ispitati da li su grafovi G1, G2 i G3 Ojlerovi



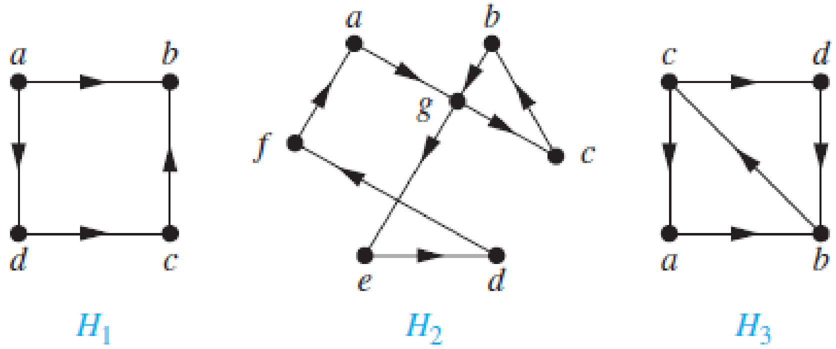
Slika 5.4 Grafovi G1, G2 i G3 [Izvor: Rosen]

Rešenje

Graf G1 ima Ojlerov kružni put, na primer, a, e, c, d, e, b, a. Grafovi G2 i G3 nemaju Ojlerov kružni put, pošto svi čvorovi nisu parnog stepena. Međutim Graf G3 ima tačno 2 čvora neparnog stepena, što znači da ima Ojlerov put a, c, d, e, b, d, a, b. Graf G2 ima četiri čvora neparnog stepena, pa nema ni Ojlerov put. Dakle, možemo zaključiti da je samo graf G1 Ojlerov graf.

Primer

Ispitati da li su grafovi H1, H2 i H3 Ojlerovi



Slika 5.5 Grafovi H1, H2 i H3 [Izvor: Rosen]

Rešenje

Graf H2 ima Ojlerov kružni put, na primer, a, g, c, b, g, e, d, f, a. Grafovi H1 i H3 nemaju Ojlerov kružni put. H3 ima Ojlerov put, c, a, b, c, d, b, ali H1 nema.

Dakle, samo je H2 Ojlerov graf.

PRIMER - VIDEO

Ispitati da li su grafovi G1, G2 i G3 Ojlerovi

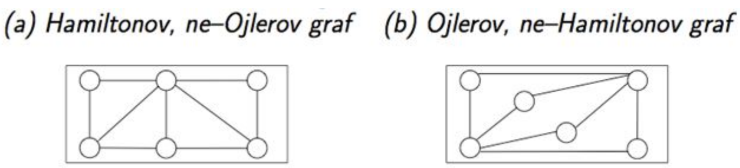
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

HAMILTONOVI GRAFOVI

Hamiltonov kružni put u grafu G je zatvoren put koji prolazi kroz svaki čvor grafa G tačno jedanput. Ako u grafu G postoji Hamiltonov kružni put, onda se graf G zove Hamiltonov graf

Hamiltonov kružni put u grafu G je zatvoren put koji prolazi kroz svaki čvor grafa G tačno jedanput. Ako u grafu G postoji Hamiltonov kružni put, onda se graf G zove Hamiltonov graf .

Primetimo da Ojlerov put prolazi preko svake grane tačno jedanput, ali može više puta proći kroz čvorove, dok Hamiltonov put prolazi kroz svaki čvor tačno jedanput.



Slika 5.6 Primer Hamiltonovog i ne-Hamiltonovog grafa [Izvor: Autor]

Iako je jasno da samo povezani grafovi mogu biti Hamiltonovi, ne postoji jednostavan kriterijum koji ukazuje na to da li je neki graf Hamiltonov, kao što smo imali u slučaju Ojlerovih puteva.

Sledeći dovoljan uslov je dao Dirak:

Ako je G povezan graf sa n čvorova. Tada je G Hamiltonov ako $n \geq 3$ i $n/2 \leq \delta(G)$ za svaki čvor v iz G.

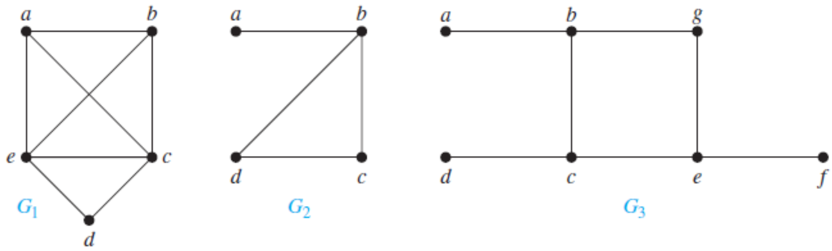
Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER - HAMILTONOVI GRAFOVI

Odrediti da li je graf Hamiltonov

Primer

Odrediti da li su grafovi G1, G2 i G3 Hamiltonovi grafoi



Slika 5.7 Grafovi G1, G2 i G3 [Izvor: Rosen]

Rešenje

G1 ima Hamiltonov kružni put: a, b, c, d, e, a. G2 nema Hamiltonov kružni put (svaki kružni put koji sadrži sve čvorove mora da sadrži granu {a, b} dva puta), ali G2 ima Hamiltonov put: a, b, c, d. G3 ne sadrži ni Hamiltonov put ni Hamiltonov kružni put, zbog toga što put koji sadrži sve čvorove mora da ima grane koje se pojavljuju više puta: {a, b}, {e, f } i {c, d}.

Poglavlje 6

VEŽBE – TEORIJE GRAFOVA

ZADATAK 1

Koji od navedenih grafova su povezani

Predviđeno vreme trajanja: 15 minuta

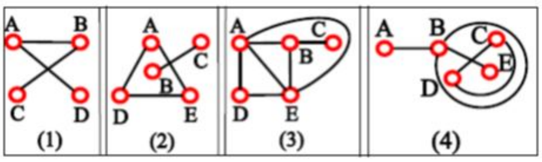
Posmatrajmo grafove sa Slike 1.

(a) Koji od njih su povezani? Ako graf nije povezan, naći njegove komponente povezanosti.

(b) Koji multigrafovi su bez kružnih puteva?

(c) Koji multigrafovi su bez petlji?

(d) Koji od njih su grafovi?



Slika 6.1 Graf za Zadatak 1 [Izvor: Autor]

ZADATAK 1 - REŠENJE

Odrediti povezane grafove, njihove kružne puteve i petlje

REŠENjE:

(a)

Graf 1 – povezan

Graf 2 – nije povezan, ima komponente {A, D, E}, {B, C}

Graf 3 – povezan

Graf 4 – nije povezan, ima komponente {A, B, E}, {C, D}

(b)

Graf 1 – nema kružni put

Graf 2 – ima kružni put {A, D, E, A}

Graf 3 – ima kružni put {A, B, E, A}
Graf 4 – nema kružni put

(c)

Samo graf 4 sadrži petlju {B, B}

(d)

Prateći formalnu definicuju grafova i multigrafova, samo su 1 i 2 grafovi.

Multigraf 3 ima višestruke grane {A, E},
a multigraf 4 ima višestruke grane {C, D} i petlju {B, B}.

ZADATAK 2

Određivanje puteva, tačka prekida i mostova

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Za grafove na Slici 2 pronaći sledeće

(a) sve proste puteve od A do C ;

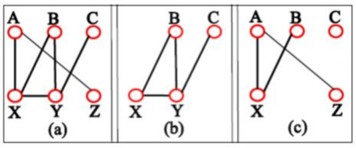
(b) sve kružne puteve;

(c) podgraf H grafa G generisan čvorovima V’ = {B, C, X, Y };

(d) G − Y ;

(e) sve tačke prekida;

(f) sve mostove.



Slika 6.2 Grafovi zadatak 2 [Izvor: Autor]

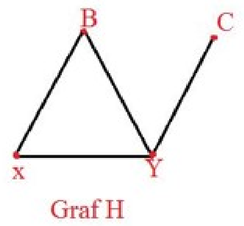
ZADATAK 2 - REŠENJE

Postoje dva prosta puta od A do C

REŠENjE:

(a)

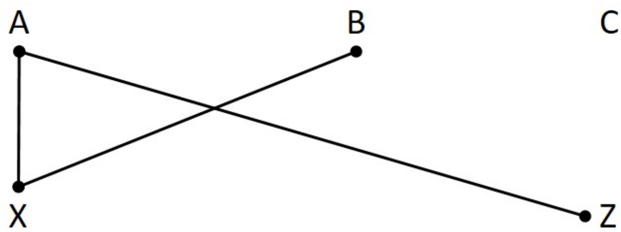
Postoje dva prosta puta od A do C
{A, X, Y, C} i {A, X, B, Y, C}
(b)
Kružni put {B, X, Y, B}
(c)
V’ = {B, C, X, Y};



Slika 6.3 Graf H [Izvor: Autor]

podgraf H se sastoji iz čvorova V’ i grana E’
E’ = { {B, X}, {X, Y}, {B, Y}, {C, Y}}

(d)
G-Y (brišemo čvor Y sa grafa 2a)



Slika 6.4 Prikaz rešenja zadatka 2 [Izvor: Autor]

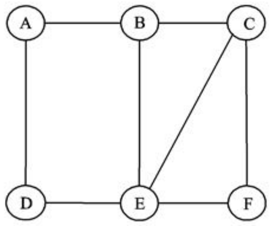
(e)
Čvorovi A, X, Y su tačke prekida
(f)
Grana e je most, jer je G-e nepovezan.
Tako postoji 3 mosta
{A, Z}, {A, X}, {C, Y}

ZADATAK 3

Određivanje tačke prekida

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

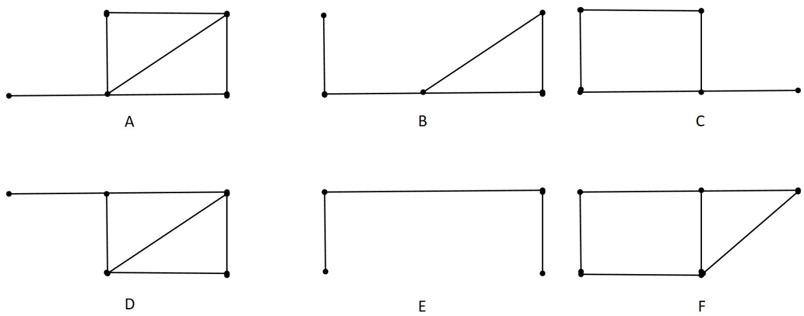
Posmatrajmo graf sa slike. Naći podgrafove dobijene tako što se obriše jedan čvor iz originalnog grafa. Da li ovaj graf ima tačku prekida?



Slika 6.5 Graf zadatak 3 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Postoji 6 podgrafova, od kojih su svi povezani te nijedan čvor nije tačka prekida



Slika 6.6 rešenje zadatka 3 [Izvor: Autor]

ZADATAK 4

Ispitivanje homeomorfnih i izomorfnih grafova

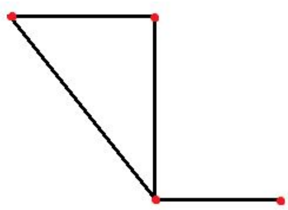
Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Pokazati da su podgrafovi dobijeni u problemu 3 različiti, to jest, ni jedan par od njih nije izomorfan. Naći, ako je moguće, dva homeomorfna podgrafa.

REŠENjE:

Izračunajmo stepene čvorova svih podgrafova u prethodnom zadatku. Osim grafova B i C svi ostali imaju različite stepene, pa ne mogu biti izomorfni. Čak ni grafovi B i C nisu izomorfni pošto graf B ima kružni put dužine 3, a graf C takav kružni put nema.

Međutim, B i C su homeomorfni pošto oba mogu biti dobijena iz sledećeg grafa.



Slika 6.7 Rešenje zadatka 4 [Izvor: Autor]

ZADATAK 5

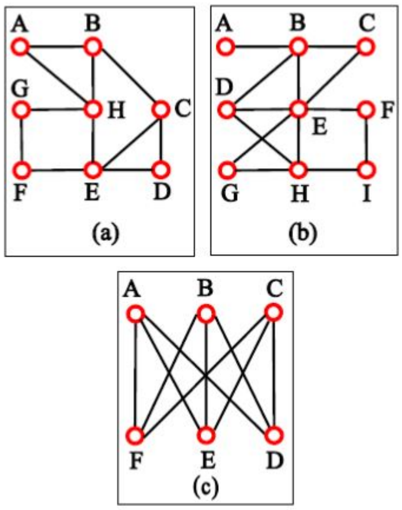
Ispitivanje da li su grafovi Ojlerovi

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Posmatrajmo grafove sa Slike 4.

Kojima se od njih može proći?

Koji su Ojlerovi?



Slika 6.8 Grafovi zadatak 5 [Izvor: Autor]

REŠENJE:

Graf je Ojlerov ako je povezan i svi članovi su parnog stepena, odnosno kada graf sadrži Ojlerov kružni put. S druge strane, graf ima Ojlerov put ako i samo ako je povezan i ako sadrži 0 ili 2 čvora neparnog stepena.

Graf 4a ima dva čvora neparnog stepena i sadrži Ojlerov put, ali nije Ojlerov graf pošto nisu svi članovi parnog stepena.

Graf 4b – isto kao i 4a – neparni čvorovi su A i D

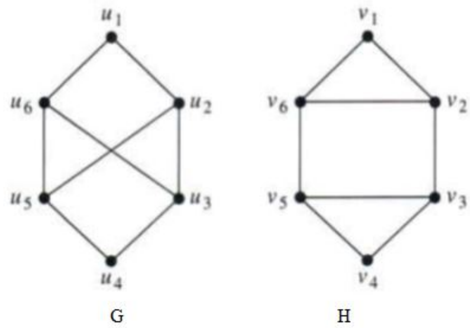
Graf 4c – svi čvorovi su neparni, te nema ni Ojlerovog puta ni Ojlerovog kružnog puta. Graf nije Ojlerov.

ZADATAK 6

Ispitivanje da li su grafovi izomorfni

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Odrediti da li su grafovi na slici izomorfni.



Slika 6.9 Grafovi zadatak 6 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Grafovi G i H imaju isti broj čvorova i isti broj grana.

Međutim graf H ima ciklični put dužine 3:

V_1, V_2, V_6, V_1

koji G nema.

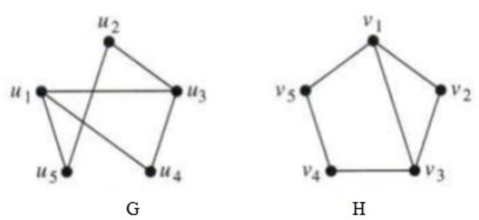
Tako da grafovi G i H nisu izomorfni.

ZADATAK 7

Sledeći grafovi jesu izomorfni

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti da li su grafovi na slici izomorfni.



Slika 6.10 Grafovi zadatak 7 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

Grafovi jesu izomorfni sa sledećim izomorfizmom

$f(u_1)=v_3$

$f(u_3)=v_1$

$f(u_5)=v_4$

$f(u_4)=v_2$

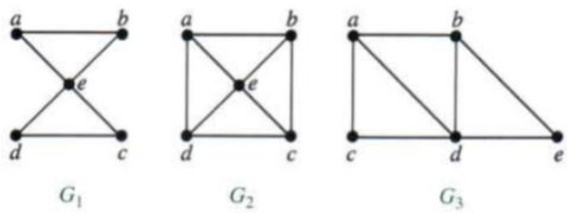
$f(u_2)=v_5$

ZADATAK 8

Graf je Ojlerov samo kada su svi čvorovi parnog stepena

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti da li su grafovi na slici Ojlerovi.



Slika 6.11 Grafovi zadatak 8 [Izvor: Autor]

REŠENjE:

G_1 – svi čvorovi su parnog stepena. Graf je Ojlerov.

Ojlerov kružni put: a, e, c, d, e, b, a

G_2 – graf nije Ojlerov, a pošto ima više od 2 neparna čvora nema ni Ojlerovog puta

G_3 – ima dva neparna čvora, te ima Ojlerov put.

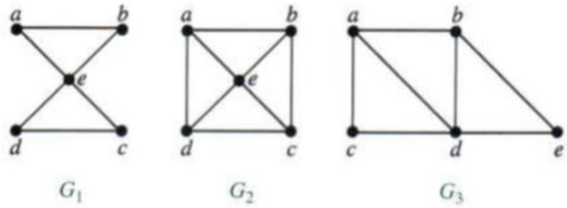
Nema Ojlerov kružni put, pa možemo zaključiti da nije Ojlerov graf

ZADATAK 9

G1 jeste Hamiltonov graf, a G2 i G3 nisu

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Odrediti da li su grafovi na slici Hamiltonovi.



Slika 6.12 Grafovi zadatak 9 [Izvor: Autor]

REŠENJE:

G_1 – ima Hamiltonov kružni put. Graf je Hamiltonov graf.

Hamiltonov kružni put: a, b, c, d, e, a

G_2 – nema Hamiltonov kružni put. Graf nije Hamiltonov graf, ali ima Hamiltonov put a, b, c, d, te ga nazivamo poluhamiltonovim grafom

G_3 – nema ni Hamiltonov kružni put, ni Hamiltonov put.

Graf nije Hamiltonov.

ZADATAK 10

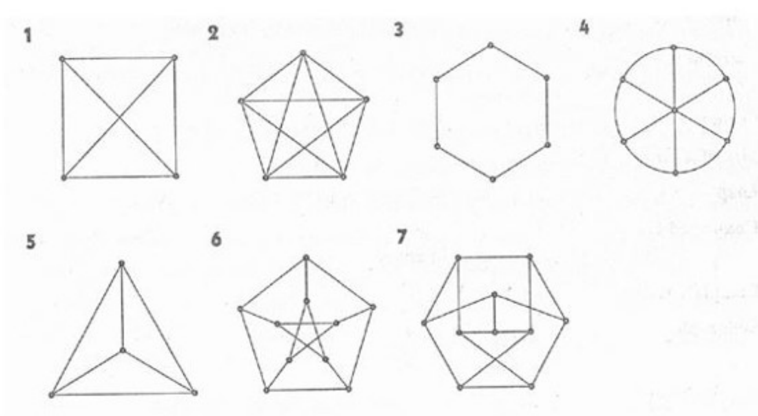
Ispitati da li su grafovi ojlerovi, bipartitni, planarni, regularni

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Navesti da li su sledeći grafovi:

- Ojlerovi,
- bipartitni
- planarni
- k-regularni?

Obrazložiti odgovore!



Slika 6.13 Zadatak 10 [Izvor: Autor]

Rešenje:

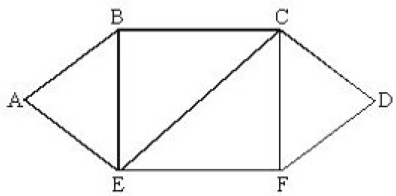
- Grafovi 2 i 3 su Ojlerovi jer su im svi čvorovi parnog stepena.
- Graf 3 je bipartitivan.
- Grafovi 1, 3, 5 su planarni
- Graf 1 je 3-regularan

- Graf 2 je 4-regularan
- Graf 3 je 2-regularan
- Graf 5 je 3-regularan
- Graf 6 je 3- regularan
- Graf 7 je 3-regularan

ZADATAK 11

Naredni zadatak služi za obnavljanje grafova

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta
Odrediti Ojlerov put za graf G počevši od čvora B.



Slika 6.14 Zadatak 11 [Izvor: Autor]

Rešenje:
B → A → E → C → F → E → B → C → D → F

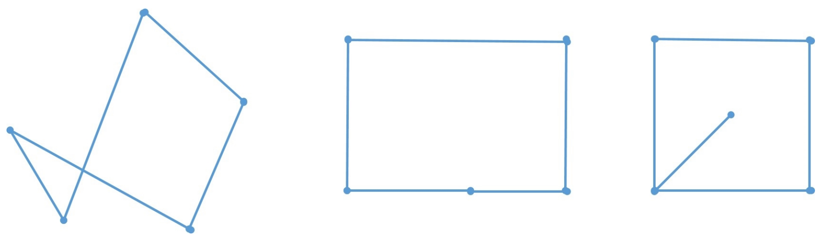
Poglavlje 7

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

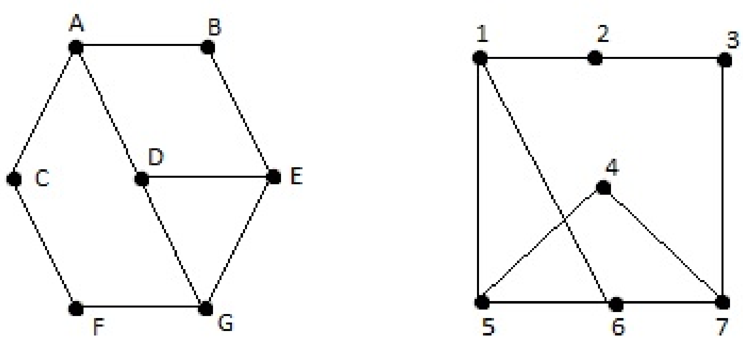
Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 15 minuta
a) Da li su grafovi Ojlerovi? Obrazložite odgovor.
b) Da li su grafovi izomorfni? Ako jesu, odrediti njihov izomorfizam



Slika 7.1 Graf za zadatak 1 [Izvor: Autor]

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 15 minuta
a) Da li su grafovi Ojlerovi? Obrazložite odgovor.
b) Da li su grafovi izomorfni? Ako jesu, odrediti njihov izomorfizam



Slika 7.2 Graf za zadatak 2 [Izvor: Autor]

ZAKLJUČAK

U ovoj lekciji je detaljnije objašnjen je princip grafova. Dati su primeri povezanih i nepovezanih grafova. Ojlerov graf je istaknut. Takodje, dodatno su pojašnjeni pojmovi koji se odnose na grafove.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.