UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

# Uvod o matricama. Operacije s matricama

Lekcija 07

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

# MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 07

## *UVOD O MATRICAMA. OPERACIJE S MATRICAMA*

# Uvod

## UVOD

*U ovoj lekciji ćete naučiti šta su to matrice. Poznavanje pojma matrice će nam trebati za dalje izlaganje gradiva*

Matrice predstavljaju veoma važan matematički model koji je našao primenu u mnogim naukama. U ovoj lekciji ćete naučiti:

- Šta su to matrice,
- Operacije i relacije sa matricama i kako se one primenjuju,

## UVODNI VIDEO KLIP

*Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 1

# Definicija matrice

## POJAM MATRICE

*Uređena $m$ -torka uređenih $n$ -torki elemenata nekog skupa nas dovodi do pojma matrice tipa $m \times n$ .*

Već smo se susreli sa pojmom uređenog para, uređene trojke i u opštem slučaju uređene $n$ -torke elemenata nekog skupa.

**Primer.** Posmatrajmo tri uređene četvorke brojeva

$$v_1 = (1,2,3,4) \quad v_2 = (-1,5,6,-6) \quad \text{i} \quad v_3 = (3,4,2-1),$$

tada možemo dati jednu uređenu trojku ovih uređenih četvorki brojeva, u oznaci $A$ , na sledeći način

$$A = [v_1, v_2, v_3] = [(1,2,3,4)\,(-1,5,6,-6)\,(3,4,2-1)].$$

Međutim, prethodni zapis se u praksi ne koristi jer je nepodesan i koristi se sledeći, mnogo pogodniji, način

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 6 & -6 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prethodno uvedeni matematički objekat koji smo označili sa $A$ nazivamo matrica.

U ovakvom zapisivanju se kod uređenih četvorki $v_1, v_2$ i $v_3$ izostavljaju male zagrade koje se koriste za označavanje, u opštem slučaju, uređenih $n$ -torki, već se one smeštaju po odgovarajućim redovima i to onim redom kako su navedene (jer se radi o uređenoj trojci datih uređenih četvorki $v_1, v_2$ i $v_3$ ). Ovi redovi se nazivaju vrste. Prvu vrstu čine koordinate uređene četvorke $v_1$, drugu uređene četvorke $v_2$ i treću uređene četvorke $v_3$. Svakako, drugačiji redosled navođenja ovih uređenih četvorki bi dao drugačiju uređenu trojku uređenih četvorki $v_1, v_2$ i $v_3$ tj. drugačiju matricu.

U lekcijama koje slede susretaćemo se sa skupovima koji predstavljaju uređene $m$ -torke uređenih $n$ -torki $(m, n \in \mathbb{N})$. Zato, u nastavku dajemo strožiju i opštiju definiciju matrice, kao i razne operacije koje se mogu raditi sa njima. Pre svega ovoga govorićemo, najpre, o linearnoj zavisnosti, odnosno nezavisnosti vrsta u matrici.

# LINEARNA (NE)ZAVISNOST VRSTA U MATRICI. PRIMER

## *Uvodimo pojam linearne zavisnosti i nezavisnosti među uređenim $n$ -torkama.*

Uvešćemo, najpre, pojam linearno zavisne vrste u matrici.

**Definicija.** Za vrste $v_1, v_2, \ldots, v_m (m=2,3,4,\ldots)$ neke matrice kažemo da su linearno zavisne ako i samo ako postoje realni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da važi

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_m \cdot v_m = O,$$

gde je $O$ vrsta kod koje su sve koordinate jednake nuli.

**Napomena.**Pretpostavka je da svaka od vrsta $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m\ (m=2,3,4,\ldots),$ kao i vrsta $O$ predstavljaju uređene $n$ -torke, $n \in \mathbb{N}$.

U slučaju da važi

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_m \cdot v_m = O \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

kažemo da su vrste $v_1, v_2, \ldots, v_m$ linearno nezavisne.

Svaki zbir oblika $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_m \cdot v_m$,gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ proizvoljni realni projevi, nazivamo linearna kombinacija vrsta $v_1, v_2, \ldots, v_m$ .

Prema prethodnom, ako su vrste neke matrice linearno zavisne i $\alpha_j \neq 0$, za $1 \leq j \leq m$, tada se vrsta $v_j$ može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih vrsta na sledeći način

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \cdot v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} \cdot v_2 - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} \cdot v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} \cdot v_{j+1} - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_j} \cdot v_m$$

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

**Primer.**Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & 4 \\ 10 & 4 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

njene vrste su uređene četvorke

$$v_1 = (2,1,0,-3), \quad v_2 = (-3,-1,2,4), \quad v_3 = (10,4,-4,-14).$$

Može se uočiti da važi

$$2v_1 - 2v_2 - v_3 = O,$$

gde je $O = (0,0,0,0)$. Ova jednakost pokazuje da su vrste matrice $A$ linearno zavisne i da se svaka od njih može predstaviti kao linearna kombinacija preostale dve vrste. Tako se treća vrsta može predstaviti:

$$v_3 = 2v_1 - 2v_2.$$

# DEFINICIJA MATRICE

*Matrica predstavlja pravougaonu ili kvadratnu shemu nekih matematičkih objekata (brojeva, funkcija, nizova i dr.).*

**Definicija.**Ako je sa $X$ označen skup bilo kakvih matematičkih objekata (realnih brojeva, kompleksnih brojeva, funkcija, vektora, itd.), tada se svako preslikavanje skupa $\{1,2,3,\ldots,m\} \times \{1,2,3,\ldots,n\},\ n,m \in N$ u skup $X$ naziva matrica tipa $m \times n$ nad skupom $X$. Ovakvo preslikavanje se predstavlja u obliku pravougaone tabele (šeme)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

U ovoj i narednim lekcijama elementi $a_{ij}\ \ (i = 1,2,3\ldots,m; j = 1,2,3,\ldots n)$ biće realni brojevi.

Ona se sastoji od elemenata $a_{ij}\ (i = 1,2,3\ldots,m; j = 1,2,3,\ldots n)$ koji imaju dva indeksa. Prvi indeks prati horizontalnu poziciju elementa u matrici, a drugi indeks prati vertikalnu poziciju elementa u matrici. Horizontalni red u matrici se naziva vrsta, a vertikalni kolona. Prethodno data matrica ima $m$ vrsta i $n$ kolona. Dakle, za element matrice $a_{ij}\ (i = 1,2,3\ldots,m,\ m \in \mathbb{N}; j = 1,2,3,\ldots n,\ n \in \mathbb{N})$prvi indeks $i$ označava vrstu, dok drugi indeks $j$ označava kolonu u kojoj se on nalazi. Za $i \in \{1,2,3\ldots,m\}, m \in \mathbb{N}$ niz elemenata $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazivamo $i$ -ta vrsta matrice. Slično, za $j \in \{1,2,3\ldots,n\}, n \in \mathbb{N}$ niz elemenata $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ nazivamo $j$ -tom kolonom matrice.

Kako bi se pojednostavilo zapisivanje matrica, prethodno data matrica se kraće označava sa $[a_{ij}]_{m\times n}$. Skup svih matrica tipa $m \times n$ označavaćemo sa $M_{m\times n}$. Kada nije potrebno istaći tip matrice one se mogu označavati i velikim slovima $A, B, C, \ldots$

# MATRICA KOLONA, MATRICA VRSTA, NULA MATRICA

*Matrica kolona ima samo jednu kolonu i proizvoljan broj vrsta, dok matrica vrsta ima samo jednu vrstu i proizvoljan broj kolona. Nula matrica ima sve elemente jednake nuli.*

Matrica tipa $m \times 1$, tj. matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

se naziva matrica - kolona, dok se matrica tipa $1 \times n$, tj.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

naziva matrica - vrsta.

Matrica tipa $m \times n$ u kojoj su svi elementi jednaki nuli se naziva nula matrica. Označavamo je sa $O$.

# KVADRATNA MATRICA

*Kvadratna matrica ima isti broj vrsta i kolona. Svakoj realnoj kvadratnoj matrici se može odrediti njena determinanta, koja predstavlja njenu numeričku karateristiku.*

Od posebnog interesa su matricu tipa $n \times n$ koje nazivamo kvadratna matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

U matrici $A$ elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$ čine njenu glavnu dijagonalu, dok elementi $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ čine njenu sporednu dijagonalu.

Za nekvadratne matrice nema smisla definisati pojmove glavne i sporedne dijagonale.

Svakoj realnoj kvadratnoj matrici $A$ pridružuje se realan broj, u oznaci $\det(A)$ tj.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

koji se naziva determinanta. Ako je determinanta kvadratne matrice $A$ različita od nule (tj. $\det A \neq 0$ ), tada se ona naziva regularna matrica. U suprotnom, matrica je singularna. Skup svih kvadratnih matrica tipa $n \times n$ označava se sa $M_n$ .

**Napomena.** Shodno, ranije uvedenoj linearnoj zavisnosti, odnosno nezavisnosti vrsta u matrici, a poznajući i osobine determinanti, možemo reći da ako je neka kvadratna matrica regularna, tada su njene vrste linearno nezavisne, a ako je singularna tada su njene vrste linearno zavisne. O linearnoj nezavisnosti pravougaonih matrica, kao i o tome kako se određuje broj linearno nezavisnih vrsta u nekoj matrici (bilo da je kvadratna ili ne) govorićemo kasnije.

# DIJAGONALNA I JEDINIČNA MATRICA

*Dijagonalna matrica je kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali ima brojeve različite od nule, dok su svi ostali elementi nule. Jedinična matrica je njen specijalan slučaj.*

Kvadratna matrica u kojoj su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli, naziva se dijagonalna matrica. Ona se može predstaviti u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki $1$, naziva se jedinična matrica i označava sa $I$ (ili sa $E$ ). Ona se može predstaviti u obliku

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

# GORNJE I DONJE TROUGAONA MATRICA

*Gornje, odnosno donje trougaona matrica je kvadratna matrica koja ispod, odnosno iznad glavne dijagonale ima elemente koji su jednaki nuli.*

Kvadratna matrica $A \in M_n$ se naziva gornje trougaona matrica ako je $a_{ij} = 0$ za svako $i > j\ (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$ tj. ispod glavne dijagonale svi elementi su jednaki $0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Neka kvadratna matrica $A \in M_n$ se naziva donje trougaona matrica ako je $a_{ij} = 0$ za svako, $i < j(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$, tj. iznad glavne dijagonale svi elementi su jednaki $0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Lako je uočiti da su determinante ovih matrica jednake proizvodu elemenata glavne dijagonale.

# Poglavlje 2

# Jednakost matrica

## DEFINICIJA JEDNAKOSTI MATRICE

*Dve matrice su jednake ako su istog tipa i ako na istim pozicijima u njima, stoje isti elementi.*

Neka su date dve matrice $A, B \in M_{m\times n}$. Ove matrice su jednake, što zapisujemo $A = B$ ako i samo ako važi

$$a_{ij} = b_{ij},\ \text{za sve } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

gde su $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [B_{ij}]_{m\times n}$.

Prethodno uvedena relacija jednakosti dve matrice je veoma bitna binarna relacija u radu sa matricama.

Neophodno je primetiti da se jednakost dve matrice može proveriti samo za matrice koje su istog tipa.

Ako dve matrice $A$ i $B$ nisu jednake to se zapisuje sa $A \neq B$.

## PRIMER

*Određivanje koeficijenata $a$ i $b$ tako da dve matrice budu jednake.*

**Primer.** Odrediti realne parametre $a$ i $b$ tako da matrice

$$A = \begin{bmatrix} a^2 - 4a + 5 & b \\ a & b^2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} a-1 & a \\ b & 3b \end{bmatrix}$$

budu jednake.

**Rešenje.** Da bi važilo $A = B$ mora da važi $a^2 - 4a + 5 = a - 1$, $a = b$ i $b^2 = 3b$. Prva jednačina je oblika $a^2 - 5a + 6 = 0$, gde je rešenje $a_{1/2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$. Tada je $a_1 = 2$ ili $a_2 = 3$. Iz treće jednačine imamo da je $b_1 = 0$ ili $b_2 = 3$. Kako je iz druge jednačine $a = b$, tada za $a = b = 3$, važi da je $A = B$.

# Poglavlje 3

# Množenje matrice skalarom

## DEFINICIJA MNOŽENJA MATRICE SKALAROM. PRIMER

*Skalar množi neku matricu tako što množi svaki element te matrice. Ovakav način množenja matrice skalarom predstavlja prirodno uopštenje množenja uređene $n$ -torke skalarom.*

**Definicija.** Za proizvoljan realan broj, odnosno skalar $\alpha$ i proizvoljnu matricu $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, definišemo operaciju množenje matrice $A$ skalarom $\alpha$ na sledeći način

$$\alpha \cdot A=[\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

**Napomena.** Iz prethodne definicije se može videti da skalar $\alpha$ množi svaki element matrice $A$. Ovakav način množenja matrice skalarom predstavlja prirodno uopštenje množenja uređene $n$ -torke skalarom.

**Primer.**

$$2\cdot\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2\\ -3 & 1 & \frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Svakako važi $1\cdot A=A$, kao i $0\cdot A=O$, gde je $O$ nula matrica.

Za bilo koja dva skalara $\alpha$ i $\beta$ i proizvoljnu matricu $A$ važe sledeće osobine:

$1^\circ$ $\alpha\cdot A=A\cdot\alpha$ (komutativnost),

$2^\circ$ $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$ (asocijativnost).

**Napomena.** U osobini $2^\circ$ kada posmatramo proizvod $\alpha\cdot\beta$ podrazumevamo da je $\cdot$ operacija množenja brojeva, dok u proizvodu $\beta\cdot A$ ova operacija predstavlja množenje matrice skalarom. Ubuduće ćemo koristiti istu oznaku za ove operacije, a iz konteksta će biti jasno o kojoj se operaciji tačno radi.

# Poglavlje 4

# Sabiranje i oduzimanje matrica

## SABIRANJE MATRICA

*Sabirati se mogu samo matrice istog tipa. Zbir dve matrice je matrica istog tipa, kao i one koje se sabiraju.*

Zbir dve matrice se definiše samo za matrice istog tipa. Zbir dve matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$ predstavlja matricu $C$ istog tipa kao i matrice $A$ i $B$, u oznaci $C = A + B$, takvu da je $C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$. U razvijenom obliku prethodno možemo zapisati:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{i}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

tada je

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Analogno se može definisati zbir konačnog broja matrica. Za ovako definisano sabiranje matrica može se pokazati da važi:
$1^\circ$ $A + B = B + A$, (komutativnost sabiranja matrica),

$2^\circ$ $(A+B)+C=A+(B+C)$,(asocijativnost sabiranja matrica),
$3^\circ$ struktura $(M_{m\times n},+)$ predstavlja Abelovu grupu.

# PRIMER 1

## *Sabiranje dve matrice.*

Sabrati matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

**Rešenje.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{bmatrix}.$$

# ODUZIMANJE MATRICA

## *Oduzimati se mogu samo matrice istog tipa. Razlika dve matrice je matrica istog tipa, kao i one koje se oduzimaju.*

Razlika dve matrice $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ i $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $D$, tj. $D=A-B$, istog tipa kao i matrice $A$ i $B$, takva da je $D=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$.

Za proizvoljan tip matrice $A$, postoji nula--matrica $O$, istog tipa kao i matrica $A$, tako da je:

$1^\circ$ $A+O=O+A=A$(neutralni element za sabiranja matrica).

Ako sa $-A$, označimo matricu $(-1)\cdot A$, tada važi:

$2^\circ$ $A+(-A)=(-A)+A=O$.

Za dve matrice $A$ i $B$ istog tipa za koje važi da je $A+B=O$, tj. $a_{ij}+b_{ij}=0$, tj. $a_{ij}=-b_{ij}$, za $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ kažemo da su suprotne matrice i pišemo $A=-B$.

# PRIMER 2

*Primer na kome treba uočiti prioritete u izvršenju operacija. Sabiranje, odnosno oduzimanje matrica je nižeg prioriteta u odnosu na množenje matrice skalarom.*

Neka su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Izračunati $3 \cdot A - B$.

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} 3 \cdot A - B = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -12 & 15 & -24 \\ 6 & 9 & -15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 1 \\ -12 & 14 & -26 \\ 3 & 5 & -20 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Napomena.**Odavde se vidi da je množenje matrice skalarom, prioritetnije od oduzimanja (i sabiranja) matrica.

# Poglavlje 5

# Transponovanje matrice

## DEFINICIJA TRANSPONOVANJA MATRICA

*Prilikom transponovanja matrice njene kolone postaju vrste (ili obrnuto). Transponovanjem matrica tipa $m \times n$ postaje matricaa tipa $n \times m$.*

Transponovana matrica matrice $A$ tipa $m \times n$, u oznaci $A^T$, jeste matrica tipa $n \times m$ koja se dobije od matrice A kada se njene kolone zamene odgovarajućim vrsta (ili obrnuto). Dakle, ako je data matrica $A$ na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

tada je njena transponovana matrica $A^T$ oblika

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Transponovanje matrice predstavlja unarnu matričnu operaciju.

## PRIMER

*Praktično ovladavanje operacijom transponovanja matrice.*

**Primer.**Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

koja je tipa $4 \times 3$, njena transponovana matrica

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

je tipa $3 \times 4$.

# OSOBINE OPERACIJE TRANSPONOVANJA MATRICE

*Ako dva puta transponujemo neku matricu dobićemo polaznu. Zbir transponovanih matrica je jednak transponovanju njihovog zbira. Transponovanje ne deluje na množenje matrice skalarom.*

Za dve matrice A i B istog tipa i za proizvoljan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ može se pokazati da važi:
$1^\circ$ $(A^T)^T = A$ ,

$2^\circ$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ ,

$3^\circ$ $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$ .

Kvadratna matrica $A \in M_n$ koja je jednaka svojoj transponovanoj matrici, tj. za koju važi $A^T = A$ naziva se simetrična matrica.

Kvadratna matrica $A \in M_n$ za koju važi $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$naziva se ortogonalna matrica.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ važi $\det(A) = \det(A^T)$.

# Poglavlje 6

# Množenje matrica

## PRAVILO ZA MNOŽENJE MATRICA

*Matrice se mogu pomnožiti ako je broj kolona kod prve jednak broju vrsta kod druge. Matrica koja je njihov proizvod ima broj vrsta prve i broj kolona druge matrice u tom proizvodu.*

Matricu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je moguće pomnožiti matricom $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ u slučaju da je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B (tj. ako je $n = p$). Slično, matricu B je moguće pomnožiti matricom A samo ako je $q = m$.

Proizvod matrica $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m \times q}$ i to se zapisuje $C = A \cdot B$ čiji se elementi $c_{ij}$ određuju na osnovu sledeće formule:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots a_{in} \cdot b_{nj},$$

za $1 \le i \le \ m$, $1 \le j \le q$. Uočimo da matrica C ima broj vrsta matrice A i broj kolona matrice B .

Dakle, izračunavanje elementa $c_{ij}$ ( $1 \le i \le m, 1 \le j \le q$) matrice C ogleda se u tome što se uoči i-ta vrsta ( $1 \le i \le m$) matrice A i j-ta vrsta ( $1 \le i \le m$) matrice B tj.

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{bmatrix}.$$

Tada se množi prvi element i-te vrsta matrice A, tj. element $a_{i1}$ sa prvim elementom j-te vrsta matrice B , tj. elementom $b_{1j}$ zatim se množi drugi element i-te vrsta matrice A, tj. Element $a_{i2}$ sa drugim elementom j-te vrsta matrice B tj. elementom $b_{2j}$ i tako redom. Zbir svih ovih proizvoda predstavlja element $c_{ij}$ ( $1 \le i \le m$, $1 \le j \le q$), kao što je i dato u prethodnoj formuli.

# PRIMER

*Primer na kome bi trebalo ovladati množenjem matrica. Prilikom množenja matrica uočavaju se vrste prve i kolone druge matrice.*

**Primer.** Neka su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje.** Za date matrice moguće je izračunati proizvod matrica $A \cdot B$, jer je broj kolona matrice $A$ jednak broju vrsta matrice $B$. Množenje $B \cdot A$ nije moguće izvršiti jer broj kolona matrice $B$ nije jednak broju vrsta matrice $A$. Tada imamo

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 18 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

# OSOBINE OPERACIJE MNOŽENJA MATRICA

*Množenje matrica nije komutativna operacija, ali jeste asocijativna. Distributivna je prema operaciji sabiranja matrica.*

Matrično množenje predstavlja binarnu operaciju koja ne mora biti komutativna i zato se pri primeni ove vrste množenja ne sme menjati raspored matrica. Naime, iz prethodnog primera se može uočiti da za operaciju proizvoda dve matrice u opštem slučaju ne važi zakon komutativnosti, tj. $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$. Štaviše, može se desiti da proizvod A·B može da se izračuna, dok je proizvod B·A nemoguće izračunati (što je slučaj iz prethodnog primera). S druge strane, ako je ove proizvode i moguće izračunati, u opštem slučaju oni ne moraju biti jednaki.

Za matrice A i B za koje važi da je $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$ kažemo da su komutativne matrice. Primer komutativnih matrica u odnosu na operaciju množenja matrica, jesu dijagonalne matrice istog tipa.

Za odgovarajuće matrice A, B i C jediničnu matricu I i skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ važe sledeće osobine, koje, takođe, navodimo bez dokaza:
$1^\circ$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

$2^\circ$ $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \quad \text{i} \quad (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$,

$3^\circ$ $O\cdot A=A\cdot O=O$,

$4^\circ$ $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$,

$5^\circ$ $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$,

$6^\circ$ $I\cdot A=A\cdot I=A$,

gde je $O$ nula matrica.

# PRAVILO ZA MNOŽENJE DETERMINANTI

*Determinanta proizvoda dve kvadratne matrice jednaka je proizvodu determinanti svake od njih.*

**Stav.** Za bilo koje dve kvadratne matrice $A$ i $B$ istog tipa važi

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B).$$

**Dokaz.** Izvešćemo dokaz za slučaj $n=2$. Neka je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \text{ i } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}.$$

Odavde dobijamo

$$\begin{aligned}
\det(A\cdot B)&=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}=\\
&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-\\
&\quad-(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})=\\
&=a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}-\\
&\quad-a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}-a_{21}b_{11}a_{12}b_{22}-a_{22}b_{21}a_{11}b_{12}-a_{22}b_{21}a_{12}b_{22}=\\
&=a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})-a_{21}a_{12}(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})=\\
&=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})=\\
&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\\
&=\det(A)\cdot\det(B).\ \square
\end{aligned}$$

Iz ovog stava proizilazi pravilo za množenje determinanti .

# VIDEO KLIP

## *Snimak sa Youtube-a: osnovne operacije s matricama.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Poglavlje 7

# Stepenovanje kvadratne matrice

## $k$ -TI STEPEN KVADRATNE MATRICE

*Stepenovanje kvadratne matrice se svodi na određeni broj množenja te matrice.*

**Definicija.** Ako je $A$ kvadratna matrica i $k \in \mathbb{N}$, tada se pod $k$ -tim stepenom matrice podrazumeva

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k}.$$

Nulti stepen kvadratne matrice je jedinična matrica $A^0 = I$.

Ako je $A$ kvadratna matrica a $k$ i $l$ su nenegativni celi brojevi, tada je

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l} \quad \text{i} \quad \left(A^k\right)^l = A^{k \cdot l}.$$

Ako su $A$ i $B$ komutativne matrice, tada je

$$(A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k.$$

Ako je $A$ kvadratna matrica reda $n$, tada izraz

$$P_k(A) = a_k \cdot A^k + a_{k-1} \cdot A^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I$$

predstavlja matrični polinom stepena $k$.

Ako je $A^2 = A$ za matricu $A$ kažemo da je idempotentna.

Ako je $A^2 = I$ za matricu $A$ kažemo da je involutivna.

Ako je $A^m = O$ za neko $m \in \mathbb{N}$, tada za matricu $A$ kažemo da je nilpotentna. Najmanji broj $k \in \mathbb{N}$, za koji je $A^k = O$ naziva se stepen nilpotentnosti, gde je $O$ nula matrica.

## PRIMER

*Određivanje $n$ -tog stepena kvadratne matrice.*

Odrediti $A^n$, $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje.** Imamo da je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot A,$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (3 \cdot A) = 3 \cdot A^2 = 3 \cdot (3 \cdot A) = 3^2 \cdot A,$$

Generalno, možemo zaključiti da je $A^n = 3^{n-1} \cdot A, n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Dokaz izvodimo primenom matematičke indukcije.

Za $n = 2$ videli smo da je $A^2 = 3 \cdot A$. Dakle, indukcija može da krene.

Pretpostavimo da za neko $k \in \mathbb{N}$ tvrđenje $A^k = 3^{k-1} \cdot A,$ važi. Tada imamo da je

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = 3^{k-1} \cdot A \cdot A = 3^{k-1} \cdot A^2 = 3^{k-1} \cdot 3 \cdot A = 3^k \cdot A.$$

Konačno, na osnovu principa matematičke indukcije imamo da važi

$$A^n = 3^{n-1} \cdot A, n \in \{2, 3, 4, \ldots\}.$$

Primenom prethodne formule možemo, na primer, odrediti $A^{10}$. Tada je

$$A^{10} = 3^9 \cdot A = 3^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

# Poglavlje 8

# Pokazna vežba

## ZADATAK 1 (10 MINUTA)

*Sabiranje, oduzimanje matrica, množenje matrica skalarom, transponovanje matrica*

Za date matrice A i B

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

odrediti $A + B, 3A - 2B$ i $A^T$.

**Rešenje.**Mogu se sabirati (oduzimati) samo matrice istog tipa i to tako što im se odgovarajući elementi saberu (oduzmu). Matrica se množi brojem tako što se svi njeni elementi pomnože tim brojem. Transponovana matrica matrice A u oznaci $A^T$ se dobija kada se početnoj matrici zamene mesta vrsta i kolona.

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+9 & 2+7 & 1+1 \\ -3+4 & 4-4 & 0-2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$3A - 2B = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \cdot 9 & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 15-18 & 6-14 & 3-2 \\ -9-8 & 12+8 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -17 & 20 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## ZADATAK 2 (10 MINUTA)

*Množenje matrica.*

Pomnožiti date matrice redosledom koji je moguć

$$A=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\6&0&2\\0&2&3\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad C=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

**Rešenje.**Mogu se množiti samo matrice kod kojih je broj kolona prve jednak broju vrsta druge matrice. Element na mestu $(i,j)$ koja predstavlja proizvod dve matrice se dobija kada se uzmu $i$ -ta vrsta prve matrice i $j$ -ta kolona druge matrice i saberu proizvodi odgovarajućih elemenata. Ako su matrice koje množimo dimenzije $m\times n$ i $n\times k$ rezultat množenja je matrica dimenzija $m\times k$ Množenje matrica u opštem slučaju nije komutativna operacija. Kako matrica $A$ ima dimenziju $2\times 1$ , matrica $B$ $4\times 3$ i matrica $C$ $3\times 2$, jedini mogući redosled množenja je $B\cdot C\cdot A$.

$$B\cdot C\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\6&0&2\\0&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot0-1\cdot1 & 1\cdot2+0\cdot1-1\cdot0\\3\cdot1+5\cdot0+0\cdot1 & 3\cdot2+5\cdot1+0\cdot0\\6\cdot1+0\cdot0+2\cdot1 & 6\cdot2+0\cdot1+2\cdot0\\0\cdot1+2\cdot0+3\cdot1 & 0\cdot2+2\cdot1+3\cdot0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\3&11\\8&12\\3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0\cdot0+2\cdot(-3)\\3\cdot0+11\cdot(-3)\\8\cdot0+12\cdot(-3)\\3\cdot0+2\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-33\\-36\\-6\end{bmatrix}$$

# ZADATAK 3 - 1. DEO (20 MINUTA)

## *Ispitivanje ortogonalnosti kvadratne matrice drugog reda.*

Proveriti da li su matrice

$$a)\ \ A=\begin{bmatrix}\sin x&\cos x\\-\cos x&\sin x\end{bmatrix}\quad b)\ \ B=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}.$$

ortogonalne.

**Rešenje.** a) Imamo da je

$$A\cdot A^T=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^2 x+\cos^2 x & -\sin x\cos x+\sin x\cos x\\ -\cos x\sin x+\sin x\cos x & \sin^2 x+\cos^2 x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

Takođe, važi da je

$$A^T\cdot A=\begin{bmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^2 x+\cos^2 x & -\sin x\cos x+\sin x\cos x\\ -\cos x\sin x+\sin x\cos x & \sin^2 x+\cos^2 x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

Dakle, kako važi da je $A\cdot A^T=A^T\cdot A=I$,zaključujemo da je matrica $A$ ortogonalna.

# ZADATAK 3 - 2. DEO

## *Ispitivanje ortogonalnosti kvadratne matrice trećeg reda.*

b) Proverićemo da li važi da je $B\cdot B^T=B^T\cdot B=I$.Zaista, imamo da je

$$B\cdot B^T=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\sqrt2}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0+\frac13+\frac23 & 0+\frac13-\frac13 & 0+\frac13-\frac13\\ 0+\frac13-\frac13 & \frac12+\frac13+\frac16 & \frac12-\frac13-\frac16\\ 0+\frac13-\frac13 & -\frac12+\frac13+\frac16 & \frac12+\frac13+\frac16\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

Analogno, važi i $B^T\cdot B=I.$ Dakle, matrica $B$ je ortogonalna.

# ZADATAK 4(10 MINUTA)

## *Ortoganalna matrica i njene osobine.*

Ako je $A$ proizvoljna ortogonalna matrica, dokazati da je njena determinanta $\pm1$.

**Rešenje.** Podsetimo se da je ortogonalna matrica, kvadratna matrica za koju važi da je $A\cdot A^T=A^T\cdot A=I$,pa je $det(A\cdot A^T)=det(I)=1$.

S druge strane, važi da je

$$det(A \cdot A^T) = det(A) \cdot det(A^T) = det(A) \cdot det(A) = [det(A)]^2.$$

Ukupno, dobijamo da je

$$[det(A)]^2 = 1.$$

Odavde imamo da je $det(A) = 1$ ili $det(A) = -1$.

# ZADATAK 5 (20 MINUTA)

## *Proverava da li skup određenih matrica i operacija množenja matrica čine Abelovu grupu.*

Dat je skup $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Dodazati da struktura $(G, \cdot)$ predstavlja Abelovu grupu, gde $\cdot$ predstavlja operaciju množenja matrica.

**Rešenje.** Ako uvedemo oznake

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tada je

$$\begin{array}{llll} a \cdot a = a & a \cdot b = b & a \cdot c = c & a \cdot d = d \\ b \cdot a = b & b \cdot b = c & b \cdot c = d & b \cdot d = a \\ c \cdot a = c & c \cdot b = d & c \cdot c = a & c \cdot d = b \\ d \cdot a = d & d \cdot b = a & d \cdot c = b & d \cdot d = c \end{array}$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je data struktura grupoid, jer je operacija množenja matrica zatvorena u skupu $G$. Stoga, možemo formirati Kelijevu tablicu za datu operaciju

| $\cdot$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ |

Govorili smo o tome na predavanjima da je množenje matrica asocijativna operaciju u slučaju kada date matrice mogu da se pomnože. Metrice koje pripadaju skupu $G$ su kvadratne i istog tipa, tako da se između sebe mogu pomnožiti, pa zaključujemo da je operacija $\cdot$ u skupu $G$ asocijativna.

Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je neutralni element za množenje matrica.

Matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je sama sebi inverzna, dok iz Kelijeve tablice uočavamo da važi i sledeće

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, struktura $(G, \cdot)$ je grupa. Iz Kelijeve tablice, s obzirom da je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, zaključujemo da je operacija $\cdot$ i komutativna, pa je $(G, \cdot)$ Abelova grupa.

# ZADATAK 6 - 1. DEO (20 MINUTA)

*Proverava da li skup određenih kvadratnih matrica reda 2 i operacija sabiranja matrica predstavlja grupoid i da li operacija sabiranja asocijativna.*

Dat je skup matrica $H(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$, gde je $a \in \mathbb{R}$. Dokazati da struktura $(H(a), +)$ predstavlja grupu, gde $+$ predstavlja operaciju sabiranja matrica.

**Rešenje.** Dokažimo, najpre, da je posmatrana struktura grupoid. Zaista, važi da je

$$H(a) + H(b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a-b & a+b \end{bmatrix} = H(a+b),$$

gde je $a + b \in \mathbb{R}$, pa je $(H(a), +)$ grupoid.

Operacija sabiranja matrica je komutativna u skupu svih kvadratnih matrica, pa i matrica oblika $H(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$, gde je $a \in \mathbb{R}$. Ako bismo hteli da to ipak dokažemo, onda bi trebalo dokaziti da za svake tri matrice $H(a)$, $H(b)$ i $H(c)$ da važi

$$\big(H(a) + H(b)\big) + H(c) = H(a) + \big(H(b) + H(c)\big)$$

Tada je

$$\begin{aligned}\big(H(a) + H(b)\big) + H(c) &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a-b & a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a-b-c & a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b-c & b+c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & c \end{bmatrix}\right) = \\ &= H(a) + \big(H(b) + H(c)\big).\end{aligned}$$

# ZADATAK 6 - 2. DEO

## *Određivanje neutralnog elementa, i inverznog elementa.*

Neutralni element za sabiranje matrica je nula matrica. Kako je $H(0)$ nula matrica, neutralni element pripada datom skupu matrica.

Za svaku matricu $H(a)$ njena inverzna matrica, u odnosu na matricu $H(0)$, jeste matrica $H(-a)$. Dakle, svaka matrica oblika $H(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$, gde je $a \in \mathbb{R}$ ima svoju inverznu (suprotnu) matricu oblika $H(-a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{bmatrix}$, gde je $-a \in \mathbb{R}$.

# ZADATAK 7 - 1. DEO (20 MINUTA)

## *Proverava da li skup određenih kvadratnih matrica reda 3 i operacija množenja matrica predstavlja grupoid i da li operacija sabiranja asocijativna.*

Ispitati da li skup matrica oblika

$$M(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & \frac{-a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde je $a \in \mathbb{R}$, predstavlja grupu u odnosu na množenje matrica.

**Rešenje.** Uočimo dve matrice ovog oblika

$$M(a_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ -a_1 & 1 & \frac{-a_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad M(a_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ -a_2 & 1 & \frac{-a_2^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada važi da je

$$M(a_1) \cdot M(a_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ -a_1 & 1 & \frac{-a_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ -a_2 & 1 & \frac{-a_2^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 + a_2 \\ -a_1 - a_2 & 1 & \frac{-(a_1+a_2)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(a_1 + a_2),$$

pa je struktura $(M(a), \cdot)$, $a \in \mathbb{R}$.

# ZADATAK 7 - 2. DEO

*Jedinična matrica pripada skupu posmatranih matrica, pa postoji neutralni element. Posmatrane matrice su regularne, pa postoje inverzni elementi koji pripadaju skupu matrica.*

Množenje matrica je asocijativno. Jedinična matrica pripada skupu $M(a)$, za $a = 0$ tj. važi da je $I = M(0)$.

Kako važi da je $det\big(M(a)\big) = 1,$ matrice $M(a)$ su regularne za svako $a \in \mathbb{R}$, pa za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji regularna matrica za $M(a)$. Ostaje da proverimo da li su ove inverzne matrice pripadaju skupu $M(a)$ za neko $a \in \mathbb{R}$. Važi da je

$$[M(a)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & \frac{-a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(-a).$$

Na osnovu svega, zaključujemo da je struktura $(M(a), \cdot),\ a \in \mathbb{R}$ grupa.

# ZADATAK 8 (10 MINUTA)

*Provera da li data kvadratna matrica ispunjava dati uslov.*

Data je matrica

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Da li ova matrica zadovoljava relaciju $A^2 - 8A + 7I = O$, gde je $O$ odgovarajuća nula matrica?

**Rešenje.** Važi da je

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 4 & 3\cdot 2 + 2\cdot 5 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 4 & 4\cdot 2 + 5\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ 32 & 33 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A^2 - 8A + 7I = \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ 32 & 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 16 \\ 32 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je data relacija zadovoljena.

# ZADATAK 9 (10 MINUTA)

*Stepenovanje kvadratne matrice.*

Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matematičkom indukcijom dokazati da važi

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}, \ \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

**Rešenje.** Proverimo da li data jednakost važi za $n = 1$ (indukcijska baza). Tada je

$$A = \begin{bmatrix} 2^1 & 3 \cdot 2^0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

što je tačno.

Pretpostavimo da data jednakost važi za $n = k, \ k \in \mathbb{N}$(indukcijska hipoteza), tj. da važi

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

i dokažimo da tada važi za $n = k + 1,$ da je tačno

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3(k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Zaista, kako važi da je $A^{k+1} = A^k \cdot A,$koristeći indukcijsku hipotezu za $A^k$ dobijamo

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k & 3 \cdot 2^k + 6k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2 \cdot 2^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3 \cdot 2^k \cdot (k+1) \\ 0 & 2 \cdot 2^k \end{bmatrix}.$$

# Poglavlje 9

# Zadaci za samostalan rad

## ZADACI ZA VEŽBU

### *Zadaci koje studenti treba da samostalno provežbaju*

**Zadatak 1.** Date su matrice $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}$. Odrediti $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$, $B\cdot A$.

**Rezultat:**$A+B=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ ,$A-B=\begin{bmatrix}0 & -6\\ 5 & -8\end{bmatrix}$, $A\cdot B=\begin{bmatrix}9 & 20\\ 15 & 4\end{bmatrix}$, $B\cdot A=\begin{bmatrix}29 & -10\\ 20 & -16)\end{bmatrix}$

**Zadatak 2.**Date su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Da li postoje sledeće matrice $A+2B$, $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^T\cdot A$ ? Ako postoje, odrediti ih.

**Rezultat:**$B\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $A^T\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$,

Vreme izrade:

1. 15 minuta;

2. 15 minuta;

## VIDEO KLIP 1 - ZADATAK ZA DODATNI RAD (9 MINUTA)

### *Snimak sa Youtube-a: Množenje matrica.*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

## VIDEO KLIP 2 - ZADATAK ZA DODATNI RAD (3 MINUTA)

### *Rešavanje matrične jednačine - primer sa Youtube-a*

**Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.**

# Zaključak za lekciju 07

## MATRICE

### *Sažetak u vezi sa matricama*

Matrice predstavljaju veoma važan matematički model koji našao primenu u računarstvu, ekonomiji, menadžmentu i dr.

Takođe, poznavanje osobina matrice, operacija za rad sa njima i nekim dodatnim osobina o kojima ćemo govoriti na narednom času stiču se neophodna znanja potrebna za uspešno usvajanje i primenu raznih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina.

Literatura (nastavni materijal):
Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.