UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Inverzna matrica. Rang matrice

Lekcija 08

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 08

INVERZNA MATRICA. RANG MATRICE

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćete naučiti šta su to matrice. Poznavanje pojma matrice će nam trebati za dalje izlaganje gradiva

Matrice predstavljaju veoma važan matematički model koji je našao primenu u mnogim naukama. U ovoj lekciji ćete naučiti:

- Šta su to inverzne matrice i kako se određuju,
- Šta je to rang matrice i kako se određuje.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Inverzna matrica

ADJUNGOVANA MATRICA

Na analogan način kao kod determinanti se za kvadratnu matricu uvodi pojam algebarkog kofaktora. Koristeći ga možemo definisati adjungovanu matricu.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ matrica u oznaci A^{-1} se naziva njena inverzna matrica ako važi:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Iz prethodnog se zaključuje da samo kvadratne matrice mogu imati inverzne, kao i da je kvadratna matrica komutativna sa svojom inverznom matricom.

Pojam algebarskog kofaktore smo uveli kod determinanti. Na analogan način se i za kvadratnu matricu uvodi pojam algebarkog kofaktora. Ako su $A_{ij} \ \ (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n))$ algebarski kofaktori matrice A koji odgovaraju elementima $a_{ij}\,(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n))$, tada se matrica

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva adjungovana matrica matrice A, u oznaci $adj(A)$.

ODREĐIVANJE INVERZNE MATRICE

Kvadratna matrica ima inverznu matricu ako i samo ako je ona regularna matrica. Ako postoji, predstavlja količnik adjungovane matrice i njene determinante.

Naredni stav govori o tome kada kvadratna matrica ima inverznu matricu i kako se ona određuje.

Stav. Kvadratna matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je matrica A regularna. Ako je matrica A regularna, tada je:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A).$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Iz pretpostavke da matrica A ima svoju inverznu matricu A^{-1}, imamo da je $A \cdot A^{-1} = I$. Sada je $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$. Primenom Stava o množenju determinanti imamo da je $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, odakle dobijamo da važi $\det(A) \neq 0$ i $\det(A^{-1}) \neq 0$, što znači da je matrica A regularna.

$(\Leftarrow)$ Da bismo dokazali ovaj deo tvrdjenja, potrebno je pokazati da je A^{-1} jednako sa $\dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$. Prema Laplasovoj teoremi imamo da je:

$$\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}, \quad \text{za } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

a prema njenoj posledici je:

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots a_{in} + \cdot A_{jn} = 0, \quad \text{za } i \neq j.$$

Sada imamo da je

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{i1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{i2} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{in} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det(A) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \det(A) \end{bmatrix} = I.$$

Dakle, dokazali smo da je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$.

JEDINSTVENOST INVERZNE MATRICE I NJENE OSOBINE

Svaka regularna matrica ima jedinstvenu inverznu matricu.

Jedinstvenost inverzne matrice obezbeđuje sledeći stav.

Stav. Svaka regularna matrica ima jedinstvenu inverznu matricu.

U nastavku je dat odnos unarne operacije invertovanja matrice i ostalih matričnih operacija. Može se pokazati da je za svake dve regularne matrice $A, B \in M_n$ ispunjeno:

i) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

ii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,

iii) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

iv) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Napomena. Algebarska struktura $(M_n, \cdot)$ je semigrupa sa jediničnim elementom, tj. monoid. Svakako, jedinični element u ovom slučaju je jedinična matrica. Ova struktura ne može biti grupa, jer ne mora svaka kvadratna matrice imati svoju inverznu. Kao što smo rekli, samo regularne matrice imaju inverzne.

PRIMER

Primer kako se određuje inverzna matrica za determinantu trećeg reda.

Odrediti, ako postoji, inverznu matricu, matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Najpe, ćemo proveriti da li je data matrica regularna. Kako je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

postoji inverzna matrica, matrice A. Sada ćemo odrediti algebarske kofaktore matrice A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1,$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3,$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Tada je

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Konačno dobijamo da je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = -\begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 2

Rang matrice

DEFINICIJA RANGA MATRICE

Prirodan broj k naziva se rang matrice ako u njoj postoji bar jedan minor k -tog reda različit od nule, dok su svi minori većeg reda od k jednaki nuli.

Neka je data matrica $A \in M_{m\times n}$. Izdvojimo u njoj proizvoljnih k vrsta i k kolona, pri čemu je $k = \min\{m,n\}$. Elementi koji se nalaze u presecima tih izdvojenih vrsta, odnosno kolona čine kvadratnu matricu reda $k \times k$. Ovakva matrica se naziva submatrica (ili podmatrica) polazne matrice, a njena determinanta se naziva minor k -tog reda, matrice A. Iz polazne matrice tipa $m \times n$ moguće je izdvoji

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$$

ovakvih podmatrica, odnosno minora.

Definicija. Prirodan broj k naziva se rang matrice A ako u njoj postoji bar jedan minor k -tog reda različit od nule, dok su svi minori većeg reda od k jednaki nuli.

Rang matrice A se označava sa $r(A)$ i predstavlja njenu numeričku karakteristiku. Iz prethodne definicije proizilazi da je $1 \leq r(A) \leq \min\{m,n\}$.

Ako za matricu A važi da je $r(A) = k \ (k \in \mathbb{N})$, tada se svaki njen minor k -tog reda različit od nule naziva bazisni minor. Vrste i kolone matrice koje generišu bazisni minor se nazivaju bazisne vrste i bazisne kolone, tim redom.

PRIMER

Primer kako se određuje najviši mogući red minora (u ovom slučaju 4) i kako se vrši provera da li je on rang matrice.

Primer. Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Potrebno izračunati sve minore četvrtog reda $(k=4)$ matrice A. S obzirom, da je $m=4$ i $n=5$, njih ima $\binom{4}{4}\cdot\binom{5}{4}=5$. Oni su sledeće determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & 12 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & -8 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 12 & -8 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 12 & -8 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & 12 & -8 \end{vmatrix}=0.$$

Kako su svi minori četvrtog reda jednaki nuli, sada proveravamo minore trećeg reda. Ovakvih provera ima $\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{3}=4\cdot 10=40.$ Međutim, kako je

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0,$$

dobijamo da je $r(A)=3$.

Napomena. Iz ovog primera se vidi da proces određivanje ranga matrice preko njegovog minora zahteva izračunanja velikog broja determinanti. Stoga, za računanje ranga matricesuuvedene drugemetode, kako bi se ovaj proces ubrzao. O tome govorimo u nastavku.

OSOBINE RANGA MATRICE

Date osobine ranga matrice ćemo koristiti u daljem radu i narednim lekcijama.

U narednom stavu dajemo osnovne osobine ranga matrice.

Stav.

1. Ako se matrica transponuje, rang matrice se ne menja;
2. Rang matrice se ne menja ako se dve vrste ili dve kolone zamene mesta;
3. Rang matrice se ne menja ako se svi elementi jedne vrste, ili kolone, pomnože jednim brojem različitim od nule;
4. Rang matrice se ne menja ako je se jednom vrsti, odnosno koloni, dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste ili kolone, pomnoženi jednim brojem;
5. Rang matrice se ne menja ako se iz nje izostavi vrsta, ili kolona, čiji su svi elementi jednaki nuli;

6. Rang matrice se ne menja ako se iz nje izostavi vrsta, ili kolona, koja je linearna kombinacija drugih vrsta, odnosno kolona.

Poglavlje 3

Elementarne transformacije

POJAM

Određene operacije sa matricama se zovu elementarne transformacije. Ekvivalentne matrice su one koje se mogu ovim operacijama prevesti jedna na drugu i one imaju jednake rangove.

Iz prethodnog primera smo videli da je određivanje ranga matrice skopčano sa izračunavanjem određenih determinanati, što može biti dosta obiman posao, pogotovu ako je broj vrsta i kolona matrice veliki.

Sada ćemo uvesti jednu metodologiju, koja će nam olakšati izračunavanje ranga matrice. S tim u vezi uvodimo pojam elementarne transformacije matrice.

Pod elementarnim transformacija matrice se obično podrazumevaju sledeće transformacije

a) zamena mesta dvema proizvoljnim vrstama ili kolonama;

b) dodavanje elemenata jedne vrste ili kolone, nekoj drugoj vrsti ili koloni, prethodno pomnožena nekim brojem;

c) množenje elemenata jedne vrste ili kolone brojem različitim od nule.

Definicija. Za dve matrice $A, B \in M_{m\times n}$ koje se mogu primenom konačnog broja elementarnih transformacija prevesti jedna u drugu, kažemo da su ekvivalentne matrice i to označavamo sa $A \sim B$.

Sada ćemo dati jedan veoma važan stav koji govori o tome kako treba određivati rang matrice.

Stav. Ako je $A \sim B$ tada je $r(A) = r(B)$.

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE RANGA MATRICE ZASNOVAN NA EKVIVALENTNIM TRANSFORMACIJAMA

Kako se od početne matrice može dobiti njoj ekvivalentna matrica, primenom elementarnih transformacija

Prilikom određivanja ranga matrice primenom metode elementarnih transformacija, polaznu matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je moguće prevesti na njoj ekvivalentnu matricu oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, \dots, b_{kk} \neq 0$,odakle se jasno vidi da je rang matrice B jednak k, a tada na osnovu prethodnog stava je i rang matrice A jednak k.

O SAMOM POSTUPKU DOBIJANJA KRAJNJE EKVIVALENTNE MATRICE IZ KOJE SE DOBIJA RANG POČETNE MATRICE

Kako dobiti ekvivalentnu matricu početnoj iz koje se može odrediti njen rang.

Sam postupak prevođenja matrice A u oblik matrice B vrši se na sledeći način: u prvoj koloni matrice A bez umanjenja opštosti se može pretpostaviti da je $a_{11} \neq 0$, jer u slučaju da to nije tačno može se zameniti neka od vrsta u kojoj je njen prvi element različit od nule sa prvom vrstom, na osnovu osobine a) iznetog stava. Ako su svi elementi prve kolone jednaki nuli, tada se na osnovu osobine pod e) iznetog stava prva kolona može izostaviti, a da se rang matrice A ne promeni. Dakle, za $a_{11} \neq 0$, dodavanjem prve vrste, svakoj vrsti počev od druge, prethodno pomnožene odgovarajućim koeficijentom (za i-tu vrstu (i = 2, 3,..., m) taj koeficijent iznosi $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, ($i = 2, 3, \dots, m$)) dobijamo matricu oblika:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mj} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

u kojoj su svi elementi prve kolone, osim elementa a_{11} različiti od nule. Sada, posmatramo drugu kolonu i na osnovu prethodnog izlaganja može se pretpostaviti da je element $a'_{22} \neq 0$. Dodavanjem druge vrste, svakoj vrsti počev od treće, prethodno pomnoženu odgovarajućim koeficijentom (za i-tu vrstu ($i = 3, \dots, m$) taj koeficijent iznosi) $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$) dobijamo da su svi elementi u drugoj vrsti ispod elementa a'_{22} jednaki nuli. Nastavljajući ovaj postupak dobićemo matricu obliku B, koja je ekvivalentna matrici A, a samim tim ima i isti rang sa njom.

STAV O BAZISNOM MINORU

Ovaj stav je jedan od najvažnijih u linearnoj algebri. Njegovom primenom se dakazuju izvesni stavovi o kojima ćemo govoriti u narednim lekcijama.

Stav o bazisnom minoru je jedan od najvažnijih u linearnoj algebri. Njega navodimo u nastavku.

Stav. Ako je rang neke matrice r $(r \in \mathbb{N})$, onda postoji tačno r linearno nezavisnih vrsta odnosno r linearno nezavisnih kolona te matrice, takvih da se sve ostale vrste, odnosno kolone te matrice mogu izraziti kao njihova linearna kombinacija.

Linearno nezavisne vrste o kojima govori prethodni stav se nazivaju bazne vrste, dok se linearno nezavisne kolone nazivaju bazne kolone. Svakako, one su najvažnije vrste i kolone neke matrice, jer se ostale mogu dobiti od njih.

Korišćenjem ovog stava moći ćemo da dokažemo Kroneker - Kapelijev stav (o kome govorimo na sledećem predavanju) čija primena omogućava da se uvede jedna odlična metodologija za rešavanje sistema linearnih jednačina.

PRIMER

Određivanje ranga matrice primenom ekvivalentnih transformacija na konkretnim primerima.

Primer. Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Najpre,ćemo zameniti mesta prvoj i trećoj vrsti, kako bi na prvo mesto došla jedinica (lakše je za računanje). Nakon toga, prvu vrstu množimo sa (-3) i dodaje drugoj vrsti i prvu vrstu množimo sa (-2) i dodajemo trećoj vrsti. Na kraju drugu vrstu sabiramo sa trećom.

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{12}(-3) \\ \sim \\ V_{13}(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{23}(1) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V_{23}(1) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz poslednje matrice zaključujemo da je $r(A) = 2$.

Na osnovu Stava o bazisnom minoru zaključujemo da su za matricu A prve dve vrste bazisne vrste, a da se treća može dobiti kao njihova linearna kombinacija. Zaista, ako prvu, drugu i treću vrstu označimo, tim redom, sa v_1, v_2 i v_3, tada je $v_3 = v_1 + v_2$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Određivanja ranga matrice.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Gaus-Žordanov postupak

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE INVERZNE MATRICE

Primenom elementarnih transformacija na kvadratnu matricu može se uvesti još jedan postupak za određivanje inverzne matrice, regularne matrice.

Postupak za određivanje inverzne matrice, date kvadratne matrice koji je ovde izložen se u literaturi naziva i Žordanov postupak. Postupak se ogleda u sledećem:

- proveri se regularnost date matrice,
- do date matrice se dopiše jedinična matrica,
- na tako formiranu matricu se primenjuju elementarne transformacije sve dok se na levoj strani ne formira jedinična matrica.

Izvorno, algoritam se sastoji u tome da se ispod i iznad elemenata na glavnoj dijagonali matrice sa do koje je dopisana jedinična matrica u svakoj njenoj koloni (počevši od elementa a_{11}, zatim a_{22} i tako redom) prave nule kako bi samo na glavnoj dijagonali ostali elementi koji su jednaki jedan. Elementarne transformaciju u ovakvom postupku određivanja inverzne matrice se izvršavaju samo na vrstama novoformirane matrice.

Napomena. Pretpostavka je da su u polaznoj matrici elementi $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \ldots$ U slučaju da nije ova pretpostavka ispunjena, elementarnom transformacijom zamene vrsta ili kolona matrice, ona se može ispuniti.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Gaus - Žordanov postupak za određivanje inverzne matrice.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER

Primer određivanja inverzne matrice, datoj matrici, koja je regularna

Primer. Naći inverznu matricu, matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Odredimo determinantu ove matrice

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Dakle, ova matrica je regularna.

Formirajmo sada matricu sledećeg oblika

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{V_{13}(-3)}{\overset{V_{12}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{V_2(-\frac{1}{5})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{V_{23}(7)}{\overset{V_{21}(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{array}\right] \overset{V_3(-\frac{5}{4})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right] \underset{V_{32}(\frac{2}{5})}{\overset{V_{31}(-\frac{7}{5})}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right].$$

Ovde se staje sa radom, s obzirom da je na levoj strani poslednje matrice dobijena jedinična matrica. Na njenoj desnoj strani nalazi se inverzna matrica polazne matrice. Ona glasi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Napomena. Ovaj postupak predstavlja algoritam koju je svoju primenu našao u računarstvu.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Gaus - Žordanov postupak za izračunavanje inverzne matrice.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Pokazna vežba

ZADATAK 1 (10 MINUTA)

Određivanje inverzne matrice za kvadratnu matricu drugog reda.

Izračunati inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Minor M_{ij} kvadratne matrice A je determinanta podmatrice matrice A koja se dobija izbacivanjem i -te vrste i j -te kolone iz A. Za algebarski kofaktor A_{ij} elementa a_{ij} matrice A važi $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
Adjungovana matrica matrice A je transponovana matrica algebarskih kofaktora matrice A.
Inverzna matrica kvadratne matrice A n -tog reda, u oznaci A^{-1}, je matrica n -tog reda za koju važi: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$gde je I jedinična matrica n -tog reda, tj.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Matrica A^{-1} se određuje po formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA,$$

gde je $adjA$ je adjungovana matrica matrice A. Kvadratna matrica ima inverznu matricu ako je njena determinanta različita od nule, tj. ako je regulalrna matrica.

U našem slučaju radi se o kvadratnoj matrici drugog reda. Tada, važi da je

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Provera: da li smo tačno odredili matricu A^{-1} možemo proveriti po formuli $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Zaista, važi da je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kvadratnih matrica, važi da je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 2 (15 MINUTA)

Određivanje inverzne matrice za kvadratnu matricu trećeg reda.

Izračunati inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešenje.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Polazna matrica je regularna, pa ima inverznu matricu. Da bismo je odredili, potrebno je da prvo izračunamo njene algebarske kofaktore i formiramo adjungovanu matricu.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ -8 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Sada je

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ -8 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 3 (20 MINUTA)

Gaus-Žordanov metod za određivanje inverzne matrice.

Izračunati Gaus-Žordanovim postupkom inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Proveravamo da li je matrica A regularna

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kako je matrica A regularna ima inverznu matricu i primenjujemo Gaus-Žordanov postupak. Njega sprovodimo tako što zapišimo jediničnu matricu pored matrice A. Na tako formiranu matricu, sada, primenjujemo elementarne transformacije tako da jedinična matrica pređe na mesto matrice A. Dobijena matrica na početnom mestu jedinične matrice je matrica A^{-1}.

U nastavku sprovodimo opisani postupak.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} V_{12}(-2) \\ \sim \\ V_{13}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} V_{21}(2) \\ \sim \\ V_{23}(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} V_{2}(-1) \\ \sim \\ V_{3}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} V_{32}(3) \\ \sim \\ V_{31}(-5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Dobijamo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ZADATAK 4 (10 MINUTA)

Određivanje ranga matrice.

Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Koristeći stav da ekvivalentne matrice imaju isti rang, možemo odrediti rang tražene matrice njenim svođenjem elementarnim transformacijama na njoj ekvivalentnu matricu koja u donjem trouglu ima sve nule. Tada je rang matrice jednak broju vrsta takve matrice kod koje nisu svi elementi jednaki nule. Na polaznu matricu primenimo ekvivalentne transformacije

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -10 & -20 & -30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(A) = 2$.

Napomena. Rang matrice jednak je broju linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice. U ovom primeru se treća vrsta matrice A može predstaviti kao linearna kombinacija prve dve jer važi $V_3 = 2V_2 - V_1$.

ZADATAK 5 (15 MINUTA)

Određivanje ranga matrice u zavisnosti od realnog koeficijenta.

U zavisnosti od realnog parametra λ diskutovati rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Prvu vrstu množimo sa $(-\lambda)$ i dodajemo drugoj vrsti, prvu vrstu množimo sa (-3) i dodajemo trećoj vrsti i prvu vrstu množimo sa (-2) i dodajemo četvrtoj vrsti. Tada dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{12}(-\lambda) \\ V_{13}(-3) \\ V_{14}(-2) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -7\lambda+4 & -17\lambda+10 & -3\lambda+1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_3\left(-\frac{1}{5}\right) \\ V_4\left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -7\lambda+4 & -17\lambda+10 & -3\lambda+1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} V_{34}(-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -7\lambda+4 & -17\lambda+10 & -3\lambda+1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda = 0$ poslednja matrica postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa zaključujemo da je $r(A) = 2$.

Za $\lambda \neq 0$ imamo da je $r(A) = 3$.

ZADATAK 6 (15 MINUTA)

Rešavanje matrične jednačine.

Rešiti matričnu jednacinu $A \cdot X = B$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Važi da je

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Dakle, jednačinu množimo sa leve strane inverznom matricom matrice A. Koristeći zadatak 5 imamo da je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tada je

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ -6 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 7 – I DEO (25 MINUTA)

Sređivanje matrične jednačine, tako da izrazimo čemu je jednaka nepoznata matrica X i određivanje adjungovane matrice za dobijenu maztricu.

Rešiti matričnu jednačinu: $3XB^T + XA = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 24 \\ -6 & -2 & 9 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Najpre ćemo izraziti nepoznatu matricu X. To ćemo uraditi na sledeći način:

$$3XB^T + XA = B \Leftrightarrow X \cdot \left(3B^T + A\right) = B \Leftrightarrow X = B \cdot \left(3B^T + A\right)^{-1}.$$

Dalje, imamo da je:

$$3B^T + A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 24 \\ -6 & -2 & 9 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -24 \\ 6 & 3 & -9 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 24 \\ -6 & -2 & 9 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada imamo da je

$$\det\left(3B^T + A\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Sada ćemo odrediti adjungovanu matricu, matrice $3B^T + A$. Označimo je C. Odredimo, najpre, njene algebarske kofaktore:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ZADATAK 7 – II DEO

Određivanje nepoznate matrice X na osnovu dobijenih matrica.

Sada imamo:

$$\mathrm{adj}\left(3B^{T}+A\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konačno možemo odrediti

$$\left(3B^{T}+A\right)^{-1}=\frac{1}{\det\left(3B^{T}+A\right)}\mathrm{adj}\left(3B^{T}+A\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konačno možemo odrediti nepoznatu matricu X :

$$X=B\cdot\left(3B^{T}+A\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+0+1 & 0+2+0 & -1+0-1 \\ 0+0+1 & 0+1+0 & 0+0-1 \\ -8+0+1 & 0-3+0 & 8+0-1 \end{bmatrix}=\left[\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ -7 & -3 \end{matrix}\right.$$

ZADATAK 8 – I DEO (25 MINUTA)

Sređivanje matrične jednačine, tako da izrazimo čemu je jednaka nepoznata matrica X.

Rešiti matričnu jednačinu $(XA+C)\cdot(AX+2AB)^{-1}=A^{-1}$ gde su

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje.

$$(XA+C)\cdot(AX+2AB)^{-1}=A^{-1}\Big/\cdot(AX+2AB)$$
$$(XA+C)\cdot(AX+2AB)^{-1}\cdot(AX+2AB)=A^{-1}\cdot(AX+2AB)$$
$$(XA+C)\cdot I=A^{-1}\cdot AX+A^{-1}\cdot 2AB)$$
$$XA+C=I\cdot X+I\cdot 2B$$
$$X\cdot A-X=2B-C$$
$$X\cdot(A-I)=2B-C\Big/\cdot(A-I)^{-1}$$
$$X\cdot(A-I)\cdot(A-I)^{-1}=(2B-C)\cdot(A-I)^{-1}$$
$$X=(2B-C)\cdot(A-I)^{-1}$$

ZADATAK 8 – II DEO

Određivanje nepoznate matrice X.

Odredimo prvo matricu $2B-C$

$$2B-C=2\cdot\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&-1&2\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-3&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Odredimo sada matricu $(A-I)^{-1}$

$$A-I=\begin{bmatrix}-2&2&3\\0&1&-1\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad det(A-I)=\begin{vmatrix}-2&2&3\\0&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=-4$$

$$adj(A-I)=\begin{bmatrix}2&-4&-5\\0&-4&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}\qquad (A-I)^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{bmatrix}2&-4&-5\\0&-4&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Matrica X glasi

$$X=(2B-C)\cdot(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}5&-3&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{bmatrix}2&-4&-5\\0&-4&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}5&-3&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-4&-5\\0&-4&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}10&-8&-19\\0&4&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&2&\frac{19}{4}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Poglavlje 6

Zadaci za samostalan rad

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba da samostalno provežbaju

ZadatakOdrediti inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

Rezultat:$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

ZadatakRešiti matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezultat:$X = \begin{bmatrix} 6 & 26 & -69 \\ 1 & 12 & -17 \\ -8 & -17 & 81 \end{bmatrix}$

Zadatak Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X - B^T = 2X + I$, gde su $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 10 \\ 0 & 9 & 10 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Rezultat:$X = \begin{bmatrix} 15 & -10 & -24 \\ -6 & 10 & 18 \\ -13 & 10 & 18 \end{bmatrix}$

Zadatak Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot (X - 2I) + B = I$, gde su $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Rezultat:$X = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 2 & -\frac{62}{3} & 26 \\ 0 & \frac{32}{3} & 18 \end{bmatrix}$

Vreme izrade:

1. 20 minuta;

2. 25 minuta;

3. 30 minuta;

4. 35 minuta

U nastavku je video klip gde studenti mogu pogledati još neke primere rešavanja matričnih jednačina.

VIDEO KLIP (4 MINUTA)

Rešavanje matrične jednačine - primer sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Zaključak za lekciju 08

MATRICE

Sažetak u vezi sa matricama

Matrice predstavljaju veoma važan matematički model koji našao primenu u računarstvu, ekonomiji, menadžmentu i dr.

Takođe, poznavanje osobina matrice, operacija za rad sa njima i tehnika određivanja inverzne matrice stiču se neophodna znanja potrebna za uspešno usvajanje i primenu raznih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina.

Literatura (nastavni materijal):
Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.