UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Bulova algebra i digitalna logička kola

Lekcija 03

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

CS215 - DISKRETNE STRUKTURE

Lekcija 03

BULOVA ALGEBRA I DIGITALNA LOGIČKA KOLA

- Bulova algebra i digitalna logička kola
- Poglavlje 1: Bulova algebra i digitalna logička kola
- Poglavlje 2: Osnovna logička prekidačka kola
- Poglavlje 3: Logičke operacije
- Poglavlje 4: Osnove kombinatornog kola
- Poglavlje 5: Bulovi iskazi za logička kola
- Poglavlje 6: Normalne forme
- Poglavlje 7: Minimizacija logičkih funkcija
- Poglavlje 8: VEŽBA
- Poglavlje 9: Zadaci za samostalni rad
- ZAKLJUČAK

Uvod

UVOD

Cilj ove lekcije je da vas upozna sa osnovama Bulove algebre, digitalnim logičkim kolima i logičkim operacijama

Cilj ove lekcije je da vas upozna sa osnovama Bulove algebre, digitalnim logičkim kolima i logičkim operacijama. Razmotrićemo kako su prekidači povezani sa Bulovom algebrom, kako se prikazuju paralelno i redno postavljeni prekidači, i kako se stvaraju tablice mogućih izlaza za paralelno postavljene prekidače. Takođe ćemo istražiti vezu između logičkih kola i logičkih tablica.

Cilj ove lekcije je da predstavi osnove logička prekidačkih kola i da razmotri različite logičke operacije kao što su "I", "ILI", "NE", "NI", "NILI" i "isključivo ILI". Saznaćemo kako se ove operacije primenjuju, koje su njihove istinitosne vrednosti i kako se koriste sa različitim operandima. Osim toga, lekcija će obuhvatiti i osnove kombinatornih kola, zajedno sa praktičnim primerima kombinatornih kola kao što su glasačka mašina i različiti načini uključivanja svetla koristeći prekidače. Takođe ćemo istražiti kako se logička kola mogu kreirati iz tablica istinosti. Na kraju, lekcija obrađuje i minimizaciju logičkih funkcija koristeći Karnoove mape.

Poglavlje 1

Bulova algebra i digitalna logička kola

POVEZANOST PREKIDAČA SA BULOVOM ALGEBROM

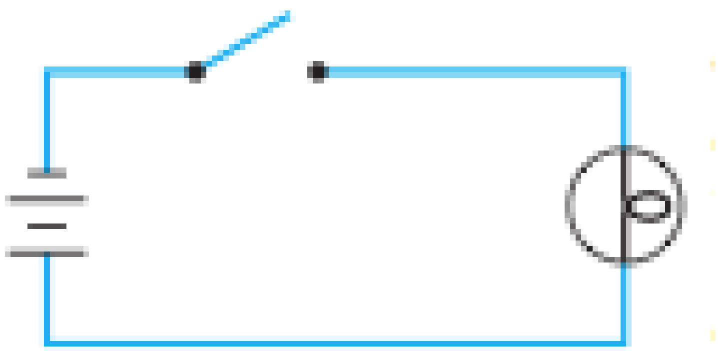
Kada je prekidač zatvoren, struja može da teče od jednog terminala do drugog; kada je otvoren, struja ne može da teče.

Slika 1 prikazuje izgled dva položaja jednostavnog prekidača.

Kada je prekidač zatvoren, struja može da teče od jednog terminala do drugog; kada je otvoren, struja ne može da teče.

Zamislite da je takav prekidač deo kola prikazan na slici 2. Sijalica se pali ako, i samo ako, struja teče kroz njega. A to će se desiti ako, i samo ako, je zatvoren prekidač.

Slika 1.1 Prikaz jednostavnog prekidača u položajima "otvoreno" i "zatvoreno" [Izvor: Autor]



Slika 1.2 Prikaz jednostavnog električnog kola sa prekidačem, baterijom i sijalicom [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIKAZ PARALELNO I REDNO POSTAVLJENIH PREKIDAČA

Sijalica se pali ako i samo ako, struja teče kroz njega. A to će se desiti ako, i samo ako, je zatvoren prekidač.

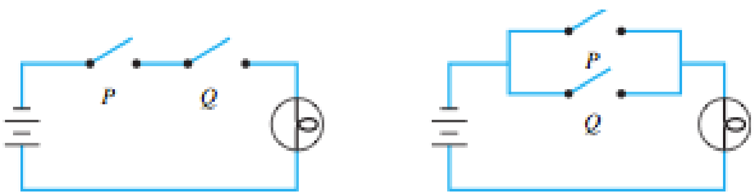
U kolu na slici 3 (a), struja teče i sijalica se pali ako i samo ako su oba prekidača P i Q zatvoreni.

Za prekidače u ovom kolu se kaže da su u nizu.

U kolu na slici 3 (b), struja teče i sijalica se pali ako, i samo ako, je barem jedan od prekidača P ili Q zatvoren.

Za prekidače u ovom kolu se kaže da su paralelni.

Svi mogući izlazi ovih kola su opisani u tabelama.



Slika 1.3 Prikaz prekidača u nizu (a) i paralelnih prekidača (b) [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Prekidač		**Sijalica**
P	**Q**	**Stanje**
zatvoreno	zatvoreno	uključeno
zatvoreno	otvoreno	isključeno
otvoreno	zatvoreno	isključeno
otvoreno	otvoreno	isključeno

Slika 1.4 Prikaz svih mogućnosti izlaza za redno postavljene prekidače [Izvor: Autor]

TABLICA MOGUĆIH IZLAZA ZA PARALELNO POSTAVLJENE PREKIDAČE

Prekidačko kolo sa slike 3(b) odgovara logičkom iskazu P ∨ Q

Prekidač		**Sijalica**
P	**Q**	**Stanje**
zatvoreno	zatvoreno	uključeno
zatvoreno	otvoreno	uključeno
otvoreno	zatvoreno	uključeno
otvoreno	otvoreno	isključeno

Slika 1.5 Prikaz svih mogućnosti izlaza za paralelnopostavljene prekidače [Izvor: Autor]

Obratite pažnju da ako se reči zatvoren i otvoren zamene sa T i F, Tabela 1, postaje istinosna tabela za logički "i",

a Tabela 2 postaje isto za logičko "ili".

Shodno tome, prekidačko kolo sa slike 3(a) odgovara logičkom iskazu

P ∧ Q,

a kolo na slici 3 (b) iskazu

P ∨ Q.

Komplikovanija kola imaju komplikovanije logičke iskaze.

VEZA LOGIČKIH KOLA I LOGIČKIH TABLICA

Osnovne elektronske komponente digitalnih sistema se zovu digitalna logička kola

1940-ih i 1950-ih, prekidači su zamenjeni elektronskim uređajima, sa fizičkim stanjima "zatvoren" i "otvoren" koji su odgovarali elektronskim stanjima visoki i nizak napon. Nova elektronska tehnologija je dovela do razvoja modernih digitalnih sistema kao što su elektronski računari, elektronske telefonske centrale, elektronski kalkulatori i kontrolni mehanizmi koji se koriste u drugim vrstama elektronske opreme.

Osnovne elektronske komponente digitalnih sistema se zovu digitalna logička kola. Reč "logika" ukazuje na značajnu ulogu logike u projektovanju takvih kola, a reč "digitalna" ukazuje na to da kola procesuiraju diskretne ili odvojene signale (za razliku od kontinuiranih).

Elektro-inženjeri i dalje koriste jezik logike kada se pozivaju na vrednosti signala koje proizvodi elektronski prekidač kao "tačno" ili "netačno." Ali oni uglavnom koriste simbole 1 i 0, pre nego T i F za označavanje ovih vrednosti. Simboli 0 i 1 se zovu bitovi, skraćeno od binary digits. Ova terminologija je uvedena 1946. godine od strane statističara John Tukey.

Poglavlje 2

Osnovna logička prekidačka kola

LOGIČKA PREKIDAČKA KOLA

Elektronsko prekidačko kolo predstavlja elektronsko kolo koje za određene ulazne vrednosti signala proizvodi izlazni signal

Elektronsko prekidačko kolo predstavlja elektronsko kolo koje za određene ulazne vrednosti signala proizvodi izlazni signal. Vrednost izlaznog signala se dobija Bulovim operacijama ulaznih signala.

Osnovna logička prekidačka kola su I (AND), ILI (OR), NE (NOT), NI (NAND), NILI (NOR) i isključivo ILI (XOR).

Prekidačka kola se mogu definisati i prikazati na tri načina:

- grafički
- algebarskim izrazima
- tablicom istinitosti

Poglavlje 3

Logičke operacije

OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

Tri osnovne logičke operacije su I, ILI, NE

Logičke operacije su operacije koje se izvode nad promenljivim (operandima) koje mogu da imaju samo dve vrednosti. Uobičajeno, ove vrednosti su tačno (engl. true) i netačno (engl. false). U računarskoj tehnici simbol za tačno je 1, a za netačno 0. Po svojoj prirodi ovo su, dakle, binarne promenljive. Engleski naučnik Džordž Bul (George Bool) je razvijajući binarnu algebru sredinom 19. veka predvideo tri osnovne logičke operacije:

- *I* (engl. *AND*)
- *ILI* (engl. *OR*)
- *NE* (engl. *NOT*).

Pored ovih osnovnih, postoje još dve izvedene logičke operacije *NI* (engl. *NAND*)i *NILI* (engl. *NOR*). *NI* se dobija negacijom konjunkcije, a *NILI* se dobija negacijom disjunkcije.

Na osnovu rada Džordža Bula formirana je posebna grana matematike koja se naziva logička ili Bulova algebra, a koja proučava ***logičke operacije nad binarnim promenljivim veličinama***. Bulova algebra se koristi u automatici za projektovanje i analizu prekidačkih mreža. Ove mreže mogu biti realizovane različitim klasama komponenata, kao što su pneumatske, hidraulične, električne ili elektronske. U računarskim sistemima se koriste elektronske digitalne komponente koje su realizovane kao logička kola sa tranzistorima. One predstavljaju osnovni gradivni element računara.

3.1 Logička operacija "I"

ISTINITOSNE VREDNOSTI LOGIČKE OPERACIJE „I“

Logička operacija „I“ je tačna samo kada su svi operandi tačni

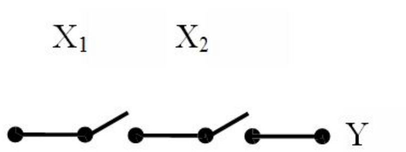
Logička operacija "I" (engl. *AND*se izvodi nad dva ili više operanda. Rezultat operacije je jednak 1 („tačno“) ako su svi operandi jedinice.Ako je bar jedan operand jednak 0, rezultat ove logičke operacije je 0.

U tabeli 1 je dat primer korišćenja logičke operacije *I*. Operacija je izvršena nad dva operanda X_1 i X_2. Rezultat operacije je Y. Ova tabela naziva se i tabela stanja.

X_1	X_2	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Slika 3.1.1 Tabela-1 Tablica istinitosnih vrednosti logičke operacije I za dva operanda X1 i X2 [Izvor: Autor]

Logička operacija *I* se može jednostavno digitalno realizovati pomoću dva redno vezana prekidača. Po konvenciji, stanje isključenog prekidača se označava sa 0, a uključenog prekidača sa 1. Na slici 1 je prikazana realizacija. Očigledno je da će signal Y moći da postoji, tj. da ima vrednost 1 samo ako su i prekidač X_1 i X_2 uključeni, što odgovara vrednosti promenljivih $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$.



Slika 3.1.2 Realizacija logičke operacije I pomoću dva prekidača X1 i X2 [Izvor: Autor]

LOGIČKA OPERACIJA „I“ SA DVA I VIŠE OPERANADA

Logička operacija I sa tri operanda X1, X2, X3 će imati vrednost 1 samo ako i X1 i X2 i X3 imaju vrednost 1

Logička operacija *I* sa dva operanda X_1 i X_2 se opisuje sledećom logičkom ili Bulovom jednačinom:

$Y = X_1 * X_2$

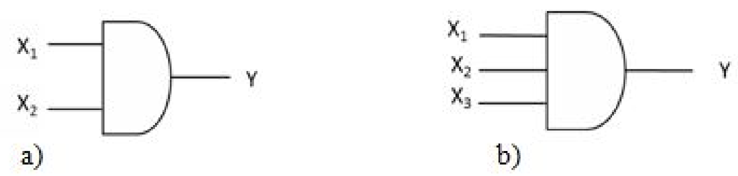
Logička tačka između X_1 i X_2 u gornjoj jednačini nema nikakve veze sa množenjem, već predstavlja simbol za logičku *I* operaciju.

Simboli koji se koriste za logičku operaciju *I* su: *Λ* ili * ili *AND*.

Logičke operacije *I* mogu da se izvode na najmanje dva operanda, ali i na tri, četiri i više. Logička operacija *I* sa tri operanda X_1, X_2, i X_3 bila bi opisana sledećim izrazom:

$Y = X_1 * X_2 * X_3$

Vrednost Y će imati vrednost 1 samo ako i X_1 i X_2 i X_3 imaju vrednost 1. Za prikaz logičke operacije I u šemama logičkih sklopova koristi se simbol prikazan na slici 2.



Slika 3.1.3 Simbolički prikaz logičke operacije I a) sa dva operanda, b) sa tri operanda [Izvor: Autor]

3.2 Logička operacija “ILI”

ISTINITOSNE VREDNOSTI LOGIČKE OPERACIJE „ILI“

Rezultat operacije ILI je 1 ako bar jedan operand ima vrednost 1

Logička operacija ILI (engl. *OR*) se izvodi nad dva ili više operanda.Rezultat operacije ILI je 1 ako bar jedan operand ima vrednost1. **Ako svi operandi imaju vrednost 0, rezultat operacije je 0.**Logička operacija *ILI* odgovara paralelnoj vezi dva ili više prekidača.

U tabeli 1 prikazuje stanje logičke operacije *ILI* sa dva operanda X_1 i X_2. Rezultat operacije je Y

X_1	X_2	Y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Slika 3.2.1 Tabela-1 Tabela stanja logičke operacije ILI sa dva operanda X1 i X2. [Izvor: Autor]

Logička operacija *ILI* sa dva operanda X_1 i X_2 se opisuje sledećom logičkom ili Bulovom jednačinom:

$Y = X_1 + X_2$

Za prikaz logičke operacije *ILI* u šemama logičkih sklopova koristi se simbol prikazan na slici 1. U ovom slučaju operandi su X_1 i X_2, a vrednost operacije *ILI* je Y.

Slika 3.2.2 Simbolički prikaz logičke operacije ILI [Izvor: Autor]

Za logičku operaciju *ILI* se koriste simboli: ∨ ili *OR* ili +

3.3 Logička operacije “NE”

ISTINITOSNE VREDNOSTI LOGIČKE OPERACIJE „NE“

Ako je vrednost operanda X1 = 1 i ako se nad njim izvrši logička operacija NE, rezultat operacije će biti 0

Logička operacija NE (engl. *NOT*) se izvodi samo nad jednim operandom. Rezultat operacije je promena binarnog stanja operanda. Na primer, ako je vrednost operanda $X_1 = 1$ i ako se nad njim izvrši logička operacija *NE*, rezultat operacije će biti 0. Zbog toga se logički sklop koji izvodi ovu operaciju naziva invertor.

U tabeli 1 je prikazano stanje logičke operacije *NE*. Operacija je izvršena nad logičkom promenljivom X_1, a rezultat operacije je Y.

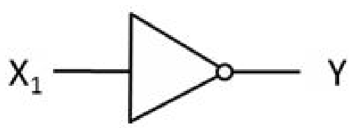
X_1	Y
1	0
0	1

Slika 3.3.1 Tabela-1 Tabela stanja logičke operacije NE nad operandom X1 [Izvor: Autor]

Logička operacija *NE* nad operandom X_1 se opisuje sledećom logičkom ili Bulovom jednačinom:

$$Y = -X_1 = \overline{X_1} = X_1' = \sim X_1 = \neg X_1$$

Za prikaz logičke operacije *NE* u šemama logičkih sklopova koristi se simbol prikazan na slici 1. U ovom slučaju operand je X_1 a rezultat logičke operacije *NE* je Y. Mali kružić na vrhu trougla predstavlja inverziju. Takav kružić na ulazu ili izlazu bilo kog sklopa takođe predstavlja inverziju.



Slika 3.3.2 Simbolički prikaz logičke operacije NE [Izvor: Autor]

3.4 Logička operacije "NI"

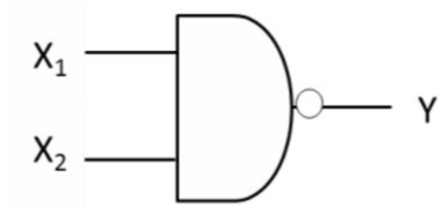
ISTINITOSNE VREDNOSTI LOGIČKE OPERACIJE „NI"

Logička operacija NI ima vrednost 0 samo kada svi operandi imaju vrednost 1

Logička operacija "NI" (engl. *NAND*) je izvedena od osnovnih logičkih operacija "*I*" i "*NE*."Logička operacija "NI" je ustvari negacija rezultata logičke operacije "I." Tablica istinitosti logičke operacije "*NI*" je prikazana u tabeli, a logički simbol na slici.

X_1	X_2	Y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Slika 3.4.1 Tabela-1 Istinitosna tablica logičke operacije " NI" [Izvor: Autor]



Slika 3.4.2 Simbolički prikaz logičke operacije „NI" [Izvor: Autor]

3.5 Logička operacije "NILI"

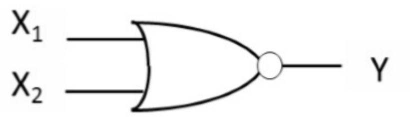
ISTINITOSNE VREDNOSTI LOGIČKE OPERACIJE „NILI"

Logička operacija NILI ima vrednost 1 samo kada svi operandi imaju vrednost 0

Logička operacija "NILI" (engl. *NOR*) je izvedena od osnovnih logičkih operacija "*ILI*" i "*NE*." Logička operacija "*NILI*" je ustvari negacija rezultata logičke operacije "*ILI*." Tablica istinitosti logičke operacije "*NILI*" je prikazana u tabeli, a logički simbol na slici.

X_1	X_2	Y
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Slika 3.5.1 Tabela-1 Istinitosna tablica logičke operacije NILI [Izvor: Autor]



Slika 3.5.2 Simbolički prikaz logičke operacije NILI [Izvor: Autor]

3.6 Logička operacija “isključivo ILI”

ISTINITOSNE VREDNOSTI LOGIČKE OPERACIJE „ISKLJUČIVO ILI“

ISKLJUČIVO ILI ima vrednost 1 samo ako je jedan od operanada 1

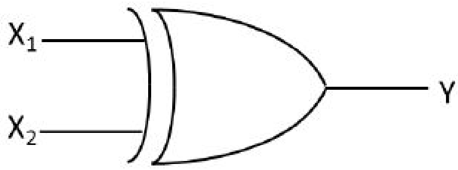
Za razliku od logičke operacije *ILI* gde je rezultat jednak 1 ako je bar jedan operanada jednak jedinici, logička operacija isključivo (ekskluzivno) ILI(engl. *XOR*) kao rezultat operacije daje vrednost 1 samo ako je jedan od operanada 1. Ako su dva ili više operanda 1, rezultat operacije je 0.Zbog toga što ova operacija isključuje slučaj kada su dva ili više operanda jednaka 1 naziva se *isključivo ILI* (exclusive OR). Kao i kod operacije *ILI* vrednost operacije će biti 0 ako su svi operandi jednaki nuli. Logička operacija isključivo *ILI* sa dva operanda X_1 i X_2 se opisuje sledećom logičkom jednačinom:

$$Y = X_1 \oplus X_2$$

Za prikaz logičke operacije isključivo ILI u šemama logičkih sklopova koristi se simbol prikazan na slici.

X_1	X_2	Y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Slika 3.6.1 Tabela 1 - Istinitosna tablica logičke operacije “Isključivo ILI” (XOR) [Izvor: Autor]



Slika 3.6.2 Simbolički prikaz logičke operacije “Isključivo ILI” (XOR) [Izvor: Autor]

Poglavlje 4

Osnove kombinatornog kola

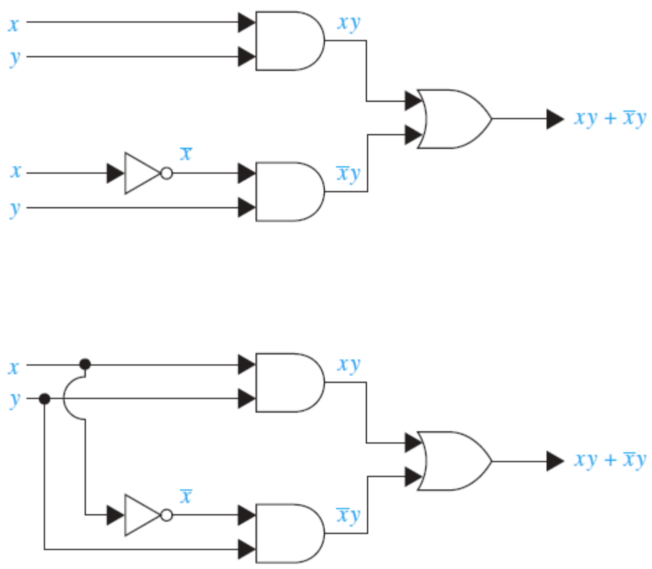
KOMBINATORNA KOLA

Kombinatorno kolo se može konstruisati kombinacijom invertera, OR i AND logičkih kola

Kombinatorno kolo se može konstruisati kombinacijom invertera, OR i AND logičkih kola. Kada se napravi kolo, neka logička kola mogu imati zajedničke ulaze. Ovo se grafički prikazuje na jedan od dva načina:

- koristeći grananje
- navoditi isti ulaz za svaki od logičkog kola

Oba načina su prikazana na slici.



Slika 4.1.1 Dva načina da se nacrta isto kolo [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Takođe, treba napomenuti da izlaz iz jednog kola može da se koristi kao ulaz u drugo kolo, kao što je prikazano na slici. Oba kola na slici prikazuju kolo koje da izlaz

$$xy + \bar{x}y$$

4.1 Kombinatorno kolo

PRIMER KOMBINATORNOG KOLA

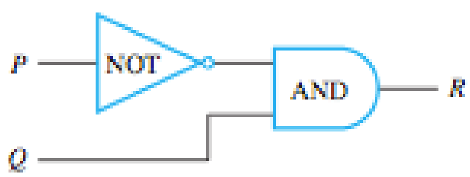
Kombinatorno kolo predstavlja skup međusobno povezanih prekidačkih kola čiji je izlaz funkcija njegovih izlaza.

Kombinatorno kolo predstavlja skup međusobno povezanih prekidačkih kola čiji je izlaz funkcija njegovih izlaza.

Bilo koju Bulovu funkciju je moguće implementirati u elektronskom obliku kao mrežu sastavljenu od prekidačkih kola.

Primer 1

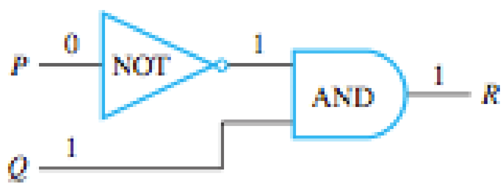
Odredite izlaze za prikazano kolo



Slika 4.2.1 Kombinatorno kolo za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Kako pristupi rešenju:

Krenite s leva na desno kroz dijagram, prateći funkcionalnosti svakog kola. Pogledajmo primer kada je P = 0 i Q = 1. NE-kolo menja P = 0 u 1, tako da su oba ulaza I-kola 1. Stoga je izlaz R= 1. Ovo je ilustrovano anotirajući dijagram kao što je prikazano u nastavku.



Slika 4.2.2 Prikaz jedne kombinacije ulaza za kolo primera 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Međutim, ovo nam ne daje prikaz svih ulaza i njima odgovarajućih izlaza. Ovo možemo prikazati kroz tablicu istinosti. Iskaz za izlaz R je

R = P’ ∧ Q

A njegova tablica istinosti je

P	Q	P'	P' ∧ Q
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

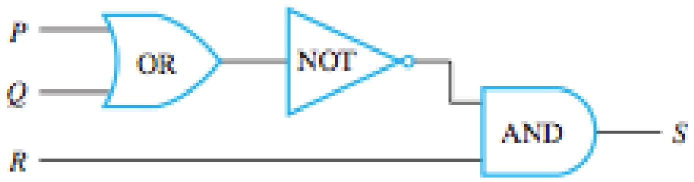
Slika 4.2.3 Tablica istinitosti sa svim kombinacijama ulaza za kolo sa slike 1 [Izvor: Autor]

KOMBINATORNO KOLO – PRIMER 2

Odredite izlaze za prikazano kolo

Primer 2

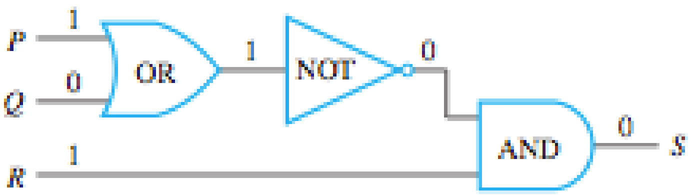
Odredite izlaze za prikazano kolo



Slika 4.2.4 Kombinatorno kolo za primer 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Kako pristupi rešenju:

Pogledajmo kolo za vrednosti P=1 Q=0 R=1



Slika 4.2.5 Prikaz jedne kombinacije ulaza za kolo primera 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Logički iskaz za S je

(P ∨ Q)' ∧ R

A njegova tablica istinosti je

P	Q	R	P V Q	(PVQ)'	(PVQ)' ΛR
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

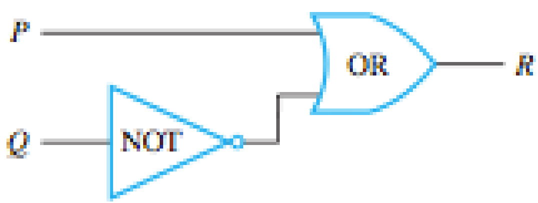
Slika 4.2.6 Tablica istinitosti sa svim kombinacijama ulaza za kolo sa slike 4 [Izvor: Autor]

KOMBINATORNO KOLO – PRIMER 3

Odredite izlaze za prikazano kolo u primeru 3

Primer 3

Konstruisati tablicu istinosnih vrednosti za ulaze i izlaze sledećeg kola



Slika 4.2.7 Kombinatorno kolo za primer 3 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Iskaz za R

Q’ ∨ P

Rešenje:

P	Q	Q’	R
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Slika 4.2.8 Tablica istinitosti sa svim kombinacijama ulaza za kolo sa slike 7 [Izvor: Autor]

4.2 Primeri kombinatornih kola

PRIMER 1 - GLASAČKA MAŠINA

Dizajnirati kolo za jednostavnu glasačku mašinu

Zadatak:

Tri osobe donose glavne odluke za neku organizaciju. Svaka osoba glasa sa DA ili NE, za svaki predlog koji se razmatra. Predlog se prihvata ako dobije najmanje dva glasa. Napravite kolo koje će odrediti da li je predlog usvojen ili ne.

Rešenje:

Neka x = 1 ako je prva osoba glasala sa DA i x = 0 ako je glasala sa NE.

Neka y = 1 ako je druga osoba glasala sa DA i y = 0 ako je glasala sa NE.

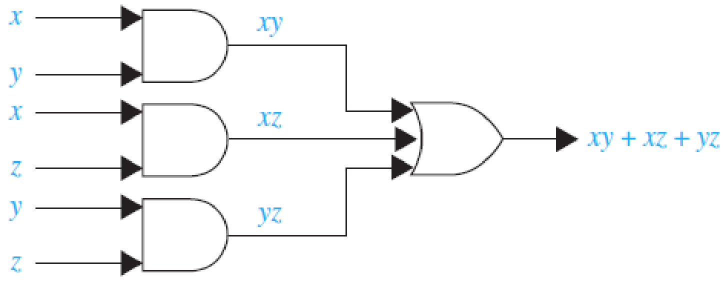
Neka z = 1 ako je treća osoba glasala sa DA i z = 0 ako je glasala sa NE.

Kolo treba da da izlaz 1 koristeći ulaze x , y , z kada su 2 i više ulaza 1.

Praktično, potrebno je da dva ulaza istovremeno budu 1, što možemo rešiti sledećim iskazom, gde ćemo proveriti kombinaciju svaka dva ulaza

xy + xz + yz

Kolo koje primenjuju ovu funkciju je prikazano na slici 1.



Slika 4.3.1 Kolo za glasačku mašinu [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER 2 - UKLJUČIVANJE SVETLA (DVA PREKIDAČA)

Napraviti kolo koje ima dva prekidača i koje pali i gasi isto svetlo

Zadatak:

Nekada svetlo kontroliše dva prekidača. Potrebno je napraviti kombinatorno kolo koje će uključivanjem bilo kog prekidača uključiti svetlo.

Rešenje:

Počnimo sa kolom koje ima dva prekidača.

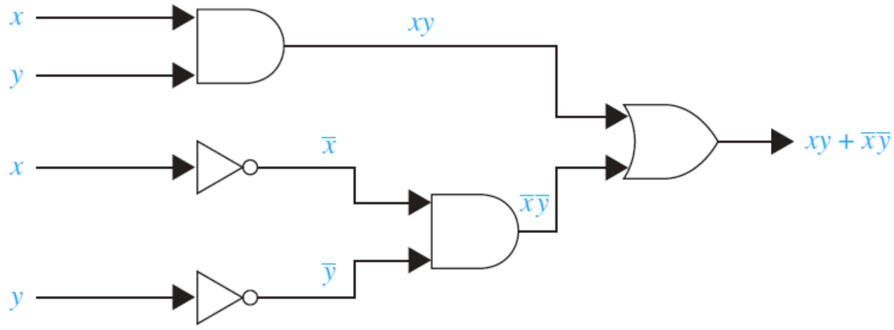
Neka x = 1 kada je prvi prekidač zatvoren i x = 0 kada je otvoren.

Neka y = 1 kada je drugi prekidač zatvoren i y = 0 kada je otvoren.

Neka je F(x, y) = 1 kada je svetlo uključeno i F(x, y) = 0 kada je svetlo isključeno.

Pretpostavimo da će svetlo biti uključeno kada su obe prekidača zatvorena, tako da je F(1, 1) = 1. Ovim možemo odrediti i druge vrednosti F. Kada je jedan od prekidača otvoren tada je F(0, 1) = F(1, 0) = 0. Kada je drugi prekidač takođe otvoren, tada je svetlo uključeno, odnosno F(0, 0) = 1. Samim tim dobijamo da je

$$F(x, y) = xy + \overline{x}\overline{y}$$



Slika 4.3.2 Kolo za uključivanje svetla sa dva prekidača [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER 3- UKLJUČIVANJE SVETLA (TRI PREKIDAČA)

Napraviti kolo koje ima tri prekidača i koje pali i gasi isto svetlo

Napravimo sada kolo koje ima tri prekidača za uključivanje istog svetla. Neka x, y i z predstavljaju Bulove parametre koji određuju da li je prekidač otvoren ili zatvoren. Neka x = 1 kada je prvi prekidač zatvoren i x = 0 kada je otvoren, y = 1 kada je drugi prekidač zatvoren i y = 0 kada je otvoren i z = 1 kada je treći prekidač zatvoren i z = 0 kada je otvoren. Neka je F(x, y, z) = 1 kada je svetlo uključeno i F(x, y, z) = 0 kada je svetlo isključeno.

Proizvoljno možemo odrediti sve ostale vrednosti F. Kada je 1 prekidač isključen, svetlo se gasi

F(1, 1, 0) = F(1, 0, 1) = F(0, 1, 1) = 0

Kada su dva prekidača isključena i treći uključen, tada se svetlo pali

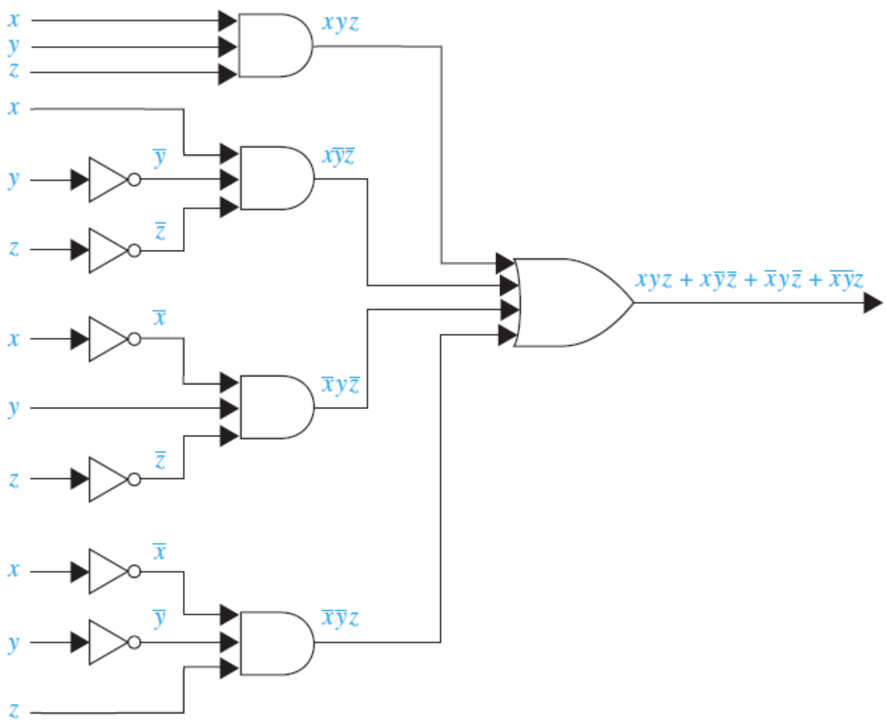
F(1, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 1) = 1

Kada su sva tri prekidača otvorena, svetlo se gasi F(0, 0, 0) = 0.

Ovu funkciju možemo prikazati kao zbir proizvoda

$$F(x,y,z) = xyz + x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\overline{y}z$$

Slika 4 prikazuje ovo kolo.



Slika 4.3.3 Kolo za uključivanje svetla sa tri prekidača [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Poglavlje 5

Bulovi iskazi za logička kola

BULOVI ISKAZI ZA LOGIČKA KOLA KOJA SE SASTOJE OD PROMENLJIVIH ULAZA

Iskaz koji se sastoji od logičkih promenljivih i veznika ~, ∧, ∨ se zove Bulov iskaz.

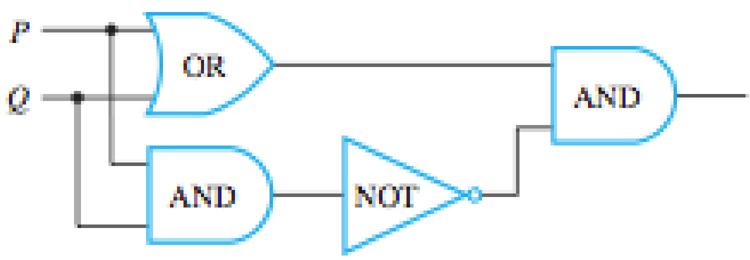
U logici, varijable kao što su p, q i r predstavljaju iskaze, a iskazi mogu imati samo jednu istinitosnu vrednost: T (tačno) ili F (netačno). Jedan od osnivača simboličke logike je engleski matematičar Džordž Bul.

U njegovu čast, svaka promenljiva, kao što je iskazna promenljiva ili ulazni signal, koji može da ima samo jednu od dve vrednosti naziva se Bulova promenljiva.

Iskaz koji se sastoji od logičkih promenljivih i veznika ~, ∧, ∨ se zove Bulov iskaz.

Pronađite Bulov iskaz koji odgovara kolu prikazanom u nastavku. Tačka označava mesto lemljenja dve žice; za žice koje se seku bez prikazane tačke podrazumevamo da se ne dodiruju.

Primer 1

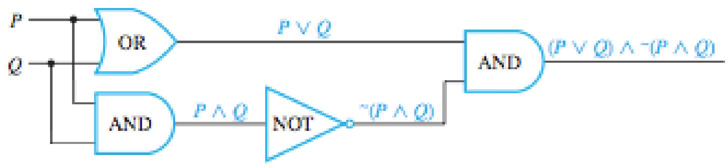


Slika 5.1.1 Kolo za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Iskaz za ovo kolo je

$(P \vee Q) \wedge \sim(P \wedge Q)$

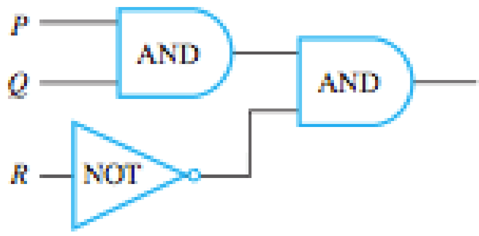
što ustvari predstavlja iskaz za isključivo ILI. Na sledećoj slici se može videti izlaz iz svakog pojedinačnog kola. Kolo treba pratiti s leva na desno, kako bi se dobio krajnji izlaz.



Slika 5.1.2 Rešenje primera 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

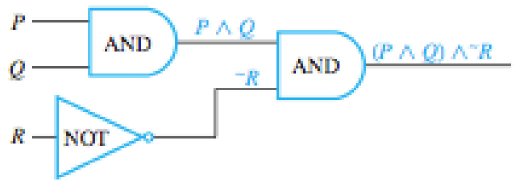
PRIMER 1

Bulov iskaz za ovo kolo je (P ∧ Q) ∧ ~R



Slika 5.1.3 Kolo za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Bulov iskaz za ovo kolo je ($P \wedge Q$) ∧ ~R, kao što se vidi niže



Slika 5.1.4 Rešenje za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Treba primetiti da je izlaz u ovom kolu “1” samo za jednu kombinaciju ulaza, a to je P = 1, Q = 1 i R = 0. Za sve druge vrednosti ulaza, izlaz je “0”. Ovo se može videti iz tablice istinitosti ulaza i izlaza

P	Q	R	$(P \wedge Q) \wedge \sim R$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Slika 5.1.5 Tablica ulaza i izlaza za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

LOGIČKA KOLA KOJA PREDSTAVLJAJU BULOVE ISKAZE

Za određeni logički iskaz prikazati logičko kolo

Prethodni primeri su pokazali kako pronaći logički iskaz koji odgovara predstavljenom kolu. Sada pogledajmo suprotni scenario, kada za određeni logički iskaz želimo da prikažemo logičko kolo.

Primer

Za sledeći iskaz odrediti logički kolo

$(\sim P \wedge Q) \vee \sim Q$

Kako pristupiti rešavanju problema:

Prvo izdvojte sve promenljive koje se pojavljuju u iskazu i zapišite ih sa leve strane. U ovom slučaju imamo dve promenljive P i Q. Onda krenite s desne strane dijagrama ka levoj strani, uzimajući u obzir operaciju koja se odnosi na spoljni deo iskaza. Drugim rečima, potrebno je krenuti od operacije koja se poslednja evaluira u tom iskazu. Konkretno, u ovom primeru to je ILI. To znači da ILI kolo treba staviti skroz desno na dijagramu.

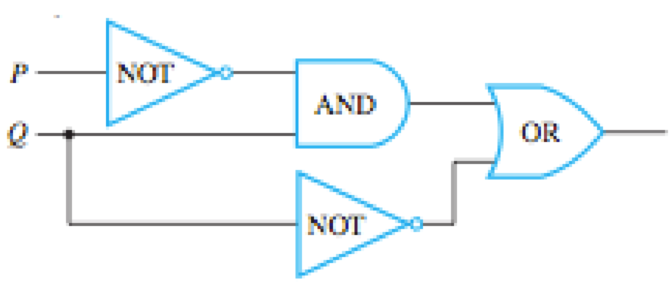
Zatim, pogledajmo koliko imamo ulaza u ILI kolo. Praktično imamo dva ulaza

1. ~P ∧ Q
2. ~Q

Drugim rečima jedan ulaz u ILI kolo treba da bude I kolo, a drugi NE.

S leve strane od ILI kola crtamo I i NE.

Ulaz u I kolo su ulazi ~P i Q, što znači da je potrebno još jedno NE kolo kako bi se uradila inverzija vrednosti ulaza P. Sledeća slika prikazuje rešenje



Slika 5.1.6 Logičko kolo za (~P∧Q)∨~Q [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER 2

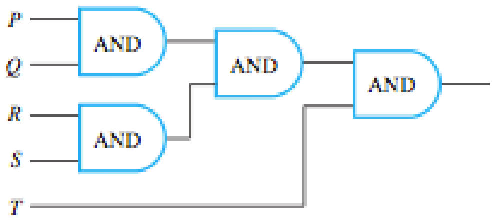
Odrediti logičko kolo za iskaz ((P∧Q)∧(R∧S))∧T

Primer 2

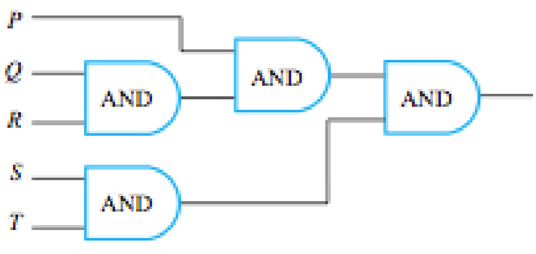
Za sledeći iskaz odrediti logičko kolo $((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \wedge T$

Rešenje:

Dva moguća rešenja su sledeća

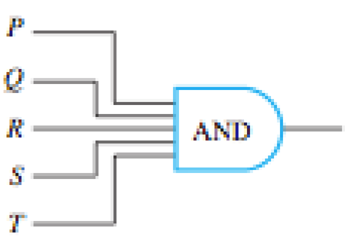


Slika 5.1.7 Prvo moguće rešenje za primer 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]



Slika 5.1.8 Drugo moguće rešenje za primer 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

S obzirom da se ovde radi o multi-I kolu, ovaj iskaz se može prikazati i na sledeći način



Slika 5.1.9 Treće moguće rešenje za primer 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER 3

Odrediti logičko kolo za iskaz $(x+y)\overline{x}$

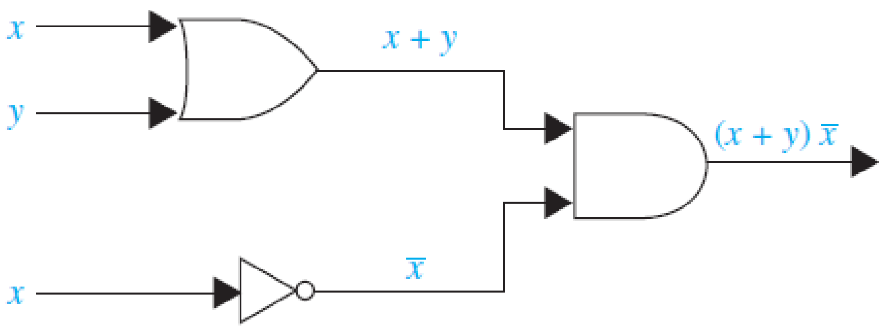
Primer 3

Za sledeći iskaz odrediti logičko kolo $(x+y)\overline{x}$

Rešenje

Logičko kolo ILI koje ima ulaze x i y daje izlaz x + y
Inverter obavlja negaciju svog ulaza x i daje izlaz $\overline{x}$
Da bi kombinovali ova dva podiskaza u $(x+y)\overline{x}$, potrebno je da dva izlaza iz kola ILI i NE, stavimo kao ulaze u logičko kolo I, pa samim iz njega dobijamo traženi izlaz

$$(x+y)\overline{x}$$



Slika 5.1.10 Rešenje za primer 3 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER 4

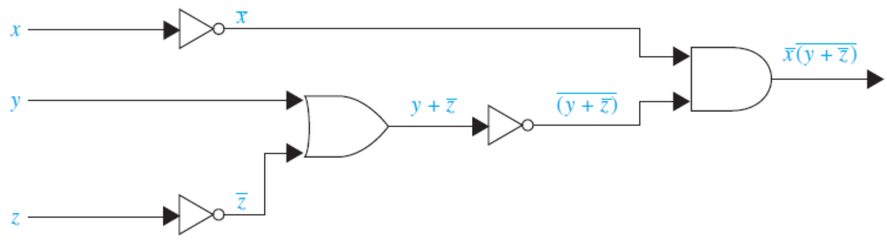
Odrediti logičko kolo za iskaz $\overline{(\overline{z}+y)}\overline{x}$

Primer 4

Za sledeći iskaz odrediti logičko kolo $\overline{(\overline{z}+y)}\overline{x}$
Rešenje:

Inverter obavlja negaciju svog ulaza x i daje izlaz $\overline{x}$
Logičko kolo ILI ima dva ulaza $\overline{z}$ i y, kako bi dobili $\overline{z}$ + y. Međutim, potrebno je da prvo dobijemo inverterom $\overline{z}$, pa tako izlaz iz kola NE sa $\overline{z}$, postaje ulaz logičkom kolu ILI.
Pošto imamo negaciju $\overline{(\overline{z}+y)}$, nakon kola ILI se nalazi još jedan inverter, koji invertuje $(\overline{z}+y)$ u $\overline{(\overline{z}+y)}$.
Na kraju, logički kolo I kombinuje $\overline{(\overline{z}+y)}$ sa $\overline{x}$ i tako dobijamo traženi izlaz

$$\overline{(\overline{z}+y)}\overline{x}$$



Slika 5.1.11 Rešenje za primer 4 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

PRIMER 5

Odrediti logičko kolo za iskaz $(x+y+z)\overline{x}\overline{y}\overline{z}$

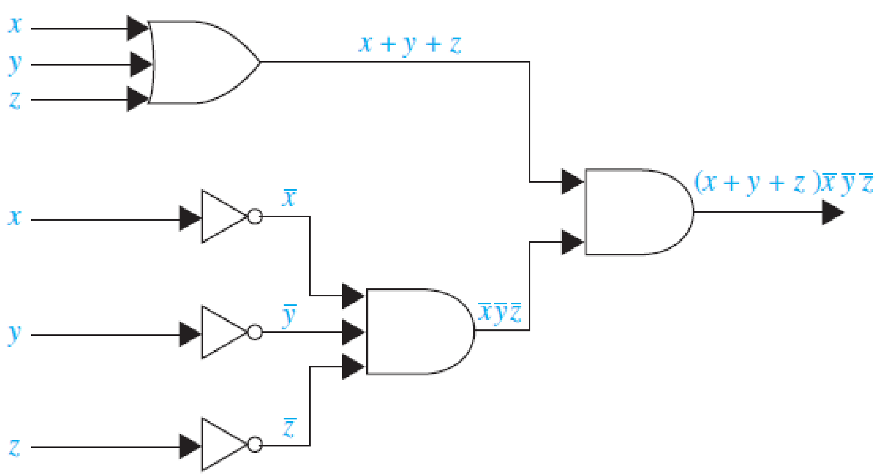
Primer 5

Za sledeći iskaz odrediti logičko kolo $(x+y+z)\overline{x}\overline{y}\overline{z}$

Rešenje:

Počnimo od disjunkcije $(x+y+z)$, koju možemo prikazati logičkim kolom ILI sa ulazima x, y, z . Izlaz iz ovog logičkog kola će biti jedna od ulaza u logičko kolo I.
Zatim, $\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ možemo prikazati kroz logičko kolo I, čiji su ulazi ustvari izlazi iz tri invertera, tako da je svaki od ulaza x, y i z prvo invertovan, pa posle prosleđen na ulaz u logičko kolo I. Izlaz iz ovog kola, postaje ulaz u još jedno logičko kolo I, tako da dobijamo rezultat

$$(x+y+z)\overline{x}\overline{y}\overline{z}$$



Slika 5.1.12 Rešenje za primer 5 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

5.1 Dobijanje logičkog kola iz tablice istinitosti

DIZAJNIRANJE LOGIČKOG KOLA IZ TABLICE ISTINITOSTI

Kako dizajnirati logičko kolo (ili naći Bulov iskaz) koje odgovara datom ulazu i izlazu u istinitosnoj tabeli?

Do sada smo diskutovali o tome kako da se izrade istinosne tablice za ulaz i izlaz kola, kako da pronađemo Bulov iskaz koji odgovara datom kolu i kako napraviti kolo koje odgovara datom Bulovom iskazu. Sada se bavimo pitanjem kako dizajnirati logičko kolo (ili naći Bulov iskaz) koje odgovara datom ulazu i izlazu u istinitosnoj tabeli.

Primer 1

Dizajnirajte logičko kolo čija je istinitosna tabela ulaza i izlaza sledeća

P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Slika 5.2.1 Istinitosna tabela ulaza i izlaza za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Kako pristupiti rešavanju problema:

Prvo je potrebno sastaviti logički iskaz za ovu tabelu istinitosnih vrednosti. Da biste to uradili, potrebno je da identifikuje sve redove za koje izlaz ima vrednost 1.

U ovom slučaju to su prvi, treći i četvrti red. Za svaki takav red, konstruiše se iskaz koji proizvodi 1 (ili tačno) za tačnu kombinaciju ulaznih vrednosti za taj red, a 0 (ili netačno) za sve ostale kombinacije ulaznih vrednosti.

Na primer, iskaz za prvi red je $P \wedge Q \wedge R$ jer je $P \wedge Q \wedge R = 1$ ako $P = 1$ i $Q = 1$ i $R = 1$, a 0 za sve druge vrednosti P, Q i R. Iskaz za treći red je $P \wedge \sim Q \wedge R$ jer je $P \wedge \sim Q \wedge R = 1$ ako je $p = 1$ i $Q = 0$ i $R = 1$, a 0 za sve druge vrednosti P, Q, R.

Slično tome, iskaz za četvrti red je $P \wedge \sim Q \wedge \sim R$.

Sada svaki Bulov iskaz u datoj tabeli ima vrednost 1 u slučaju P∧Q∧R= 1, ili u slučaju P∧~Q∧R=1, ili u slučaju P∧~Q∧~R=1.

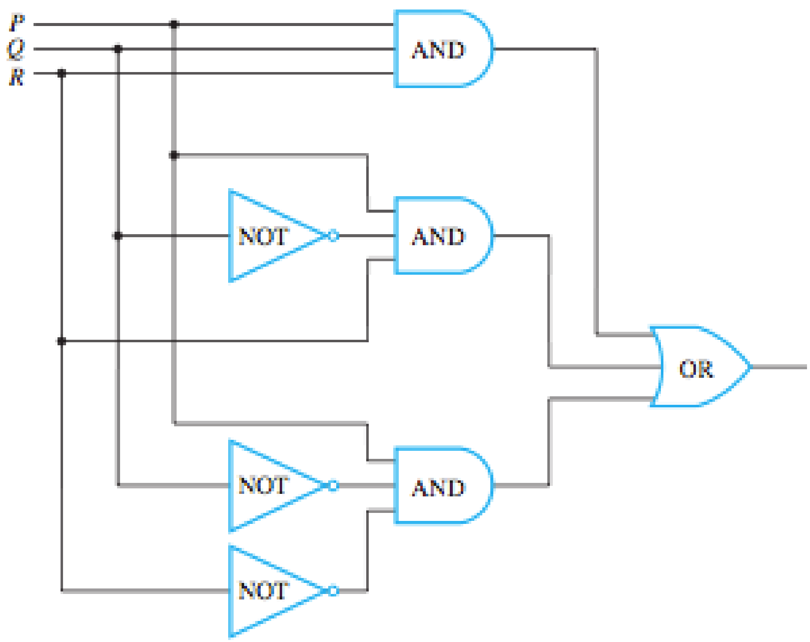
Iz toga sledi da je Bulov iskaz za tabelu istinosti

(P ∧ Q ∧ R) ∨ (P ∧ ~Q ∧ R) ∨ (P ∧ ~Q ∧ ~R).

PRIMER 1 - REŠENJE

Logičko kolo koje odgovara prethodnoj tablici je dato na slici

Kolo koje odgovara iskazu je
(P ∧ Q ∧ R) ∨ (P ∧ ~Q ∧ R) ∨ (P ∧ ~Q ∧ ~R).



Slika 5.2.2 Rešenje kola za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Poglavlje 6

Normalne forme

DISJUNKTIVNA I KONJUKTIVNA FORMA

Disjunktivna forma je logička suma logičkih proizvoda .

Disjunktivna forma (DF) je logička suma logičkih proizvoda . Logička suma potpunih logičkih proizvoda je disjunktivna normalna forma (DNF)

Primer
- $f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\overline{y}z$je u DNF
- $g(x,y) = xy + \overline{x}\overline{y}$je u DNF
- $h(x,y,z) = xy + \overline{x}\overline{y}z$nije u DNF zato što xy nije potpun logički proizvod sa sve 3 promeljive.

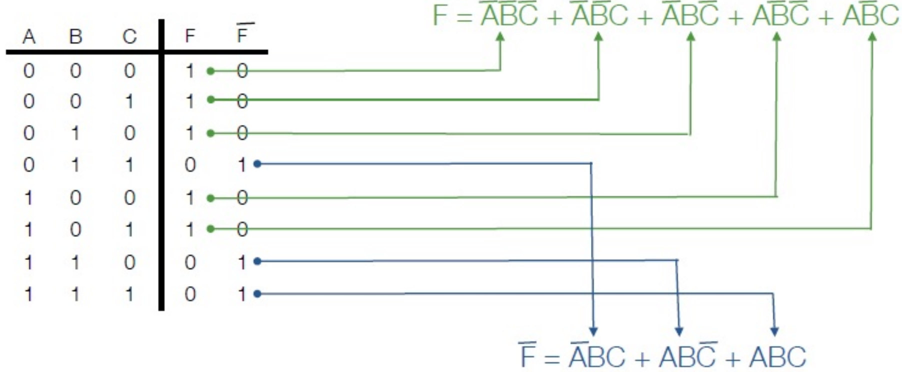
Konjuktivnaforma(KF) je logički proizvod logičkih suma. Logički proizvod potpunih logičkih suma je konjunktivna normalna forma(KNF).

Primer
- $f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y+\overline{z})(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+z)$jeste u KNF
- $g(x,y) = (x+y)(\overline{x}+\overline{y})$ jeste u KNF
- $h(x,y,z) = (x+y)(\overline{x}+\overline{y}+z)$ nije u KNF pošto $x+y$ nije potpuna logička suma sa sve 3 promenljive.

PRIMER ZA DNF I KNF

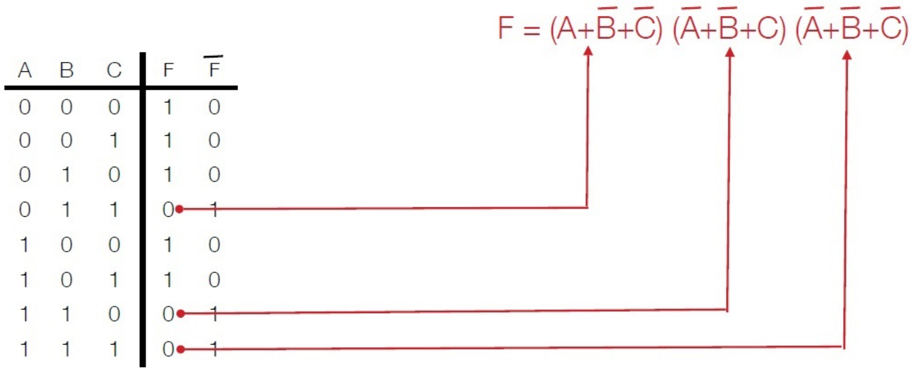
DNF uključuje proizvode za koje je njihov izlaz tačan, a KNF sume za koje je njihov izlaz netačan

DNF uključuje u sumu sve logičke proizvode za koje je njihov izlaz tačan. U sledećem primeru vidimo da F uključuje sve logičke proizvode za koje je F=1.



Slika 6.1 Primer za DNF [Izvor: Autor]

KNF predstavlja proizvod svih suma, za koje je njihov izlaz netačan, odnosno u sledećem primeru za koji je F=0.



Slika 6.2 Primer za KNF [Izvor: Autor]

Poglavlje 7

Minimizacija logičkih funkcija

KARNOOVE MAPE

Karnoove mape predstavljaju tablični metod minimizacije logičkih funkcija.

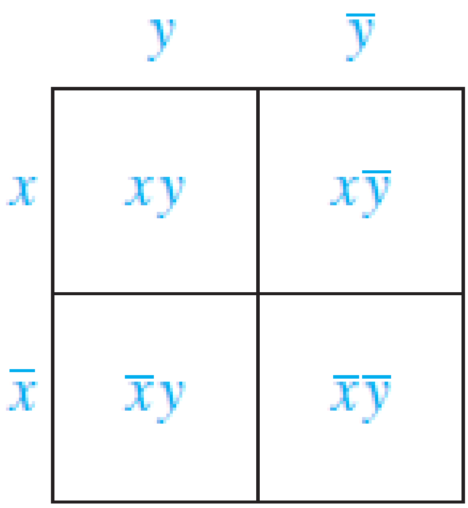
Karnoove mape (engl. Karnaugh map) ili K-mape se obično koriste kada kolo sadrži 6 ili manje varijabli kako bi se simplifikovali iskazi.

Karnoove mape predstavljaju tablični metod minimizacije logičkih funkcija.

Prvo ćemo prikazati kako da se uprosti iskaz sa dve varijable.

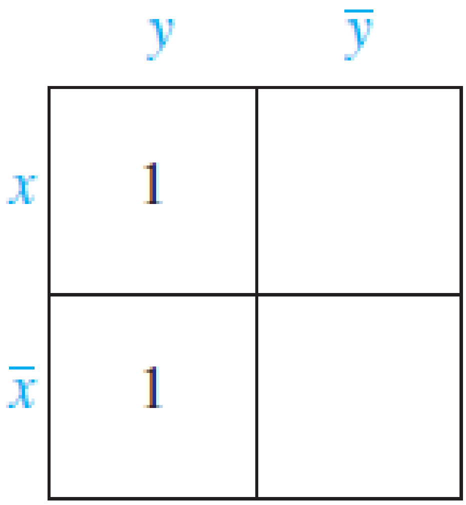
Karnoova mapa za dve promenljive se sastoji od 4 polja (Slika 1), a svako od tih polja rezervisano je za jednu moguću konjunkciju promenljivih ili njihovih negacija.

Ukoliko se određena konjunkcija pojavljuje u funkciji, onda se u dato polje zapisuje 1, a ako se ne pojavljuje, ne zapisuje se ništa.



Slika 7.1 Karnoova mapa za dve promenljive [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Karnoova mapa za funkciju sa dve promenljive sastoji se od 4 polja. Svako od tih polja obezbeđeno je da prikaže konjunkciju promenljivih ili njihovih negacija. Ukoliko se određena konjunkcija pojavljuje u funkciji, onda u to polje koje obeležava tu konjunkciju unosimo 1, a ako se ne pojavljuje ne unosimo ništa. Na taj način funkciju od dve promenljive preslikavamo u Karnoovu mapu.



Slika 7.2 K-mapa za $xy + \overline{x}y$ [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

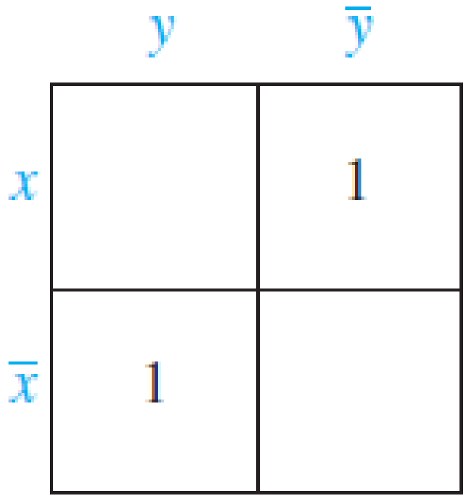
Pogledajmo K-mapu za iskaz $xy + \overline{x}y$.
Ovde su date dve konjunkcije xy i $\overline{x}y$ (slika 2). Tamo gde piše x, podrazumevamo da je vrednost $x = 1$, a gde je $\overline{x}$ vrednost je 0. Pošto konjunkcija sadrži x bez negacije, onda unosimo 1 u polje gde se nalazi x bez negacije. To isto važi i za y, pa konjunkciju xy unosimo u preseku ova dva polja, odnosno 1 za konjunkciju xy unosimo u gornje levo polje. Na isti način se određuje polje za $\overline{x}y$.

PRIMERI KARNOOVIH MAPA

K-mape za iskaze $x\overline{y} + \overline{y}x$ i $x\overline{y} + \overline{y}x + \overline{x}\overline{y}$

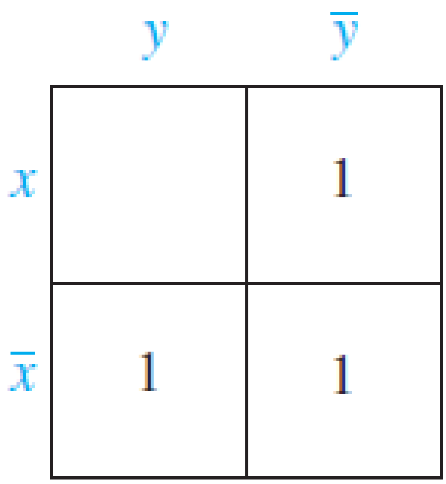
Pogledajmo K-mapu za iskaz $x\overline{y} + \overline{x}y$

Za konjunkciju $x\overline{y}$, gledamo polje koje predstavlja presek x i $\overline{y}$, što je u ovom slučaju polje koje je gore desno na slici 3.
Za konjukciju $\overline{x}y$, gledamo polje koje je presek $\overline{x}$ i y , što je polje koje se nalazi dole levo na slici 3.



Slika 7.3 K-mapa za $x\overline{y}+\overline{x}y$ [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

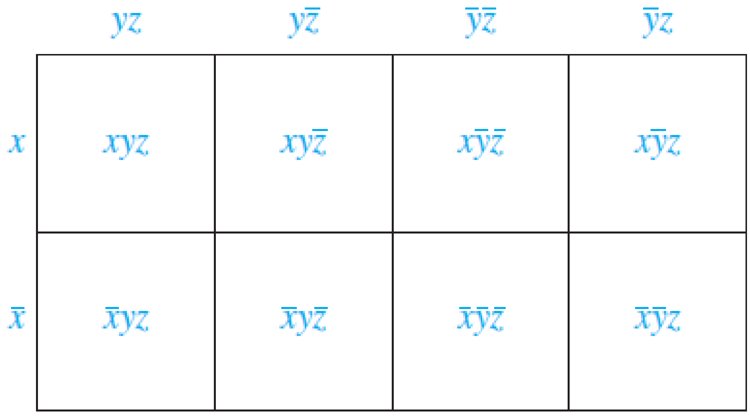
Pogledajmo K-mapu za iskaz $x\overline{y}+y\overline{x}+\overline{x}\overline{y}$prikazanoj na slici 4. Za konjunkciju $x\overline{y}$, gledamo polje koje je u preseku x i $\overline{y}$, što je u ovom slučaju polje gore desno. Za konjunkciju $y\overline{x}$, gledamo polje koje je u preseku y i $\overline{x}$, što je u ovom slučaju polje dole levo. Za konjunkciju $y\overline{x}$, gledamo polje koje je u preseku y i $\overline{x}$, što je u ovom slučaju polje dole levo. Za konjunkciju $\overline{x}\overline{y}$, gledamo polje koje je u preseku $\overline{x}$ i $\overline{y}$, što je u ovom slučaju polje dole desno.



Slika 7.4 K-mapa za $x\overline{y}+y\overline{x}+\overline{x}\overline{y}$ [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

KARNOOVA MAPA ZA 3 PROMENLJIVE

Karnoova mapa za 3 promenljive ima 8 ćelija

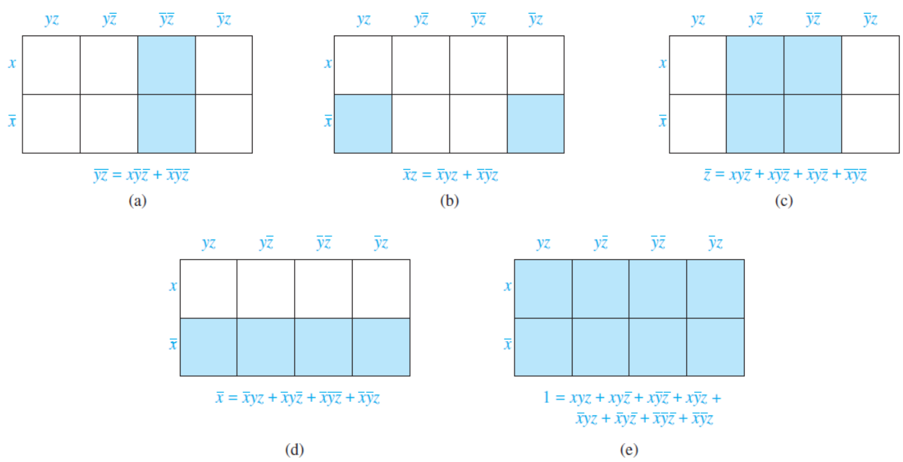


Slika 7.5 Karnoova mapa sa tri promenljive [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Karnoova mapa sa tri promenljive izgleda kao što je prikazano na slici 5. I u ovom slučaju, kao i u slučaju sa dve promenljive, Karnoova mapa ima rezervisana polja za tačno jednu konjukciju, gde su te konjunkcije sa tri promenljive. Pronalaženje odgovarajućeg polja ide postepeno.

Ako tražimo polje koje pripada konjukciji $xy\bar{z}$, prvo ćemo pogledati red u kome se nalaze sva polja koja sadrže x (imamo samo dva reda, jedan za x i drugi za $\bar{x}$). Zatim tražimo kolonu koja sadrži y i $\bar{z}$, pa u preseku x i $y\bar{z}$ polja, nalazimo polje koje odgovara konjunkciji $xy\bar{z}$.

Primeri Karnoovih mapa sa tri promenljive



Slika 7.6 Primeri Karnoovih mapa sa tri promenljive [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Kod pravila grupisanja Karnoovih mapa sa tri promenljive, pored prethodno navedenih pravila, potrebno je dodati još dva:

- mogu se grupisati 8 jedinica
- mogu se grupisati i elementi sa strane

GRUPISANJE ELEMENATA

Prilikom procesa minimizacije jedinice se grupišu u veće celine.

Prilikom **procesa minimizacije** jedinice se grupišu u veće celine.

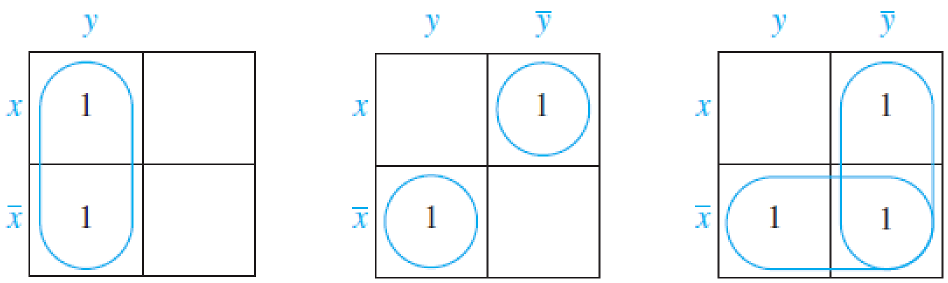
Ove celine treba da budu što veće, ali mogu sadržati samo polja sa 1.

Pravila grupisanja:

- Može se grupisati: 1 polje samostalno, 2 polja, 4 polja, 8 polja ili 16 polja.
- Kada se u jednoj mapi pravi više grupa, nastoji se da te grupe budu što veće, makar i po cenu zajedničkog polja u grupama.

Kod mape sa dve promenljive mogu se grupisati samo 1 polje, 2 susedna polja ili sva 4 polja. Primeri pravilnog grupisanja su dati na slici.

Grupisanje za Karnoove mape sa dve promenljive u procesu minimzacije je prikazano na slici.



Slika 7.7 Primeri pravilnog grupisanja K-mape sa 2 promenljive [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Minimalni iskazi koji se dobijaju sa Karnoovih mapa prikazanih na slici, predstavljaju sumu proizvoda

a) $xy + \overline{x}y = y$

b) $x\overline{y} + \overline{x}y = x\overline{y} + \overline{x}y$

c) $x\overline{y} + \overline{y}x + \overline{x}\,\overline{y} = \overline{x} + \overline{y}$

PRIMER 1

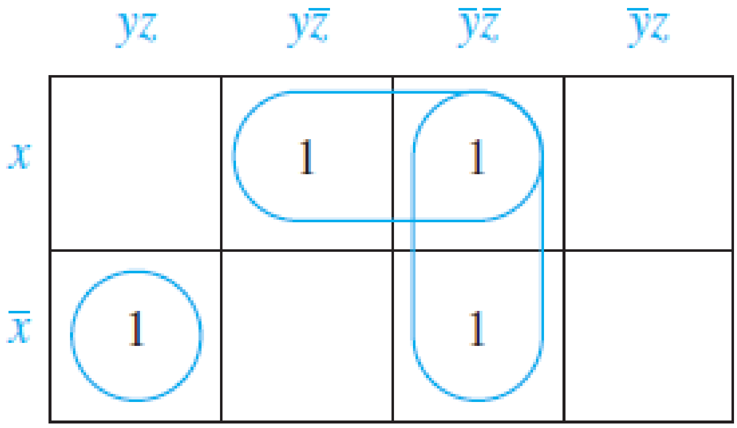
Minimizirati iskaz koristeći Karnoove mape

Primer 1

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape

$$xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

Karnoova mapa



Slika 7.8 Korščenje K-mape sa tri promenljive za primer 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Rešenje: $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$

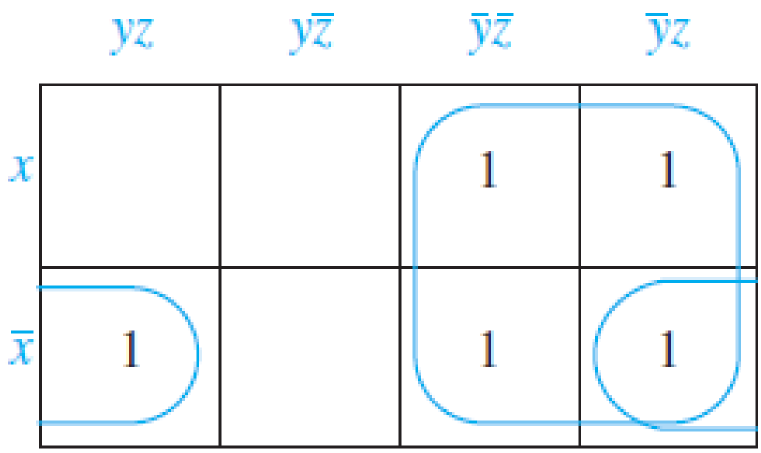
PRIMER 2

Sledeći iskaz se može minimizirati na 2 člana

Primer 2

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape

$$x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$



Slika 7.9 Korišćenje K-mape sa tri promenljive za primer 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Rešenje: $\bar{y} + \bar{x}z$

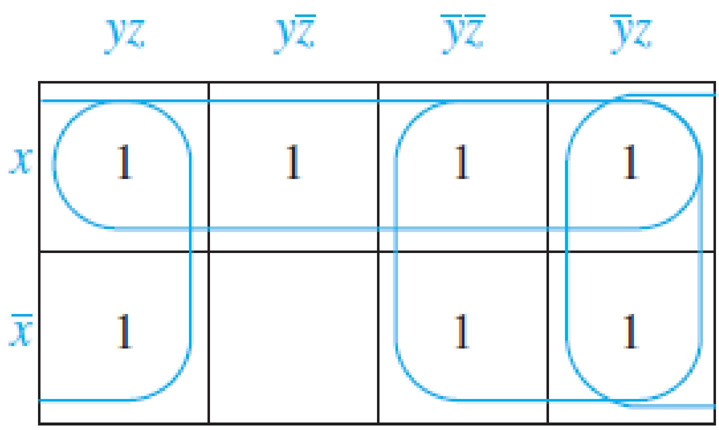
PRIMER 3

Sledeći iskaz se može minimizirati na 3 člana

Primer 3

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape

$$xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$



Slika 7.10 Koršćenje K-mape sa tri promenljive za primer 3 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Rešenje: $x + \overline{y} + z$

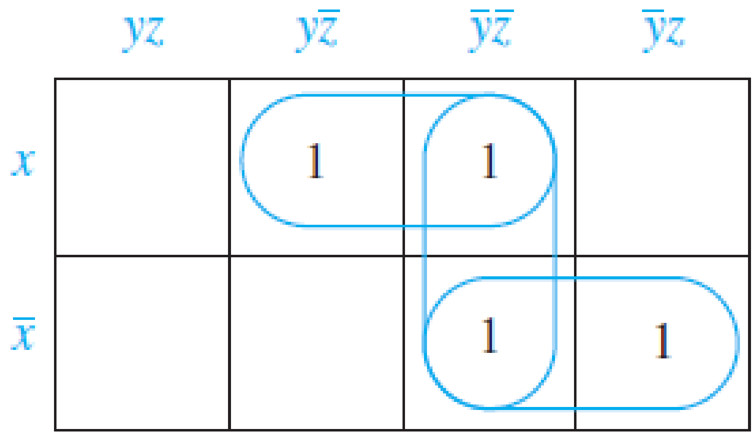
PRIMER 4

Iskaz se može grupisati na sledeći način

Primer 4

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape

$$xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$



Slika 7.11 Koršćenje K-mape sa tri promenljive za primer 4 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Rešenje: $x\bar{z} + \overline{x}\overline{y}$
<p> <youtube width="460" height="258" src="https://drive.google.com/file/d/14yiZ0JcoabugMJmXAK1P7HbIXJ7ThlLs/preview" /> </p>

POPUNJAVANJE KARNOOVE MAPE ZA FUNKCIJE U KNF I DNF

Za DNF grupišu se polja sa “1”, a za KNF se grupišu “0” polja

Karnoova mapa se popunjava na isti način za funkcije u DNF i KNF. Za DNF grupišu se polja sa “1”, a za KNF se grupišu “0” polja. Minimalna disjunktna forma (MDF) ima onoliko logičkih proizvoda koliko ima zaokruženih polja. Minimalna konjuktivna forma (MKF) ima onoliko logičkih suma koliko ima zaokruženih polja.
Minimizacija se naziva određivanje najprostijeg između više izraza kojima se u jednoj klasi izraza može predstaviti prekidačka funkcija. To može da bude, na primer, klasa DNF izraza, klasa KNF izraza itd.
Ukoliko se određuje minimalna disjunktivna normalna forma u mapu se upisuju jedinice na mesto zadatih decimalnih indeksa. U slučaju nalaženja minimalne konjuktivne normalne forme u mapu se upisuju nule. U oba slučaja teži se formiranju što većih grupa polja od 2k jedinica (za MDNF), odnosno nula (za MKNF), pri čemu broj tako formiranih površina treba da bude što manji. Površine uvek sadrže susedne stranice, tj. polja koja su susedna ili se nalaze na suprotnim stranama mape.
U slučaju traženja MDNF svakoj površini odgovara proizvod promenljivih koje ne menjaju svoju vrednost duž polja date površine. Promenljiva koja ima vrednost 1 u proizvod ulazi bez komplementa, a ona koja vrednost 0 - sa komplementom. Najzad, suma tih proizvoda predstavlja MDNF.
U slučaju traženja MKNF svakoj površini odgovara suma promenljivih koje ne menjaju svoju vrednost kroz polja date površine. Promenljiva koja ima vrednost 0 u proizvod ulazi bez komplementa, a ona koja ima vrednost 1 - sa komplementom. Proizvod nađenih suma predstavlja MKNF.

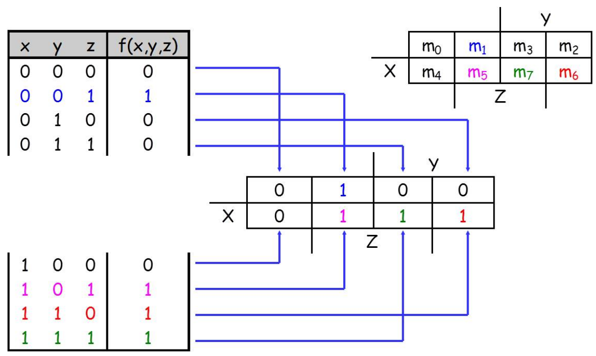
Izloženi metod minimizacije može da se svede na sledeći algoritam:

1. Popunjavanje mape jedinicama i nulama u odgovarajuća polja.
2. Formiranje što većih grupa od susednih jedinica i nula. Broj polja u grupi mora da bude stepen 2. Jedno polja može da bude član više grupa.
3. Izbor najmanjeg broj grupa koje pokrivaju sve jedinice (nule).
4. Prevođenje svake grupe u proizvod ili sumu uključujući svaku promenljivu ili njen komplement koja ne menja svoju vrednost.
5. Uspostavljanje logičke “ILI” ili “I” relacije između pojedinih grupa.
6. Nedefinisana stanja ne utiču na ukupnu vrednost funkcije. Zbog toga, polja koja su predstavljena ovim vrednostima mogu da se uzmu u obzir prilikom minimizacije ali i ne moraju.

POPUNJAVANJE KARNOOVIH MAPA IZ TABLICA ISTINITOSTI

Izlaz u redu i se upisuje u kvadrat m_i na mapi

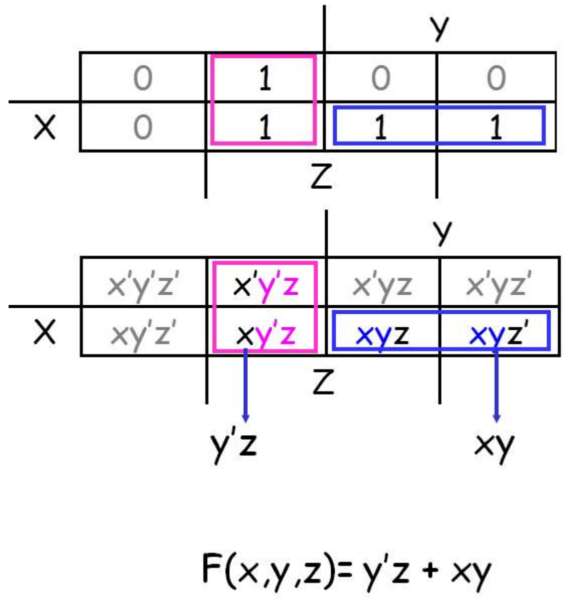
K-mapu možemo popuniti direktno iz tablice istinitosti. Izlaz u redu i se upisuje u kvadrat m_i na mapi. Napomenimo da su poslednje dve kolone "zamenile mesto".



Slika 7.12 Popunjavanje Karnoove mape [Izvor: Autor]

Kod određivanja MDNF:

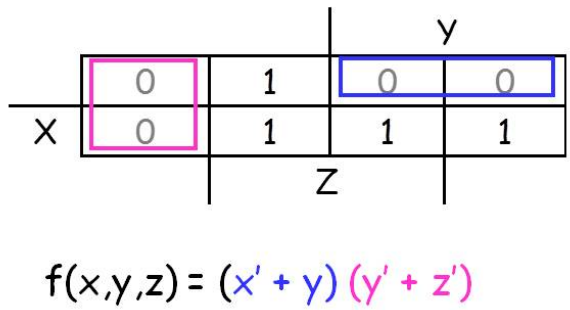
- Svaki pravougaonik odgovara jednom izrazu proizvoda.
- Grupišemo pravougaonike koji imaju vrednost 1.
- Proizvod se određuje pronalaskom zajedničkih literala u tom pravougaoniku



Slika 7.13 DNF [Izvor: Autor]

Kod određivanja MKNF:

- Svaki pravougaonik odgovara jednom izrazu suma
- Grupišemo pravougaonike koji imaju vrednost 0.
- Suma se određuje pronalaskom zajedničkih literala u tom pravougaoniku

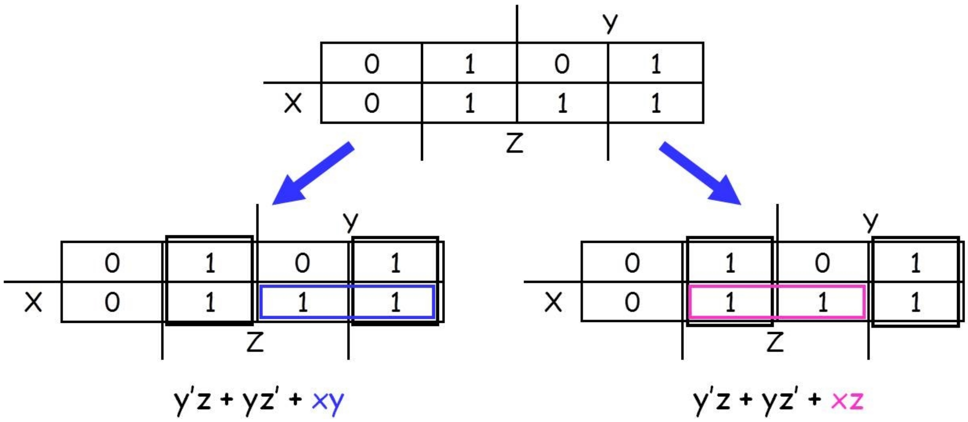


Slika 7.14 KNF [Izvor: Autor]

JEDINSTVENOST REŠENJA

K-mape nemaju uvek jedinstveno rešenje

Treba naglasiti da K-mape nemaju uvek jedinstveno rešenje. Pogledajmo primer koji je naveden niže. Polje m7 možemo grupisati na dva različita načina što dovodi do različitih rešenja



Slika 7.15 Različita rešenja Karnoove mape [Izvor: Autor]

VIDEO

Primer Karnoovih mapa sa 2 i 3 promenljive

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

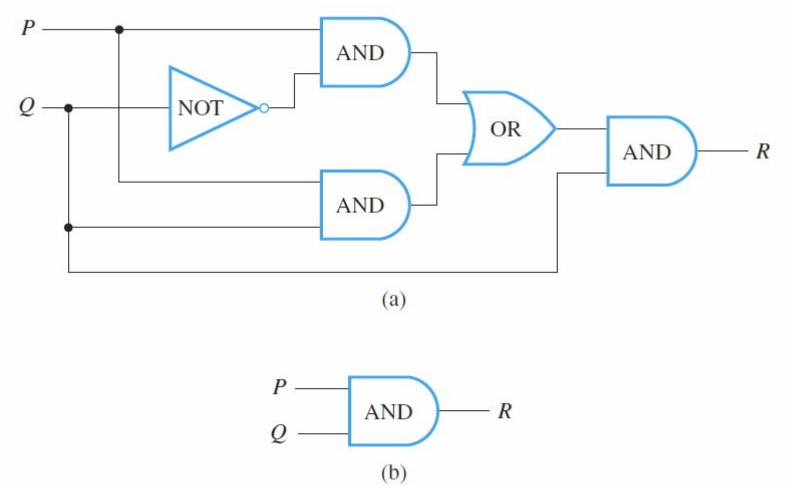
VEŽBA

ZADATAK 1.

Odredjivanje istinitosnih tablica iz logičkih kola

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Odrediti tablicu istinitosti za sledeća logiča kola:



Slika 8.1 Logičko kolo za zadatak 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Primetiti da i jednom i drugom logičkom kolu odgovara ista istinitosna tablica. Navedena logička kola su ekvivalentna, tj. za iste kombinacije ulaznih vrednosti daju jednak rezultat.

P	Q	R
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

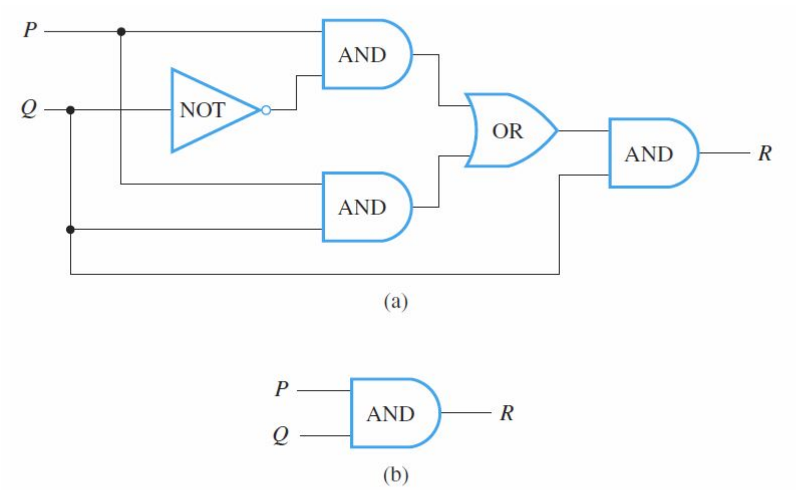
Slika 8.2 Tablica istinitosti za zadatak 1 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

ZADATAK 2.

Dva logička kola su ekvivalentna ako su Bulovi izrazi koji ih odredjuju ekvivalentni

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Za logička kola sa slike pokazati da su ekvivalentna koristeći njihove Bulove iskaze



Slika 8.3 Logičko kolo za zadatak 2 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Prvo logičkom kolu odgovara Bulov iskaz

$$((P \wedge \ Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge Q$$

Dok drugom logičkom kolu odgovara sledeći iskaz

$$P \wedge Q$$

Rešenje: Pokažimo da su iskazi ekvivalentni koristeći logičke zakone:

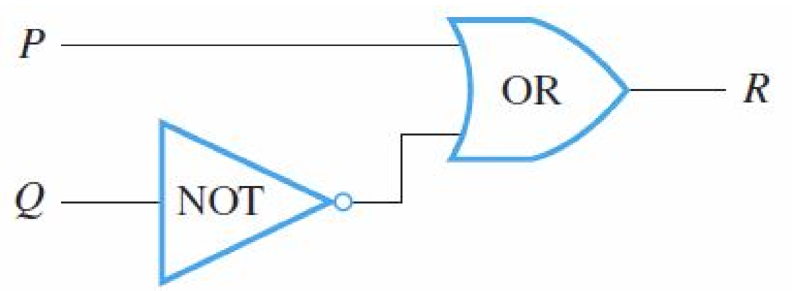
$$\begin{gathered}((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge Q \\ \equiv (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge Q \\ \equiv (P \wedge (Q \vee \neg Q)) \wedge Q \\ \equiv (P \wedge 1) \wedge Q \\ \equiv P \wedge Q\end{gathered}$$

ZADATAK 3.

Odredite izlaze za navedeno kolo

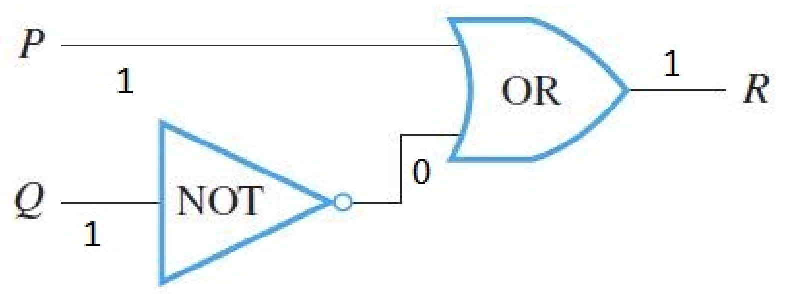
Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Odredite izlaze za prikazano kolo



Slika 8.4 Logičko kolo zadatak 3 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Kako pristupi rešenju: Pogledajmo kolo za vrednosti P=1 Q=1



Slika 8.5 Pristup rešavanju zadatak 3 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Logički iskaz za S je

$$P \vee Q'$$

A njegova tablica istinosti je

P	Q	Q'	P V Q'
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

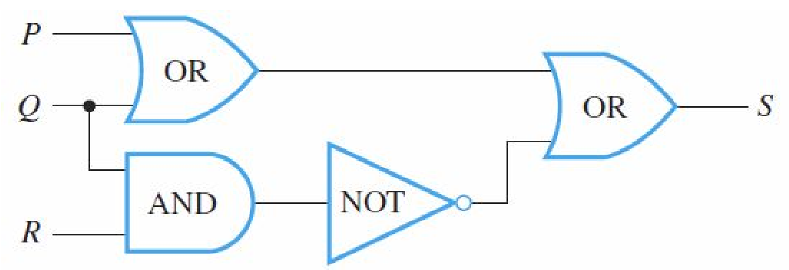
Slika 8.6 Tablica istinitosti zadatak 3 [Izvor: Autor]

ZADATAK 4.

Odredite izlaze za prikazano kolo

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

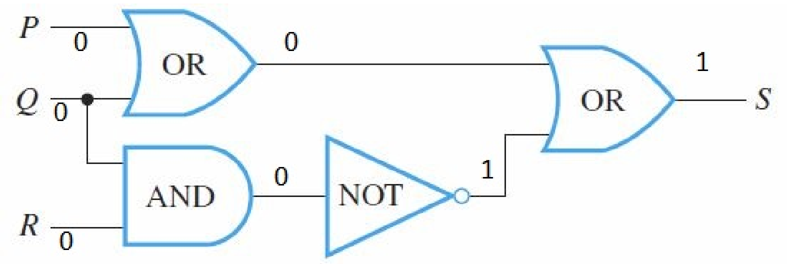
Odredite izlaze za prikazano kolo



Slika 8.7 Logičko kolo zadatak 4 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Kako pristupi rešenju:

Pogledajmo kolo za vrednosti P = 0, Q = 0, R = 0



Slika 8.8 Pristup rešavanju zadatak 4 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Logički iskaz za S je

$$(P \vee Q) \vee (Q \wedge R)'$$

A njegova tablica istinosti je

P	Q	R	P ∨ Q	(Q ∧ R)′	(P ∨ Q) ∨ (Q ∧ R)′
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Slika 8.9 Tablica istinitosti zadatak 4 [Izvor: Autor]

ZADATAK 5.

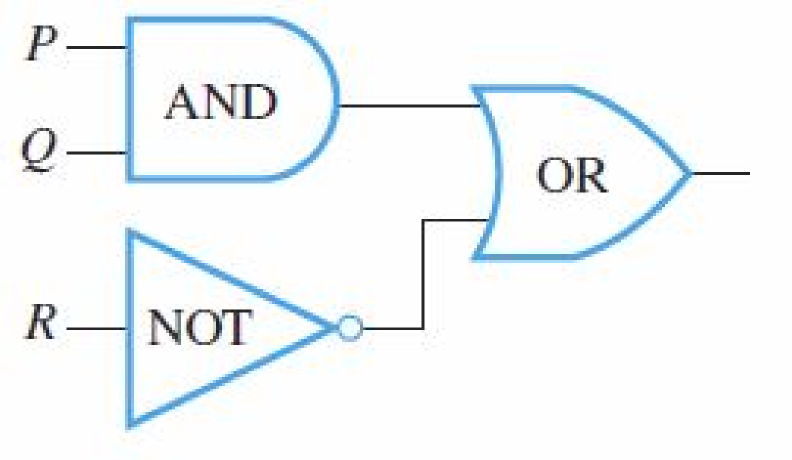
Odrediti logičko kolo za iskaz (P ∧ Q) ∨ ~R

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Za sledeći iskaz odrediti logičko kolo

$$(P \wedge Q) \vee \sim R$$

Rešenje:



Slika 8.10 Rešenje zadatka 5 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

ZADATAK 6.

Odredite logičko kolo na osnovu istinitosne tablice

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Dizajnirati logičko kolo, na osnovu Bulovog izraza koji odgovara istinitosnoj tablici sa slike.

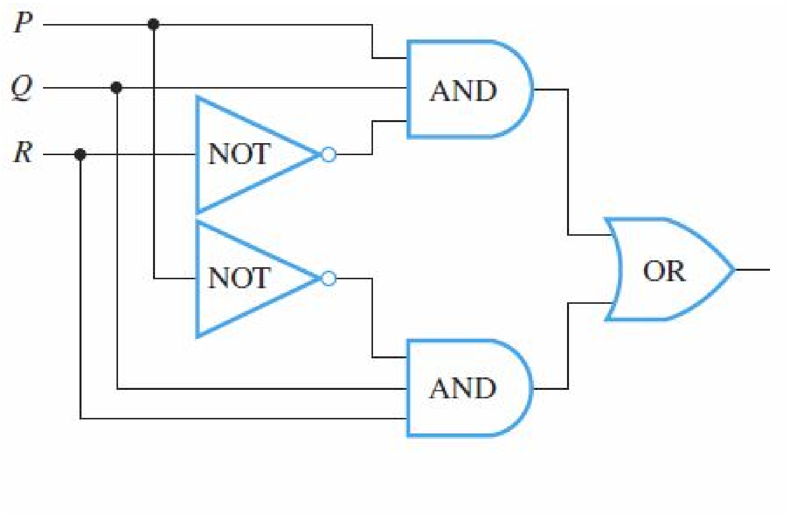
P	Q	R	S
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Slika 8.11 Istinitosna tablica zadatak 6 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Iskaz koji odgovara tablici je

$(P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R)$

Logičko kolo je dato na slici u nastavku.



Slika 8.12 Logičko kolo zadatak 6 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

ZADATAK 7.

Dizajnirajte logičko kolo na osnovu istinitosne tablice

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Dizajnirati *logičko kolo, na osnovu Bulovog izraza koji odgovara istinitosnoj tablici sa slike.*

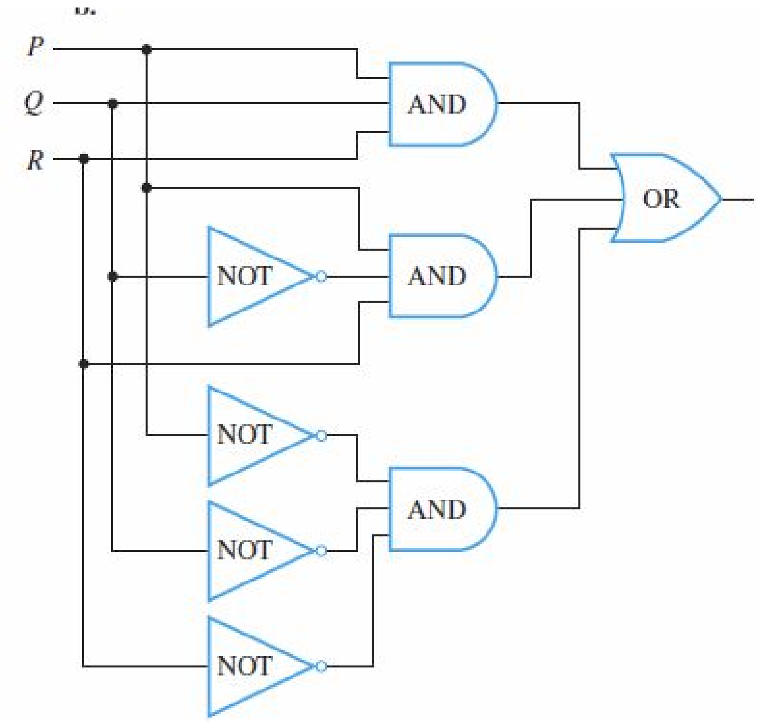
P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Slika 8.13 Istinitosna tablica zadatak 7 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

Iskaz koji odgovara tablici je

(P ∧ Q ∧ R) ∨ (P∧ ~Q ∧ R) ∨ (~P∧ ~Q∧ ~R)

Logičko kolo je dato na slici u nastavku.



Slika 8.14 Logičko kolo zadatak 7 [Izvor: Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications."]

ZADATAK 8.

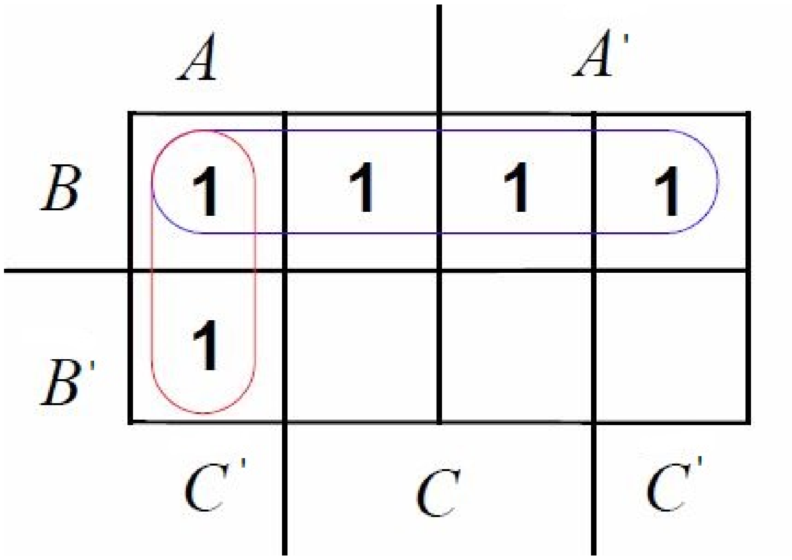
Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape A’BC’ + AC’ + BC

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape

A’BC’ + AC’ + BC

Karnoova mapa



Slika 8.15 Karnoova mapa zadatak 8 [Izvor: Autor]

Rešenje: B +AC’

ZADATAK 9.

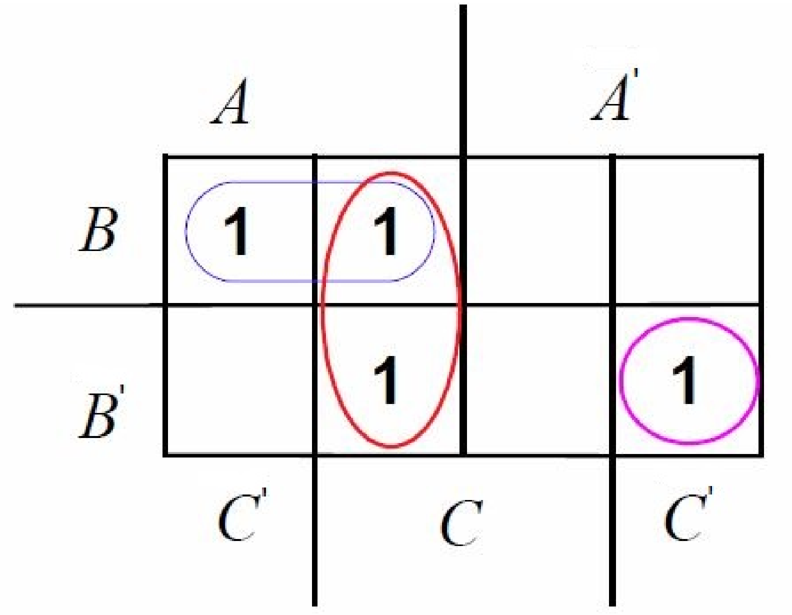
Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape A’B’C’ + AB’C + AB + AC

Predviđeno vreme trajanja: 5 minuta

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape

A’B’C’ + AB’C + AB + AC

Karnoova mapa



Slika 8.16 Karnoova mapa zadatak 9 [Izvor: Autor]

Rešenje: AB + AC +A'B'C'

ZADATAK 10.

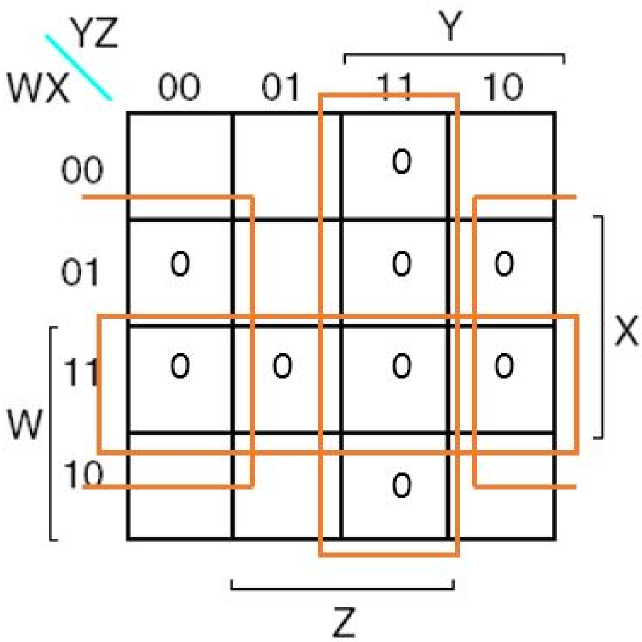
Popunjavanje Karnoovih mapa iz tablica istinitosti i odredjivanje MKNF

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta

Na osnovu tablice istinitosti popuniti Karnoovu mapu i odrediti MKNF.

W	X	Y	Z	F(W,X,Y,Z)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Slika 8.17 Tablica istinitosti zadatak 10 [Izvor: Autor]



Slika 8.18 Karnoova mapa zadatak 10 [Izvor: Autor]

REŠENJE:
F(W,X,Y,Z)= (W’ + X’)(Y’ + Z’)(X’ + Z)

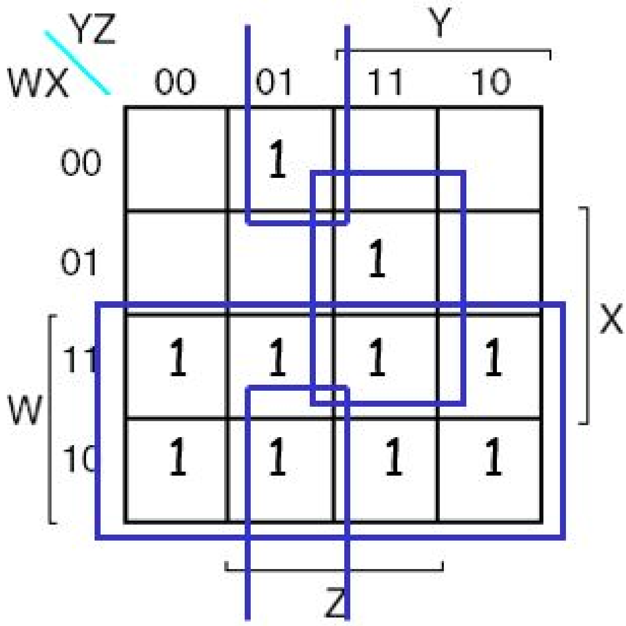
ZADATAK 11.

Popunjavanje Karnoovih mapa iz tablica istinitosti i odredjivanje MDNF

Predviđeno vreme trajanja: 10 minuta
Na osnovu tablice istinitosti popuniti Karnoovu mapu i odrediti MDNF.

W	X	Y	Z	F(W,X,Y,Z)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Slika 8.19 Tablica istinitosti zadatak 11 [Izvor: Autor]



Slika 8.20 Karnoova mapa zadatak 11 [Izvor: Autor]

REŠENJE:
F(W,X,Y,Z)= W + XYZ + X’Y’Z

Poglavlje 9

Zadaci za samostalni rad

ZADACI

Zadaci za provežbavanje

Zadatak 1 - predviđeno vreme trajanja 15 minuta

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape
x y z + x’ y z’ + x’ y’ z’ + x y’ z + x’ y’ z

Zadatak 2 - predviđeno vreme trajanja 15 minuta

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape
x y z + x’ y z’ + x’ y’ z’ + x y’ z + x’ y z

Zadatak 3 - predviđeno vreme trajanja 15 minuta

Minimizirati sledeći iskaz koristeći Karnoove mape
x y z + x y z’ + x’ y’ z’ + x y’ z’ + x’ y’ z + x y’ z

ZAKLJUČAK

Fokus ove lekcije je bio na primeni logike u logičkim kolima, odredjivanju Bulovih izraza na osnovu samih logičkih kola i tablica istinitosti.

Dat je algoritam za minimizaciju logičkih izraza primenom Karnoovih mapa.

Literatura

[1] Rosen, Kenneth H. "Discrete mathematics and its applications." AMC 10 (2007): 12.
[2] Epp, Susanna S. Discrete mathematics with applications. Cengage Learning, 2010.