UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Sistemi linearnih jednačina - II deo

Lekcija 10

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA120 - LINEARNA ALGEBRA

Lekcija 10

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA - II DEO

Uvod

UVOD

Kroneker – Kapelijev stav, Matrični metod, Kramerovo pravilo.

U ovoj lekciji ćete primenom znanja koje ste stekli u vezi sa matricama i determinantama i uz pomoć metoda koje će ovde biti izložene biti u mogućnosti da diskutujete i nalazite rešenja sistema linearnih jednačina. Metode koje će biti u okviru ove lekcije izložene su:

- Primena Kroneker-Kapelijevog stave na rešavanje sistema linearnih jednačina,
- Matrični metod,
- Kramerovo pravilo.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Kroneker – Kapelijev stav

MATRIČNI OBLIK SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Sistem linearnih jednačina je moguće predstaviti u matričnom obliku, tj. kao matričnu jednačinu.

Definicija. Sistem

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n &= b_2,\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3j}x_j+\ldots+a_{3n}x_n &= b_3,\\
\vdots \qquad\qquad &\ \ \vdots \\
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n &= b_i,\\
\vdots \qquad\qquad &\ \ \vdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned} \tag{*}$$

može se predstaviti pomoću matrica na sledeći način

$$A\cdot X=B.$$

Prethodna jednačina se naziva matrična jednačina, gde je A matrica sistema tipa $m\times n$, čiji su elementi koeficijenti koji stoje uz nepoznate, zatim matrica X je matrica-kolona tipa $n\times 1$ u kojoj se nalaze nepoznate i matrica B je matrica-kolona tipa $m\times 1$ u kojoj je nalaze slobodni članovi.

Dakle, matrice A, X i B su oblika

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\ \mathrm{i}\ B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

Zaista, matrična jednačina $A\cdot X=B$ odgovara datom sistemu, jer je $A\cdot X$ matrica-kolona tipa $m\times 1$

$$A\cdot X=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Iz jednakosti matrice i $A\cdot X$ i matrice B (istog su tipa) dobijamo da se dati sistem može zapisati preko matrične jednačine. $A\cdot X=B$.

PROŠIRENA MATRICA

Proširena matrica sistema se dobija kada se matrici sistema doda još jedna kolona koju čine slobodni članovi.

U vezi sa datim sistemom može se uočiti i matrica

$$A_p=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} & b_i\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

koja se naziva proširena matrica sistema. Ova matrica se dobija kada se matrici A doda još jedna kolona koju čine slobodni članovi sistema.

Sada ćemo izložiti još jeda metod kojim se u potpunosti može dati odgovor u vezi sa rešenjima sistema (*). Dakle, mogu se odrediti njegova rešenja u slučaju da je on saglasan, ili ako nema rešenja može se ustanoviti njegova nesaglasnost. Ova metoda se može primeniti i u slučaju da je u sistemu (*) $m=n$ tj. ako da je ovaj sistem kvadratan.

ISKAZ I DOKAZ KRONEKER – KAPELIJEVOG STAVA

Stav je baziran na poređenju rangova matrice sistema i proširene matrice sistema. Jednakost ovih rangova je ekvivalentna sa činjenicom da sistem ima rešenja. U suprotnom ih nema.

Fundamentalan stav kojim se može dobiti potpun odgovor u vezi sa (ne)saglasnošću proizvoljnog sistema lineranih jednačina jeste Kroneker - Kapelijev stav. On se bazira na upoređivanju rangova matrica A i A_p. Njega dajemo u nastavku.

Stav. Sistem (*) je saglasan ako i samo ako je $r(A) = r(A_p)$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da je sistem saglasan i da je jedno njegovo rešenje $x_1 = r_1, x_2 = r_2, \ldots, x_n = r_n$Tada važi da je

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot r_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot r_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot r_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ovo znači da je poslednja kolona proširene matrice A_p, linearna kombinacija svih kolona matrice A. Poznato je da se rang matrice ne menja ako se iz nje izostavi kolona koja je linearna kombinacija drugih kolona. Odatle zaključujemo da važi da je $r(A) = r(B)$.

$(\Leftarrow)$ Neka je sada $r(A) = r(A_p) = k$. Dokažimo da tada postoji rešenje sistema (*). Uočomo k bazisnih kolona matrice A koje su istovremeno i bazisne kolone matrice A_p. Ne gubeći opštost možemo pretpostaviti da su bazisne kolone prvih k kolona tih matrica. Tada na osnovu Stava o bazisnom minoru poslednja kolona matrice A_p se može predstaviti kao linearna kombinacija bazisnih kolona. To znači da postoje brojevi $r_1, r_2, \ldots, r_k$takvi da važi

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot r_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot r_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot r_k = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Prethodno zapis predstavlja sistem (*) u matričnom obliku. Na osnovu toga možemo zaključiti da je

$$x_1 = r_1,\ x_2 = r_2, \ldots, x_k = r_k,\ x_{k+1} = 0,\ x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0,$$

jedno rešenje sistema, pa je taj sistem saglasan. □

Napomena. Na osnovu datog dokaza možemo videti da je Kroneker - Kapelijev posledica Stava o bazisnom minoru.

BAZISNE JEDNAČINE SISTEMA

Ako je sistem saglasan i rang matrice sistema jednak broju nepoznatih, tada on ima jedinstveno rešenje. Ako je manji od broja promenljivih, tada sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

Na osnovu Krokener - Kapelijevog stava sada znamo pod kojim uslovom je sistem (*) saglasan. Sada nas interesuje sledeće: ako je sistem (*) saglasan, kada će on imati jedinstveno rešenje, a kada beskonačno mnogo rešenja? Da bismo ustanovili, uvedimo sledeću definiciju.

Definicija. Jednačine sistema (*) koje obrazuju bazisni minor zovu se bazisne jednačine.

Sada smo u mogućnost da damo iskaz sledećeg stava.

Stav. Sistem (*) je ekvivalentan sistemu njegovih bazisnih jednačina.

Posledice ovog stava su naredna dva stava.
Stav. Ako je sistem (*) saglasan i rang matrice sistema (*) je jednak broju nepoznatih, tada on ima jedinstveno rešenje.

Napomena. Prethodnim stavom se tvrdi da, u slučaju da važi $r(A)=r(A_p)=n$, gde je n broj nepoznatih, sistem (*) ima jedinstveno rešenje.

Stav. Ako je sistem (*) saglasan i rang matrice sistema (*) je manji od broja nepoznatih, tada on ima beskonačno mnogo rešenja.

Napomena. Prethodnim stavom se tvrdi da ako važi $r(A)=r(A_p)=p<n$, tada sistem (*) ima više od jednog rešenja.

Napomena. Sistem (*) neće imati rešenja u slučaju da je $r(A)\neq r(A_p)$.

1.1 Primer – Kroneker – Kapelijev stav

PRIMER – I DEO

Određivanje matrice sistema, kao i proširene matrice sistema

Primer. Rešiti sledeći sistem linearnih jednačina:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\quad +2x_2 + &\quad +3x_3 &\quad +x_4 &\quad &= 3,\\
x_1 &\quad +4x_2 &\quad +5x_3 &\quad +2x_4 &\quad &= 2,\\
2x_1 &\quad +9x_2 &\quad +8x_3 &\quad +3x_4 &\quad &= 7,\\
3x_1 &\quad +7x_2 &\quad +7x_3 &\quad +2x_4 &\quad &= 12,\\
5x_1 &\quad +7x_2 &\quad +9x_3 &\quad +2x_4 &\quad &= 20.
\end{aligned}
$$

Rešenje. Matrica sistema A i proširena matrica sistema A_p glase:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } A_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 20 \end{bmatrix}.
$$

S obzirom da je potrebno izračunati rang svake od ovih matrica, a one se razlikuju samo u poslednjoj koloni, često se ove dve matrice spajaju u jednu. Ona se zapisuje na sledeći način

$$
A_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & | & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & | & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & | & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & | & 20 \end{bmatrix}
$$

PRIMER – II DEO

Primena elementarnih transformacija za određivanje ranga.

Sada za ovu matricu primenjujemo sledeće elementarne transformacije

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & | & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & | & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & | & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & | & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{12}(-1) \\ V_{13}(-2) \\ \sim \\ V_{14}(-3) \\ V_{15}(-5) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{24} \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V_{24} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{23}(-5) \\ V_{24}(-2) \\ \sim \\ V_{25}(3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & | & -14 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & -7 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & | & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} V_{34} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & -7 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & | & -14 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{34}(-2) \\ \sim \\ V_{35}(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

PRIMER – III DEO

Određivanje ranga matrice sistema i proširene matrice i primena Kroneker – Kapelijevog stava

Dakle, matrica je svedena na oblik sa koga može da se odrediti rang matrica A i A_p. Kada se određuje rang matrice A, tada se u dobijenoj matrici posmatra prvih četiri kolone (do isprekidanih linija) i uočava se da je $r(A) = 3$. S druge strane, kada se određuje rang za matricu A_p posmatra se cela matrica. Uočava se da je $r(B) = 3$. Kako je $r(A) = r(B) = 3 < 4$, gde je 4 broj nepoznatih u polaznom sistemu, može se zaključiti da sistem ima, u ovom slučaju, beskonačno mnogo rešenja. Kako je početna matrica ekvivalentna sa krajnjom matricom, tada je i polazni sistem ekvivalentan sa sistemom čiji se koeficijenti nalaze u poslednjoj matrici (zbog istih elementarnih transformacija).

Tada polazni sistem glasi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 &= 3, \\ 6x_3 + 3x_4 &= -7. \end{aligned}$$

S obzirom da poslednji sistem ima beskonačno mnogo rešenja, očigledno će postojati određeni broj slobodnih promenljivih preko kojih će se ostale nepoznate izražavati. U ovom slučaju uvodi se jedna slobodna promenljiva. Dakle, jednu od nepoznatih x_1, x_2, x_3 ili x_4 ćemo proglasiti slobodnom promenljivom, a ostale tri ćemo izraziti preko nje. Na primer, za slobodnu promenljivu ćemo proglasiti nepoznatu x_4 Tada je iz poslednje jednačine sistema

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{7}{6}.$$

Ubacujući prethodno u drugu jednačinu dobijamo da je

$$x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ubacujući dobijeno za x_2 i x_3 u prvu jednačinu sistema, dobijamo

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{31}{6}.$$

Konačno, dobijamo da su sva rešenja oblika

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{1}{2}x_4 + \frac{31}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}x_4 - \frac{7}{6}, x_4\right), x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Rešavanje sistema linearnih jednačina primenom Kroneker-Kapelijevog stava.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP

Primer sa Youtube-a: rešavanje homogenog sistema Kroneker - Kapelijevim stavom.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

NAPOMENA I VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: određivanje ranga matrice primenom Gaus-Žordanovog metoda eliminacije.

> Prilikom određivanja ranga matrice, kada sistem rešavamo primenom Kroneker Kapelijevog stava može se primenjivati i Gaus - Žordanov metod eliminacije. Sledeći primer to ilustruje.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Matrični metod

REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA PRIMENOM MATRIČNE METODE

Matrični metod se direktno može primeniti na kvadratni sistem. U osnovnom obliku njime se može odrediti samo jedinstveno rešenje.

Neka je dat kvadratni sistem

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3j}x_j + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3, \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n &= b_i, \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned} \tag{**}$$

ili u matričnom obliku

$$A \cdot X = B,$$

gde je matrica sistema A, kvadratna matrica tipa $n \times n$. Pod pretpostavkom da je ova matrica regularna, moguće je odrediti njenu inverznu matricu A^{-1}. Množenjem prethodne matrične jednačine sleva matricom A^{-1}, dobija se:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B, \text{ tj. } (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ tj. } I \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Konačno dobijamo

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Rešenje dobijeno u ovom obliku nazivamo matrično rešenje polaznog sistema.
Napomena. Rešavanje kvadratnih sistema ovom metodom je moguće samo u slučajevima kada $\det(A) \neq 0,$ tj. kada je moguće odrediti matricu A^{-1}. Ovako dobijeno matrično rešenje je jedinstveno rešenje polaznog sistema.

Ova metoda se ne može primeniti u slučajevima kada je $\det(A) = 0,$ jer tada nije moguće odrediti matricu A^{-1}. Međutim, pod pretpostavkom da je posmatrani sistem saglasan (što se uvek može proveriti primenom Kroneker - Kapelijevog stava), ovu metodu je moguće primeniti i na slučajeve kada sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Rešavanje sistema se tada zasniva na određivanju bazisnog minora matrice A. Štaviše, ovom metodom je moguće odrediti i rešenja pravougaonog sistema pod pretpostavkom njegove saglasnosti. I u ovom slučaju je potrebno odrediti bazisnog minora njegove matrice sistema (o tome ovde neće biti reči).

PRIMER

Primena matričnog metoda na kvadratni sistem za određivanje rešenja.

Odrediti jedinstveno rešenje sistema linearnih jednačina matričnom metodom

$$\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ 2x-2y+z&=3,\\ x-2y+2z&=3. \end{aligned}$$

$\mathbf{Rešenje.}$ Imamo da je

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-2&1\\1&-2&2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}.$$

Kako je $\det(A)=-6\neq 0,$ postoji matrica A^{-1} i ona glasi

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&-4&2\\-3&1&1\\-3&3&-3\end{bmatrix}.$$

Proveriti za vežbu dobijene rezultate.

Tada je

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}0&-4&2\\-3&1&1\\-3&3&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-6\\-12\\-18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Konačno dobijamo

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},$$

pa iz jednakosti ovih matrica dobijamo $x=1,y=2,z=3$, tj. rešenje polaznog sistema je uređena trojka $(1,2,3)$.

Poglavlje 3

Kramerovo pravilo

DETERMINANTA KVADRATNOG SISTEMA

To je determinanta koja se formira od koeficijenata uz nepoznate u kvadratnom sistemu.

Neka je dat kvadratni sistem

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3j}x_j + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3, \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i, \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n,
\end{array} \qquad (**)$$

Determinanta sistema (**) je determinanta reda n koja se formira od koeficijenata uz nepoznate u sistemu (**), tj. važi da je

$$\det(A) = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

ISKAZ I DOKAZ KRAMEROVOG STAVA

Kramerovo pravilo proističe iz matrične metode i dokazuje se njegovom primenom. Zato se može primeniti samo za rešavanje kvadratnih sistema.

Ovo pravilo se primenjuje samo na sisteme (**), tj. sisteme kod kojih je broj nepoznatih jednak broju jednačina.

Stav. Ako za matricu sistem (**) važi da je $\det A \neq 0$, tada sistem (**) ima jedinstveno rešenje.

Dokaz. Iz matrične jednačine, $X = A^{-1} \cdot B$, odnosno

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ii} & \dots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

dobijamo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{i1}b_i + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{i2}b_i + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ii}b_i + \ldots + A_{ni}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{in}b_i + \ldots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti ovih matrica dobijamo da je

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ii}b_i + \ldots + A_{ni}b_n),\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sa D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ označimo determinantu koja je dobijena od determinante sistema zamenom njene i -te kolone $(i = 1, 2, \ldots, n)$ slobodnim članovima, tj. determinantu

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(i-1)} & b_i & a_{i(i+1)} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako se ova determinanta primenom Laplasove teoreme razvije po i -toj koloni $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tada važi da je

$$A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ii}b_i + \ldots + A_{ni}b_n = D_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Ako uvedemo oznaku $D = \det(A)$, tada dobijamo da je

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \text{ za } (i = 1, 2, \ldots, n). \square$$

DISKUSIJA REŠENJA SISTEMA PO KRAMEROVOM PRAVILU

Kao i kod matričnog metoda u osnovnom obliku ovim pravilom se mogu odrediti samo jednistvena rešenja.

Prethodno dobijene formule predstavljaju Kramerovo pravilo. Dakle, ako je determinanta sistema $D \neq 0$ (što je bila pretpostavka), tada je polazni kvadratni sistem saglasan i ima jedinstveno rešenje koje se izračunavaju primenom datih formula.

U slučaju da je $D = 0,$ tada se mogu javiti sledeći slučajevi: sistem je nesaglasan (tj. nema rešenja); sistem je saglasan i ima beskonačno mnogo rešenja. Tada se vrši posmatranje determinanti promenljivih. Tada se mogu javiti naredna dva slučaja:

1) ako važi da je bar jedna od determinanti $D_i \neq 0,$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N},$ tada polazni sistem nema rešenja;

2) ako važi da je $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0,$ tada Kramerovo pravilo ne daje odgovor da li sistem ima beskonačno mnogo rešenja ili nema rešenja. Za nalaženje rešenja se u ovom slučaju mora primeniti neki drugi metod.

Napomena. U slučaju da je kvadratni sistemčija rešenja tražimohomogen, on ima uvek rešenje. Takođe, tada su determinante promenljivih jednanake nuli. Zato,ako je $D \neq 0$ sistem, na osnovu Kramerovog pravila,ima jedinstveno rešenje $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ koje se naziva trivijalno rešenje. U slučaju da je $D = 0,$ tada homogen sistem ima beskonačno mnogo rešenja od kojih je jedno sigurno trivijalno. Često se u ovakvom slučaju kaže da homogen sistem ima i netrivijalna rešenja.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: rešavanje sistema sa dve promenljive - obnavljanje.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: rešavanje sistema sa tri promenljive - obnavljanje.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER – I DEO

Određivanje determinante sistema, kao i determinanti promenljivih i diskusija sistem prema Kramerovom pravilu.

U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i kada je to moguće rešiti sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3, \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2. \end{array}$$

Rešenje. Izračunajmo, najpre, determinantu sistema D , kao i determinante koje odgovaraju nepoznatima D_x, D_y i D_z :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = -(a-2)(a+3),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = -(a-2)(a+3),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a + 2 = -(a-2),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a + 2 = -(a-2).$$

PRIMER – II DEO

Nastavak diskusije o rešenjima sistema

Diskusija:

1. U slučaju da je $a \neq -3$ i $a \neq 2$, tada je $D \neq 0$, pa sistem ima jedinstveno rešenje

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a+3}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{a+3}.$$

2. Ako je, sada, $a = -3$, imamo da je $D_y \neq 0$, pa sistem nema rešenja.

3. Ako je $a=2,$ tada je $D_x=D_y=D_z=0.$ U ovom slučaju Kramerovo pravilo ne daje odgovor na to da li sistem ima ili nema rešenja, već se mora vratiti vrednost parametra $a=2$ u sistem i on rešavati nekon drugom metodom. Tada sistem postaje

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 3, \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2, \end{array}$$

Formiraćemo matricu na osnovu koeficijenata sistema i slobodnih članova

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & |1 \\ 2 & 3 & 2 & |3 \\ 1 & 2 & 3 & |2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} V_{12}(-2) \\ \sim \\ V_{13}(-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & 4 & |1 \\ 0 & 1 & 4 & |1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} V_{23}(-1) \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & 4 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$$

i rešavati sistem primenom Kroneker-Kapelijevog stava.

Kako je $r(A)=r(B)=2<3,$ gde je 3 broj nepoznatih u sistemu, sistem je saglasan i ima beskonačno mnogo rešenja. Ovo znači da se početni sistem sveo na njemu ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1, \\ & & y & + & 4z & = & 1, \end{array}$$

Ako promenljivu z proglasimo za slobodnu promenljivu, tada važi

$$x=5z, \quad y=1-4z,$$

pa su sva rešenja u ovom slučaju oblika

$$\{(x,y,z)=(5z,1-4z,z),\ z\in\mathbb{R}\}.$$

Poglavlje 4

Primena determinanti na rešavanje nekih sistema

SAGLASNOST SISTEMA S JEDNOM JEDNAČINOM VIŠE OD BROJA PROMENLJIVIH

Postojanje rešenja sistem linearnih jednačina sa jednom jednačinom više od broja promenljivih se može diskutovati preko determinante.

U slučaju da imamo sistem linearnih jednačina koji ima jednu jednačinu više od broja promenljivih, tada saglasnost takvog sistema možemo proveravati primenom determinante. Ovaj postupak ćemo izložiti na sistemu od četiri linearne jednačine sa tri nepoznate, mada se ona može generalizovati na bilo koji sistem linearnih jednačina koji zadovoljava pomenuti uslov.

Posmatrajmo, stoga, sistem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1, \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2, \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3, \\ a_{41}x & + & a_{42}y & + & a_{43}z & = & b_4. \end{array}$$

Sada ćemo uočiti sledeću determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}.$$

1° U slučaju da je determinanta $D = 0$, tada je posmatrani sistem moguć, odnosno ima rešenja.

2° U slučaju da je $D \neq 0$, tada je prethodni sistem nemoguć, tj. nema rešenja.

Napomena. U slučaju 1° vrednost determinante jednaka 0 znači da je određeni broj vrsta posmatrane determinante linearno zavisan, odnosno da se jednačine koje njima odgovaraju mogu odbaciti iz sistema. Nedostatak u slučaju 1° je taj da ne možemo reći da li sistem ima beskonačno mnogo rešenja ili jedinstveno rešenje, već samo možemo reči da je sistem saglasan i primeniti tada neku drugu metodu za određivanje njegovih rešenja.

PRIMER

Određivanje parametra b za koji je posmatrani sistem saglasan.

Odrediti realni parametar b, tako da sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1, \\ 2x & - & 5y & - & z & = & 3, \\ 2x & - & 7y & + & bz & = & b-4, \\ -3x & + & 5y & + & 9z & = & b-3. \end{array}$$

bude saglasan.

Rešenje. Formirajmo determinantu D i nakon odgovarajućih transformacija, razvijmo je po prvoj koloni. Tada imamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & b & b-4 \\ -3 & 5 & 9 & b-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & b-2 & b-6 \\ 0 & -4 & 12 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & b-2 & b-6 \\ -4 & 12 & b \end{vmatrix}.$$

Poslednju determinantu nakon odgovarajućih transformacija, razvijmo po prvoj koloni

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & b-5 & b-7 \\ 0 & 0 & b-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-5 & b-7 \\ 0 & b-4 \end{vmatrix} = (b-5)\cdot(b-4).$$

Dakle, kada je $b=5$ ili $b=4$ početni sistem je moguć.

Poglavlje 5

Pokazna vežba

1. ZADATAK (10 MINUTA)

Matrični metod

Rešiti sistem matričnim metodom

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rešenje. Sistem se može zapisati u matricčnom obliku $A \cdot X = B$, gde je matrica A kvadratna matrica koja sadrži koeficijente sistema, matrica X je nepoznata, a matrica B je kolona slobodnih clanova.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Množenjem matricom A^{-1} sa leve strane jednačine $A \cdot X = B$, dobija se da je $X = A^{-1} \cdot B$, a samim tim i nepoznate početnog sistema. Odredimo, sada A^{-1}.

$$detA = 10, \qquad adjA = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -4 & -3 & 5 \\ 8 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -4 & -3 & 5 \\ 8 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sada, iz jednačine

$$X = A^{-1} \cdot B$$

imamo da je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -4 & -3 & 5 \\ 8 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Odavde dobijamo da polazni sistem ima jedinstveno rešenje $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{21}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{9}{10}\right)$.

2. ZADATAK (10 MINUTA)

Kramerovo pravilo

Kramerovim pravilom rešiti sistem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rešenje. Kramerovo pravilo se primenjuje tako što izračunamo determinantu sistema D i determinante koje se dobijaju zamenom odgovarajuće kolone kolonom slobodnih članova.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -68 \neq 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Kako je $D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje. Vrednosti promenljivih su dobijene iz formula $x_i = \frac{D_i}{D}$, za $i \in \{1, 2, 3\}$. Tada je

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-28}{-68}, \frac{-8}{-68}, \frac{8}{-68} \right) = \left(\frac{7}{17}, \frac{2}{17}, \frac{-2}{17} \right).$$

3. ZADATAK (10 MINUTA)

Rešavanje kvadratnog sistema 2×2 , u zavisnosti od datog parametra, primenom Kramerovog pravila.

Rešiti sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcc} (a-1)x & + & (a+1)y & = & 20 \\ 4x & + & 5y & = & a+1 \end{array}$$

zavisno od realnog parametra a .

Rešenje. Rešićemo sistem Kramerovim metodom metodom. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} a-1 & a+1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5(a-1) - 4(a+1) = a - 9.$$

Pored toga je

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & a+1 \\ a+1 & 5 \end{vmatrix} = 20 \cdot 5 - (a+1)^2 = (9-a)(11+a),$$
$$D_y = \begin{vmatrix} a-1 & 20 \\ 4 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1) - 4 \cdot 20 = (a-9)(a+9).$$

Razmotrimo slučajeve $D \neq 0$ i $D = 0$.
Ako je $D \neq 0$, tj, ako je $a \neq 9$, tada je

$$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{(9-a)(11+a)}{a-9}, \frac{(a-9)(a+9)}{a-9}\right) = \big(-(11+a), a+9\big),$$

pa sistem ima jedinstveno rešenje.

Ukoliko je $D = 0$, tj. $a = 9$, sistem ima oblik

$$\begin{aligned} 8x + 10y &= 20 \\ 4x + 5y &= 10 \end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa $\frac{1}{2}$ i njenim dodavanjem drugoj jednačini sistema, sistem postaje

$$\begin{aligned} &8x + 10y = 20 \\ &0 = 0 \end{aligned}$$

odnosno on se svodi na jednu jednačinu sa dve nepoznate $8x + 10y = 20.$ Ako promenljivu $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$proglasimo za slobodnu pormenljivu, tada je $x = \frac{1}{4}(10 - 5\alpha)$. Dakle, ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja

$$\left\{(x,y) = \left(\frac{1}{4}(10-5\alpha), \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. ZADATAK (10 MINUTA)

Rešavanje kvadratnog sistema 3×3 , u zavisnosti od datog parametra, primenom Kramerovog pravila.

Diskutovati i rešiti sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & (a+1)y & + & 3z & = & a \\ 2x & + & y & + & (a-1)z & = & 1 \end{array}$$

Rešenje. Odredimo, najpre, determinantu sistema i determinante promenljivih

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&a+1&3\\2&1&a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&a-2&0\\2&-1&a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-2&0\\-1&a-3\end{vmatrix}=(a-2)(a-3),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a+1&3\\1&1&a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1&3-a\\1&0&a-2\end{vmatrix}=a-2,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&a&3\\2&1&a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&a-3&0\\2&-1&a-3\end{vmatrix}=(a-3)^2,$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&a+1&a\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\3-a&1&a\\1&0&1\end{vmatrix}=-1.$$

Diskusija rešenja:

1. ako je $D\neq 0$, tj. ako je $a\neq 2\wedge a\neq 3$ tada sistem ima jedinstveno rešenje koje glasi

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{a-3},\frac{a-3}{a-2},\frac{-1}{(a-2)(a-3)}\right)$$

2. Za $D=0$, tj. za $a=2\vee a=3$, zbog $D_z\neq 0$ sistem nema rešenja.

5. ZADATAK (10 MINUTA)

Diskusija rešenje kvadratnog sistema, u zavisnosti od datog parametra, primenom Kramerovog pravila.

U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati i kada je to moguće rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x&+&7y&-&mz&=&-1\\ -2x&-&my&+&z&=&m\\ 2x&+&25y&+&(1-4m)z&=&-1\end{array}$$

Rešenje. Odredimo, najpre, determinantu sistema i determinante promenljivih

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -m \\ -2 & -m & 1 \\ 2 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = (2m-1)(m-3),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -m \\ m & -m & 1 \\ -1 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = -6(m-3),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ -2 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1-4m \end{vmatrix} = -(2m-1)(m-3),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & m & 1 \\ 2 & 25 & -1 \end{vmatrix} = -12(m-3).$$

Diskusija.

1) Ako je $m \notin \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$ sistem ima jedinstveno rešenje koje se odredjuje na sledeći način $(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)$. U ovom slučaju je $(x, y, z) = \left(\frac{6}{1-2m}, -1, \frac{12}{1-2m}\right)$.

2) U slučaju da je $m = \frac{1}{2}$ sistem nema rešenje jer je $D_x = 15 \neq 0$.

2) U slučaju da je $m = 3$ imamo da su sve tri determinante promenljivih jednake nuli. Tada Kramerovo pravilo ne daje odgovor, pa se mora primeniti neki drugi metod, tako što se vrednost $m = 3$ vrati u početni sistem. Ako primenimo Gausov metod, početni sistem postaje ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} x + 7y - 3z &= -1 \\ 11y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rešenja, pri čemu je potrebno uvesti jedan parametar (slobodna promenljiva), kako bi se ostale promenljive izrazile preko njega (vezane promenljive). Ako z izaberemo za slobodnu promenljivu, tada je

$$(x, y, z) \in \left\{\left(-\frac{2}{11}\alpha - \frac{18}{11}, \frac{5}{11}\alpha + \frac{1}{11}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

6. ZADATAK (10 MINUTA)

Kramerovo pravilo – homogen sistem

Odrediti vrednost parametra a tako da jednačina ima i netrivijalna rešenja

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & ay & & & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Rešenje. Kako je dati sistem homogen on uvek ima rešenja. Njegovo rešenje je uvek $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i naziva se trivijalno rešenje homogenog sistema. Ono je jedinstveno ako za dati sistem važi $D \neq 0$.

Za dati sistem važi da je vrednost determinante sistema

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 - 9a,$$

dok za determinante promenljivih važi da je $D_x = D_y = D_z = 0$.

U slučaju da je $D = 0$, tada homogen sistem ima beskonačno mnogo rešenja, od kojih je jedno trivijalno rešenje, a ostala su netrivijalna. Dakle, da bi naš sistem ima i netrivijana rešenja mora da je $9 - 9a = 0$, tj. da je $a = 1$.

7. ZADATAK - I DEO (15 MINUTA)

Primena Kroneker Kapelijevog stava u situaciji kada u sistemu postoji parametar.

U zavisnosti od realnog parametra a, naći rešenja sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2, \\ -x & & & + & z & + & t & = & -3, \\ 4x & + & 3y & + & 2z & + & (a+1)t & = & 9. \end{array}$$

Rešenje. Formiraćemo matricu i proširenu matricu sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & (a+1) \end{bmatrix} \text{ i } A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & (a+1) & 9 \end{bmatrix}$$

Ako ih spojimo i primenimo ekvivalentne transformacije na dobijenu matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 4 & 3 & 2 & (a+1) & | & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{12}(1) \\ \sim \\ V_{13}(-4) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -2 & (a-3) & | & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{23}(1) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V_{23}(1) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1) & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz poslednje matrice vidimo da $r(A)$ i $r(A_p)$ zavisi od a tj. razlokovaćemo dva slučaja: $a = 1$ i $a \neq 1$.

7 ZADATAK - II DEO

Diskusija rešenja.

Ako je $a = 1$, tada poslednja matrica postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $r(A) = r(A_p) = 2 < 4$ tada je polazni sistem ekvivalentan sistemu

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 2, \\ & & y & + & 2z & + & 2t & = & -1, \end{array}$$

koji ima beskonačno mnogo rešenja. Da bismo predstavili sva rešenja ovog sistema, proglasićemo z i t za slobodne promenjive i tada imamo

$$\begin{aligned} y &= -2z - 2t - 1, \\ x &= z + t + 3. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$\{(x, y, z, t) = (z + t + 3, -2z - 2t - 1, z, t), \ z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako je $a \neq 1$, tada poslednja matrica postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1) & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $r(A) = r(A_p) = 3 < 4$ tada je polazni sistem ekvivalentan sistemu

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 2, \\ & & y & + & 2z & + & 2t & = & -1, \\ & & & & & & (a-1)t & = & 0, \end{array}$$

koji ima beskonačno mnogo rešenja. Očigledno je iz treće jednačine $t = 0$, pa ovaj sistem postaje

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2, \\ & & y & + & 2z & = & -1, \\ & & & & t & = & 0, \end{array}$$

Da bismo predstavili sva rešenja ovog sistema, proglasićemo z za slobodnu promenjivu i tada imamo

$$\begin{aligned} y &= -2z - 1, \\ x &= z + 3. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$\{(x,y,z,t) = (z+3, -2z-1, z, 0),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

8. ZADATAK - I DEO (20 MINUTA)

Kroneker – Kapelijev stav – određivanje stepenaste matrice.

Primenom Kroneker-Kapelijevog stava rešiti sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 13 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 11 \\ x & + & y & + & z & + & u & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & pu & = & 3 \end{array}$$

u zavisnosti od realnog parametra p.

Rešenje. Najpre, formiramo proširenu matricu sistema

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & p & 3 \end{array}\right],$$

gde podrazumevamo da je matrica sistema označena sa A. Sada primenjujemo elementarne transformacije na proširenu matricu

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & p & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} V_{12}(-2) \\ \sim \\ V_{13}(-1) \\ V_{14}(-2) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -7 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -4 & p-10 & -23 \end{array}\right] \begin{array}{c} V_{23} \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -5 & -7 & -15 \\ 0 & -2 & -4 & p-10 & -23 \end{array}\right] \begin{array}{c} V_{23}(-2) \\ \sim \\ V_{24}(-2) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & -3 \end{array}\right].$$

8. ZADATAK – II DEO

Kroneker – Kapelijev stav – diskusija rešenja.

Kako smo ispod glavne dijagonale napravili sve nule, sada pristupamo rešavanju sistema. Za rešavanje je potrebno uočiti poziciju parametra u poslednjoj matrici, jer će nam od toga zavisiti rang matrice:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p-2} & -3 \end{array}\right]$$

Očigledno da ćemo imati dve mogućnosti, a to su da dozvolimo da parametar p uzme vrednost 2, odnosno da zabranimo da uzme tu vrednost.

1) Ako je $p \neq 2$ iz poslednje matrice vidimo da je $r(A) = r(A|B) = 4,$ što je jednako broju promenljivih sistema, pa sistem ima jedinstveno rešenje. Njega dobijamo tako što iz poslednje matrice formiramo sistem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 5u &= 13 \\ -y - 2z - 4u &= -10 \\ -z + u &= 5 \\ (p-2)u &= -3 \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Iz poslednje jednačine nalazimo koliko iznosi u. Vraćajući ovu vrednost u treću jednačinu nalazimo koliko je z. Vraćajući nađene vrednosti za u i z u drugu jednačinu nalazimo koliko je y i konačno vraćajući sve nađene vrednosti u prvu jednačinu sistema nalazimo vrednost za promenljivu x. Tada polazni sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z, u) = \left\{ \frac{12(1-p)}{p-2}, \frac{20p-22}{p-2}, \frac{7-5p}{p-2}, \frac{-3}{p-2} \right\},\ p \neq 2.$$

2) Ako je $p = 2$, tada poslednja matrica postaje:

$$A|B \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Očigledno $r(A) = 3,$ a $r(A|B) = 4,$ pa polazni sistem nema rešenja.

9. ZADATAK – I DEO (20 MINUTA)

Kroneker – Kapelijev stav slučaj kada se rešava homogen sistem – određivanje stepenaste matrice.

Primenom Kroneker-Kapelijevog stava, rešiti sistem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + mu &= 0 \\ x + 2y + (m+2)z + 2u &= 0 \\ x + (m+1)y + 3z + 2u &= 0 \\ mx + 2y + 3z + 4u &= 0 \end{aligned}$$

u zavisnosti od realnog parametra m.

Rešenje. Kako se radi o homogenom sistemu nema potrebe formirati proširenu matricu sistema, već je dovoljno posmatrati samo matricu sistema, jer kako bi u proširenju bile sve nule, tada one ne bi uticale na rang matrice. Stoga, matrica sistema je

$$A=\begin{bmatrix} & 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & m+2 & 2 \\ 1 & m+1 & 3 & 2 \\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sada treba da odredimo stepenastu matricu:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & m+2 & 2 \\ 1 & m+1 & 3 & 2 \\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{12}(-1) \\ \sim \\ V_{13}(-m) \\ V_{14}(-2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{23} \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{24}(2) \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 3(1-m) & 8-2m-m^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_{34}(3) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix}.$$

9. ZADATAK – II DEO

Kroneker – Kapelijev stav slučaj kada se rešava homogen sistem – diskusija.

Da bismo mogli da diskutujemo sistem, potrebno je najpre, rešiti jednačinu $14-5m-m^2=0$. Njena rešenja su $m_1=2 \vee m_2=-7$.

1. U slučaju da je $m_1 \neq 2$ i $m_2 \neq -7$ imamo da je $r(A)=4$ što je jednako broju promenljivih u sistemu, pa on ima jedinstveno rešenje $(x,y,z,u)=(0,0,0,0),$ jer se radi o homogenom sistemu.

2. U slučaju da je $m_1=2$ ili $m_2=-7$ sistem će imati i netrivijalna rešenja. Njih određujemo u nastavku.

- Za $m=2$, dobijamo

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od poslednje matrice, možemo formirmirati sistem

$$\begin{aligned} x+2y+3z+2u &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0, \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Ako proglasimo u za slobodnu promenljivu, imamo da je $u=t, y=0, z=0,$ i $x=-2t$. Polazni sistem ima beskonačno mnogo rešenja $(x,y,z,u)=(-2t,0,0,t)$ gde je $t\in\mathbb{R}$.

- Za $m=-7$, dobijamo

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Od poslednje matrice, možemo formirmirati sistem

$$\begin{aligned} x+2y+3z-7u &= 0 \\ -8y+9u &= 0 \\ -8z+9u &= 0, \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Ako proglasimo u za slobodnu promenljivu, imamo da je $u=t, z=\frac{9t}{8}, y=\frac{9t}{8}, x=\frac{11t}{8},\ t\in\mathbb{R}$.Polazni sistem ima beskonačno mnogo rešenja $(x,y,z,t)=\left(\frac{11t}{8},\frac{9t}{8},\frac{9t}{8},t\right)$ gde je $t\in\mathbb{R}$.

10. ZADATAK - I DEO (20 MINUTA)

Primena matričnog metoda za nalaženje jedinstvenog rešenja kvadratnog sistema.

Odrediti matričnom metodom kada dati sistem linearnih jednačina ima jedinstveno rešenje

$$\begin{aligned} ax+y+z &= 1, \\ x+ay+z &= 2, \\ x+y+az &= -3. \end{aligned}$$

u zavisnosti od realnog parametra a i odrediti ga.

Rešenje. Imamo da je

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ -3\end{bmatrix}.$$

Sada je

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1\\ a+2 & a & 1\\ a+2 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0\\ 0 & a-1\end{vmatrix}=$$

$$=(a+2)(a-1)^2.$$

Za matricu A postojaće njena invezna matrica pod uslovom da je $\det(A)\neq 0,$ tj. za $a\neq 1$ i $a\neq -2.$

10. ZADATAK - II DEO

Određivanje jedinstvenog rešenja datog sistema.

Sada ćemo odrediti algebarske kofaktore matrice A :

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=1-a,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & a\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-a,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=1-a,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-a,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-a\quad A_{33}=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1.$$

Tada je

$$adj(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2-1 & 1-a & 1-a\\ 1-a & a^2-1 & 1-a\\ 1-a & 1-a & a^2-1\end{bmatrix}=$$

$$(a-1)\begin{bmatrix} a+1 & -1 & -1\\ -1 & a+1 & -1\\ -1 & -1 & a+1\end{bmatrix}.$$

Dobijamo da je

$$A^{-1}=\frac{(a-1)}{(a-1)^2(a+2)}\cdot\begin{bmatrix} a+1 & -1 & -1\\ -1 & a+1 & -1\\ -1 & -1 & a+1\end{bmatrix}$$

Tada je

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \cdot \begin{bmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{bmatrix} a+2 \\ 2(a+2) \\ -3(a+2) \end{bmatrix} = \frac{1}{(a-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, imamo da za $a \neq 1$ i $a \neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje $x = \frac{1}{a-1}$, $y = \frac{2}{a-1}$ i $z = \frac{-3}{a-1}$.

Poglavlje 6

Zadaci za samostalan rad

1. ZADATAK ZA DODATAN RAD - I DEO (30 MINUTA)

Primena Kroneker - Kapelijevog stava na rešavanje sistema u kome se javlja parametar - slučaj kada sistem ima jedinstveno rešenje.

Diskutovati sistem jednačina za sve realne vrednosti parametra a i rešiti ga kada je to moguće

$$\begin{aligned} x+y+az&=1\\ x+ay+z&=1\\ ax+y+z&=-2 \end{aligned}$$

Rešenje. Matrica ovog sistema je

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dok je njegova proširena matrica

$$A|B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & |\ 1\\ 1 & a & 1 & |\ 1\\ a & 1 & 1 & |\ -2 \end{bmatrix}$$

Svedimo proširenu matricu sistema $A|B$ na gornje trougaonu matricu korišćenjem elementarnih transformacija

$$\begin{aligned} A|B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & |\ 1\\ 1 & a & 1 & |\ 1\\ a & 1 & 1 & |\ -2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & |\ 1\\ 0 & a-1 & 1-a & |\ 0\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & |\ -(2+a) \end{bmatrix}\\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & |\ 1\\ 0 & a-1 & 1-a & |\ 0\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & |\ -(2+a) \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & |\ 1\\ 0 & a-1 & 1-a & |\ 0\\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & |\ -(2+a) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sada razlikujemo nekoliko slučajeva

1^* Ako je $(2+a)(1-a) \neq 0,$ tj. $a \neq 1$ i $a \neq -2,$ tada je $r(A) = r(B) = 3,$ a kako sistem ima tri promenljive, tada na osnovu Kroneker-Kapelijevog stava početni sistem ima jedinstveno rešenje. To rešenje tražimo na osnovu poslednje matrice. Na osonvu nje formiramo sistem

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ (a-1)y + (1-a)z &= 0 \\ (2+a)(1-a)z &= -(2+a) \end{aligned}$$

Rešavajući ovaj sistem počev od treće jednačine ka prvoj, dobijamo da je

$$(x,y,z) = \left(-\frac{2}{a-1}, \frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)$$

1. ZADATAK ZA DODATAN RAD - II DEO

Primena Kroneker - Kapelijevog stava na rešavanje sistema u kome se javlja parametar - slučaj kada sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

2^* Ako je $(2+a)(1-a) = 0,$ tada je $a = 1$ ili $a = -2.$ Dakle, ovde imamo dva podslučaja.

$\mathbf{2.1}$ Ako je $a = 1$, tada transformisana matrica $A|B$ postaje

$$A|B \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & |\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\ -3 \end{bmatrix}$$

Odavde se zaključuje da je $r(A) = 1 < 2 = r(A|B),$ pa sistem, u ovom slučaju, nema rešenja.

$\mathbf{2.2}$ U slučaju $a = -2$, transformisana matrica $A|B$ postaje

$$A|B \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & |\ 1 \\ 0 & -3 & 3 & |\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\ 0 \end{bmatrix}$$

Odavde je očigledno da je $r(A) = r(A|B) = 2 < 3,$ pa sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Njih određujemo iz sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Kako poslednji sistem ima tri promenljive, a dve jednačine uvodimo jednu slobodnu promenljivu. Ako proglasimo da je $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R},$ tada je

$$\big\{(x,y,z) = \big(1-2\alpha, \alpha, \alpha\big), \alpha \in \mathbb{R}\big\}.$$

2. ZADATAK ZA DODATAN RAD - I DEO(25 MINUTA)

Gaus - Žordanov postupak

Rešiti sledeći sistem linearnih jednačina Gaus - Žordanovom metodom:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= 2, \\ x + y + az &= -3. \end{aligned}$$

u zavisnosti od realnog parametra a.

Rešenje. Prvo ćemo zameniti mesta prvoj i trećoj jednačini

$$\begin{aligned} x + y + az &= -3, \\ x + ay + z &= 2, \\ ax + y + z &= 1. \end{aligned}$$

I korak: Kako je $a_{11} = 1$, sada
- prva jednačina se množi sa -1 i dodaje drugoj,
- prva jednačina se množi sa $-a$ i dodaje trećoj,

Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & -3, \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & -5, \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 3a+1. \end{array}$$

II korak: Kako je $a_{22} = a - 1$, sada
- drugu jednačinu dodajemo trećoj,
- drugu jednačinu množimo sa $-\frac{1}{a-1}$ i dodajemo prvoj, pri $a - 1 \neq 0$.

Na kraju drugu jednačinu množimo sa $\frac{1}{a-1}$ Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & (a+1)z & = & \frac{-3a-2}{a-1}, \\ & y & -z & = & \frac{5}{a-1}, \\ & & -(a+2)(a-1)z & = & 3(a+2). \end{array}$$

III korak: Kako je $a_{33} = -(a+2)(a-1)$, sada
- treću jednačinu množimo sa $\frac{a+1}{(a+2)(a-1)}$ i dodajemo prvoj, pri $a + 2 \neq 0$,
- treću jednačinu množimo sa $\frac{-1}{(a+2)(a-1)}$ i dodajemo drugoj, pri $a + 2 \neq 0$.

Na kraju treću jednačinu množimo sa $\frac{-1}{(a+2)(a-1)}$. Tada dobijamo sledeći sistem

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{a-1}, \\ y &= \tfrac{2}{a-1}, \\ z &= -\tfrac{3}{a-1}. \end{aligned}$$

Pod pretpostavkom da je $a \neq 1$ i $a \neq -2$ dobili smo jednistveno rešenje, kao i kod matričnog metoda, i to je uređena trojka

$$(x, y, z) = \left\{ \left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, -\frac{3}{a-1} \right) \right\}.$$

Za razliku od matričnog metoda, kod ove metode, možemo odrediti šta se dešava sa rešenjima polaznog sistema kada je $a = 1$ ili $a = -2$.

2. ZADATAK ZA DODATAN RAD - II DEO

Diskusija rešenja kada je $a = 1$ ili $a = -2$.

1° Za $a = -2$ dovoljno je posmatrati poslednji sistem koji smo dobili sređivanjem polaznog, pre zabrane $a \neq -2$. To je sistem

$$\begin{aligned} x + \quad (a+1)z &= \tfrac{-3a-2}{a-1}, \\ y \quad -z &= \tfrac{5}{a-1}, \\ -(a+2)(a-1)z &= 3(a+2). \end{aligned}$$

Stavljajući u njega da je $a = -2$ dobijamo

$$\begin{aligned} x + \quad -z &= \tfrac{-4}{3}, \\ y \quad -z &= -\tfrac{5}{3}, \\ 0 \cdot z &= 0. \end{aligned}$$

Tada, iz treće jednačine poslednjeg sistema zaključujemo da je z proizvoljan realan broj (slobodna promenljiva), da se ostale promenljive x i y mogu izraziti preko z (x i y se tada nazivaju vezane promenljive, jer zavide od z). Iz druge jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y = z + \frac{5}{3}$, a iz prve jednačine imamo da je $x = z + \frac{4}{3}$. Dakle, sistem ima beskonačno mnogo rešenja koje možemo zapisati u obliku

$$\left\{ (x, y, z) = \left(z + \frac{4}{3}, z + \frac{5}{3}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

1° Za $a = 1$ dovoljno je posmatrati poslednji sistem koji smo dobili sređivanjem polaznog, pre zabrane $a \neq 1$. To je sistem

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad az &= -3, \\ (a-1)y + (1-a)z &= -5, \\ (1-a)y + (1-a^2)z &= 3a+1. \end{aligned}$$

Stavljajući u njega da je $a = 1$ dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -3, \\ & & & & 0 & = & -5, \\ & & & & 0 & = & 4, \end{array}$$

što nas dovodi do zaključka da je u ovom slučaju polazni sistem nemoguć - nema rešenja.

Ovo smo mogli uočiti i da smo u polazni sistem vratili vrednost $a = 1$, jer bi tada dobili

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 2, \\ x + y + z &= -3, \end{aligned}$$

što je nemoguće, jer tri ista broja u zbiru daju tri različite vrednosti.

ZADACI ZA VEŽBU

Zadaci koje studenti treba samostalno da provežbaju

Zadatak. Rešiti sistem matričnom metodom

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 12, \\ 2x & + & y & + & z & = & 4, \\ & - & y & + & 2z & = & 7. \end{array}$$

Rezultat. $(1, -1, 3)$.

Zadatak. Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0, \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0, \\ x & - & 4y & & & = & 0. \end{array}$$

Rezultat. $\{(t, 4t, -5t), t \in R\}$.

Zadatak. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i kada je to moguće rešiti sledeći sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & (a+1)y & + & z & = & 7, \\ x & + & y & + & z & = & 6, \\ ax & + & 4y & + & z & = & 5. \end{array}$$

Rezultat. Za $a \neq 4$ i $a \neq -3$ sistem ima jednistveno rešenje $\left(-\frac{1}{a-4}, \frac{1}{a-4}, 6\right)$. Za $a = 4$ sistem je nemoguć, dok za $a = -3$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $\left\{\left(\frac{19-3t}{7}, \frac{23-4t}{7}, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.

Zadatak.U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i kada je to moguće rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 6y & - & 9z & - & 20u & = & -11, \\ 3x & + & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 3, \\ 2x & + & 3y & + & 6z & + & 8u & = & 5, \\ 4x & + & y & + & 4z & + & au & = & 2. \end{array}$$

Rezultat. Za $a = 0$ sistem je nemoguć, dok za $a \neq 0$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja $\left\{ \left(\frac{4-3ta-a}{5a}, \frac{9a-8ta-16}{5a}, t, \frac{1}{a} \right), t \in R \right\}$.

Vreme izrade: 1. 15 minuta; 2. 15 minuta; 20 minuta; 30 minuta

Zaključak za lekciju 10

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Matrični metod, Kramerovo pravilo, Kroneker – Kapelijev stav.

Sistem linearnih jednačina predstavlja veoma važan matematički model koji se sreće veoma često u primenama preko koga treba naći rešenja po određenim veličina (nepoznatim) koje ga čine.

Ovde su izučavane razne metode za određivanje rešenja takvog sistema. Ukazano je na prednosti i mane određenih metoda, kao i na to u kojim slučajevima koju od obrađenih metoda treba primeniti.

Literatura (nastavni materijal):

Dr Rale Nikolić, Elektronski materijali predavanja za učenje
P. M. Miličić, M. P. Ušćumlić, Elementi više matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1984. godina.
Mališa Žižović, Matematika, ICIM, Kruševac, 1998. godina.
Dragoš M. Cvetković, Ivan B. Lacković, Milan J. Merkle, Zoran S. Radosavljević, Slobodan K. Simić, Petar M. Vasić, Matematika 1 – Algebra, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006. godina.
Miličić M.P., Uščumlić P. M. Zbirka zadataka iz više matematike, Nauka, Beograd, 1993. godina.