UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Dvodimenzionalne slučajne promenljive

Lekcija 04

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

MA273 - OSNOVE VEROVATNOĆE I STATISTIKE

Lekcija 04

DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

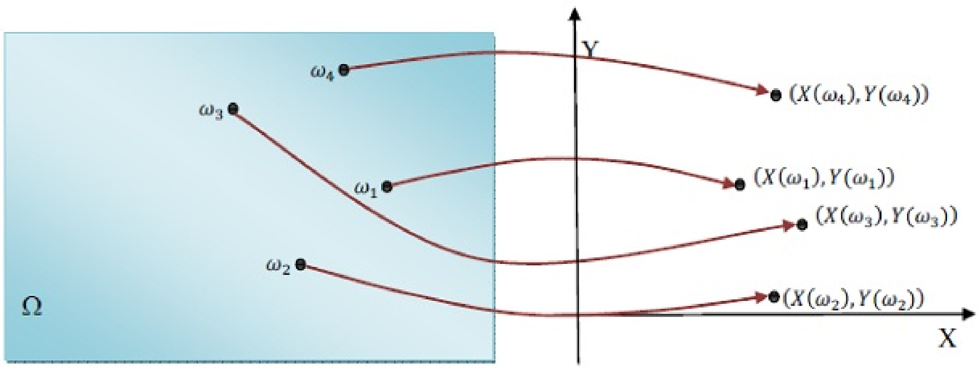
Uvod

UVOD

Elementarni ishod ω često ne vezujemo samo jednu numeričku vrednost, već se takav elementarni ishod vezujemo dve ili više numeričkih karakteristika.

Vrlo često smo u situaciji da za elementarni ishod ω ne vezujemo samo jednu numeričku vrednost, već da za svaki takav elementarni ishod vezujemo dve ili više numeričkih karakteristika. Ovde ćemo detaljnije razmotriti slučaj sa dve numeričke karakteristike. U tom slučaju govorimo o dvodimenzionalnoj slučajnoj promenljivoj. U ovoj lekciji ćemo obraditi dva tipa takvih slučajnih promenljivih: dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog tipa i dvodimenzionalne slučajne promenljive neprekidnog tipa, kao i osobine u vezi sa njima.

Neka su $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ dve slučajne promenljive definisane nad istim skupom svih mogućih ishoda Ω. Uredjeni par (X, Y) se naziva dvodimenzionalna slučajna promenljiva (videti sliku).



Slika-5.1: Dvodimenzionalna slučajna promenljiva jednom elementarnom ishodu iz skupa Ω dodeljuje dve numeričke vrednosti [Izvor: Autor].

Primer. U kutiji se nalaze 6 belih kuglica koje teže po 3 grama i 4 crne kuglice koje teže po 5 grama. Neka se eksperiment sastoji u tome da se iz kutije na slučajan način, bez vraćanja, izvlače 2 kuglice. Tada možemo definisati dve sledeće dve slučajne promenljive: X koja predstavlja broj izvučenih belih kuglica i Y koja predstavlja težinu izvučenih kuglica. Na ovaj način smo definisali dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (X,Y). Očigledno je $R_X=\{0,1,2\}$ i $R_Y=\{6,8,10\}$.

Očigledno su slučajne promenljive X i Y iz prethodnog primera diskretnog tipa, pa je i dobijena dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) takvog tipa. Može se postaviti pitanje, na primer, kolika je verovatnoća da izvučemo jednu belu i jednu crnu kuglicu kuglice mase 10g, ili mase 8 g, ili mase 6g. O tome ćemo govoriti u nastavku.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 1

Diskretan tip

ZAKON RASPODELA

Dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa uzima vrednosti iz konačnog ili beskonačno prebrojivog skupa tačaka u ravni.

Ako je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) diskretnog tipa , tada postoji diskretan (prebrojiv) skup tačaka u ravni $R_{X,Y}=\{(x_i,y_j)|i,j=1,2,3,\ldots\}$, takav da $P\{(X,Y)\in R_{X,Y}\}=1$.

Zakon raspodele verovatnoća određen je verovatnoćama da slučajna tačka (X,Y) "padne" u tačku (x_i,y_j), $i,j=1,2,3,\ldots$ tj. $p(x_i,y_j)=P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})$, $i,j=1,2,3,\ldots$. Obično se takva raspodela zadaje tabelarno na sledeći način

$Y\diagdown X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	$\cdots$	$p(x_i,y_1)$	$\cdots$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	$\cdots$	$p(x_i,y_2)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$p(x_1,y_j)$	$p(x_2,y_j)$	$\cdots$	$p(x_i,y_j)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Napomenimo da je

$$\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)=1.$$

Funkcija raspodele $F_{X,Y}$ dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog tipa data je sa

$$F_{X,Y}(S)=\sum_{i:x_i\in S}\sum_{j:y_j\in S}p(x_i,y_j)$$

gde je $S\subseteq\mathbb{R}^2$, takvo da je $(X,Y)^{-1}\in\mathcal{F}$.

PRIMER

Određivanje raspodele za slučajnu promenljivu diskretnog tipa.

Primer 1. Dat je zakon raspodele dvodimenzionalneslučajne promenljive (X,Y) sledećom tabelom

$Y \diagdown X$	0	1	2	3
1	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
3	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	p

Odrediti parametar p, kao i $F_{X,Y}(1,2;2,5)$.

Rešenje. Kako za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu važi da je $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$, tada je

$$\frac{3}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{7}{40} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + 0 + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + p = 1,$$

odakle dobijamo da je $p = \frac{3}{20}$. Važi da je

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1,2\,,2,5) &= P(X < 1,2, Y < 2,5) = \\ &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = \\ &= \frac{3}{40} + \frac{7}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Poglavlje 2

Marginalne raspodele nezavisnost DSPDT

DEFINICIJA MARGINALNE RASPODELA

Marginalna raspodela predstavlja raspodelu samo jedne od slučajnih promenljivih koje se javljaju u dvodimenzionalnoj slučajnoj promenljivoj.

Neka je slučajna promenljiva (X,Y) data svojom raspodelom $p(x_i,y_j),\ i,j=1,2,3,\ldots$ Može nas interesovati samo raspodela jedne slučajne promenljive, recimo X. Tada je

$$\{X=x_i\}=\{X=x_i\}\cap\{Y=y_1\}+\{X=x_i\}\cap\{Y=y_2\}+\ldots,$$

za $i=1,2,3,\ldots$ Tada imamo da je

$$\begin{aligned}p(x_i)=P\{X=x_i\}&=P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_1\})+P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_2\})+\ldots\\&=p(x_i,y_1)+p(x_i,y_2)+\ldots,\end{aligned}$$

za $i=1,2,3,\ldots,$ tj.

$$p(x_i)=\sum_j p(x_i,y_j),$$

za $i=1,2,3,\ldots$ Verovatnoća $p(x_i),\ i=1,2,3,\ldots$ naziva se marginalna raspodela za slučajnu promenljivu X.

Na sličan način, možemo odrediti marginalnu raspodelu za Y

$$\begin{aligned}q(y_j)=P\{Y=y_j\}&=P(\{Y=y_j\}\cap\{X=x_1\})+P(\{Y=y_j\}\cap\{X=x_2\})+\ldots\\&=p(x_1,y_j)+p(x_2,y_j)+\ldots\end{aligned}$$

za $j=1,2,3,\ldots,$ tj.

$$q(y_j)=\sum_i p(x_i,y_j),$$

za $j=1,2,3,\ldots$ Verovatnoća $q(y_j),\ j=1,2,3,\ldots$ naziva se marginalna raspodela za slučajnu promenljivu Y.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: marginalna raspodela.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER

Određivanje marginalne raspodele.

Primer 2. Odredimo iz Primera 1 marginalne raspodele za slučajne promenljive X i Y.

Rešenje. Marginalne raspodele dobijamo sabiranjem odgovarajućih kolona,odnosna vrsta. Tada imamo da je:

$Y \diagdown X$	0	1	2	3	
1	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{40}$
2	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{13}{40}$
3	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{40}$	1

Dakle,

$$P(X=0)=\frac{3}{40}+\frac{7}{40}+0=\frac{1}{4}, \qquad P(X=1)=\frac{1}{40}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{7}{40},$$
$$P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}+\frac{1}{5}=\frac{7}{20}, \qquad P(X=3)=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{3}{20}=\frac{9}{40}.$$

Dakle, raspodela slučajne promenljive $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{40} & \frac{7}{20} & \frac{9}{40} \end{pmatrix}$.

Na sličan način se može odrediti da je $Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{11}{40} & \frac{13}{20} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

POJAM NEZAVISNOSTI SLUČAJNE PROMENLJIVE

Nezavisnost dve slučajne promenljive diskretnog tipa se određuje iz odgovarajućih marginalnih raspodela.

Neka je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) diskretnog tipa. Slučajne promenljive X i Y su nezavisne slučajne promenljive ako i samo ako

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot q(y_j),$$

za $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

U suprotnom kažemo da su X i Y zavisne slučajne promenljive.

Primer 3. Ako želimo da proverimo da li su slučajne promenljive X i Y nezavisne, tada koristeći dobijeno u Primeru 2 možemo uočiti da je

$$P(X = 0) = 14, P(Y = 1) = \frac{11}{40}, P(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{40}.$$

Tada je očigledno

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \neq P(X = 0, Y = 1),$$

Što znači da su slučajne promenljive X i Y zavisne.

PRIMER - I DEO

Određivanje neophodnih verovatnoća kako bi se formirala raspodela.

Primer 4. Iz špila od 52 karte na slučajan način se biraju dve karte

a) sa vraćanjem,

b) bez vraćanja.

Ako je X broj izvučenih dama, a Y broj izvučenih trefova, naći zakon raspodele verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) i ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y. Takođe, odrediti $P\{X < \frac{1}{2}, Y > 1\}$.

Rešenje. a) Sada imamo da je $R_X = \{0, 1, 2\}$, jer u dva izvlačenja možemo da izvučemo nijednu damu, jednu ili najviše dve. Slično, imamo da je $R_Y = \{0, 1, 2\}$. Sada, treba odrediti raspodelu za dvodimezionalnu slučajnu promenljivu (X, Y). Kako je

$$R_{(X,Y)} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

to podrazumeva da treba odrediti verovatnoće sledećih slučajeva:

$$P(X = 0, Y = 0),\ P(X = 0, Y = 1),\ P(X = 0, Y = 2),\ P(X = 1, Y = 0),$$
$$P(X = 1, Y = 1),$$
$$P(X = 1, Y = 2),\ P(X = 2, Y = 0),\ P(X = 2, Y = 1),\ P(X = 2, Y = 2).$$

Prva od ovih verovatnoća podrazumeva slučaj da ne bude izvučena nijedna dama i nijedna karta znaka tref. Kako u špilu imamo 13 karata boje tref (među kojima je i dama tref) i još tri dame drugih znakova, tada je broj karata koji nije ni tref ni dama jednak 36 $(52-16)$, pa imamo da je

$$P(X=0,Y=0)=\frac{36}{52}\cdot\frac{36}{52}=\left(\frac{36}{52}\right)^2,$$

s obzirom da se izvlačenje vrši sa vraćanjem karata u špil.

PRIMER - II DEO

Tabelarno predstavljanje raspodele slučajne promenljive.

Dalje, druga od ovih verovatnoća podrazumeva dva slučaja. Prvi slučaj podrazumeva da u prvom izvlačenju bude izvučena karta koja nije niti dama niti tref (verovatnoća je $\frac{36}{52}$), a da u drugom izvlačenju bude izvučena karta tref (verovatnoća je $\frac{13}{52}$ – imamo 12 karata tref znaka (bez dame koja ne sme da bude izvučena)). Drugi slučaj podrazumeva da ovo isto bude izvučeno,samo obrnutim redosledom. Tada imamo da je

$$P(X=0,Y=1)=2\cdot\frac{36}{52}\cdot\frac{12}{52}.$$

Analogno i za ostale slučajeve dobijamo zakon raspodele verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) koji dat u sledećoj tablici.

X \ Y	0	1	2	
0	$\left(\frac{36}{52}\right)^2$	$2\cdot\frac{36}{52}\cdot\frac{12}{52}$	$\left(\frac{12}{52}\right)^2$	$\left(\frac{48}{52}\right)^2$
1	$2\cdot\frac{3}{52}\cdot\frac{36}{52}$	$\frac{2\cdot1\cdot36+2\cdot3\cdot12}{52^2}$	$2\cdot\frac{1}{52}\cdot\frac{12}{52}$	$2\cdot\frac{4}{52}\cdot\frac{48}{52}$
2	$\left(\frac{3}{52}\right)^2$	$2\cdot\frac{1}{52}\cdot\frac{3}{52}$	$\left(\frac{1}{52}\right)^2$	$\left(\frac{4}{52}\right)^2$
	$\left(\frac{39}{52}\right)^2$	$2\cdot\frac{39}{52}\cdot\frac{13}{52}$	$\left(\frac{13}{52}\right)^2$	**1**

Slika 2.1 Određivanje zakona raspodele, kao i marginalnih raspodela - slučaj kada se karte vraćaju u špil [Izvor: Autor].

PRIMER - III DEO

Određivanje marginalnih raspodela

Sabirajući verovatnoće iz prethodne tablice u prvoj vrsti nalazimo da je $P\{X=0\}=\left(\frac{48}{52}\right)^2$. Slično, imamo da je $P\{X=1\}=2\cdot\frac{4}{52}\cdot\frac{48}{52}$, kao i da je $P\{X=2\}=\left(\frac{4}{52}\right)^2$. Marginalna raspodela slučajne promenljive X, tada glasi

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \left(\frac{48}{52}\right)^2 & 2\cdot\frac{48}{52}\cdot\frac{4}{52} & \left(\frac{4}{52}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Slično, marginalna raspodela slučajne promenljive Y tada glasi

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \left(\frac{39}{52}\right)^2 & 2 \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{52} & \left(\frac{13}{52}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Ostalo je još da proverimo da li su ove slučajne promenljive nezavisne. Ako su nezavisne tada važi

$$P\{X = i\} \cdot P\{Y = j\} = P\{X = i, Y = j\},$$

za sve $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Ovo znači da bi ove dve slučajne promenljive bile nezavisne mora da važi

$$\begin{aligned}
P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} &= P\{X = 0, Y = 0\}, \\
P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 1\} &= P\{X = 0, Y = 1\}, \\
P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 2\} &= P\{X = 0, Y = 2\}, \\
P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 0\} &= P\{X = 1, Y = 0\}, \\
P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\} &= P\{X = 1, Y = 1\}, \\
P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 2\} &= P\{X = 1, Y = 2\}, \\
P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 0\} &= P\{X = 2, Y = 0\}, \\
P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 1\} &= P\{X = 2, Y = 1\}, \\
P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 2\} &= P\{X = 2, Y = 2\}.
\end{aligned}$$

PRIMER - IV DEO

Određivanje nezavisnosti slučajnih promenljivih diskretnog tipa.

Provera se vrši tako što se posmatra odgovarajuća marginalna raspodela za slučajnu promenljivu X i odgovarajuća marginalna raspodela za slučajnu promenljivu Y, kao i odgovarajuća verovatnoća za dvodimezionalnu slučajnu promenljivu (X, Y). U slučaju prve provere imamo da je

$$P\{X = 0\} = \left(\frac{48}{52}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2, P\{Y = 0\} = \left(\frac{39}{52}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

pa je

$$P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{36}{52}\right)^2.$$

S druge strane, proveravamo $P\{X = 0, Y = 0\}$ i imamo da je

$$P\{X = 0, Y = 0\} = \left(\frac{36}{52}\right)^2.$$

Tada zaključujemo da je

$$P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\}.$$

Potrebno je izvršiti i provere za preostalih osam slučajeva. Napomenimo, da ako bar za jednu od ovih provera dobijemo da nisu ispunjene, tada se dalja provera prekida i tada konstatujemo da posmatrane slučajne promenljive nisu nezavisne (tj. zavisne su). Neposrednom proverom preostalih slučajeve se može videti da su oni ispunjeni, pa su slučajne promenljive X i Y nezavisne.

Na kraju važi da je

$$P\{X < \frac{1}{2}, Y > 1\} = P\{X = 0, Y = 2\} = \left(\frac{12}{52}\right)^2.$$

PRIMER - V DEO

Formiranje zakona raspodele – eksperiment bez vraćanja karata.

b) Sada se izvlačenje karata vrši bez vraćanja karata, pa će odgovarajuće verovatnoće biti izračunate na drugačiji način nego u delu pod a). U ovom slučaju ćemo koristiti kombinacije bez ponavljanja, dok će logika o broju karata koji uzimamo u obzir biti ista kao i u delu pod a). Tada je

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	$\frac{\binom{36}{2}}{\binom{52}{2}}$	$\frac{\binom{36}{1}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{52}{2}}$	$\frac{\binom{12}{2}}{\binom{52}{2}}$	$\frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}$
1	$\frac{\binom{36}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{52}{2}}$	$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{36}{1}+\binom{12}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{52}{2}}$	$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{52}{2}}$	$2\cdot\frac{4}{52}\cdot\frac{48}{51}$
2	$\frac{\binom{36}{2}}{\binom{52}{2}}$	$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{52}{2}}$	0	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}$
	$\frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}}$	$2\cdot\frac{13}{52}\cdot\frac{39}{52}$	$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$	1

PRIMER - VI DEO

Određivanje marginalnih raspodela i provera nezavisnosti – eksperiment bez vraćanja karata.

Marginalna raspodela slučajne promenljive X se računa sabiranjem po odgovarajućim vrstama verovatnoće (za svako stanje posebno). One se mogu računati i ponovnim određivanjem verovatnoća da posmatrana slučajna promenljiva dospe u posmatrano stanje. Na primer, ako nas interesuje verovatnoća $P\{X = 0\}$, tada se zapravo pitamo kolika je verovatnoća da nijedanput ne izvučemo damu kada dve karte izvačimo iz špila. Ona očigledno iznosi $\frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}$. U svakom slučaju imamo da je

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} & 2 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} & \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \end{pmatrix}.$$

Slično, marginalna raspodela slučajne promenljive Y, tada glasi

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} & 2 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} & \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \end{pmatrix}.$$

Međutim, u ovom slučaju slučajne promenljive promenljivu X i Y nisu nezavisne, jer, na primer, važi da je

$$P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 2\} \neq P\{X = 2, Y = 2\}, \text{ tj. } \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \neq 0.$$

Konačno, imamo da je

$$P\{X < \frac{1}{2}, Y > 1\} = P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{52}{2}}.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Objašnjenje primera - marginalne raspodele i nezavisnost.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Funkcije DSPNT

POJAM FUNKCIJE OD DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENJIVE

Definisanje nove slučajne promenljive od postojeće (X, Y), predstavlja određivanja raspodele za slučajnu promenljivu $Z = f(X, Y)$.

Kao i kod jednodimenzionalnih slučajnih promenljivih može se postaviti problem da za datu slučajnu promenljivu (X, Y) koja je zadata svojom raspodelom ili funkcijom gustine treba odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = f(X, Y)$, gde je $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

Na primer, $Z = X + Y$, $Z = X \cdot Y$, $Z = \max\{X, Y\}$ i dr. Slučajnu promenljivu Z treba shvatiti tako da svakom $\omega \in \Omega$ odgovaraju dva broja $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ koji kada se stave kao argument u funkciju f daju broj $f(X(\omega), Y(\omega))$.

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, tj. $f(x, y) = z$, tada slučajnu promenljivu (X, Y) transformišemo u jednu slučajnu promenljivu $Z = f(X, Y)$, čiji je skup vrednosti $R_Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$, tj. $f : R_{X,Y} \mapsto R_Z$, a odgovarajuće verovatnoće

$$p(z_k) = P\left(Z = z_k\right) = \sum_{\substack{i,\, j \\ z_k = f(x_i, y_j)}} p(x_i, y_j).$$

PRIMER

Definisanje nove slučajne promenljive diskretnog tipa.

Primer. Data je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) raspodelom verovatnoća

$X \diagdown Y$	0	1	2	3
1	$0,1$	$0,05$	$0,05$	$0,15$
2	$0,2$	$0,05$	$0,3$	$0,1$

Odrediti $Z = X \cdot Y$.

Rešenje. Kako je $R_X = \{1, 2\}$ i $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$, tada je $R_Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$. Imamo da je

$$P(Z=0)=P(X\cdot Y=0)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)=0,1+0,2=0,3,$$
$$P(Z=1)=P(X\cdot Y=1)=P(X=1,Y=1)=0,05,$$
$$P(Z=2)=P(X\cdot Y=2)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0,05+0,05=0,1,$$
$$P(Z=3)=P(X\cdot Y=3)=P(X=1,Y=3)=0,15,$$
$$P(Z=4)=P(X\cdot Y=4)=P(X=2,Y=2)=0,3,$$
$$P(Z=6)=P(X\cdot Y=6)=P(X=2,Y=3)=0,1.$$

Tada je

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0,3 & 0,05 & 0,1 & 0,15 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Poglavlje 4

Pokazna vežba

1. ZADATAK - I DEO (30 MINUTA)

Određivanje parametra tako da vrednosti u datoj tabeli predstavljaju zakon raspodele za (X,Y). Određivanje vrednosti za funkciju raspodele.

Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) data je zakonom raspodele

$X \diagdown Y$	2	4
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	p
1	0	$\frac{1}{3}$

a) Odrediti parametar p.

b) Izračunati $P(X \leq 0, Y \leq 2)$, $P(X < 0, Y < 4)$, $P(X = 0, Y \leq 4)$ i $P(X \geq 0, Y = 4)$.

c) Izračunati $F_{X,Y}(1,1,2,5)$, $F_{X,Y}(0,5,5,5)$, $F_{X,Y}(0,5,3)$ i $F_{X,Y}(4,5)$.

d) Naći marginalne raspodele za slučajne promenljive X i Y. Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

Rešenje. a) Važi da je $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+p+\frac{1}{3}=1$, odakle sledi da je $p=\frac{1}{6}$.
b) Tražene verovatnoće su

$$P(X \leq 0, Y \leq 2) = P(X=-1, Y=2) + P(X=0, Y=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P(X < 0, Y < 4) = P(X=-1, Y=2) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 0, Y < 4) = P(X=0, Y=2) = \frac{1}{8},$$

$$P(X \geq 0, Y = 4) = P(X=0, Y=4) + P(X=1, Y=4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

c) Važi da je

$$F_{X,Y}(1,1,2.5) = P(X < 1,1, Y < 2,5) = P(X = \ -1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2) \\ + P(X = 1, Y = 2) = P(Y = 2) = \frac{3}{8},$$

$$F_{X,Y}(0,5,5,5) = P(X < 0,5, Y < 5,5) = P(X = \ -1, Y = 2) + P(X = \ -1, Y = \\ 4) + P(X = 0, Y = 2) + +P(X = 0, Y = 4) = P(X = \ -1) + P(X = 0) = \\ \frac{3}{8} + \frac{7}{24} = \frac{2}{3},$$

$$F_{X,Y}(0,5,3) = P(X < 0,5, Y < 3) = P(X = \ -1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2) = \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$F_{X,Y}(4,5) = P(X < 4, Y < 5) = P(X = \ -1, Y = 2) + P(X = \ -1, Y = 4) \\ + P(X = 0, Y = 2) + +P(X = 0, Y = 4) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 4) = \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = 1.$$

1. ZADATAK - II DEO

Određivanje marginalne verovatnoće i provera zavisnosti slučajnih promenljivih.

d) Skupovi vrednosti za slučajne promenljive X i Y su redom $R_X = \{-1, 0, 1\}$ i $R_Y = \{2, 4\}$. Marginalne verovatnoće su

$$P(X = -1) = P(X = -1, Y = 2) + P(X = -1, Y = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 0, Y = 4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24},$$

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 4) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(Y = 2) = P(X = -1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ + 0 = \frac{3}{8},$$

$$P(Y = 4) = P(X = -1, Y = 4) + P(X = 0, Y = 4) + P(X = 1, Y = 4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \\ + \frac{1}{3} = \frac{5}{8},$$

tako da su tražene marginalne raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{24} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad Y : \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Kako je

$$P(X=1,Y=2)=0\neq\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=P(X=1)\cdot P(Y=2)$$

dobijamo da su slučajne promenljive X i Y zavisne.

2. ZADATAK (10 MINUTA)

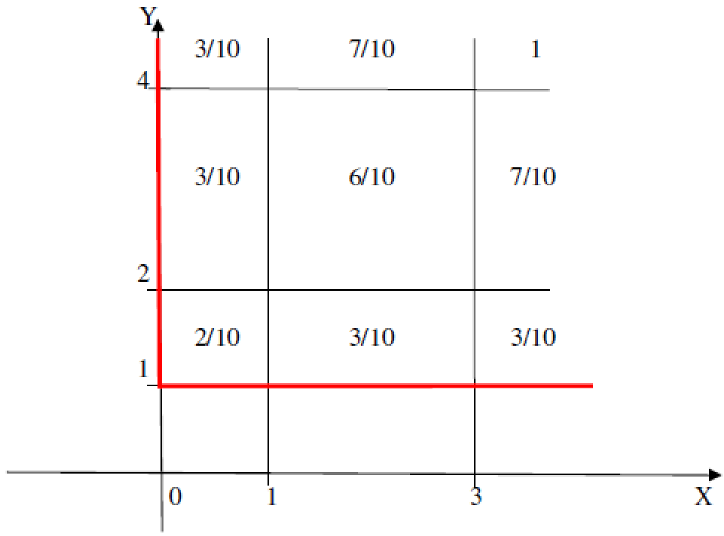
Određivanje funkcije raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa.

Data je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) raspodelom verovatnoća

$X \diagdown Y$	1	2	4	
0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
3	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

Naći $F(x,y)$.

Rešenje.



Slika 4.1 Funkcija raspodele [Izvor: Autor].

Sa prethodne slike se može videti da ima ukupno 10 slučajeva i dobijamo da je:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \quad y \leq 1 \\ \frac{2}{10} & 0 < x \leq 1, \quad 1 < y \leq 2 \\ \frac{3}{10} & 1 < x \leq 3, \quad 1 < y \leq 2, \quad x > 3, \quad 1 < y \leq 2, \quad 0 < x \leq 1, \quad 2 < y \leq 4 \\ \frac{6}{10} & 1 < x \leq 3, \quad 2 < y \leq 4 \\ \frac{7}{10} & x > 3, \quad 2 < y \leq 4, \quad 1 < x \leq 3, \quad y > 4 \\ 1 & x > 3, \quad y > 4 \end{cases}$$

3. ZADATAK – I DEO (20 MINUTA)

Određivanje potrebnih verovatnoća kako bi se definisala raspodela slučajne promenljive diskretnog tipa.

U kutiji se nalaze 6 belih kuglica koje teže po 3 grama i 4 crne kuglice koje teže po 5 grama. Iz kutije se na slučajan način ,bez vraćanja, izvlače 2 kuglice. Naći raspodelu dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y), gde je X – slučajna promenljiva koja predstavlja broj izvučenih kuglica, a Y – slučajna promenljiva koja predstavlja težinu izvučenih kuglica, kao i marginalne raspodele. Da li su date slučajne proemnljive nezavisne?

Rešenje. Ovde se očigledno radi o tome da je (X, Y) diskretna slučajna promenljiva. Važi da je $R_X = \{0, 1, 2\}$ (može biti izvučena nijedna, jedna ili dve bele kuglice), a $R_Y = \{6, 8, 10\}$ (6 grama ako su izvučene dve bele kuglice, 8 grama ako su izvučena jedna bela i jedna crna kuglica i 10 grama ako su izvučene dve crne kuglice). Tada je

$R_{X,Y} = \{\{0, 6\}, \{0, 8\}, \{0, 10\}, \{1, 6\}, \{1, 8\}, \{1, 10\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}\}$.

Medjutim, mnogi od ovih slučajeva predstavljaju nemoguće dogadjaje. Na primer, nemoguće je da budu izvučene dve crne kuglice, a da njihova težina bude 6 grama i sl. Zato je:

$P(X = 0, Y = 6) = P(X = 0, Y = 8) = 0,$

$P(X = 1, Y = 6) = P(X = 1, Y = 10) = 0,$

$P(X = 2, Y = 8) = P(X = 2, Y = 10) = 0$

$P(X = 0, Y = 10) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{2}{15}, \qquad P(X = 1, Y = 8) = 2 \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{15},$,

$P(X = 2, Y = 6) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{5}{15}$

3. ZADATAK – II DEO

Provera da li su slučajne promenljive X i Y nezavisne.

Raspodela je data sa

$X \diagdown Y$	6	8	10	
0	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	0	$\frac{8}{15}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

Tada su marginalne raspodele date na sledeći način:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{15} & \frac{5}{15} \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ \frac{5}{15} & \frac{8}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix},$$

Ove slučajne promenljive nisu nezavisne jer npr. važi:

$$P(X = 0, Y = 6) = 0 \neq \frac{10}{225} = \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} = \quad P(X = 0) \cdot P(Y = 6).$$

4. ZADATAK – I DEO (25 MINUTA)

Određivanje skupa svih mogućih ishoda posmatranog eksperimenta.

Tri kuglice se na slučajan način razmeštaju u kutije A, B i C. Ako je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj kuglica u kutija A, a Y slučajna promenljiva koja predstavlja broj praznih kutija, odrediti zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y), kao i marginalne raspodele.

Rešenje. Posmatrana slučajna promenljiva (X, Y) je očigledno diskretnog tipa. Uočimo, najpre, sve moguće razmeštaje kuglica po kutijama:

A	B	C
3	0	0

A	B	C
0	3	0

A	B	C
0	0	3

A	B	C
2	0	1

A	B	C
2	1	0

A	B	C
0	2	1

A	B	C
1	2	0

A	B	C
1	0	2

A	B	C
0	1	2

A	B	C
1	1	1

Slika 4.2 Grafički prikaz problema [Izvor: Autor].

Odavde možemo zaključiti da je $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ tj. da u kutiji A može biti nijedna, jedna, dve ili tri kuglice. Na sličan način možemo da zaključimo da je $R_Y = \{0, 1, 2\}$, tj. da u svim kutijama budu kuglice, da jedna kutija bude dez kuglica ili da dve kutije budu bez kuglica. Tada imamo 12 dogadjaja tj.

$R_{X,\,Y} = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 0\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}\}.$

Neki od ovih dogadjaja su nemogući. Na primer, da u kutiji A ne bude kuglica, a da nijedna od kutija ne bude prazna, tako da je:

$P(X = 0, Y = 0) = 0.$

4. ZADATAK – II DEO

Određivanje neophodnih verovatnoća za zadavanje raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa.

Na sličan način možemo zaključiti da su i sledeći događaji nemogući

$$P(X=1,Y=2)=P(X=2,Y=0)=P(X=2,Y=2)=P(X=3,Y=0)$$
$$=(X=3,Y=0)=0.$$

Dalje, imamo da je $P(X=0,Y=1)=\frac{2}{10}$, tj. od svih mogućih razmeštaja kojih smo videli da imamo 10, treba izabrati one koji u kutiji A nemaju kuglice (na prvom mestu stoji nula) i imamo samo jednu praznu kutiju (imamo tačno jednu nulu u zapisu u vezi sa brojem kuglica u kutiji). Takvi događaja ima dva i to su

A	B	C
0	1	2

A	B	C
0	2	1

Slično logikom možemo zaključiti da je

$$P(X=0,Y=2)=\frac{2}{10},\quad P(X=1,Y=0)=\frac{1}{10},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{2}{10},$$
$$P(X=2,Y=1)=\frac{2}{1}0,\quad P(X=3,Y=1)=\frac{1}{10}.$$

Tada je

$X\diagdown Y$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
2	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

Marginalna raspodela za slučajnu promenljivu X, odnosno slučajnu promenljivu Y je:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Zadaci za samostalan rad studenata.

Zadatak. Data je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) raspodelom verovatnoća

X/Y	2	4
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	p
1	0	$\frac{1}{3}$

(a) Odrediti parametar p.
(b) Izračunati $P(X \leq 0, Y \leq 2)$, $P(X < 0, Y < 4)$, $P(X = 0, Y \leq 4)$ i $P(X \leq 0, Y = 4)$.
(c) Izračunati $F_{X,Y}(1,1,2,5)$, $F_{X,Y}(0,5,5,5)$, $F_{X,Y}(0,5,3)$ i $F_{X,Y}(4,5)$.
(d) Naći marginalne raspodele za slučajne promenljive X i Y. Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

Zadatak. U kutiji se nalazi 13 kuglica oznacenih brojevima 1, 2, . . . , 13. Na slučajan način je izvučena jedna kuglica. Slučajna promenljiva X uzima vrednost jedan, ako je izvučen paran broj, a vrednost nula ako je izvučen neparan broj. Slučajna promenljiva Y predstavlja ostatak pri deljenju izvučenog broja sa tri.

(a) Naći zakon raspodele za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (X, Y).
(b) Naći marginalne raspodele i ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y .
(c) Izračunati $F_{X,Y}(0;1,5)$, $F_{X,Y}(1,2;1,4)$, $F_{X,Y}(0,5;4)$ i $F_{X,Y}(5,6)$.

Zadatak. Iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 2 plave i 1 crvena kuglica biraju se na na slučajan način istovremeno dve kuglice. Neka je X broj belih kuglica, a Y broj crvenih kuglica među izabranim kuglicama. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y). Odrediti verovatnoće $P(X \leq Y)$ i P(X+Y ≥1).$

Vreme izrade: 1. 15 minuta; 2. 15 minuta; 3. 15 minuta

Zaključak

DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog i neprekidnog tipa, formiranje novih slučajnih promenljivih

Da bi se izbegla obaveza poznavanja svakog eksperimenta za koji se vezuju verovatnoće, uobičajeno je da se verovatnoće vezuje za pojam koji svi poznaju i koriste – za realne brojeve. Na ovaj način se račun sa verovatnoćama je znatno olakšan.

Dvodimenzionalna slučajna promenljiva je funkcija definisana nad skupom elementarnih događaja čije vrednosti određuju tačke u ravni koje su korespondirane slučajnim događajima.

U ovoj lekciji smo se upoznali sa dva tipa dvodimenzionalnih slučajnih promenljivih: diskretnim i neprekidnim. Svakako, mogu se definisati i slučajne promenljive koje predstavljaju mešavinu ova dva tipa slučajnih promenljivih.

Takođe, od poznatih slučajnih promenljivih se mogu nove slučajne promenljive, kao njihove funkcije.
<p />

LITERATURA:
M. Rajović, D. Stanojević, Verovatnoća i statistika – teorija i primeri, Akademska misao, Beograd, 2006. god.
Glišić Z., Peruničić P., Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
Dr Svetozar Vukadinović, Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Četvrto izdanje, Privredni pregled, 1973.
Vera Lazarević, Marija Đukić, Inženjerska matematika, Tehnički fakultet, 2010.