Simulado da P3: Cálculo II

Monitor Vinícius Gregorio

Formulário

Derivação Implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

Regra da Cadeia para paramétricas e derivadas parciais:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Equação do Plano Tangente em (x_0, y_0, z_0):

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

1. (15pts) Dada a função $z = f(x, y)$, onde:

$$z = x^2 \sin(xy) + e^{y/x}$$

Encontre as derivadas parciais de segunda ordem:

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. (10pts) Uma superfície é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = C$:

$$x^2y + y^2z + z^2x = 11$$

Sabendo que z é uma função de x e y, ou seja, $z = z(x, y)$, encontre o valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(1, 2, 2)$.

3. (10pts) Seja z uma função de x e y dada por:

$$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

As variáveis x e y, por sua vez, são parametrizadas por t e v da seguinte forma:

$$x(t,v) = t\cos(v) \quad \text{e} \quad y(t,v) = t\sin(v)$$

Usando a Regra da Cadeia, encontre as expressões para:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

4. (15pts) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = xe^{xy}$ no ponto onde $x = 1$ e $y = 1$.

5. (25pts) Considere a função $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$ e a região compacta R definida pelo triângulo com vértices nos pontos $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ e $C = (0, 4)$.

   a) Encontre todos os pontos candidatos a máximo e mínimo absoluto de $f(x, y)$ na região R (pontos críticos no interior e na fronteira).

   b) Utilize a matriz Hessiana para classificar o(s) ponto(s) crítico(s) localizados no interior de R.

6. (25pts) Encontre os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2y = 0$.

   a) Utilize o método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos candidatos a máximo e mínimo.

   b) Analisando os valores da função f nos pontos encontrados no item anterior, conclua quais são os pontos de máximo e mínimo globais sobre a restrição.