Gabarito - Simulado da P3: Cálculo II

Resolução da Questão 1

Dada $z = x^2 \sin(xy) + e^{y/x}$.

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Primeiro, calculamos a primeira derivada em relação a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin(xy)) + \frac{\partial}{\partial x}(e^{y/x}) \\
&= (2x\sin(xy) + x^2\cos(xy)\cdot y) + (e^{y/x}\cdot(-y/x^2)) \\
&= 2x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy) - \frac{y}{x^2}e^{y/x}
\end{aligned}$$

Agora, derivamos novamente em relação a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy) - \frac{y}{x^2}e^{y/x}\right) \\
&= [2\sin(xy) + 2x\cos(xy)y] + [2xy\cos(xy) + x^2 y(-\sin(xy)y)] - [-\frac{2y}{x^3}e^{y/x} + \frac{y}{x^2}e^{y/x}(-\frac{y}{x^2})] \\
&= 2\sin(xy) + 4xy\cos(xy) - x^2y^2\sin(xy) + \frac{2y}{x^3}e^{y/x} - \frac{y^2}{x^4}e^{y/x}
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Primeiro, a primeira derivada em relação a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \sin(xy)) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{y/x}) \\
&= x^2(\cos(xy)\cdot x) + e^{y/x}\cdot(1/x) \\
&= x^3\cos(xy) + \frac{1}{x}e^{y/x}
\end{aligned}$$

Derivando novamente em relação a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3\cos(xy) + \frac{1}{x}e^{y/x}\right) \\
&= x^3(-\sin(xy)\cdot x) + \frac{1}{x}(e^{y/x}\cdot\frac{1}{x}) \\
&= -x^4\sin(xy) + \frac{1}{x^2}e^{y/x}
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Derivamos $\frac{\partial z}{\partial y}$ em relação a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos(xy) + \frac{1}{x}e^{y/x}\right) \\
&= [3x^2 \cos(xy) + x^3(-\sin(xy)y)] + [-\frac{1}{x^2}e^{y/x} + \frac{1}{x}e^{y/x}(-\frac{y}{x^2})] \\
&= 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy) - \frac{1}{x^2}e^{y/x} - \frac{y}{x^3}e^{y/x}
\end{aligned}$$

Resolução da Questão 2

A superfície é $F(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x - 11 = 0$. O ponto é $(1, 2, 2)$. Usamos a fórmula $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$.

- $F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + z^2$
- $F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = y^2 + 2zx$

Avaliando as derivadas no ponto $(1, 2, 2)$:

- $F_x(1, 2, 2) = 2(1)(2) + (2)^2 = 4 + 4 = 8$
- $F_z(1, 2, 2) = (2)^2 + 2(2)(1) = 4 + 4 = 8$

Portanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{8} = -1$$

Resolução da Questão 3

Temos $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, com $x(t, v) = t\cos(v)$ e $y(t, v) = t\sin(v)$. Primeiro, as derivadas parciais de z:

- $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Note que $x^2 + y^2 = (t\cos v)^2 + (t\sin v)^2 = t^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = t^2$. Agora, as derivadas das parametrizações:

- $\frac{\partial x}{\partial t} = \cos(v)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \sin(v)$
- $\frac{\partial x}{\partial v} = -t\sin(v)$, $\frac{\partial y}{\partial v} = t\cos(v)$

a) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)(\cos v) + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)(\sin v) \\
&= \left(-\frac{t\sin v}{t^2}\right)(\cos v) + \left(\frac{t\cos v}{t^2}\right)(\sin v) \\
&= -\frac{\sin v\cos v}{t} + \frac{\cos v\sin v}{t} = 0
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)(-t\sin v) + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)(t\cos v) \\
&= \left(-\frac{t\sin v}{t^2}\right)(-t\sin v) + \left(\frac{t\cos v}{t^2}\right)(t\cos v) \\
&= \frac{t^2\sin^2 v}{t^2} + \frac{t^2\cos^2 v}{t^2} = \sin^2 v + \cos^2 v = 1
\end{aligned}$$

Resolução da Questão 4

A superfície é $z = f(x, y) = xe^{xy}$. O ponto é dado por $x_0 = 1, y_0 = 1$.

- $z_0 = f(1, 1) = 1 \cdot e^{(1)(1)} = e$. O ponto de tangência é $P_0 = (1, 1, e)$.
- $f_x = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y = e^{xy}(1 + xy)$.
- $f_y = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x \cdot e^{xy} \cdot x = x^2 e^{xy}$.

Avaliando as derivadas em $(1, 1)$:

- $f_x(1, 1) = e^1(1 + 1 \cdot 1) = 2e$.
- $f_y(1, 1) = (1)^2 e^1 = e$.

A equação do plano tangente é $z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$:

$$\begin{gathered}
z - e = 2e(x - 1) + e(y - 1) \\
z - e = 2ex - 2e + ey - e \\
2ex + ey - z - 2e = 0
\end{gathered}$$

Resolução da Questão 5

A função é:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$$

e a região R é o triângulo com vértices $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(0, 4)$.

a) Pontos Candidatos

1. Interior da região:
Buscamos os pontos críticos resolvendo o sistema $\nabla f = \vec{0}$.

$$f_x = 4x - y \quad \text{e} \quad f_y = 2y - x - 7$$

Do sistema:

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \Rightarrow y = 4x \\ 2y - x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(4x) - x = 7 \Rightarrow 8x - x = 7 \Rightarrow x = 1, \ y = 4$$

O ponto crítico é $(1, 4)$. Verificamos se está dentro da região triangular:
- A hipotenusa da região é a reta $x + y = 4$. - No ponto $(1, 4)$, temos $1 + 4 = 5 > 4$, ou seja, o ponto **está fora da região**.
Portanto, não há pontos críticos no **interior** da região.
2. Fronteiras da região:
Vamos analisar as 3 bordas do triângulo:
Lado 1 – Segmento entre $A(0, 0)$ e $B(4, 0)$: eixo x, com $y = 0$

$$f(x, 0) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Ponto: } (0, 0)$$

Lado 2 – Segmento entre $A(0, 0)$ e $C(0, 4)$: eixo y, com $x = 0$

$$f(0, y) = y^2 - 7y \Rightarrow f'(y) = 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = 3.5 \Rightarrow \text{Ponto: } (0, 3.5)$$

Lado 3 – Segmento entre $B(4, 0)$ e $C(0, 4)$: reta $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$
Substituímos $y = 4 - x$ na função $f(x, y)$:

$$f(x, 4 - x) = 2x^2 + (4 - x)^2 - x(4 - x) - 7(4 - x)$$

Vamos expandir com cuidado:

- $(4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$
- $x(4 - x) = 4x - x^2$
- $7(4 - x) = 28 - 7x$

Substituindo tudo:

$$f(x, 4 - x) = 2x^2 + (16 - 8x + x^2) - (4x - x^2) - (28 - 7x)$$

Agrupando:

$$= 2x^2 + 16 - 8x + x^2 - 4x + x^2 - 28 + 7x$$

Juntando termos semelhantes:

$$= (2x^2 + x^2 + x^2) + (-8x - 4x + 7x) + (16 - 28) = 4x^2 - 5x - 12$$

Derivando:

$$f'(x) = 8x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{8} \Rightarrow y = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8} \Rightarrow \text{Ponto: } \left(\frac{5}{8}, \frac{27}{8}\right)$$

Pontos candidatos finais:

- $A = (0, 0)$
- $B = (4, 0)$
- $C = (0, 4)$
- $P_1 = (0, 3.5)$
- $P_2 = \left(\frac{5}{8}, \frac{27}{8}\right)$

Avaliação da função em cada ponto:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \\
f(4,0) &= 2(16) = 32 \\
f(0,4) &= 16 - 28 = -12 \\
f(0,3.5) &= (3.5)^2 - 7(3.5) = 12.25 - 24.5 = -12.25 \\
f\left(\frac{5}{8}, \frac{27}{8}\right) &= 4\left(\frac{25}{64}\right) - 5\left(\frac{5}{8}\right) - 12 = \frac{100}{64} - \frac{25}{8} - 12 \\
&= 1.5625 - 3.125 - 12 = -13.5625
\end{aligned}$$

Conclusão:

- **Mínimo absoluto:** $f \approx -13{,}5625$ em $\left(\frac{5}{8}, \frac{27}{8}\right)$
- **Máximo absoluto:** $f = 32$ em $(4, 0)$

b) Classificação Hessiana

Como não há pontos críticos no **interior** da região R, o teste da matriz Hessiana para pontos de mínimo/máximo local não se aplica neste problema.

Resolução da Questão 6

Otimizar $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ com a restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2y = 0$.

a) Multiplicadores de Lagrange

O sistema é $\nabla f = \lambda \nabla g$:

- $f_x = 2x$, $f_y = 4y$
- $g_x = 2x$, $g_y = 2y - 2$

O sistema de equações é:

$$(1) \quad 2x = \lambda(2x) \Rightarrow 2x(1 - \lambda) = 0$$
$$(2) \quad 4y = \lambda(2y - 2)$$
$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Da equação (1), temos dois casos: $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

- **Caso 1:** $x = 0$. Substituindo em (3): $0^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0$. Isso nos dá duas soluções para y: $y = 0$ e $y = 2$. Os pontos candidatos são $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (0, 2)$.
- **Caso 2:** $\lambda = 1$. Substituindo em (2): $4y = 1(2y - 2) \Rightarrow 4y = 2y - 2 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$. Agora substituindo $y = -1$ em (3): $x^2 + (-1)^2 - 2(-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$. Não há solução real para x neste caso.

Portanto, os únicos pontos candidatos são $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (0, 2)$.

b) Conclusão

Avaliamos a função f nos pontos candidatos:

- $f(0, 0) = (0)^2 + 2(0)^2 = 0$
- $f(0, 2) = (0)^2 + 2(2)^2 = 8$

Comparando os valores:

- O **valor mínimo** de f sobre a restrição é 0, que ocorre no ponto $(0, 0)$.
- O **valor máximo** de f sobre a restrição é 8, que ocorre no ponto $(0, 2)$.