Cálculo Diferencial e Integral II
CM202-BG
Prova 1 - 11/09/2025
Professor: Diego Otero

Resolução dos exercícios

---

1. (16 pts.) Considere $f(x,y) = \frac{6x^2+8y^2}{2x^2+3y^2+6}$. Descreva o conjunto de nível $f(x,y) = 2$ e calcule a inclinação da reta tangente no ponto $(\sqrt{2}, 2)$.

Resposta: Uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt{6}$. A inclinação é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução:

Parte 1: Descrição do conjunto de nível
O conjunto de nível $f(x,y) = 2$ é o conjunto de todos os pontos (x,y) que satisfazem a equação:

$$\frac{6x^2+8y^2}{2x^2+3y^2+6} = 2$$

Multiplicando ambos os lados por $2x^2+3y^2+6$, obtemos:

$$6x^2+8y^2 = 2(2x^2+3y^2+6)$$
$$6x^2+8y^2 = 4x^2+6y^2+12$$

Agora, vamos isolar os termos com x e y no lado esquerdo:

$$(6x^2-4x^2)+(8y^2-6y^2) = 12$$
$$2x^2+2y^2 = 12$$

Dividindo toda a equação por 2:

$$x^2+y^2 = 6$$

Esta é a equação de uma **circunferência com centro na origem (0,0) e raio** $r = \sqrt{6}$.

Parte 2: Inclinação da reta tangente
A inclinação da reta tangente à curva de nível pode ser encontrada usando diferenciação implícita na equação da curva que encontramos, $x^2+y^2 = 6$. Derivamos ambos os lados em relação a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(6)$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora, isolamos $\frac{dy}{dx}$, que representa a inclinação da reta tangente:

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Finalmente, calculamos a inclinação no ponto específico $(\sqrt{2}, 2)$, substituindo $x = \sqrt{2}$ e $y = 2$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, **a inclinação da reta tangente no ponto** $(\sqrt{2}, 2)$ **é** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (16 pts.) Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$, caso exista. Caso não exista, justifique.

Resposta: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)} = 1.$

Resolução:

A artimanha é dividir tanto o numerador quanto o denominador pela expressão $x^2 + y^2$ da seguinte maneira:

$$\frac{x^3 + \sin(x^2 + y^2)}{y^4 + \sin(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\frac{y^4+\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\frac{y^4}{x^2+y^2} + \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}$$

Agora, vamos analisar o limite de cada termo separadamente quando $(x, y) \to (0, 0)$.

- **Primeiro termo do numerador:** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

  O termo $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitado, pois $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, o que implica $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Como $x \to 0$, o produto de algo que vai a zero por um termo limitado é zero. Logo, o limite é 0.

- **Primeiro termo do denominador:** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cdot \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

  Pelo mesmo motivo, $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitado entre 0 e 1. Como $y^2 \to 0$, o limite do produto é 0.

- **Termos com seno:** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ Fazendo a substituição $u = x^2 + y^2$, notamos que, quando $(x, y) \to (0, 0)$, temos $u \to 0$. O limite se torna o limite fundamental trigonométrico:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Substituindo os valores dos limites encontrados de volta na expressão principal:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\frac{y^4}{x^2+y^2} + \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

Portanto, o limite existe e é igual a 1.

3. (12 pts.) Sendo $f(x, y) = \ln(2x + 3y + \sin^3(x^2y))$, calcule $\nabla f(3, 0)$.

Resposta: $\nabla f(3, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Resolução:

O vetor gradiente é dado por $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. A função é da forma $f(x, y) = \ln(u)$, onde $u = 2x + 3y + \sin^3(x^2y)$. Sabemos que a derivada do logaritmo natural é $\frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u}$. Aplicando a Regra da Cadeia, as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Não é necessário calcular a forma geral completa das derivadas, pois podemos avaliar cada termo no ponto $(3, 0)$, o que simplifica o processo.

Primeiro, avaliamos o argumento da função e do seno no ponto $(3, 0)$:

$$x^2y = (3)^2(0) = 0$$

Isso implica que $\sin(x^2y) = \sin(0) = 0$. Agora, calculamos o valor de u no ponto:

$$u(3, 0) = 2(3) + 3(0) + \sin^3(0) = 6 + 0 + 0 = 6$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + 3y + (\sin(x^2y))^3\right) = 2 + 3(\sin(x^2y))^2 \cdot \cos(x^2y) \cdot (2xy)$$

Avaliando em $(3, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(3, 0) = 2 + 3(\sin(0))^2 \cdot \cos(0) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 0) = 2 + 3(0)^2 \cdot 1 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$$

Portanto, a componente x do gradiente é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 0) = \frac{1}{u(3, 0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(3, 0) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + 3y + (\sin(x^2y))^3\right) = 3 + 3(\sin(x^2y))^2 \cdot \cos(x^2y) \cdot (x^2)$$

Avaliando em $(3, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(3, 0) = 3 + 3(\sin(0))^2 \cdot \cos(0) \cdot (3^2) = 3 + 3(0)^2 \cdot 1 \cdot 9 = 3 + 0 = 3$$

Portanto, a componente y do gradiente é:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, 0) = \frac{1}{u(3, 0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(3, 0) = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

Juntando as componentes, o vetor gradiente é:

$$\nabla f(3, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

4. (20 pts.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, satisfazendo $D_{(1,-2)}f(0,0) = 3$ e $D_{(-3,2)}f(0,0) = 4$, com $D_{\vec{v}}f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a,b)$ para $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Calcule $D_{(1,-6)}f(0,0)$.

Resposta: $D_{(1,-6)}f(0,0) = 16$.

Resolução:

Como a função f é diferenciável, a derivada direcional $D_{\vec{v}}f(a,b)$ pode ser calculada pelo produto escalar entre o vetor gradiente e o vetor de direção: $D_{\vec{v}}f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{v}$. Uma propriedade importante que decorre disso é que a derivada direcional é **linear** em relação ao vetor de direção $\vec{v}$.

Vamos nomear os vetores de direção:

$$\vec{v_1} = (1,-2) \quad , \quad \vec{v_2} = (-3,2) \quad , \quad \vec{v_3} = (1,-6)$$

A estratégia é expressar o vetor $\vec{v_3}$ como uma combinação linear dos vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, cujas derivadas direcionais nós conhecemos.

$$\vec{v_3} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$$

$$(1,-6) = c_1(1,-2) + c_2(-3,2)$$

Isso nos leva ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 1 \\ -2c_1 + 2c_2 = -6 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema por escalonamento, usando a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

O primeiro passo é zerar o elemento abaixo do pivô da primeira coluna. Para isso, somamos 2 vezes a primeira linha à segunda linha ($L_2 \to L_2 + 2L_1$):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Agora, simplificamos a segunda linha dividindo-a por -4 ($L_2 \to -\frac{1}{4}L_2$):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Da segunda linha, já temos o resultado $c_2 = 1$. Para encontrar c_1, somamos 3 vezes a segunda linha à primeira ($L_1 \to L_1 + 3L_2$):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Isso nos dá $c_1 = 4$ e $c_2 = 1$. Portanto, a combinação linear é $\vec{v_3} = 4\vec{v_1} + 1\vec{v_2}$.

Usando a propriedade da linearidade da derivada direcional:

$$D_{\vec{v_3}}f(0,0) = D_{(4\vec{v_1}+\vec{v_2})}f(0,0) = 4 \cdot D_{\vec{v_1}}f(0,0) + 1 \cdot D_{\vec{v_2}}f(0,0)$$

Agora, substituímos os valores dados no enunciado:

$$D_{(1,-6)}f(0,0) = 4 \cdot (3) + 1 \cdot (4)$$

$$D_{(1,-6)}f(0,0) = 12 + 4 = 16$$

O que confirma a resposta.

5. (16 pts.) Seja $f(x,y) = x^2y - xy^2$. Usando a diferencial de f no ponto $(2,3)$, estime $f(2.04, 2.97)$.

Resposta: $f(2.04, 2.97) \approx -5.64$.

Resolução:

A aproximação linear (ou diferencial) de uma função $f(x,y)$ em um ponto (a,b) é dada pela fórmula:

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Neste problema, temos:

- A função: $f(x,y) = x^2y - xy^2$
- O ponto de aproximação: $(a,b) = (2,3)$
- O ponto a ser estimado: $(x,y) = (2.04, 2.97)$

Vamos calcular cada termo da fórmula.

1. Variações em x e y:

$$\Delta x = x - a = 2.04 - 2 = 0.04$$

$$\Delta y = y - b = 2.97 - 3 = -0.03$$

2. Valor da função no ponto $(2,3)$:

$$f(2,3) = (2)^2(3) - (2)(3)^2 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 12 - 18 = -6$$

3. Derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - xy^2) = 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - xy^2) = x^2 - 2xy$$

4. Valor das derivadas parciais no ponto $(2,3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2(2)(3) - (3)^2 = 12 - 9 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = (2)^2 - 2(2)(3) = 4 - 12 = -8$$

5. Montando a aproximação: Substituindo todos os valores na fórmula:

$$f(2.04, 2.97) \approx f(2,3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\Delta y$$

$$f(2.04, 2.97) \approx -6 + (3)(0.04) + (-8)(-0.03)$$

$$f(2.04, 2.97) \approx -6 + 0.12 + 0.24$$

$$f(2.04, 2.97) \approx -6 + 0.36$$

$$f(2.04, 2.97) \approx -5.64$$

A estimativa encontrada confere com a resposta.

6. (20 pts.) Considere a função $h(t) = f(\cos(2t) - (1-2t)^3, e^{2t} + 4t)$, com $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Suponha que a inclinação da reta tangente ao gráfico de h no ponto $t = 0$ seja igual a -2. Sabendo que $f_y(0,1) = 3f_x(0,1)$, determine $\nabla f(0,1)$.

Resposta: $\nabla f(0,1) = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{4}\right)$.

Resolução:

A inclinação da reta tangente ao gráfico de h é dada pela sua derivada, $h'(t)$. A informação do enunciado nos diz que $h'(0) = -2$. A função $h(t)$ é uma composição da forma $h(t) = f(x(t), y(t))$, onde:

$$x(t) = \cos(2t) - (1-2t)^3 \quad \text{e} \quad y(t) = e^{2t} + 4t$$

Para encontrar $h'(t)$, devemos usar a Regra da Cadeia para funções de várias variáveis:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

Precisamos avaliar essa expressão em $t = 0$.

1. Ponto de avaliação: Primeiro, determinamos o ponto (x, y) no qual a função f é avaliada quando $t = 0$:

$$x(0) = \cos(0) - (1-0)^3 = 1 - 1 = 0$$
$$y(0) = e^0 + 4(0) = 1 + 0 = 1$$

Portanto, para $t = 0$, o gradiente de f é avaliado no ponto $(0, 1)$.

2. Derivadas de $x(t)$ e $y(t)$: Agora, calculamos as derivadas de $x(t)$ e $y(t)$ em relação a t:

$$x'(t) = -2\sin(2t) - 3(1-2t)^2(-2) = -2\sin(2t) + 6(1-2t)^2$$
$$y'(t) = 2e^{2t} + 4$$

Avaliando essas derivadas em $t = 0$:

$$x'(0) = -2\sin(0) + 6(1-0)^2 = 0 + 6 = 6$$
$$y'(0) = 2e^0 + 4 = 2 + 4 = 6$$

3. Montando o sistema de equações: Substituímos os valores encontrados na equação da Regra da Cadeia para $t = 0$:

$$h'(0) = f_x(x(0), y(0)) \cdot x'(0) + f_y(x(0), y(0)) \cdot y'(0)$$
$$-2 = f_x(0,1) \cdot 6 + f_y(0,1) \cdot 6$$

Dividindo a equação por 2, obtemos nossa primeira equação:

$$-1 = 3f_x(0,1) + 3f_y(0,1) \quad \text{(Eq. 1)}$$

O enunciado nos fornece a segunda equação:

$$f_y(0,1) = 3f_x(0,1) \quad \text{(Eq. 2)}$$

4. Resolvendo o sistema: Substituímos a Eq. 2 na Eq. 1:

$$-1 = 3f_x(0,1) + 3(3f_x(0,1))$$
$$-1 = 3f_x(0,1) + 9f_x(0,1)$$
$$-1 = 12f_x(0,1) \implies f_x(0,1) = -\frac{1}{12}$$

Agora, usamos a Eq. 2 para encontrar $f_y(0,1)$:

$$f_y(0,1) = 3\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Com os valores das derivadas parciais, podemos montar o vetor gradiente:

$$\nabla f(0,1) = (f_x(0,1), f_y(0,1)) = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{4}\right)$$