$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

CASO 1: $\Delta = 0$

então $ax^2+bx+c = a(X - X_0)^2$

onde X_0 é raiz de $p(X) = ax^2+b.x+c$

→ é UM VALOR NÚMERICO

$$\int \frac{1}{a(X-X_0)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(X-X_0)^2}\,dX$$

$1: \Delta = 0$

$$ax^2+bx+c = a(X-X_0)^2$$

X_0 é raiz de $p(X) = ax^2+bx+c$

$\to$ É UM VALOR NUMÉRICO

$$\int \frac{dx}{(X-X_0)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(X-X_0)^2}\,dx$$

$$\to u = X - X_0$$

$$du = dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{a}\int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{u}\right) + K \longrightarrow = \frac{-1}{a(X-X_0)} + K$$

CASO 2: $\Delta > 0$

Então $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

onde x_1 e x_2 são raízes de

$p(x) = ax^2+bx+c$

$$= \int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int($$

$$\frac{1}{(x-x_1)(}$$

$$1 =$$

$$1 = x$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} dx \rightarrow \text{FRAÇÕES PARCIAIS}$$

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

$$1 = A(x-x_2) + B(x-x_1)$$

$$1 = x(A+B) + (-Ax_2 - Bx_1)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \rightarrow A=-B \\ -AX_2-BX_1=1 \end{cases}$$

Substituindo

$$-AX_2+AX_1=1$$

$$A(X_1-X_2)=1$$

$$A=\frac{1}{X_1-X_2}, \quad B=\frac{-1}{X_1-X_2}$$

$$=\frac{1}{a}\int($$

$$\frac{1}{(X-X_1)}$$

$$1=$$

$$1=$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx = \frac{1}{a}\int\left[\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)} - \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_2)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x_1-x_2)}\left[\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\int \frac{dx}{x-x_1} - \int \frac{dx}{x-x_2}\right] = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\overbrace{\ln(x-x_1) - \ln(x-x_2)}^{=\ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)}\right] + K$$

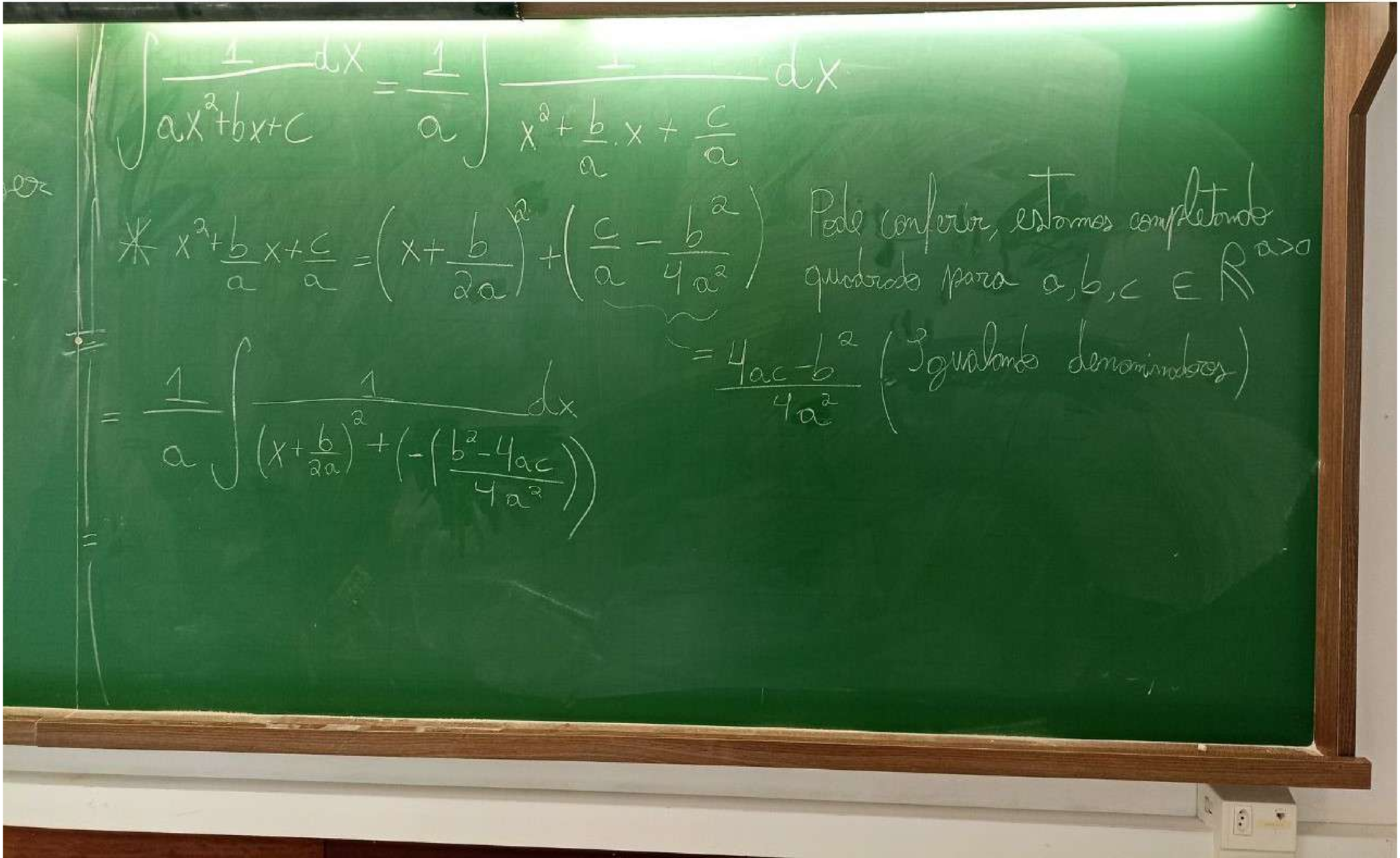
$$=$$

Finalmente temos que:

$$\int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}\,dx$$

$$= \frac{\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|}{a(x_1-x_2)} + K$$

Caso 3: $\Delta < 0$. Nesse caso, não é possível fatorar $ax^2 + bx + c$ em função de suas raízes. Por isso, vamos completar quadrados!



Para facilitar as contas, como $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}\, dx$$

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad du = dx$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}\, du$$

$$t = \frac{u}{\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)}, \quad dt = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}} \cdot du, \quad t^2 \cdot \frac{-\Delta}{4a^2} = u^2$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\frac{-\Delta}{4a^2}\left(t^2+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \cdot dt$$

$$= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a^2} \cdot \frac{4a^2}{-\Delta} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \arctan(t) + K$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)2a}{\sqrt{-\Delta}}\right) + K$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-b^2+4ac}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-b^2+4ac}}\right) + K$$

$=$