Cálculo Diferencial e Integral II
CM202-BG
Prova 2 - 16/10/2025
Professor: Diego Otero

Resolução dos exercícios

---

1. (20 pts.) Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 2y^4 + \frac{x^2}{9} + 4xy - 7$.

Resposta: Sela: (0, 0), mínimos locais: $(-54, 3)$ e $(54, -3)$, máximos locais: não há.

Resolução:

Encontrando os pontos críticos
Os pontos críticos (concorrentes a pontos mínimos, máximos e de sela) de uma função são os pontos onde o gradiente $\nabla f(x, y)$ é igual ao vetor nulo.
Calculando as derivadas parciais: $f(x, y) = 2y^4 + \frac{x^2}{9} + 4xy - 7$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{9} + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 + 4x$$

Agora, montamos o sistema de equações igualando as derivadas a zero:

$$\begin{cases} \frac{2x}{9} + 4y = 0 \quad \text{(Eq. 1)} \\ 8y^3 + 4x = 0 \quad \text{(Eq. 2)} \end{cases}$$

Da Equação 1, vamos isolar x:

$$\frac{2x}{9} = -4y$$

$$2x = -36y \implies x = -18y$$

Agora, substituímos essa expressão para x na Equação 2:

$$8y^3 + 4(-18y) = 0$$

$$8y^3 - 72y = 0$$

Fatorando $8y$:

$$8y(y^2 - 9) = 0$$

Isso nos dá três possibilidades para y:

- $8y = 0 \implies y = 0$
- $y^2 - 9 = 0 \implies y^2 = 9 \implies y = \pm 3$

Agora, encontramos os valores de x correspondentes para cada valor de y usando a relação $x = -18y$:

- Se $y = 0$, então $x = -18(0) = 0$. Ponto crítico: **(0, 0)**.
- Se $y = 3$, então $x = -18(3) = -54$. Ponto crítico: **(-54, 3)**.
- Se $y = -3$, então $x = -18(-3) = 54$. Ponto crítico: **(54, -3)**.

Classificando os pontos críticos
Para classificar os pontos críticos, usamos o Teste da Segunda Derivada. Precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem par montar a matriz Hessiana $H(x, y)$.
As derivadas de segunda ordem são:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{9} + 4y\right) = \frac{2}{9}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(8y^3 + 4x) = 24y^2$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{9} + 4y\right) = 4$$

O det(H(x,y)) é dado por $det(H(x, y)) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$:

$$det(H(x, y)) = \left(\frac{2}{9}\right)(24y^2) - (4)^2 = \frac{16}{3}y^2 - 16$$

Agora, avaliamos $det(H(x, y))$ e f_{xx} em cada ponto crítico:

- **Ponto (0, 0):**
$$det(H(0, 0)) = \frac{16}{3}(0)^2 - 16 = -16$$
Como $det(H(0, 0)) = -16 < 0$, o ponto **(0, 0) é um ponto de sela**.

- **Ponto (54, -3):**
$$det(H(54, -3)) = \frac{16}{3}(-3)^2 - 16 = \frac{16}{3}(9) - 16 = 48 - 16 = 32$$
Como $det(H(54, -3)) = 32 > 0$ e $f_{xx} = \frac{2}{9} > 0$, o ponto **(54, -3) é um mínimo local**.

- **Ponto (-54, 3):**
$$det(H(-54, 3)) = \frac{16}{3}(3)^2 - 16 = \frac{16}{3}(9) - 16 = 48 - 16 = 32$$
Como $det(H(-54, 3)) = 32 > 0$ e $f_{xx} = \frac{2}{9} > 0$, o ponto **(-54, 3) é um mínimo local**.

A função não possui máximos locais.

2. (15 pts.) Para pontos próximos de $(x, y) = (0, 0)$, a expressão $\arctan(x^2 + y + 1) - \frac{\pi}{4}e^{x-2y} = 0$ define y como função de x de maneira implícita. Calcule $y'(0)$.

Resposta: $y'(0) = \frac{\pi}{2(1+\pi)}$.

Resolução:

Para resolver este problema, utilizamos a fórmula da derivação implícita para uma função $F(x, y) = 0$, que define y como função de x. A derivada de y em relação a x é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Neste caso, nossa função é $F(x, y) = \arctan(x^2 + y + 1) - \frac{\pi}{4}e^{x-2y} = 0$.

Cálculo das derivadas parciais

Primeiro, calculamos a derivada parcial em relação a x, F_x. Lembrando que a derivada em relação a x de $\arctan(u)$ é $\frac{u'}{1+u^2}$ e a derivada de e^u é $e^u \cdot u'$.

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan(x^2 + y + 1) - \frac{\pi}{4}e^{x-2y}\right)$$

$$F_x = \frac{1}{1 + (x^2 + y + 1)^2} \cdot (2x) - \frac{\pi}{4}e^{x-2y} \cdot (1)$$

$$F_x = \frac{2x}{1 + (x^2 + y + 1)^2} - \frac{\pi}{4}e^{x-2y}$$

Agora, calculamos a derivada parcial em relação a y, F_y.

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan(x^2 + y + 1) - \frac{\pi}{4}e^{x-2y}\right)$$

$$F_y = \frac{1}{1 + (x^2 + y + 1)^2} \cdot (1) - \frac{\pi}{4}e^{x-2y} \cdot (-2)$$

$$F_y = \frac{1}{1 + (x^2 + y + 1)^2} + \frac{2\pi}{4}e^{x-2y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y + 1)^2} + \frac{\pi}{2}e^{x-2y}$$

Avaliando as derivadas no ponto (0, 0)

Queremos calcular $y'(0)$, então avaliamos as derivadas parciais no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

$$F_x(0, 0) = \frac{2(0)}{1 + (0^2 + 0 + 1)^2} - \frac{\pi}{4}e^{0-0} = \frac{0}{1 + 1} - \frac{\pi}{4}e^0 = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$F_y(0, 0) = \frac{1}{1 + (0^2 + 0 + 1)^2} + \frac{\pi}{2}e^{0-0} = \frac{1}{1 + 1} + \frac{\pi}{2}e^0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{1 + \pi}{2}$$

Cálculo de y'(0)

Finalmente, substituímos os valores encontrados na fórmula da derivada implícita:

$$y'(0) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = -\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{1+\pi}{2}}$$

$$y'(0) = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1+\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{1 + \pi} = \frac{2\pi}{4(1 + \pi)} = \frac{\pi}{2(1 + \pi)}$$

3. (20 pts.) Seja (x_0, y_0) um ponto na curva dada pela equação $2x^2 + y^2 + 3xy = 1$. Sabendo que a reta tangente à curva no ponto (x_0, y_0) é paralela à reta $y = -x$, determine os possíveis valores de x_0 e y_0.

Resposta: Pelas condições do enunciado, não existe x_0, y_0 satisfazendo as condições.

Resolução:

Encontrar a inclinação da reta tangente
A inclinação da reta tangente à curva é dada pela derivada $\frac{dy}{dx}$. Como a curva é definida implicitamente, usamos a diferenciação implícita na equação $2x^2 + y^2 + 3xy = 1$ em relação a x.

$$\frac{d}{dx}(2x^2 + y^2 + 3xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

Aplicando as regras de derivação (incluindo a regra do produto para o termo $3xy$):

$$4x + 2y\frac{dy}{dx} + \left(3y + 3x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Agora, agrupamos os termos que contêm $\frac{dy}{dx}$ para isolá-lo:

$$\frac{dy}{dx}(2y + 3x) = -4x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{3x + 2y}$$

Esta é a expressão para a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) da curva.

O enunciado diz que a reta tangente é paralela à reta $y = -x$. Retas paralelas têm a mesma inclinação. A inclinação da reta $y = -x$ é $m = -1$. Portanto, devemos ter $\frac{dy}{dx} = -1$.

$$-\frac{4x + 3y}{3x + 2y} = -1$$

$$\frac{4x + 3y}{3x + 2y} = 1$$

$$4x + 3y = 3x + 2y$$

Simplificando a equação, obtemos uma relação entre x e y nos pontos de interesse:

$$4x - 3x = 2y - 3y$$

$$x = -y \quad \text{ou} \quad y = -x$$

Encontrar os pontos na curva
Os pontos (x_0, y_0) devem satisfazer a relação que acabamos de encontrar $(y_0 = -x_0)$ e também devem pertencer à curva original, ou seja, satisfazer $2x_0^2 + y_0^2 + 3x_0y_0 = 1$.
Substituímos a relação $y_0 = -x_0$ na equação da curva:

$$2x_0^2 + (-x_0)^2 + 3x_0(-x_0) = 1$$

$$2x_0^2 + x_0^2 - 3x_0^2 = 1$$

$$(2 + 1 - 3)x_0^2 = 1$$

$$0 \cdot x_0^2 = 1$$

$$0 = 1$$

Chegamos a uma contradição matemática $(0 = 1)$, o que significa que não há solução para este sistema de equações. Consequentemente, **não existe nenhum ponto na curva $2x^2 + y^2 + 3xy = 1$ onde a reta tangente seja paralela a $y = -x$.**

4. (25 pts.) Seja $f(x,y) = (y - x^2)e^{2x}$. Determine o polinômio de Taylor $p(x,y)$ de 2ª ordem de f na origem. Depois mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-p(x,y)}{x^2+y^2} = 0$ calculando diretamente o limite.

Resposta: $p(x,y) = -x^2 + 2xy + y$.

Resolução:

Determinando o Polinômio de Taylor
O polinômio de Taylor de 2ª ordem de uma função $f(x,y)$ em torno da origem $(0,0)$ é dado pela fórmula:

$$p(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right)$$

Precisamos calcular o valor da função e de suas derivadas parciais até a 2ª ordem no ponto $(0,0)$. A função é $f(x,y) = (y - x^2)e^{2x} = ye^{2x} - x^2e^{2x}$.
Cálculo das derivadas:

- $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{2x} - x^2e^{2x}) = 2ye^{2x} - (2xe^{2x} + x^2 \cdot 2e^{2x}) = e^{2x}(2y - 2x - 2x^2)$
- $f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{2x} - x^2e^{2x}) = e^{2x}$
- $f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}(2y-2x-2x^2)) = 2e^{2x}(2y-2x-2x^2)+e^{2x}(-2-4x) = e^{2x}(4y-4x-4x^2-2-4x) = e^{2x}(4y - 8x - 4x^2 - 2)$
- $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x}) = 0$
- $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x}(2y - 2x - 2x^2)) = e^{2x}(2) = 2e^{2x}$

Avaliando no ponto (0, 0):

- $f(0,0) = (0-0)e^0 = 0$
- $f_x(0,0) = e^0(0 - 0 - 0) = 0$
- $f_y(0,0) = e^0 = 1$
- $f_{xx}(0,0) = e^0(0 - 0 - 0 - 2) = -2$
- $f_{yy}(0,0) = 0$
- $f_{xy}(0,0) = 2e^0 = 2$

Montando o polinômio: Substituindo os valores na fórmula:

$$p(x,y) = 0 + (0)x + (1)y + \frac{1}{2}\left((-2)x^2 + 2(2)xy + (0)y^2\right)$$

$$p(x,y) = y + \frac{1}{2}(-2x^2 + 4xy)$$

$$p(x,y) = y - x^2 + 2xy$$

O que confere com a resposta.

Parte 2: Calculando o Limite (Método Formal)
Devemos mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-p(x,y)}{x^2+y^2} = 0$. O numerador é $f(x,y) - p(x,y) = (y - x^2)e^{2x} - (y - x^2 + 2xy)$.

$$f(x,y) - p(x,y) = ye^{2x} - x^2e^{2x} - y + x^2 - 2xy$$

Agrupando os termos com y e os termos com x^2:

$$f(x,y) - p(x,y) = (ye^{2x} - 2xy - y) + (-x^2e^{2x} + x^2)$$

Colocando y e $-x^2$ em evidência, obtemos a expressão-chave:

$$f(x,y) - p(x,y) = y(e^{2x} - 2x - 1) - x^2(e^{2x} - 1)$$

Agora, substituímos esse numerador de volta no limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(e^{2x} - 2x - 1) - x^2(e^{2x} - 1)}{x^2 + y^2}$$

Podemos separar a fração em duas partes e analisar o limite de cada uma:

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(e^{2x} - 2x - 1)}{x^2 + y^2}}_{\text{Limite A}} - \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(e^{2x} - 1)}{x^2 + y^2}}_{\text{Limite B}}$$

Análise do Limite A:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(e^{2x} - 2x - 1)}{x^2 + y^2}$$

Usamos o truque de multiplicar e dividir por x^2 para reorganizar os fatores:

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \left(\frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)$$

Agora, analisamos cada um dos três fatores quando $(x,y) \to (0,0)$:

- $y \to 0$.
- $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$ é uma **função limitada**.
- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} \right)$ é um limite notável. Usando L'Hôpital duas vezes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - 2}{2x} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{2} = \frac{4(1)}{2} = 2$$

O limite é o produto de uma função que tende a zero, uma função limitada e uma função que tende a 2. O resultado é 0.

$$(\text{tende a } 0) \cdot (\text{tende a } 2) \cdot (\text{limitada}) = 0$$

Análise do Limite B:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(e^{2x} - 1)}{x^2 + y^2}$$

Reagrupando os fatores:

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (e^{2x} - 1) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)$$

Analisamos os dois fatores quando $(x,y) \to (0,0)$:

- $(e^{2x} - 1) \to 0$.
- $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$ é **função limitada**.

O limite é o produto de uma função que tende a zero por uma função limitada. O resultado é 0.

Logo:

$$\text{Limite A} - \text{Limite B} = 0 - 0 = 0$$

5. (20 pts.) Use o método dos Multiplicadores de Lagrange para obter a área máxima do retângulo com lados paralelos aos eixos x e y, de modo que os vértices estejam na curva $3x^2 + 4y^2 = 5$. Determine os vértices que garantem a área máxima.

Resposta: Área máxima: $\frac{5}{\sqrt{3}}$, vértices: $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{8}}\right)$.

Resolução:

Formulação do Problema
Queremos maximizar a área de um retângulo. Seja (x, y) o vértice do retângulo no primeiro quadrante $(x > 0, y > 0)$. Como os lados são paralelos aos eixos, a largura total do retângulo será $2x$ e a altura total será $2y$.
A função a ser maximizada é a área:

$$f(x, y) = (2x)(2y) = 4xy \quad \text{(Função Objetivo)}$$

Os vértices do retângulo devem estar na curva (elipse) $3x^2 + 4y^2 = 5$. Esta é a nossa restrição. A função de restrição é:

$$g(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \quad \text{(Função de Restrição)}$$

Sistema de Lagrange
O método dos Multiplicadores de Lagrange afirma que nos pontos de máximo ou mínimo, os gradientes das funções objetivo e de restrição são paralelos, ou seja, $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algum escalar λ.
Calculamos os gradientes:

- $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (4y, 4x)$
- $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (6x, 8y)$

Isso nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4y = \lambda(6x) \quad \text{(Eq. 1)} \\ 4x = \lambda(8y) \quad \text{(Eq. 2)} \\ 3x^2 + 4y^2 = 5 \quad \text{(Eq. 3)} \end{cases}$$

Resolvendo o Sistema
Como buscamos a área máxima, x e y devem ser diferentes de zero. Podemos então isolar λ nas Equações 1 e 2:

$$\text{De (1): } \lambda = \frac{4y}{6x} = \frac{2y}{3x}$$
$$\text{De (2): } \lambda = \frac{4x}{8y} = \frac{x}{2y}$$

Igualando as duas expressões para λ:

$$\frac{2y}{3x} = \frac{x}{2y}$$

Multiplicando em cruz:

$$(2y)(2y) = (x)(3x) \implies 4y^2 = 3x^2$$

Agora temos uma relação simples entre x^2 e y^2. Podemos substituir isso na equação de restrição (Eq. 3). Vamos substituir $4y^2$ por $3x^2$:

$$3x^2 + (3x^2) = 5$$
$$6x^2 = 5 \implies x^2 = \frac{5}{6} \implies x = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad \text{(lembrando que } x > 0)$$

Agora, usamos a relação $4y^2 = 3x^2$ para encontrar y:

$$4y^2 = 3\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{2}$$

$$y^2 = \frac{5}{8} \implies y = \sqrt{\frac{5}{8}} \quad \text{(lembrando que } y > 0)$$

Cálculo da Área Máxima e Vértices
O ponto (x, y) no primeiro quadrante é $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{8}}\right)$. A área máxima é:

$$A_{max} = 4xy = 4\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = 4\sqrt{\frac{25}{48}} = 4\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{48}}$$

$$A_{max} = 4\frac{5}{\sqrt{16 \cdot 3}} = 4\frac{5}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador, a área é $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.
Os vértices do retângulo que garantem esta área máxima são dados pelas combinações de $\pm x$ e $\pm y$:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{8}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{8}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, -\sqrt{\frac{5}{8}}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, -\sqrt{\frac{5}{8}}\right)$$

Ou, de forma compacta: $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{8}}\right)$.