Combinatória
POTI/TOPMAT UFPR
Nível 3

3^a edição

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Coordenadores:	Fernanda de Oliveira de Jesus Leonardo Knelsen Mahmut Telles Cansiz
Site:	http://poti.ufpr.br/
E-mail:	poti@ufpr.br
Capa:	Luciana Laroca
Impressão:	Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de produzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinco e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024
Departamento de Matemática - UFPR
Janeiro de 2024

Sumário

Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo “eu já sei, já estudei isso”. Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

Equipe POTI/TOPMAT
Nível 3
2024

Aula 1

Análise Combinatória: Introdução

Vamos buscar contar de quantos modos algum evento pode ocorrer, como por exemplo, de quantos modos Marcel pode ordenar seus livros em uma estante, ou de quantos modos Vitor pode escolher uma senha para sua conta do banco. Para isso, vamos utilizar dois princípios: o *Princípio Aditivo* e o *Princípio Multiplicativo*.

Princípio Aditivo: Sejam A e B eventos independentes. Se o evento A pode ocorrer de m maneiras, e o evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m + n$ modos de ocorrer A **ou** B (ou seja, de algum dos eventos serem realizados).

Exemplo 1.1. Maria estava no shopping com a sua mãe, e havia pedido dinheiro para comprar um lanche. Maria estava em dúvida se iria comprar um doce ou um salgado. Se ela optasse por um doce, ela poderia comprar um pedaço de bolo, ou um sorvete. Caso ela optasse pelo salgado, ela teria mais opções: uma coxinha, um pastel, um pão de queijo ou uma esfirra. De quantos modos Maria pode escolher o seu lanche?

Solução: Temos dois eventos, com 2 e 4 possibilidades, respectivamente:

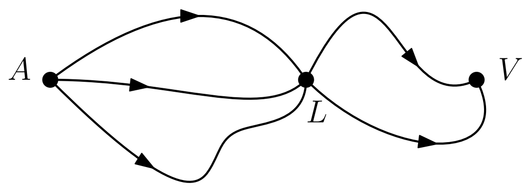
Evento A	Comprar um doce	2 possibilidades
Evento B	Comprar um salgado	4 possibilidades

Portanto, o princípio aditivo nos diz que há $2 + 4 = 6$ maneiras de ocorrer A ou B. Ou seja, há 6 modos de Maria escolher o seu lanche. $\square$

Fácil demais, não é? Agora vamos ver o que diz o Princípio Multiplicativo, que as vezes também é chamado de *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*:

Princípio Multiplicativo: Sejam A e B eventos independentes. Se o evento A pode ocorrer de m maneiras, e o evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m \cdot n$ modos de ocorrer A **e** B (ou seja, de os dois eventos serem realizados).

Exemplo 1.2. Marcos irá se deslocar da cidade Azul (A) para a cidade Laranja (L), e depois disso irá para a cidade Verde (V). O mapa abaixo mostra que ele tem 3 caminhos possíveis para ir de A até L, e dois caminhos possíveis para ir de L até V. De quantos modos Marcos pode realizar o seu trajeto?



Solução: Temos dois eventos, com 3 e 2 possibilidades, respectivamente:

Evento A	Ir de A até L	3 possibilidades
Evento B	Ir de L até V	2 possibilidades

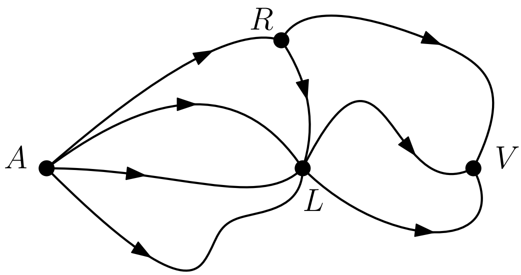
Portanto, o princípio multiplicativo nos diz que há $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de ocorrer A e B. Ou seja, há 6 modos de Marcos realizar o seu trajeto. $\square$

Exemplo 1.3. Ao jogar uma moeda para o alto, ela pode cair com a face "cara"(K) ou "coroa"(C). Ao jogar uma moeda para o alto 3 vezes, quantos resultados possíveis podemos obter?

Solução: Considere o evento correspondente a obtermos cara ou coroa (um evento que pode ocorrer de 2 modos). Note que jogar a moeda 3 vezes para o alto corresponde a realizar este evento 3 vezes. Assim, o princípio multiplicativo nos diz que há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modos desses três eventos ocorrerem. Portanto, existem 8 resultados possíveis de cara e coroa. Para analisar quais são todas as sequências de caras e coroas possíveis, desenhe um diagrama! $\square$

As vezes é preciso combinar os dois princípios para resolver um problema. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 1.4. Marcos irá se deslocar da cidade Azul (A) para a cidade Verde (V). O mapa abaixo mostra os caminhos possíveis, que podem passar pela cidade Laranja (L) e pela cidade Rosa (R). De quantos modos Marcos pode realizar o seu trajeto?



Solução: Temos três casos para considerar:

Caso $A \longrightarrow L \longrightarrow V$: Temos 3 modos de ir de A para L e 2 modos de ir de L até V, logo temos $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades neste caso.

Caso $A \longrightarrow R \longrightarrow V$: Temos apenas 1 possibilidade neste caso.

Caso $A \longrightarrow R \longrightarrow L \longrightarrow V$: Temos 1 modo de ir de A para R, 1 modo de ir de R até L, e 2 modos de ir de L até V, logo temos

$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ possibilidades neste caso.

Note que cada caso corresponde a um evento, e estes três eventos correspondem a todas as possibilidades de ir de A até V. Portanto, dizer que Marcos irá da cidade Azul para a cidade Verde corresponde a dizer que algum destes eventos irá ocorrer. Então, pelo princípio aditivo, há $6 + 1 + 2 = 9$ possibilidades de Marcos realizar o seu trajeto. □

Neste exemplo vemos que as vezes é importante separar um problema em casos, e analisar cada um deles, e para isso devemos ser extremamente organizados!

Problemas recomendados: **1, 2, 3, 4, 5 e 6**.

Vamos ver outro exemplo.

Exemplo 1.5. Marcel tem 5 livros para colocar em uma estante. Supondo que os livros serão colocados em pé, lado a lado, de quantos modos Marcel pode ordenar seus livros na estante?

Solução: Imagine que Marcel está começando a colocar seus livros na estante. Bom, primeiro ele pega um dos livros para colocar por primeiro. Neste caso, ele tem 5 modos de fazer isso. Agora ele irá pegar o segundo livro, e ele poderá fazer isso de 4 modos diferentes, pois sobraram quatro livros. Depois de colocar o segundo livro na estante, ele irá escolher o próximo livro, e neste caso ele terá 3 modos de fazer isso. Depois de colocar o terceiro livro, restarão apenas dois livros, e ele irá escolher novamente um deles para colocar na estante, podendo fazer isso de 2 modos diferentes. Finalmente, irá sobrar apenas um livro, e ele terá apenas 1 modo de colocar o próximo livro na estante, que é justamente escolhendo o livro que sobrou. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, Marcel pode colocar seus livros na estante de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ modos diferentes. □

Imagine que Marcel tivesse 12 livros ao invés de 5. Por um raciocínio completamente análogo, Marcel poderia ordenar seus livros de $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$ modos diferentes. Como você pode ver, é muito trabalhoso ficar escrevendo estes produtos. Já imaginou se Marcel tivesse 42 livros? Ele teria então $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ modos de fazer isso. Bom, para não precisarmos ficar escrevendo todos estes produtos, utilizamos a seguinte notação:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geq 0}$$

Leia "n fatorial" para $n!$. Por exemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, e $42! = 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Note que definimos n fatorial para $n \geq 0$, e você deve se perguntar então, quanto vale $0!$. Bom, definimos simplesmente que $0! = 1$.

O mesmo raciocínio utilizado no Exemplo 1.5 pode ser utilizado em muitas situações, e por isso, dizemos que esta é uma situação em que estamos realizando uma **permutação** (ou **permutação simples**). Uma permutação de certos objetos é uma mudança na ordem destes objetos (ou se você quiser uma definição mais sofisticada, uma permutação é uma função bijetora cujo domínio e contradomínio são os mesmos). Então, no Exemplo 1.5 estávamos contando quantas permutações podemos ter entre os 5 livros, o que é o mesmo que contar em quantas ordens é possível colocar os livros lado a lado. Para este conceito ficar mais claro, veja o próximo exemplo.

Exemplo 1.6. Quantos anagramas a palavra MIRANTE possui?

Solução: Um anagrama de uma palavra é uma palavra obtida mudando a ordem de suas letras, podendo ser algo que faz sentido, ou não. Por exemplo, MENTIRA e TMINRAE são anagramas de MIRANTE.

Utilizando o mesmo raciocínio do Exemplo 1.5, podemos imaginar que vamos montar uma palavra a partir das letras M, I, R, A, N, T e E. Começamos escolhendo a primeira letra, e temos 7 modos de fazer isso. Depois disso, precisamos escolher a segunda letra, e nós teremos 6 modos de fazer isso, pois uma das letras já foi utilizada, e assim por diante. Iremos concluir que podemos montar a palavra de $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$ modos diferentes.

Portanto, existem 5.040 anagramas da palavra MIRANTE. $\square$

Note que um anagrama de uma palavra corresponde a uma permutação de suas letras. Logo, no Exemplo 1.6 estávamos contando quantas permutações podemos realizar entre as letras M, I, R, A, N, T e E. Como precisávamos permutar 7 objetos diferentes (as 7 letras), concluímos que podemos fazer isso de 7! modos diferentes.

Permutações simples: Então, dados n objetos distintos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, de quantos modos é possível ordená-los?
Temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, e assim por diante, até o último lugar que temos apenas 1 modo de escolher o objeto. Portanto, o número de maneiras de ordenar n objetos distintos é

$$P_n = n! = n(n-1)\cdots 1.$$

Caso você queira ver uma permutação como uma função bijetora $f : A \longrightarrow A$, onde A é um conjunto com n elementos, então o resultado acima nos diz que existem exatamente $n!$ funções bijetoras $f : A \longrightarrow A$.

Problemas recomendados: **7, 8, 9, 10, 11 e 12**.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Uma prova possui dez questões do tipo múltipla escolha, com cinco alternativas cada. De quantas maneiras diferentes é possível responder esta prova, marcando todas as dez respostas?

2. ● Quantos são os números ímpares entre 10 e 100?

3. ● Em um computador digital, um bit é um dos algarismos 0 ou 1 e uma palavra é uma sucessão de bits. Por exemplo, todas as possíveis palavras de dois bits são: 00, 01, 10, 11. Qual é o número de palavras distintas de 32 bits?

4. ▲ Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, quantos números pares de cinco algarismos distintos podem ser formados?

5. ▲ Vai ser formada uma fila com 8 pessoas, dentre as quais Bianca e João. De quantas maneiras esta fila poderá ser formada se:

   (a) Bianca deve ser a primeira da fila?

   (b) Bianca ou João devem ser o primeiro da fila?

   (c) Bianca e João não devem ficar juntos na fila?

6. ▲ Se A é um conjunto com n elementos, então quantos subconjuntos A possui?

7. ● Quantos anagramas a palavra JANEIRO possui?

8. ● De quantas formas se pode dispor seis pessoas em fila indiana?

9. ● Quantos são os anagramas da palavra BOLA que começam com a letra L?

10. ▲ Em quantos anagramas da palavra CASTELO as vogais não aparecem todas juntas?

11. ▲ De quantas maneiras três brasileiros e três italianos podem ficar em fila, de modo que os brasileiros fiquem intercalados pelos italianos?

12. ▲ Dos anagramas da palavra QUEIJO, quantos têm as vogais em ordem alfabética e juntas?

13. ♦ Vitor precisa escolher uma senha para sua conta de banco, que deve ter 6 dígitos dentre os algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$, e não pode conter sequências de 5 algarismos consecutivos. Por exemplo, 823456 não é uma senha possível, pois possui uma sequência de 5 algarismos consecutivos, enquanto que 345967 é uma senha possível. Quantas possibilidades de senha Vitor possui?

14. ♦ Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

15. ♦ Edson tem uma gaveta com senha, que consiste de três números, em sequência. Porém, ele esqueceu a senha. Ele se lembra de que dois dos números da sequência são 13 e 52, mas não se lembra a ordem dos números. Há 40 possibilidades para o terceiro número, sendo que os números 13 e 52 estão inclusos entre estas possibilidades. Se ele faz uma tentativa a cada 10 segundos, em quantos minutos, no pior caso, ele abre a gaveta?

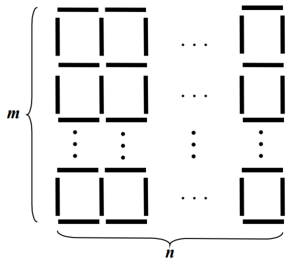
16. ♦ Um número de quatro dígitos é dito *paladino* se é múltiplo de 9 e nenhum de seus dígitos é nulo. Quantos números paladinos existem?

17. ♦ Taís quer montar uma *playlist* para ouvir músicas enquanto se desloca de sua casa para a faculdade. Para isso, ela selecionou 4 músicas de cinco minutos, 2 de três minutos e 1 de dois minutos. Sabendo que Taís quer que a *playlist* tenha exatamente 15 minutos de duração, e que a ordem em que as músicas são dispostas importa, de quantos modos ela pode montar sua *playlist*?

18. ♦ Um número de quatro dígitos é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números perobas existem?

19. ♦ (OBM 2006, adaptada) O piso de um quarto tem forma de um quadrado de lado 4 m. De quantas maneiras podemos cobrir totalmente o quarto com oito tapetes iguais de dimensões 1 m e 2 m?

20. ♦ (OBM 2002) Colocamos vários palitos sobre uma mesa de modo a formar um retângulo $m \times n$, como mostra a figura.



Devemos pintar cada palito de azul, vermelho ou preto de modo que cada um dos quadradinhos da figura seja delimitado por exatamente dois palitos de uma cor e dois de outra cor. De quantas formas podemos realizar esta pintura?

21. ♦ O número 2014 tem quatro algarismos distintos cuja soma é 7. Quantos números inteiros positivos têm essas duas propriedades?

22. ♦ (AHSIMC 2007, adaptada) Encontre o algarismo da unidade da soma $\sum_{j=1}^{100}(j!)^2$.

23. ★ (AIME 2006) Seja P o produto dos primeiros 100 inteiros positivos ímpares. Calcule o maior inteiro k tal que P é divisível por 3^k.

24. ★ (AIME 2004, adaptada) Defina a função $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ dada

por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1 \quad (1.1) \\ \dfrac{x}{10}, & \text{se } x \text{ é divisível por } 10 \quad (1.2) \\ x+1, & \text{caso contrário} \quad (1.3) \end{cases}$$

e defina uma sequência onde: $x_1 = x$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ para todos inteiros positivos n. Seja $d(x)$ o menor n tal que $x_n = 1$. (Por exemplo, $d(100) = 3$ e $d(87) = 7$.) Seja m o número de inteiros positivos x tal que $d(x) = 20$. Calcule a soma dos fatores primos distintos de m.

Respostas dos Problemas Propostos

1. 9.765.625
2. 45
3. 2^{32}
4. 3.000
5. (a) 5.040
   (b) 10.080
   (c) 30.240
6. 2^n
7. 5.040
8. 720
9. 6
10. 4.320
11. 72
12. 6
13. 999.885
14. 144
15. 39
16. 729
17. 312
18. 7.875
19. 36
20. $3^{n+m} \cdot 2^{nm}$
21. 18
22. 7
23. 49
24. 511

Aula 2

Análise Combinatória: Permutações e Combinações

Antes de começar, recomendamos que resolva os exercícios propostos a seguir, para você criar mais familiaridade com operações envolvendo fatoriais.

Exercícios Propostos

1. Calcule:
   (a) $2019! \cdot 2020$
   (b) $\frac{2020!}{2018!}$
   (c) $2020! + 2019!$

2. Simplifique as expressões:
   (a) $n! \cdot (n+1)$
   (b) $\frac{n!}{(n-2)!}$
   (c) $n! + (n-1)!$

Já vimos na aula passada o conceito de **permutações simples** que diz que:

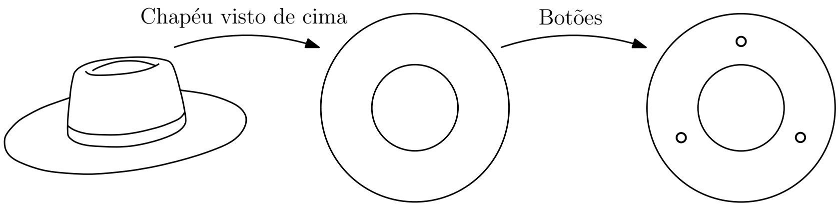
Existem $n!$ permutações entre n objetos diferentes.

Problemas recomendados: **1, 2 e 9**.

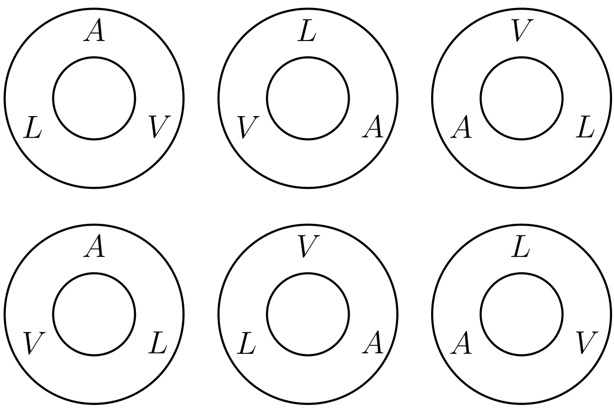
Vamos ver agora alguns tipos especiais de permutação.

Exemplo 2.1. Joana irá participar da festa junina de seu colégio, e para isso ela comprou um chapéu de palha redondo. Mas não há enfeites no chapéu, e então ela decidiu costurar 3 botões coloridos em torno da aba do chapéu (de modo simétrico). Se ela dispõe de um botão azul (A), um verde (V) e um laranja (L), de quantos modos ela pode enfeitar o seu chapéu?

Solução: Estamos supondo que o chapéu é simétrico. Além disso, Joana irá costurar os botões equiespaçados uns dos outros, ou seja, de modo simétrico (veja a figura abaixo).



A princípio, Joana teria $3! = 6$ possibilidades para costurar os botões (veja a figura abaixo).



Mas como o chapéu é simétrico, as três configurações que aparecem por primeiro são equivalentes, pois uma pode ser obtido da outra apenas girando o chapéu. E o mesmo acontece com as outras três configurações de baixo, isto é, elas também são equivalentes. Portanto, Joana pode enfeitar seu chapéu de apenas dois modos diferentes. □

Note que na contagem $3! = 6$ realizada no exemplo acima, contamos cada possibilidade exatamente 3 vezes, e assim a resposta é dada por $\dfrac{3!}{3} = 2$.

Permutações circulares: De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação?

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Podemos deduzir esta resposta do seguinte modo: se não considerássemos equivalentes as disposições que coincidem por rotação, então teríamos $n!$ possibilidades para distribuir os n objetos. Agora considere que as disposições que coincidem por rotação são equivalentes. Então contamos cada configuração exatamente n vezes, e logo a resposta é $n!$ dividido por n.

Problemas recomendados: **3, 4 e 13**.

Exemplo 2.2. Quantos anagramas a palavra BANANA possui?

Solução: Note que temos letras iguais, então não podemos utilizar o resultado de permutações simples e dizer que o resultado é $6!$. Contudo, podemos utilizar um truque para considerar as letras da palavra BANANA como se fossem todas distintas. Vamos indexar as duas letras N por N_1 e N_2, e as três letras A por A_1, A_2 e A_3. Agora temos 6 objetos distintos: B, A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2. Portanto, existem $6!$ permutações entre estes objetos.

Mas veja que, por exemplo, os anagramas correspondentes a $N_1A_1N_2A_2BA_3$, $N_2A_1N_1A_2BA_3$ e $N_1A_3N_2A_1BA_2$ resultam todos em NANABA, logo eles são equivalentes. Assim, temos que considerar estes casos para concluirmos quantos anagramas a palavra BANANA possui.

No exemplo acima, temos exatamente $3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ objetos correspondentes ao anagrama NANABA, que correspondem a permutações entre os símbolos A_1, A_2 e A_3, e permutações dos símbolos N_1 e N_2. Vamos listar estes objetos abaixo:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{N_1A_1N_2A_2BA_3} & \mathrm{N_2A_1N_1A_2BA_3} \\
\mathrm{N_1A_1N_2A_3BA_2} & \mathrm{N_2A_1N_1A_3BA_2} \\
\mathrm{N_1A_2N_2A_1BA_3} & \mathrm{N_2A_2N_1A_1BA_3} \\
\mathrm{N_1A_2N_2A_3BA_1} & \mathrm{N_2A_2N_1A_3BA_1} \\
\mathrm{N_1A_3N_2A_1BA_2} & \mathrm{N_2A_3N_1A_1BA_2} \\
\mathrm{N_1A_3N_2A_2BA_1} & \mathrm{N_2A_3N_1A_2BA_1}
\end{array}$$

Isso significa que ao considerar as $6!$ permutações entre B, A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2, contamos o anagrama NANABA 12 vezes. E isso acontece para todos os anagramas, isto é, contamos cada anagrama exatamente 12 vezes. Portanto, o número total de anagramas da palavra BANANA é dado por:

$$P_6^{3,2} = \binom{6}{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60.$$

□

Permutações com repetição: Considere n objetos que podem ser iguais. Digamos que existem k tipos diferentes de objetos, dentre os n. Se existem a_1 objetos do tipo 1, a_2 objetos do tipo 2, e assim por diante, e a_k objetos do tipo k, então temos $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, com $a_i \geq 1$, para $1 \leq i \leq k$. Neste caso, existem

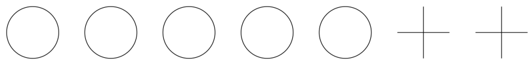
$$P_n^{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

permutações entre os n objetos.

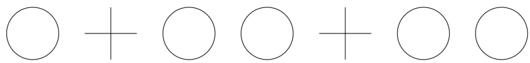
Veja mais um problema onde podemos aplicar este conceito.

Exemplo 2.3. Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação $x + y + z = 5$?

Solução: Interprete o valor 5 da igualdade como se fossem círculos, ou seja, temos 5 círculos para distribuir entre os sinais de $+$. Basta então calcular as permutações entre os 2 sinais de $+$ e os 5 círculos em questão, como na figura a seguir.



Uma possível configuração de solução seria o par $(1, 2, 2)$, conforme a figura a seguir.



Temos:

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 7 \cdot 3 = 21.$$

Logo, a equação $x + y + z = 5$ possui 21 soluções inteiras não negativas. $\square$

Problemas recomendados: **5, 10 e 11**.

Agora veremos um exemplo que trabalhará outra ideia.

Exemplo 2.4. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo irão conversar com o professor Ternaldo sobre um problema de Matemática. Eles chegaram à conclusão de que apenas 3 deles deveriam ir conversar com o Ternaldo. De quantos modos eles podem fazer isso?

Solução: A princípio, eles poderiam fazer isso de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modos. Contudo, a ordem em que eles são escolhidos para conversar com o professor Ternaldo não importa, assim teríamos menos possibilidades. Por exemplo, considere o caso em que o trio escolhido é formado por Arnaldo (A), Bernaldo (B) e Cernaldo (C).

Ao contar as 60 possibilidades, estamos considerando que os casos ABC, ACB, BCA, BAC, CAB e CBA são diferentes. Mas estes 6 casos correspondem ao mesmo trio, logo são todos equivalentes.

De modo geral, contamos cada trio exatamente 6 vezes ao considerar as 60 permutações, que correspondem às permutações entre os integrantes do trio, pois podemos permutar cada trio de $3! = 6$ maneiras. Assim, existem $\frac{60}{6} = 10$ modos dos alunos irem conversar com o professor Ternaldo. $\square$

Combinações: De quantos modos podemos escolher k objetos distintos entre n objetos distintos dados, considerando que a ordem destes k objetos não importa? Ou equivalentemente, quantos são os subconjuntos de k elementos de um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n elementos? A resposta é

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Aplicando a fórmula anterior no Exemplo 2.4, obtemos:

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10.$$

Problemas recomendados: **6, 7 e 8**.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Quantos são os anagramas da palavra MESA?

2. ▲ Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números distintos

de 1 a 6 sobre essas faces? E, se todas as faces são da mesma cor, quantos dados diferentes podemos formar?

3. ● Maria tem tinta guache de 4 cores diferentes e quer pintar os quatros quadradinhos unitários de um quadrado de lado 2. De quantos modos ela pode fazer isso? Duas colorações são iguais se uma pode ser obtida a partir da outra através de uma rotação.

4. ● Quantas rodas de ciranda podem se formadas por 7 crianças?

5. ● Quantos anagramas a palavra BACANA possui?

6. ● Considere um grupo de 6 pessoas. Quantas duplas podemos formar a partir deste grupo?

7. ● Em uma turma do nono ano há 21 alunos. A professora de Matemática desta turma decidiu fazer uma avaliação sobre equações do segundo grau, e pediu para que os alunos se dividissem em trios. Quantas possibilidades de trios os alunos podem fazer?

8. ● De um baralho de 52 cartas, são extraídas 4 cartas sucessivamente e sem reposição. Qual o número de resultados possíveis, se:

   (a) **não** levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

   (b) levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

9. ▲ Quantos são os anagramas da palavra MESA:

   (a) que começam com uma vogal?

   (b) que começam com uma consoante e terminam com uma vogal?

   (c) que possuem todas as vogais juntas?

   (d) que não possuem vogais juntas?

10. ▲ Repita o problema anterior para a palavra BACANA.

11. ▲ Quantas soluções inteiras **não negativas** possui a equação $x + y + z + w = 3$?

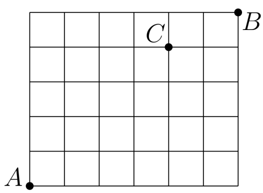
12. ▲ Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

13. ▲ De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

14. ▲ Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 2, 3, 5 e 7, formando números de 4 dígitos. Qual é a soma dos números assim formados?

15. ▲ Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo 1 centímetro para a esquerda ou para a direita a cada movimento. De quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 8 movimentos terminados na posição de partida?

16. ▲ A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



(a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

(b) Quantos desses trajetos passam por C?

17. ♦ Quantas soluções inteiras **positivas** possui a equação $x + y + z + w = 11$?

18. ♦ Quantas soluções inteiras **não negativas** possui a inequação $x + y + z < 5$?

19. ♦ Quantos números de 6 dígitos, maiores que 800.000, podem ser formados usando exatamente os algarismos 1, 1, 8, 9, 9, 9?

20. ♦ De quantas maneiras é possível distribuir 30 bolas iguais entre 4 crianças de modo que cada uma delas receba, pelo menos, 6 bolas?

21. ♦ De quantas maneiras diferentes pode-se subir uma escada de 7 degraus, subindo um degrau ou dois degraus em cada passo?

22. ♦ Em um jogo de videogame é possível apertas os botões $\bigcirc$, $\times$, $\square$ e $\triangle$. Quantas sequências é possível obter

    (a) apertando 3 botões quaisquer?

    (b) apertando 3 botões de modo que cada sequência tenha exatamente dois botões de um mesmo tipo? Um exemplo seria $\square\ \square\ \triangle$.

    (c) apertando 4 vezes apenas os botões $\times$ e $\square$, ou $\bigcirc$ e $\triangle$?

23. ♦ (OPRM 2019) De quantas maneiras é possível distribuir 50 bombons iguais entre 5 pessoas, de modo que cada pessoa receba necessariamente pelo menos 7 bombons?

24. ♦ Quantos números com dez algarismos têm a soma de seus algarismos igual a 3?

25. ♦ São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em 3 quasiquer dos 12 pontos?

26. ♦ Um baralho de um certo jogo de cartas possui n cartas distintas. Obtenha o valor de n sabendo que, com essas n cartas é possível obter 84 grupos diferentes de 3 cartas.

27. ♦ (ITA 1998, adaptada) Qual é o número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas?

28. ★ (EN) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA nos quais nenhuma letra ocupa o seu lugar original?

29. ★ Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

30. ★ Um estacionamento possui seis vagas, numeradas de 1 a 6, em fila. Seis motoristas possuem uma vaga favorita neste estacionamento. Quando cada motorista entra no estacionamento, ele dirige até sua vaga favorita. Se ela estiver vazia, ele estaciona ali. Senão, ele estaciona na próxima vaga vazia. Se todas as vagas entre a sua favorita e a sexta (última) tiverem sido tomadas, ele sai do estacionamento aborrecido. De $6^6 = 46.656$ escolhas de vagas favoritas que os motoristas podem fazer, quantas conduzem todos os motoristas a estacionarem com êxito?

Respostas dos Problemas Propostos

1. 24
2. 720 e 30
3. 6
4. 720
5. 120
6. 15
7. 1.330
8. (a) 270.725
   (b) 6.497.400
9. (a) 12
   (b) 8
   (c) 12
   (d) 12
10. (a) 60
    (b) 36
    (c) 24
    (d) 12
11. 20
12. 661.500
13. 480
14. 113.322
15. 70

16. (a) 462
    (b) 210
17. 120
18. 35
19. 40
20. 84
21. 21
22. (a) 64
    (b) 36
    (c) 32
23. 3.876
24. 55
25. 210
26. 9
27. $12! - 8! \cdot 5!$
28. 265
29. 220
30. 16.807

Aula 3

Probabilidade

3.1 Introdução

Comecemos com um exemplo muito simples: considere um dado cujas faces são numeradas de 1 a 6. Quando jogamos o dado, existem 6 possibilidades para o número que irá aparecer na face superior. O conjunto de todas as possibilidades neste caso é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e chamamos Ω de espaço amostral (Ω lê-se “ômega"). Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados de eventos. Por exemplo, $A = \{2, 3, 5\}$ é o evento que corresponde ao número da face superior ser primo.

Se considerarmos que todos os números são igualmente prováveis de aparecerem na face superior, a probabilidade de obter um certo número ao jogar o dado é $\frac{1}{6}$. Além disso, para um evento qualquer E deste exemplo, a probabilidade de E ocorrer é dada por

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Portanto, a probabilidade do evento $A = \{2, 3, 5\}$ ocorrer é $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Em geral, em um experimento aleatório qualquer temos que:

O conjunto de todos os possíveis resultados do experimento é chamado de espaço amostral e é denotado por Ω.

Evento é um subconjunto do espaço amostral.

O conjunto de todos os eventos é o conjunto de todos os subconjuntos de Ω. Este é conhecido como o conjunto das partes de Ω e é denotado por $\mathcal{P}(\Omega)$. Lembre que se Ω possui n elementos, então $\mathcal{P}(\Omega)$ possui 2^n elementos.

Dizemos que um espaço amostral é **equiprovável** se todos os elementos de Ω possuem a mesma probabilidade de ocorrer. No exemplo acima, estávamos tratando de um espaço equiprovável.

Agora vamos ver como definimos e calculamos a probabilidade de um certo evento ocorrer:

Definição 1. Seja Ω um espaço amostral. Uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ é chamada uma probabilidade se satisfaz

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Proposição 1. Se Ω é um espaço amostral equiprovável com uma quantidade finita de elementos e $E \subset \Omega$ é um evento, então

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Demonstração. Suponha que $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ possui n elementos $(n \neq 0)$. Temos que $P(\{a_i\}) = q$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde

$q \in [0,1]$ é um número. Note que

$$\Omega = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$$

e logo

$$P(\Omega) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}).$$

Pela definição dada anteriormente obtemos que $P(\Omega) = 1$ e

$$P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_n\}).$$

Assim, como $P(\{a_i\}) = q$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ concluímos que

$$\begin{aligned} 1 = &\ q + q + \ldots + q \\ = &\ nq \end{aligned}$$

e, portanto, $q = \dfrac{1}{n}$, ou seja, $P(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Agora tome um evento E qualquer de Ω. Seja $|E| = k$ e escreva $E = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Note que $b_i = a_j$ para algum j (apenas mudamos a notação para trabalharmos com os elementos de E com mais facilidade). Assim temos que

$$\begin{aligned} P(E) = &\ P(\{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \ldots \cup \{b_k\}) \\ = &\ P(\{b_1\}) + P(\{b_2\}) + \ldots + P(\{b_k\}) \\ = &\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}, \end{aligned}$$

ou seja, $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|}$, como queríamos. ■

Note que, em geral, se $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $P(\{a_i\}) = p_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Além disso, se $E \subset \Omega$ é um evento, então $P(E) = \sum_{a_i \in E} p_i =$ soma dos p_i tais que $a_i \in E$.

A seguir apresentamos algumas proposições simples e importantes. Para isso, vamos considerar um espaço amostral Ω qualquer com uma probabilidade P (uma função que satisfaz a definição dada anteriormente). Sejam também $A, B \subset \Omega$ eventos quaisquer.

Proposição 2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Proposição 3. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

Proposição 4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(regra do OU)**.

Demonstrar estas proposições é um bom treino de raciocínio lógico. Tente demonstrá-las!

Exemplo 3.1. Tanise possui uma urna com 4 bolas amarelas e 5 vermelhas. Ela retira uma bola de cada vez, sem reposição. Qual é a probabilidade das 2 primeiras serem amarelas?

Solução: Perceba que o nosso espaço amostral é $\Omega = \{(B_1, B_2) : B_1 \neq B_2\}$, onde B_1 e B_2 representam a primeira e a segunda bola retirada da urna, respectivamente.

Ao retirar a primeira bola da urna, teremos $5 + 4 = 9$ possibilidades. Ao retirar a segunda bola, só haverá 8 possibilidades, visto que uma bola já foi removida. Então:

$$|\Omega| = 9 \cdot 8 = 72.$$

Como queremos que as duas primeiras bolas sejam amarelas, temos que há 4 possibilidades para a primeira bola, e 3 para a segunda, visto que já removemos uma bola amarela. Então:

$$|E| = 4 \cdot 3 = 12.$$

Logo, temos que:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}.$$

$\square$

Problemas recomendados: **1, 2, 3, 4, 5 e 6**.

3.2 Probabilidade Condicional

Voltemos ao primeiro exemplo que apresentamos, do lançamento de um dado não-viciado. Considere o evento $A = \{2, 3, 5\}$ que corresponde a obter um número primo. Vimos que ao jogar o dado, $P(A) = \frac{1}{2}$. Agora imagine a seguinte situação: seu amigo lança o dado sem que você veja o resultado, e lhe conta que o número obtido é ímpar. Assim, você se pergunta, qual é a probabilidade desse número ser primo?

Bom, como o resultado é um número ímpar, temos as seguintes possibilidades: $\{1, 3, 5\}$. Veja que esse é o nosso novo espaço amostral e, portanto, o evento do número ser primo corresponde ao conjunto $\{3, 5\}$. Assim, a probabilidade do número ser primo é $\frac{2}{3}$.

Note que obtemos probabilidades diferentes para o número obtido no lançamento do dado ser primo. Isso ocorreu porque na nossa situação imaginária nós havíamos a informação a mais de o número ser ímpar. Sendo assim, sempre que incluímos mais informações a um problema, a probabilidade de um evento ocorrer pode mudar. Vejamos agora como podemos concretizar esta ideia matematicamente:

Definição 2. Dados dois eventos $A, B \subset \Omega$, a probabilidade condicional de A sabendo que B ocorreu é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que se Ω é um espaço finito e equiprovável, então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Também veja que pela definição acima obtemos que $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Este resultado é conhecido como **regra do E**.

Quando $P(A|B) = P(A)$, ou seja, quando o fato de ocorrer B não altera a probabilidade de ocorrer A, dizemos que A e B são

eventos independentes. Neste caso vale que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A).$$

Exemplo 3.2. Alexandre jogou um dado duas vezes. Qual é a probabilidade de Alexandre ter obtido um 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados é 7?

Solução 1: O espaço amostral Ω é dado por $\Omega = \{(a, b)|1 \leq a, b \leq 6\}$. Sejam A o evento que corresponde a obter um 3 na primeira jogada e B o evento que corresponde a soma dos resultados ser 7. Temos que:

$$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\},$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

O que queremos calcular é $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Como Ω é um espaço finito e equiprovável, segue que $P(A|B) = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \dfrac{1}{6}$, pois $A \cap B = \{(3, 4)\}$. □

Note que seguimos exatamente a Definição 2 para resolver este problema. Porém, podemos resolver o problema utilizando outro ponto de vista, considerando que o espaço amostral Ω é B e $A \cap B$ é um evento de B, e assim calculamos $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|B|}$. Veja a solução 2 abaixo:

Solução 2: Como sabemos que a soma dos resultados é 7, nosso espaço amostral fica reduzido ao seguinte:

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Se o conjunto A corresponde ao evento de obter um 3 na primeira jogada, então temos $A \cap B = \{(3, 4)\}$. Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento A sabendo que B ocorreu é

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{6}.$$

□

Exemplo 3.3. Zequinha lança uma moeda três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de se obter duas caras, sabendo que:

a) em pelo menos uma das vezes deu cara?

b) no primeiro lançamento deu cara?

Solução:

a) Representando K para cara e C para coroa, temos que:

$$\Omega = \{KCC, KKC, KCK, KKK, CKC, CKK, CCK\}.$$

Destas possibilidades, apenas três são favoráveis:

$$E = \{KKC, KCK, CKK\}.$$

Logo, segue que:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{7}.$$

b) Nosso espaço amostral agora é:

$$\Omega = \{KCC, KKC, KCK, KKK\}.$$

Apenas dois são favoráveis:

$$E = \{KKC, KCK\}.$$

Logo, segue que:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

□

Exemplo 3.4. Marcel e Vitor estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Na primeira travessa há 3 coxinhas e 5 esfirras, e na segunda há 2 risoles e 4 coxinhas. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual é a probabilidade de se ter pegado uma coxinha?

Solução: Sejam T_1 o evento que corresponde a escolher a primeira travessa, T_2 o evento que corresponde a escolher a segunda, e C o evento que corresponde a pegar uma coxinha. Queremos calcular quanto vale $P(C)$. Para isso, note que

$$P(C) = P((C \cap T_1) \cup (C \cap T_2)) = P(C \cap T_1) + (C \cap T_2),$$

pela regra do **OU**, pois $(C \cap T_1) \cap (C \cap T_2) = \varnothing$ e $P(\varnothing) = 0$.

Sabemos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B),$$

logo obtemos que:

$$P(C \cap T_1) = P(C|T_1) \cdot P(T_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16},$$

$$P(C \cap T_2) = P(C|T_2) \cdot P(T_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $P(C) = \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{25}{48}$. □

Veja que fizemos uma explicação bem detalhada, porém na prática é comum omitir todos estes detalhes, fazendo simplesmente uma conta do tipo

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{25}{48}.$$

Mas cuidado, só faça uma solução direta como esta se você souber exatamente o está fazendo, pois é fácil se enganar e chegar em uma resposta errada.

Exemplo 3.5. A probabilidade de um homem ser canhoto é $\dfrac{1}{10}$. Qual é a probabilidade de, em um grupo de 10 homens, haver pelo menos um canhoto?

Solução: Neste exemplo usaremos a Proposição 2, que irá facilitar muito a resolução. Seja A o evento que corresponde a pelo menos um dos homens do grupo ser canhoto. Temos que $P(A) = 1 - P(A^c)$, então basta calcularmos $P(A^c)$.

O evento A^c corresponde a nenhum dos homens serem canhotos. A probabilidade de não ser canhoto é $\frac{9}{10} = 0,9$. Vamos dar um número a cada um dos homens: assim temos o Homem 1, Homem 2, ..., Homem 10. Seja H_j o evento que corresponde ao Homem j não ser canhoto. Temos que $P(H_j) = 0,9$, como vimos acima. Veja que os eventos $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$ são independentes, logo vale que:

$$P(A^c) = P(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{10}) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdots P(H_{10}),$$

e assim,

$$P(A^c) = (0,9) \cdot (0,9) \cdots (0,9) = (0,9)^{10}.$$

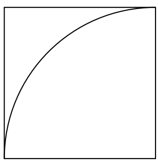
Portanto, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (0,9)^{10} \approx 65\%$. □

Problemas recomendados: **7, 8 e 9**.

3.3 Probabilidade Geométrica

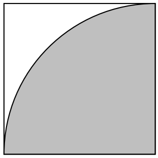
Nesta sessão iremos apresentar problemas em que o espaço amostral é infinito, podendo ser um conjunto de pontos em um segmento de reta, ou o conjunto de uma figura bidimensional, por exemplo. Vamos começar com um exemplo para desenvolver a intuição sobre esse tema.

Exemplo 3.6. Diego desenhou no chão a seguinte figura:



Um quadrado com $\frac{1}{4}$ de um círculo dentro dele (setor circular), de modo que o raio do círculo é igual ao lado do quadrado. Em seguida, Diego lança uma moeda aleatoriamente dentro do quadrado. Considerando que o tamanho da moeda é desprezível, ou seja, não iremos nos preocupar com o seu tamanho (pense que ela equivale a um ponto), qual é a probabilidade da moeda cair dentro do setor circular?

Solução: O espaço amostral neste caso é o conjunto de pontos dentro do quadrado. Seja E o evento da moeda cair dentro do setor circular. Então o evento E indica que a moeda deve cair na seguinte região:



Observe que não podemos simplesmente contar a quantidade de pontos, pois há uma infinidade. Iremos então considerar a área do quadrado e a área do setor circular. Assim, teremos que

$$P(E) = \frac{\text{área do setor circular}}{\text{área do quadrado}}.$$

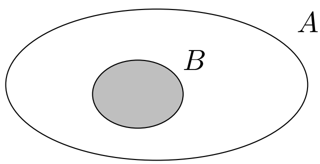
Agora basta fazer as contas. Se l é a medida do lado do quadrado, temos *área do quadrado* $= l^2$ e *área do setor circular* $= \dfrac{\pi l^2}{4}$. Deste modo,

$$P(E) = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 = 78,5\%$$

$\square$

Em geral, se em um experimento aleatório o espaço amostral é uma região do plano, digamos a região A, e um evento E corresponde a uma região dentro de A, digamos a região B ($B \subset A$), então a probabilidade de E ocorrer é

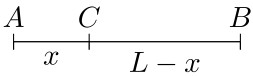
$$P(E) = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$



Podemos usar um raciocínio análogo para casos em que o espaço amostral é uma região unidimensional (em que não podemos calcular área). Vamos ver um exemplo para depois fixar a ideia apresentada.

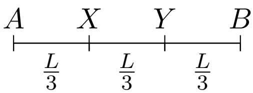
Exemplo 3.7. Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta de comprimento $AB = L$. Se um ponto C interior ao segmento $\overline{AB}$ for escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comprimento do menor dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ seja superior a $\frac{L}{3}$?

Solução: Tomando um ponto C aleatoriamente em $\overline{AB}$, temos $AC = x$ e $CB = L - x$.



Note que o espaço amostral Ω corresponde ao intervalo $]0, L[$ (todas as possibilidades para x), já que para cada ponto C escolhido podemos associar um elemento $x \in]0, L[$, e para cada $x \in]0, L[$ podemos associar um ponto C interior a $\overline{AB}$. Resumindo, existe uma bijeção entre Ω e $]0, L[$.

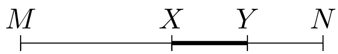
Seja E o evento que corresponde ao comprimento do menor dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ ser superior a $\frac{L}{3}$. Então E ocorrer significa ter $\min\{x, L - x\} > \frac{L}{3}$. Logo E é o evento em que $x > \frac{L}{3}$ ou $L - x > \frac{L}{3} \Leftrightarrow x < \frac{2L}{3}$, ou seja, $\frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}$. Portanto, E ocorre se C está dentro do segmento $\overline{XY}$:



Assim, $P(E) = \dfrac{XY}{AB} = \dfrac{L/3}{L} = \dfrac{1}{3}$. □

Agora vamos ver como podemos generalizar esta ideia: suponha que o espaço amostral corresponde a um intervalo limitado de $\mathbb{R}$, $I = [a, b]$. Geometricamente, I corresponde a um segmento de reta, digamos o segmento $\overline{MN}$. Note que $\overline{MN}$ tem comprimento $MN = b - a$. Se um evento E corresponde a um intervalo $J \subset I$, digamos

$J = [c, d]$, geometricamente, J é um segmento de reta $\overline{XY}$ em que os pontos X e Y são interiores a $\overline{MN}$.



Sendo assim, para calcular $P(E)$ é muito simples, basta fazermos

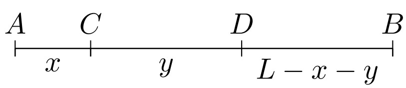
$$P(E) = \frac{XY}{MN} = \frac{b-a}{d-c}.$$

Note que no exemplo anterior tínhamos $I =]0, L[$ e $J =]L/3, 2L/3[$. Veja que removemos os pontos extremos de cada intervalo, mas isso não irá causar mudanças no resultado, pois como há uma infinidade de pontos, esses poucos pontos que retiramos são desprezíveis para os cálculos.

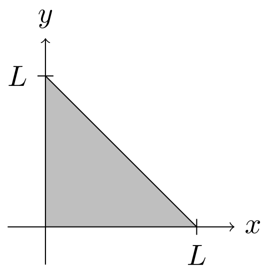
Feita a teoria sobre probabilidade geométrica, agora vamos ver um problema sobre este tema:

Exemplo 3.8. Dividindo aleatoriamente um segmento $\overline{AB}$ em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Solução: Primeiramente, indicaremos o comprimento de $\overline{AB}$ por $AB = L$. Bom, dividir $\overline{AB}$ em três partes equivale a tomar dois pontos C e D interiores a $\overline{AB}$. Obtendo estes dois pontos de modo aleatório, teremos três segmentos determinados, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ com comprimentos $AC = x$, $CD = y$ e $DB = L - x - y$.



Note que o espaço amostral deste experimento corresponde aos pares (x, y), onde $x > 0$, $y > 0$ e $L - x - y > 0 \Leftrightarrow y < L - x$. Assim, o espaço amostral Ω corresponde à seguinte região do plano:



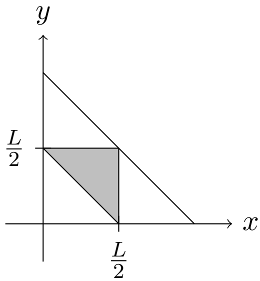
O evento E que estamos interessados em calcular a probabilidade é o conjunto dos pares $(x, y) \in \Omega$ tais que é possível formar um triângulo de lados x, y e $L-x-y$ (lembre-se que E é um subconjunto do espaço amostral). Para descrever melhor este conjunto E vamos utilizar o seguinte resultado:

Existe um triângulo de lados a, b e c se, e somente se, $a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$

Sendo assim, é possível formar um triângulo de lados x, y e $L - x - y$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} x <&\ \ y + (L - x - y) \\ y <&\ \ x + (L - x - y) \\ L - x - y <&\ \ x + y \end{aligned}$$

o que equivale a $x < \dfrac{L}{2}$, $y < \dfrac{L}{2}$ e $y > \dfrac{L}{2} - x$. Assim, E é o conjunto de pares $(x, y) \in \Omega$ que satisfazem estas desigualdades. Portanto, E corresponde à seguinte região do plano:



Agora para calcular $P(E)$, basta fazermos

$$P(E) = \frac{\text{área da região de } E}{\text{área da região de } \Omega},$$

e assim concluímos que $P(E) = \dfrac{1}{4}$. $\square$

De modo geral, para resolver um problema de probabilidade geométrica envolvendo um evento E, devemos seguir os seguintes passos:

1. Descrever o espaço amostral Ω em função de uma ou mais variáveis $(x, y, \ldots)$.

2. Determinar qual região do plano (ou da reta) corresponde a Ω.

3. Descrever os elementos do evento E.

4. Determinar qual região do plano (ou da reta) corresponde a E.

5. Calcular as áreas (ou comprimentos) correspondentes a Ω e E e calcular $P(E)$.

Note que no item 1 acima, quando descrevemos Ω com uma variável x obtemos um subconjunto da reta, e quando descrevemos Ω com duas variáveis x e y obtemos um subconjunto do plano. Neste texto nos restringimos apenas a estes casos, mas também podemos ter situações com mais variáveis. Por exemplo, se descrevemos Ω com três variáveis x, y e z, então obtemos um subconjunto do espaço tridimensional, e neste caso calcularíamos volumes em vez de áreas ou comprimentos.

Problemas recomendados: **16, 17 e 18.**

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Numa urna existem duas bolas vermelhas e seis brancas. Sorteando-se uma bola, qual a probabilidade de ela ser vermelha?

2. ● Temos duas moedas, das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso, é lançada. Qual é a probabilidade de se obter cara?

3. ● Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

4. ▲ Um dado de seis faces é viciado, de modo que a probabilidade de observarmos um número na face de cima é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de:

   (a) ocorrer número par.

   (b) ocorrer número maior ou igual a 5.

5. ▲ Qual é a probabilidade de que um número inteiro positivo menor do que 1000 tenha pelo menos um algarismo 1 em sua representação decimal?

6. ▲ Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. Calcule a probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe.

7. ● Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

   (a) Qual a probabilidade de o número ser par?
   (b) Qual a probabilidade de o número ser par, dado que ele é menor que 50?
   (c) Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5, dado que é par?

8. ▲ Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?

9. ▲ Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $\frac{9}{10}$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

10. ♦ O professor Guilherme criou três estranhas máquinas. A máquina A transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{1}{3}$. A máquina B transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{2}{5}$. A máquina C transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{1}{4}$. E se o animal é um cachorro, nenhuma das máquinas faz transformação alguma.

    O professor Guilherme colocou um gato na máquina A, depois colocou o animal resultante da máquina A na máquina B e, por fim, colocou o animal resultante da máquina B na máquina C. Qual a probabilidade de ter saído um cachorro da máquina C?

11. ♦ Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

12. ♦ Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

13. ♦ Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocres e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor é $\frac{1}{2}$. Quantas faces ocres tem o segundo cubo?

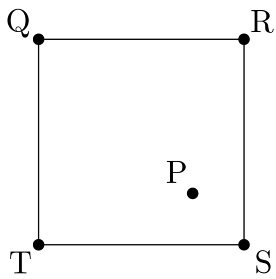
14. ♦ Escolha três números naturais consecutivos e faça a multiplicação entre estes três números. Qual é a probabilidade do número obtido ser divisível por 12?

15. ♦ Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

16. ♦ Marcel e Vitor escolhem um número real aleatório entre 0 e 1. Marcel afirma que a soma dos dois números é maior que $\frac{1}{2}$ e Vitor afirma que a soma dos quadrados dos dois números é menor que 1. Qual é a probabilidade de ambos estarem corretos?

17. ♦ Escolhendo aleatoriamente um número $\alpha \in [0, 1]$, qual é a probabilidade do polinômio $x^2 + x + \alpha$ ter raiz real?

18. ♦ Um ponto P é escolhido ao acaso no interior de um quadrado $QRST$, conforme a figura a seguir. Qual é a probabilidade do ângulo $\angle RPQ$ ser agudo?



19. ♦ Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira pessoa a chegar esperará no máximo 15 minutos pela outra. Ache a probabilidade de este encontro realizar-se neste intervalo, admitindo-se que os instantes de chegada (entre 11 e 12 horas) de cada uma das pessoas provêm do acaso.

20. ★ Cem pessoas estão em fila para embarcar em um avião. Cada uma delas possui uma passagem com um assento designado. Entretanto, a primeira pessoa a embarcar perdeu sua passagem e decide sentar em um assento aleatório. Depois disso, cada pessoa senta em seu respectivo assento se ele estiver desocupado, ou em um assento aleatório se ele não estiver. Qual é a probabilidade da última pessoa que embarcar sentar em seu assento designado?

21. ★ Quatro pontos são escolhidos na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Qual é a probabilidade que a origem esteja dentro do tetraedro determinado por esses quatro pontos?

Respostas dos Problemas Propostos

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{2}{9}$
4. (a) $\frac{4}{7}$

   (b) $\frac{11}{21}$
5. $\frac{271}{999}$
6. $\frac{13}{25}$
7. (a) $\frac{1}{2}$

   (b) $\frac{24}{49}$

   (c) $\frac{1}{5}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{25}{44}$
10. $\frac{7}{10}$
11. $\frac{1}{30}$
12. $\frac{5}{8}$
13. 3
14. $\frac{3}{4}$
15. $\frac{1}{2007}$
16. $\frac{2\pi - 1}{8}$
17. $\frac{1}{4}$
18. $1 - \frac{\pi}{8}$
19. $\frac{7}{16}$
20. $\frac{1}{2}$
21. $\frac{1}{8}$

Aula 4

Lógica e Princípio do Extremo

4.1 Lógica

A lógica é a ciência do raciocínio, e muitos problemas matemáticos exigem o seu uso para serem resolvidos. Com isso, a lógica matemática aparece como uma ferramenta para desenvolver a argumentação de ideias abstratas.

Nesta aula, apresentaremos problemas que não exigem conhecimento matemático teórico prévio, mas que exigem raciocínio lógico e criatividade. O segredo é **organizar as informações** oferecidas pelos problemas. Veja alguns exemplos a seguir.

Exemplo 4.1. Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois cada bactéria se divide em duas, no próximo segundo todas as bactérias se dividem novamente em duas, e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro está cheio. Quando o vidro estava pela metade?

Solução:

Perceba que a cada segundo o número de bactérias dobra. Pensando a partir do final, vemos que, se o vidro está cheio depois de 60 segundos, então ele estava pela metade um segundo antes. Logo, o vidro estava pela metade depois de 59 segundos. □

Exemplo 4.2. (OBMEP 2018) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

Emília: Não fui eu.

Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.

Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.

Rafaela: Não foi a Luísa.

Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

Solução:

Neste problema iremos utilizar uma das técnicas mais poderosas para resolver problemas matemáticos: **a prova por absurdo**.

Primeiramente perceba que Luísa e Vitória não podem estar falando a verdade ao mesmo tempo, ou seja, a mentirosa é uma das duas.

Suponha, por absurdo, que Luísa tenha mentido. Então quem desenhou não foi Marília nem Rafaela. Como Emília, Marília e Rafaela falam a verdade, então os culpados também não foram Emília, Vitória ou Luísa, o que é contradição, o que implica que quem mentiu foi a Vitória. Como todas as outras netinhas falam a verdade, então a culpada é Marília. □

Problemas recomendados: **1, 2, 3, 4, 5 e 6**.

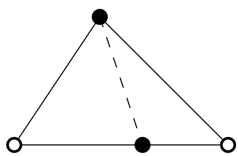
4.2 Princípio do Extremo

Se possível, assuma que os elementos do seu problema estão ordenados de algum modo. Tente estudar o "maior" ou o "menor" elemento desta ordem para concluir algo sobre o problema.

O Princípio do Extremo é uma técnica útil para resolver certos problemas matemáticos. Vamos ver um exemplo.

Exemplo 4.3. Sejam B e P conjuntos finitos de pontos brancos e pretos, respectivamente, no plano, com a propriedade de que todo segmento que une dois pontos X e Y da mesma cor possui um ponto Z da outra cor (sendo Z diferente de X e de Y). Prove que ambos os conjuntos de pontos estão em um mesmo segmento de reta.

Solução: Suponha, por absurdo, que os conjuntos B e P não estão em um mesmo segmento de reta. Então, existe pelo menos um triângulo cujos vértices são dados por pontos de $B \cup P$.



Considere o triângulo de menor área. É claro que este triângulo possui dois vértices da mesma cor, logo entre eles há um ponto da outra cor. Mas assim obtemos um triângulo de área menor que o inicial, o que é uma contradição, pois havíamos tomado o triângulo de menor área. Portanto, o que supomos é falso, o que significa que os pontos de B e P estão em um mesmo segmento de reta. $\square$

Definição 3. Uma **ordem** em um conjunto S é uma relação $\leq$ entre os elementos de S que satisfaz as seguintes três propriedades, para todos $a, b, c \in S$:

1. $a \leq a$ (reflexividade);

2. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (antissimetria);

3. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitividade).

Denotamos $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$, para $a, b \in S$.

Agora podemos definir de modo preciso o que significa o "maior" e o "menor" elementos de um conjunto com uma ordem dada:

Definição 4. [1] Seja S um conjunto ordenado pela relação $\leq$.

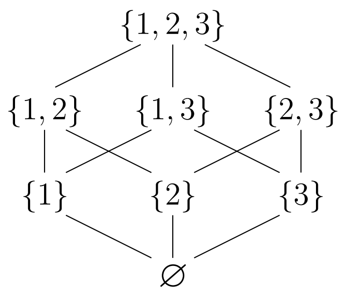
1. Dizemos que x é um elemento máximo de S se $x \in S$ e $a \leq x$ para todo $a \in S$.

2. Dizemos que y é um elemento mínimo de S se $y \in S$ e $y \leq a$ para todo $a \in S$.

Exemplo 4.4. Seja S o conjunto dos subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$, ou seja,

$$S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Se para $A, B \in S$ definirmos $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, então temos uma ordem em S. Um modo de vizualizar esta ordem em S é pelo **diagrama de Hasse**, representado na figura a seguir:



Note que neste caso $\varnothing$ é um elemento mínimo e $\{1, 2, 3\}$ é um elemento máximo de S.

No Exemplo 4.3 não utilizamos uma ordem no conjunto dos triângulos com vértices em $B \cup P$, mas sim uma ordem no conjunto

[1] Também existem os conceitos de elemento maximal e elemento minimal, mas não vamos entrar nestes detalhes.

das áreas destes triângulos, sendo esta a ordem entre números reais que já conhecemos. Em geral, nos problemas que iremos apresentar aqui, é isso que iremos fazer, ou seja, utilizar a ordem usual dos números reais para descrever outros objetos.

A seguir apresentamos três fatos importantes referentes à ordem usual dos números reais, que devemos ter em mente ao utilizar (ou tentar utilizar) o Princípio do Extremo:

- Todo conjunto não vazio e finito de números reais possui um elemento mínimo e um elemento máximo.
- Todo conjunto não vazio de números inteiros positivos possui um elemento mínimo (este é o conhecido *Princípio da Boa Ordem*).
- Um conjunto infinito de números reais não precisa ter necessariamente um elemento mínimo ou máximo. Por exemplo, o conjunto $(2,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ não possui mínimo e nem máximo, enquanto que $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ possui máximo, mas não possui mínimo.

Problemas recomendados: **7 e 8**.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● (OBM 2015, adaptada) Juquinha e seus amigos organizaram uma corrida com seus carrinhos. O carrinho branco chegou antes do vermelho e do marrom. O carrinho azul chegou depois do marrom e antes do vermelho. Qual foi a ordem de chegada dos carrinhos?

2. ▲ (OBM 2016) Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que a pessoa imediatamente à sua frente é mentirosa. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

3. ▲ (OBM 2014) Roraima Jonas, um arqueólogo aventureiro, ao fugir de uma caverna se depara com quatro portas, numeradas de 1 até 4, e quatro mensagens. As mensagens dizem:

   - Mensagem 1: "As portas 1 e 2 são seguras."
   - Mensagem 2: "Exatamente duas entre as portas 1, 2 e 3 são seguras."
   - Mensagem 3: "A porta 1 é segura."
   - Mensagem 4: "A porta 3 é segura."

   Roraima Jones é um estudioso e, por isso, sabe que exatamente uma das mensagens é mentira e exatamente uma das portas não é segura (ativaria uma armadilha). Qual porta Roraima Jonas pode garantir que é segura?

4. ♦ (OBM 2001) Cinco animais A, B, C, D, e E, são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. A diz que B é um cão. B diz que C é um lobo. C diz que D é um lobo. D diz que B e E são animais de espécies diferentes. E diz que A é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?

5. ♦ (OBM 2010) Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:

- Arnaldo: "Eu tenho quatro cartas com o mesmo número."
- Bernaldo: "Eu tenho as cinco cartas vermelhas."
- Cernaldo: "As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V."
- Dernaldo: "Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número."

Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

6. ♦ (OBM 2011) No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

   - X: "Hoje está chovendo."
   - Y: "O nerd que acabou de falar está mentindo."
   - Z: "Hoje não está chovendo."
   - W: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerds."

   Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?

7. ♦ Há uma quantidade ímpar de soldados em um campo de batalha, de modo que as distâncias entre quaisquer dois deles são distintas duas a duas. Em um determinado momento, cada um deles atira no soldado mais próximo de si. Prove as afirmações a seguir.

   (a) Existem dois soldados que atiraram um no outro.

   (b) Há pelo menos um soldado que não levou um tiro.

   (c) Nenhum soldado levou mais de cinco tiros.

   (d) As trajetórias dos tiros não se cruzam.

(e) Os segmentos formados pelas trajetórias dos tiros não formam um polígono convexo fechado.

8. ♦ Encontre todas as soluções positivas do sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} a+b=c^2 \\ b+c=d^2 \\ c+d=e^2 \\ d+e=a^2 \\ d+a=b^2 \end{cases}$$

9. ♦ Em um país todas as estradas entre suas cidades são de mão-única (possuem apenas um sentido), e tais que quando você sai de uma cidade, você não consegue retornar a ela. Considerando que existe uma quantidade finita de cidades, prove que existe uma cidade A na qual todas as estradas ligadas a ela a levam para fora de A, e que existe uma cidade B na qual todas as estradas ligadas a ela a levam para dentro de B.

10. ★ Prove que, para todo inteiro positivo n, o número $n\sqrt{2}$ não é inteiro. Conclua que $\sqrt{2}$ é irracional.

11. ★ Mostre que não existem triplas de inteiros positivos (x, y, z) que satisfazem a equação

$$x^2 + 10y^2 = 3z^2.$$

12. ★ Cada ponto do plano com coordenadas inteiras é rotulado com um inteiro positivo. Suponha que cada um destes números é a média aritmética dos rótulos dos seus quatro pontos vizinhos (os pontos imediatamente abaixo, acima, à esquerda e à direita). Mostre que todos os rótulos têm o mesmo valor.

13. ★ Em uma festa assuma que nenhum homem dançou com todas as mulheres, e cada mulher dançou com pelo menos um homem. Prove que existem dois casais homem-mulher (H, M)

e (H', M') que dançaram juntos, mas H não dançou com M' e M não dançou com H'.

14. ★ Prove que não existem quádruplas de inteiros positivos (x, y, z, u) satisfazendo

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

15. ★ Considere $2n$ pontos no plano com a propriedade de que se tomarmos 3 pontos entre estes, eles não serão colineares. Exatamente n destes pontos são fazendas, denotados por $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$, e os restantes n pontos são poços de água, denotados por $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Serão construídas estradas em linhas retas ligando cada fazenda a um único poço, sendo que cada poço irá ser ligado a uma única fazenda. Mostre que é possível fazer isso de modo que nenhuma das estradas se intersectem.

16. ★ Considere uma quantidade finita de pontos no plano de modo que se escolhermos quaisquer três destes pontos, A, B e C, então a área do triângulo ABC é sempre menor do que 1. Mostre que existe um triângulo de área menor do que 4 tal que todos estes pontos estão dentro deste triângulo, ou em sua borda.

Caso você já tenha resolvido todos os problemas desta lista, recomendamos que dê uma olhada no livro *Problem-Solving Strategies* de Arthur Engel, listado na bibliografia, que possui uma enorme quantidade de problemas sobre o Princípio do Extremo (com soluções), que você pode se divertir tentando resolver. Uma outra opção também é o livro *The Art and Craft of Problem Solving* de Paul Zeitz, embora este não apresente soluções para todos os problemas.

Dicas e Soluções dos Problemas Propostos

Antes de ver a solução de um problema tente passar um bom tempo tentando resolver ele! Só assim você poderá apreciar sua solução e aprender com ela.

1. **Dica:** Liste os carrinhos por ordem de chegada.

2. **Dica:** Verifique que a primeira pessoa da fila é mentirosa e depois estude o que acontece.

3. **Dica:** Suponha que a mensagem k é mentira para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, e analise cada caso.

4. **Dica:** Se supormos que A é um cão, então chegaremos em uma contradição. Portanto, A é um lobo. Agora conclua que A, B, D e E são lobos, e C é um cão.

5. **Dica:** Arnaldo e Bernaldo não podem dizer a verdade simultaneamente, logo quem mentiu foi Arnaldo ou Bernaldo.

6. **Dica:** Considere o caso em que está chovendo e depois considere o caso em que não está chovendo.

7. (a) **Dica:** Utilize o Princípio do Extremo.
   (b) **Dica:** Pelo item (a), há dois soldados A e B que atiraram um no outro. Estude o que acontece se mais algum soldado atirou em A ou B. Estude também o que acontece se mais ninguém atirou em A ou B.
   (c) **Dica:** Suponha por absurdo que algum soldado P tenha levado mais de cinco tiros, isto é, os soldados A, B, C, D, E, ... atiraram em P. Então $|AP| < |AB|$ e $|BP| < |AB|$. Logo AB é o maior lado do triângulo ΔABP. O que podemos dizer a respeito dos ângulos deste triângulo?
   (d) **Dica:** Suponha que há duas trajetórias de tiros que se cruzem. Utilize a desigualdade triangular para chegar em uma contradição.
   (e) **Dica:** Suponha que exista tal polígono convexo fechado $ABCD \cdots MN$, onde N é o soldado mais próximo do soldado A. Compare as arestas deste polígono para chegar em uma contradição.

8. **Dica:** Seja (a, b, c, d, e) uma solução deste sistema. Considere x como o maior, e y o menor dos números a, b, c, d, e.

9. **Dica:** Note que em uma viagem é possível se deslocar pelas cidades apenas por um número finito de vezes, pois uma vez que saímos de uma cidade, não podemos retornar a ela, e há uma quantidade finita de cidades. Considere o conjunto dos comprimentos possíveis de todas viagens entre as cidades. Como esse conjunto é finito, ele admite um elemento máximo.

10. **Dica:** Considere S o conjunto dos inteiros positivos n tais que $n\sqrt{2}$ é inteiro. A ideia é provar que S é vazio, ou seja, que não existem tais inteiros positivos n. Suponha por absurdo que S não é vazio e utilize o fato de S possuir um elemento mínimo (Princípio da Boa Ordem).

11. **Dica:** Assuma que tem solução, e seja (x, y, z) uma solução com a menor soma $x + y + z$. Perceba que o número do lado esquerdo da equação termina em 0, 1, 4, 5, 6, ou 9, enquanto que o número do lado direito da equação termina em 0, 2, 3, 5, 7, ou 8. Quais são as condições para ocorrer a igualdade?

12. **Dica:** Considere o menor rótulo entre todos os rótulos (este rótulo existe, por causa do Princípio da Boa Ordem).

13. **Solução:** Considere o conjunto $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{algum homem dançou com } n \text{ mulheres}\}$. Como este conjunto é finito, possui um elemento máximo $p \in S$. Assim, seja H um homem que dançou com p mulheres (note que pode haver mais de um homem que dançou com p mulheres). Existe uma mulher M' que não dançou com H. Agora seja H' um homem que dançou com M'. Por fim, vejamos que existe uma mulher M que dançou com H mas não dançou com H': suponha, por absurdo, que não existe tal mulher M. Então, toda mulher que dançou com H também dançou com H'. Por outro lado, H' dançou com M', e H não dançou com M, logo H' dançou com pelo menos $p + 1$ mulheres, o que é contradição, pois o maior elemento de S é p, e $p < p + 1$. Portanto, existe tal mulher M, e os pares (H, M) e (H', M') satisfazem as condições do enunciado.

14. **Solução:** Suponha que existe alguma tal quádrupla. Tome a solução (quádrupla) com o menor valor possível para $x^2 + y^2$ (tal quádrupla existe, pois x e y são sempre inteiros, e logo $x^2 + y^2$ sempre será um número inteiro positivo). Seja (a, b, c, d) esta solução. Temos:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) \quad \Rightarrow \quad 3|(a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \quad 3|a \ \text{ e } \ 3|b$$

Bom, vejamos que realmente vale a segunda implicação acima: dado um número inteiro n, temos três possibilidades:

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod 3 \quad &\Rightarrow \quad n^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \quad &\Rightarrow \quad n^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 2 \pmod 3 \quad &\Rightarrow \quad n^2 \equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

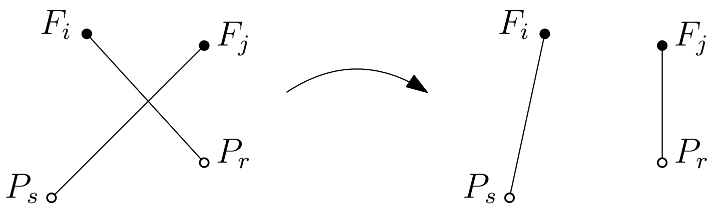
Assim, como temos $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$, devemos ter que $a \equiv 0 \pmod 3$ e $b \equiv 0 \pmod 3$. Portanto, segue que $a = 3a_1$ e $b = 3b_1$, com a_1 e b_1 inteiros positivos. Ficamos então com:

$$a^2 + b^2 = 9(a_1^2 + b_1^2) = 3(c^2 + d^2) \quad \Rightarrow \quad c^2 + d^2 = 3(a_1^2 + b_1^2).$$

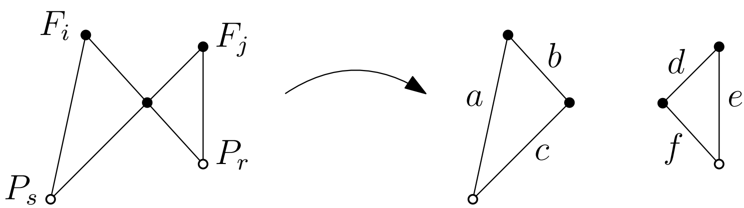
Assim, (c, d, a_1, b_1) é uma solução, e $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$, o que é uma contradição, pois havíamos tomado a solução (a, b, c, d) com $a^2 + b^2$ sendo o menor valor possível entre todas as soluções. Assim provamos que não existem tais quádruplas.

15. **Solução:** Considere todas as bijeções $g : F \longrightarrow P$ que associam as fazendas aos poços de água. Se desenharmos uma linha reta entre F_i e $g(F_i)$, obtemos um sistema de estradas. Note que há $n!$ possibilidades para os sistemas de estradas, pois existem $n!$ bijeções do tipo $g : F \longrightarrow P$. Defina o comprimento de um sistema de estradas como a soma dos comprimentos de cada estrada deste sistema. Agora considere o sistema com o menor comprimento possível (este sistema existe, pois corresponde ao mínimo de um conjunto finito de números reais, que existe). Suponha que neste sistema existam duas estradas que se intersectam, digamos, as estradas que ligam F_i a P_r, e F_j

a P_s. Neste caso podemos considerar o sistema que obtemos trocando estas duas estradas, ou seja, conectando F_i com P_s e F_j a P_r (veja a imagem abaixo).



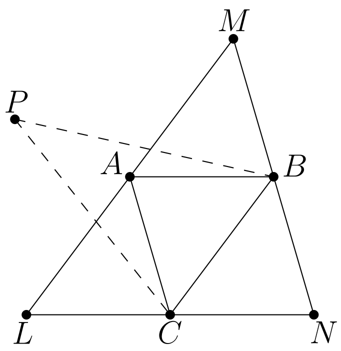
Assim, este novo sistema de estradas terá um comprimento menor do que aquele que começamos, por causa da desigualdade triangular:



$$a < b + c \quad \text{e} \quad e < d + f \quad \Longrightarrow \quad a + e < (b + f) + (d + c)$$

Mas isto é uma contradição, pois havíamos tomado o sistema de estradas com o menor comprimento possível. Portanto, não é verdade que existem estradas se intersectando neste sistema, e assim provamos o que queríamos, pois basta considerar este sistema de menor comprimento possível.

16. **Solução:** Sejam Ω o conjunto de pontos dados inicialmente, e ABC o triângulo de maior área, entre todos os triângulos cujos vértices são pontos do conjunto Ω. Vamos denotar a área de ABC por $[ABC]$. Neste caso temos $[ABC] < 1$. Seja LMN o triângulo cujo triângulo medial é ABC, ou seja, A, B e C são os pontos médios de LM, MN e NL, respectivamente.



Temos que $[LMN] = 4[ABC] < 4$. Agora vejamos que todos os pontos de Ω estão dentro de LMN, ou em sua borda: suponha que não, ou seja, que existe um ponto $P \in \Omega$ tal que P esteja fora de LMN. Então podemos conectar P com dois vértices de ABC, formando um triângulo com área maior de que $[ABC]$, o que é contradição, pela maximalidade da área de ABC. Assim, todo ponto $P \in \Omega$ está dentro ou nas bordas do triângulo LMN, que possui área menor do que 4.

Aula 5

Binômio de Newton

Vamos, primeiramente, relembrar a determinar a quantidade de combinações de um conjunto.

<u>**Combinações:**</u> De quantos modos podemos escolher k objetos distintos entre n objetos distintos dados, considerando que a ordem destes k objetos não importa? Ou equivalentemente, quantos são os subconjuntos de k elementos de um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n elementos? A resposta é

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

5.1 Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito onde são dispostos os coeficientes das expansões binominais, como mostrado acima. O padrão continua como mostrado na figura acima, ou seja, a k-ésima linha do Triângulo de Pascal terá k termos, sendo eles $\binom{k-1}{0}, \binom{k-1}{1}, \ldots, \binom{k-1}{k-2}, \binom{k-1}{k-1}$.

Recomendamos assistir o video

The mathematical secrets of Pascal's triangle

de Wajdi Mohamed Ratemi do canal **TED-Ed** no Youtube.

Problemas recomendados: **1 e 2**.

5.2 Binômio de Newton

O Binômio de Newton é a potência da forma $(x+y)^n$, onde $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Podemos recorrer ao triângulo de Pascal para determinar os coeficientes binomiais dessa expansão. Temos então a seguinte relação:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Vamos ver alguns exemplos que utilizam a fórmula binomial acima.

Exemplo 5.1. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}.$$

Solução: O termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma

$$\binom{10}{k}\frac{(-1)^{10-k}(x^3)^k}{(x^2)^{10-k}} = \binom{10}{k}(-1)^{10-k}x^{5k-20}.$$

Para o termo independente de x, devemos ter $5k-20=0$, ou seja, $k=4$. Portanto, o coeficiente procurado é $\binom{10}{4}(-1)^6 = 210$. $\square$

Exemplo 5.2. Determine a soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x-2y)^{10}$.

Solução: Como vimos pela relação acima, temos que o termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma $\binom{10}{k}x^k(-2y)^{10-k}$. Ao substituirmos x e y por 1, obteremos apenas o coeficiente de cada termo. Logo a soma de todos eles é $(1-2)^{10} = 1$. $\square$

Exemplo 5.3. Prove que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, onde $n \geq 1$.

Solução: Sabemos do binômio de Newton que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale que:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Logo, basta substituir $x=y=1$ e assim obtemos:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}.$$

$\square$

Problemas recomendados: **3, 4 e 5**.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Mostre que $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$.

2. ▲ Prove que se $1 \leq k \leq n$, então $\dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k} = \dbinom{n}{k}$. Esta identidade é conhecida como Relação de Stifel.

3. ● Utilizando o binômio de Newton, determine o desenvolvimento das expressões a seguir:
   (a) $(3x+1)^4$
   (b) $(2x-3)^5$
   (c) $(3x-5y)^7$

4. ● (UFC, adaptada) Determine o coeficiente de x^3 no polinômio $p(x) = (x-1)(x+3)^5$.

5. ▲ Determine a soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(14x-13y)^{237}$.

6. ▲ (Mackenzie, adaptada) Seja $\alpha \in [0, 2\pi]$, onde α é a maior raiz da equação

$$\binom{4}{0}\cos^4 x - \binom{4}{1}\cos^3 x + \binom{4}{2}\cos^2 x - \binom{4}{3}\cos x + 1 = 0.$$

Determine o valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha}{4}\right)$.

7. ♦ Prove que a soma de todos os coeficientes da fila n-ésima do triângulo de Pascal é duas vezes a soma dos coeficientes da fila anterior.

8. ♦ Determine o valor de $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5$.

9. ♦ Prove que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$, onde $n \geq 1$.

10. ♦ Dado um conjunto não-vazio A com uma quantidade par de elementos, prove que o número de subconjuntos de A com um número ímpar de elementos é igual ao número de subconjuntos de A com um número par de elementos.

11. ♦ (ITA 2004, adaptada) Determine o termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\displaystyle\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$.

12. ♦ (ITA, adaptada) Considere o conjunto $S = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+b = 18\}$. Determine o valor da soma:

$$\sum_{(a,b)\in S}\frac{18!}{a!b!}.$$

13. ♦ Prove que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$, onde $n \geq 1$, $k \geq 0$.

14. ♦ Prove que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$, onde $n \geq 1$, $k \geq 0$.

15. ♦ De $3n+1$ objetos, n são idênticos e os demais são todos distintos. Mostre que é possível escolher n objetos entre os $3n+1$ objetos de 2^{2n} modos.

16. ★ Quantos subconjuntos de $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ possuem a propriedade de que não possuem números sucessivos?

Aula 6

Princípio da Casa dos Pombos

Proposição 5. Se distribuirmos $n+1$ pombos em n gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, dois pombos.

A proposição enunciada acima é conhecida como o **princípio da casa dos pombos (PCP)**.

Apesar de sua simplicidade, ela admite consequências surpreendentes, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 6.1. O princípio da casa dos pombos garante que:

- Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas nasceram no mesmo mês.
- Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.
- Em um grupo de 30 pessoas, pelo menos duas delas terão nomes com a mesma inicial.
- Em um grupo de 200 pessoas, pelo menos duas delas terão a mesma idade.

Exemplo 6.2. Uma caixa contém bolas de duas cores: branca e preta. Qual o menor número de bolas que precisam ser retiradas da caixa, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?

Solução:

Podemos retirar três bolas da caixa. Se não tivesse mais de uma bola de cada cor, só poderiam ter duas bolas. Isto é óbvio e contradiz o fato de que retiramos três bolas. Aqui as bolas fazem o papel dos pombos e as cores (preto e branco) fazem o papel das gaiolas. $\square$

É claro que podemos também quantificar melhor a ideia do princípio da casa dos pombos:

Proposição 6. (Princípio Geral da Casa dos Pombos). Se distribuirmos $nk+1$ ou mais pombos em n gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, $k+1$ pombos.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 6.3. Prove que, em qualquer grupo de vinte pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana.

Solução:

Tome como gaiolas os sete dias da semana e como pombos as vinte pessoas. A regra para pôr um pombo em uma gaiola é o dia em que a pessoa nasceu. Estamos colocando 20 “pombos" (pessoas) em 7 “gaiolas" (dias da semana). Como $20 = 7 \cdot 2 + 6$, podemos usar o Princípio Geral da Casa dos Pombos para $n = 7$, $k = 2$. Obtemos que alguma “gaiola" tem que conter pelo menos 3 pessoas. $\square$

Veja agora exemplos de problemas que requerem um pouco mais de criatividade para resolver.

Exemplo 6.4. Em uma festa há n pessoas. Mostre que, nessa festa, podemos achar duas pessoas que conhecem, na festa, uma mesma quantidade de pessoas. Considere que a relação de conhecer alguém é simétrica.

Solução:

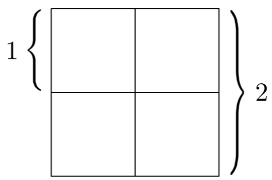
Em primeiro lugar, qualquer uma das n pessoas conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ pessoas da festa. Há dois casos a considerar:

Caso 1: Cada pessoa conhece pelo menos uma outra na festa. Tome $n-1$ salas, numeradas de 1 a $n-1$ e coloque na sala i a(s) pessoa(s) (se houver alguma) que conhece(m) exatamente i outras. Como temos $n-1$ salas e n pessoas, o princípio da casa dos pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, 2 pessoas. Essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas.

Caso 2: Existe pelo menos uma pessoa que não conhece nenhuma outra na festa. Então, ninguém conhece todas as outras pessoas na festa, de modo que podemos numerar $n-1$ salas de 0 a $n-2$ e raciocinar como no Caso 1. Novamente, o princípio da casa dos pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, duas pessoas. Também como antes, essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas. □

Exemplo 6.5. Marcamos, aleatoriamente, cinco pontos no interior de um quadrado de lado 2. Mostre que é sempre possível acharmos dois desses pontos tais que a distância entre eles seja menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução:



Divida o quadrado em quatro quadradinhos menores como na figura ao lado.

Como temos cinco pontos e quatro quadradinhos, o príncipio da casa dos pombos garante que teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Agora note que a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal. Como a diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$, o resultado segue de imediato. □

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Uma caixa contém bolas de cinco cores: branca, preta, amarela, vermelha e azul. Qual o menor número de bolas que precisam ser retiradas da caixa, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?

2. ● Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 espinhos. Mostre que pelo menos dois dos pinheiros na floresta têm que ter o mesmo número de espinhos.

3. ● Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

4. ● Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

5. ● Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove dos engradados contém o mesmo tipo de maçãs.

6. ▲ Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

7. ▲ O plano é totalmente pintado usando duas cores. Mostre que podemos encontrar dois pontos de mesma cor que distam exatamente um metro.

8. ▲ Quinze meninos juntaram 100 nozes. Mostre que dois deles juntaram o mesmo número de nozes.

9. ▲ Mostre que existem duas potências de dois distintas que diferem por um múltiplo de 2020.

10. ♦ Diversos times de futebol jogam em um torneio onde cada time tem que jogar com todos os outros exatamente uma vez. Mostre que, em qualquer instante do torneio, dois times terão jogado, até este instante, o mesmo número de jogos.

11. ♦ Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado. Mostre que algum conjunto contendo três desses pontos pode ser coberto por um quadrado com 20 centímetros de lado.

12. ♦ Seja o conjunto $A = \{1, 2, \cdots, 19, 20\}$. Qual é a maior quantidade de números do conjunto A que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

13. ♦ Seja A um conjunto finito e não vazio e seja $f : A \to A$ uma função injetora. Mostre que f é sobrejetora.

14. ♦ Dado um conjunto de 10 inteiros positivos, de 2 algarismos cada, mostre que é sempre possível obtermos dois subconjuntos disjuntos e não vazios cuja soma dos elementos é a mesma.

15. ♦ Prove que, dados 52 inteiros arbitrários, é sempre possível encontrar dois deles tais que a diferença de seus quadrados é divisível por 100.

16. ♦ Em um reticulado quadrado infinito são escolhidos cinco pontos do reticulado. Mostre que o ponto médio de um dos segmentos que une dois desses pontos também é um ponto do reticulado.

17. ♦ Dezenove flechas são arremessadas sobre um alvo com formato de um hexágono regular de lado 1. Mostre que duas destas flechas estão a uma distância de no máximo $\frac{\sqrt{3}}{3}$ uma da outra.

18. ♦ Mostre que todo natural n tem um múltiplo cuja representação decimal contém somente os algarismos 0 e 1.

19. ♦ Mostre que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

20. ♦ Mostre que existe uma potência de três que termina com os algarismos 001 (em notação decimal).

21. ♦ Um cubo de lado 1 contém 2019 abelhas. Mostre que existem três delas dentro de uma esfera de raio $\frac{1}{11}$.

22. ★ (IMO 1985) Seja A um conjunto de 1985 inteiros positivos, nenhum dos quais tem um divisor primo maior que 26. Mostre que é possível encontrarmos quatro elementos de A cujo produto seja uma quarta potência.

Dicas para os Problemas Propostos

1. Revise o Exemplo 6.2.

2. Os pombos são os pinheiros. As gaiolas são os possíveis números de espinhos de um pinheiro.

3. De quantas maneiras diferentes é possível responder esta prova, marcando todas as dez respostas? Agora aplique o PCP.

4. Mostre que para 37 bolas existe um contraexemplo. O que acontece se retirarmos 38 bolas?

5. Tome como gaiolas os 3 tipos de maçãs e como pombos os 25 engradados.

6. Os pombos são os doze números. As gaiolas são os restos da divisão por 11.

7. Imagine um triângulo equilátero de lado igual a um metro.

8. Suponha, por absurdo, que cada um deles juntou um número diferente de nozes. O que você pode concluir?

9. Os pombos são 2021 potências de dois distintas arbitrárias. As gaiolas são os restos da divisão por 2020.

10. Revise o Exemplo 6.4.

11. Divida o quadrado em 25 quadrados menores com 20 centímetros de lado.

12. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{3, 6, 12\}$, $C = \{5, 10, 20\}$, $D = \{7, 14\}$, $E = \{9, 18\}$ e $F = \{11, 13, 15, 17, 19\}$. Quais elementos de cada conjunto podemos tomar?

13. Suponha que f não é sobrejetora. Então existe $y \in A$ tal que $f(x) \neq y$, $\forall\, x \in A$. Conclua que f não é injetora.

14. O conjunto tem $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos não vazios. Por outro lado, a soma dos elementos do conjunto é, no máximo, $90 + 91 + \cdots + 99 = 945$. O que podemos concluir?

15. Perceba que, quando dividido por 100, um quadrado perfeito pode ter apenas 51 restos possíveis, pois os números x^2 e $(100-x)^2$ têm o mesmo resto.

16. Considere a paridade das coordenadas dos pontos. Temos quatro possibilidades: (ímpar, ímpar); (ímpar, par); (par, ímpar); (par par).

17. Divida o hexágono em seis triângulos equiláteros e cada triângulo equilátero em três quadriláteros traçando a perpendicular a partir de seu centro a cada um dos lados.

18. Os pombos são os $n+1$ números $1, 11, 111, \cdots, 11\cdots1$ (este último com $n+1$ algarismos 1), enquanto as casas são os restos da divisão de um inteiro por n (os números $0, 1, \cdots, n-1$).

19. Se $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ são os dez inteiros, considere as somas $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\cdots$, $S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$. Se uma dessas somas for múltiplo de 10, encontramos a solução. Caso contrário, tome os dez inteiros como pombos e os restos da divisão por 10 (distintos de zero) como gaiolas.

20. Mostre que existem duas potências de três 3^m e 3^n (onde $m > n$) tal que $3^m - 3^n$ é divisível por 1000, e conclua que 1000 divide $3^{m-n} - 1$.

21. Divida o cubo em 1000 cubos menores de lado $\frac{1}{10}$. Qual é o raio da esfera circunscrita em um destes cubos menores?

22. Se $x \in A$, então $x = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \cdot 11^{a_5} \cdot 13^{a_6} \cdot 17^{a_7} \cdot 19^{a_8} \cdot 23^{a_9}$, onde $a_1, a_2, \cdots, a_9$ são inteiros não negativos. Note que existem $2^9 = 512$ enuplas $(a_1, \cdots, a_9)$ distintas módulo 2. Como $1985 > 512$, o PCP garante que podemos escolher $x_1, y_1 \in A$ tais que $a_{ix_1} \equiv a_{iy_1} (\text{mod } 2)$, para $1 \leq i \leq 9$, o que implica que $x_1 \cdot y_1 = z_1^2$ para algum z_1 natural.

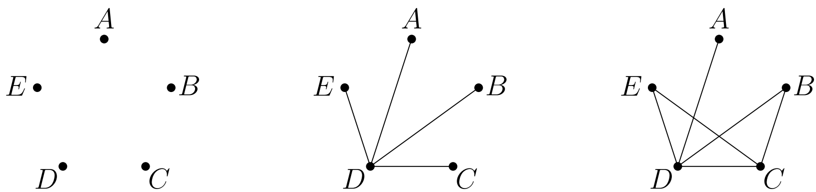
Aula 7

Grafos

Antes de começarmos a teoria, vamos ver como podemos resolver o seguinte problema:

Exemplo 7.1. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo são estudantes de distintas partes do Brasil que foram escolhidos para representar o seu país nas olimpíadas internacionais. Depois de várias semanas de treino, algumas amizades foram formadas. Perguntamos, então, a cada um deles quantos amigos tinham feito no grupo. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo responderam, respectivamente, que tinham feito 1, 2, 3 e 4 amigos dentro do grupo. Quantos dos integrantes do grupo são amigos de Ernaldo?

Solução: Vamos representar os estudantes pelas letras A, B, C, D e E, respectivamente (veja a figura à esquerda).



Agora vamos ligar os estudantes que são amigos. Como Dernaldo possui 4 amigos, então devemos ligar o ponto D a todos os outros pontos (veja a figura do meio). Note que Arnaldo possui apenas 1 amigo, que é o Dernaldo, e assim não podemos ligar mais nenhum outro ponto ao ponto A. Agora, Cernaldo possui 3 amigos, portanto, devemos ligar o ponto C a outros três pontos. Porém, não podemos ligar o ponto C ao ponto A, o que implica que devemos ligar o ponto C aos pontos B, D e E (veja a figura à direita). Observamos agora que Bernaldo possui apenas 2 amigos, que já estão representados na figura obtida, então não precisamos ligar mais nenhum ponto ao ponto B. Por fim, veja que não podemos ligar o ponto E a mais nenhum outro ponto, pois isto iria contradizer as informações dadas no problema, logo esta é a configuração final que descreve todas as amizades entre os estudantes. Assim, há exatamente dois integrantes do grupo que são amigos de Ernaldo, o Cernaldo e o Dernaldo.

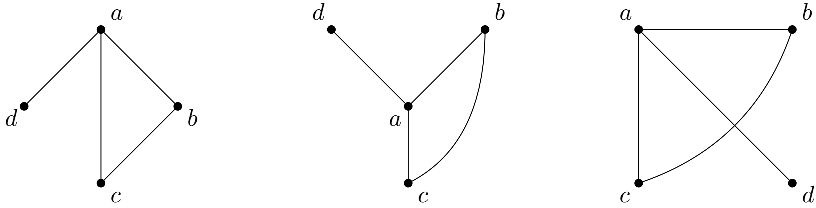
$\square$

Definição 5. Um **grafo simples** é um par $G = (V, A)$, onde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto finito e não vazio e $A \subset \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V \text{ com } i \neq j\}$. Os elementos de V são os **vértices** do grafo G e os elementos de A são as **arestas** de G.

Se $G = (V, A)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são **adjacentes** se $\{u, v\} \in A$. Ou seja, se há uma aresta ligando u e v.

É conveniente representar um grafo por um diagrama, onde os vértices correspondem a pontos no plano e as arestas correspondem a linhas que ligam os seus respectivos vértices.

Exemplo 7.2. Considere $G = (V, A)$, onde $V = \{a, b, c, d\}$ e $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$. Veja abaixo algumas representações do grafo G:



Definição 6. Dado um grafo $G = (V, A)$ e $v \in V$, o **grau** de v, denotado por $g(v)$, é o número de arestas adjacentes a v.

Teorema 7.1. Em um grafo $G = (V, A)$ a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|.$$

Demonstração. Em cada vértice v temos $g(v)$ arestas ligadas a v. Note que se somarmos os graus dos vértices, obtemos o número de arestas multiplicado por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (se uma aresta liga os vértices u e v, ao somarmos $g(u)$ com $g(v)$, a aresta é contada duas vezes, uma vez em $g(u)$ e outra em $g(v)$). ■

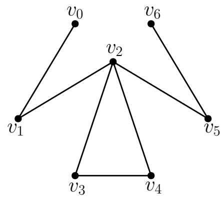
Problemas recomendados: **1, 3 e 6**.

Sugerimos que antes de prosseguir a leitura do texto, tente resolver os problemas recomendados acima.

Pronto? Então vamos lá!

Definição 7. Um **passeio** em um grafo G é uma sequência $\mathcal{P} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de vértices (não necessariamente distintos) de G, tal que u_i é adjacente a u_{i+1} para $1 \leq i \leq k - 1$. Um passeio $\mathcal{P}$ como acima é **fechado** se $u_1 = u_k$.

Exemplo 7.3. Observe o grafo representado abaixo.



A sequência de vértices $\mathcal{P} = (v_0, v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5)$ define um passeio. Por outro lado, a sequência de vértices $\mathcal{Q} = (v_0, v_1, v_2, v_6, v_5)$ **não** define um passeio, pois os vértices v_2 e v_6 não são adjacentes.

Definição 8. Um grafo é **trivial** se não possui arestas. Logo um grafo não trivial possui pelo menos uma aresta.

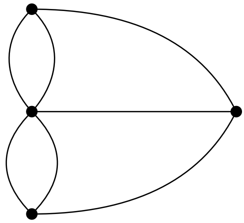
Definição 9. Um grafo é **conexo** se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices.

Definição 10. Um **passeio Euleriano** em um grafo conexo é um passeio fechado que usa cada aresta do grafo exatamente uma vez. Um grafo conexo é **Euleriano** se contiver um passeio Euleriano.

Teorema 7.2. Um grafo conexo e não trivial é Euleriano se, e só se, todos os seus vértices têm grau par.

Exemplo 7.4 (Pontes de Königsberg)**.** O teorema anterior, provado por Euler em 1735, marca o nascimento da Teoria dos Grafos. Naquela época, a cidade de Königsberg era cortada por um rio, que dava origem a algumas ilhas. Assim, para facilitar o descolamento pela cidade, haviam algumas pontes ligando estas ilhas. Aconteceu que as pessoas começaram a se perguntar se seria possível sair de algum lugar da cidade, passar por cada ponte uma única vez e voltar para o lugar inicial.

Euler modelou este problema representando cada ilha e margem por um vértice, e cada ponte por uma aresta. Assim, ele obteve o seguinte grafo:



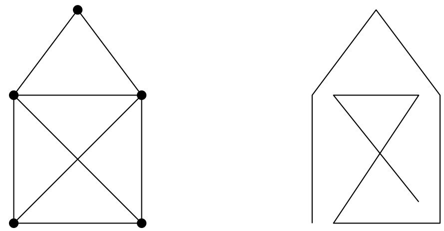
Note que este grafo possui apenas vértices de grau ímpar. Pelo teorema acima segue que o grafo não é Euleriano, e logo não é possível passar por cada ponte uma única vez e voltar para o ponto de partida.[1]

Definição 11. Um **passeio semi-Euleriano** em um grafo conexo G é um passeio que começa e termina em vértices distintos de G e atravessa cada aresta de G uma única vez.

Teorema 7.3. Um grafo conexo G possui um passeio semi-Euleriano se, e só se, G possui exatamente dois vértices de grau ímpar.

Exemplo 7.5. Veja que o grafo abaixo possui exatamente dois vértices de graus ímpares. Logo possui um passeio semi-Euleriano, pelo teorema acima. Ou seja, podemos desenhar este grafo sem tirar o lápis do papel! Veja abaixo como podemos fazer isso.

[1] Veja que neste exemplo utilizamos um grafo com mais de uma aresta ligando dois vértices. A princípio esta configuração não faz parte da nossa definição de grafo, mas não se preocupe, o Teorema 7.2 continua valendo para grafos deste tipo.



Exemplo 7.6. Um grafo conexo pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel, de modo que cada aresta é desenhada exatamente uma vez se, e só se, possui no máximo dois vértices de grau ímpar.

Definição 12. Um **ciclo** em um grafo G é um passeio fechado $(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1)$ em G tal que os vértices $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são todos distintos. Um grafo com apenas um ciclo é chamado de **grafo ciclo** ou **grafo circular**.

Definição 13. Um **ciclo Hamiltoniano** em um grafo é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Um grafo conexo é **Hamiltoniano** se contiver um ciclo Hamiltoniano.

Teorema 7.4. Se $G = (V, A)$ é um grafo com $|V| \geq 3$ e tal que $\delta(G) \geq \dfrac{|V|}{2}$, então G é Hamiltoniano.

No teorema acima, $\delta(G)$ é o **grau mínimo** de G e é definido por $\delta(G) = min\{g(v) : v \in V\}$.

Problemas recomendados: **10 e 11**.

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Figurativo é um país com nove cidades de nomes
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$
Um viajante descobre que existe vôo direto de uma cidade a outra se, e somente se, o número de dois algarismos formado pelos nomes das cidades é divisível por 3. O viajante pode ir da Cidade 1 para a Cidade 9?

2. ● Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?

3. ▲ Prove que em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.

4. ▲ Prove que em uma festa, o número de pessoas que cumprimentaram um número ímpar de pessoas é par.

5. ▲ Uma turma tem 30 alunos. É possível que nove deles tenham 3 amigos cada (na turma), onze tenham 4 amigos e dez tenham 5 amigos?

6. ▲ Prove que em um grafo com pelo menos dois vértices, existem dois vértices com o mesmo grau.

7. ▲ Prove que em uma festa com pelo menos duas pessoas, existem duas pessoas que apertaram o mesmo número de mãos.

8. ♦ Cada um dos 102 estudantes é amigo de pelo menos 68 outros alunos. Prove que existem quatro estudantes com o mesmo número de amigos.

9. ♦ Prove que é impossível dispor os números $1, 2, 3, \ldots, 13$ ao redor de um círculo de modo tal que, para dois números vizinhos quaisquer x e y, tenhamos $3 \leq |x - y| \leq 5$.

10. ▲ Cem circunferências formam uma figura conexa no plano. Prove que esta figura pode ser desenhada sem se tirar o lápis do papel ou desenhar qualquer parte de qualquer um dos círculos mais de uma vez.

11. ▲ É possível desenhar um tabuleiro 2018×2018 sem passar por uma linha mais de uma vez, e sem retirar o lápis do papel?

12. ♦ É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

13. ♦ Cinquenta cientistas estão participando de uma conferência e cada um deles conhece pelo menos 25 dos outros (se A conhece B então B conhece A). Prove que:

    (a) Existem quatro deles que podem se sentar a uma mesa redonda tendo, cada um deles, dois conhecidos como vizinhos.

    (b) Os cinquenta cientistas podem se sentar a uma mesa redonda de modo que cada um deles tenha dois conhecidos como vizinhos.

14. ♦ Seja G um grafo hamiltoniano que não é um ciclo. Mostre que G tem pelo menos dois vértices de grau maior ou igual a 3.

15. ♦ Seja G um grafo euleriano. Mostre que se removermos uma aresta de G, então G ainda será conexo.

16. ♦ O país dos Sete tem 15 cidades, cada uma delas ligadas a pelo menos 7 outras. Prove que é possível ir de qualquer cidade para qualquer outra, possivelmente passando por algumas cidades no meio do caminho.

17. ♦ Prove que um grafo com n vértices, todos com grau pelo menos $\frac{n-1}{2}$, é conexo.

18. ★ (IMO 1990) Seja $n \geq 3$ e considere um conjunto E de $2n-1$ pontos distintos em um círculo. Suponha que exatamente k

destes pontos estão pintados de preto. Tal coloração é dita *boa* se existe pelo menos um par de pontos pretos tais que o interior de um dos arcos entre eles contém exatamente n pontos do conjunto E. Determine o menor valor de k de forma que toda coloração de k pontos de E seja boa.

Aula 8

Invariantes

Informalmente, um invariante é uma quantidade que permanece constante durante a execução de um dado algoritmo. Em outras palavras, nenhuma das operações permitidas alteram o valor do invariante. Identificar um invariante tem grande utilidade na análise do resultado final de um dado algoritmo. Vamos observar um exemplo.

Exemplo 8.1. Dentro de uma caixa há 1995 bolas pretas e 2000 bolas brancas, e fora dela há 5000 bolas brancas. Retiramos da caixa 2 bolas. Se elas forem da mesma cor então retornamos uma bola branca. Se elas forem de cores diferentes retornamos uma bola preta. Repete-se o processo até que reste uma única bola na caixa. Qual pode ser a sua cor?

Solução:

Note que se as duas bolas retiradas são brancas ou são de cores distintas, então o número de bolas pretas não se altera. Se as duas bolas retiradas são pretas, então o total de bolas pretas é reduzido em duas unidades. Então a paridade do número de bolas pretas é sempre ímpar, ou seja, é invariante. Portanto não é possível que acabem todas as bolas pretas da caixa e concluímos que a bola restante ao final do processo é preta. $\square$

Vamos ver mais alguns exemplos.

Exemplo 8.2. Dois cantos opostos são removidos de um tabuleiro de xadrez. É possível preencher o tabuleiro restante com dominós?

Solução:

Suponha que os cantos removidos são ambos quadrados brancos. A cada peça de dominó que colocamos no campo, estamos removendo um quadro branco e um quadrado preto. Então $S =$ (quadrados pretos) $-$ (quadrados brancos) é invariante. Originalmente há 32 quadrados pretos e 30 quadrados brancos, o que implica que $S = 2$ em qualquer estado. O tabuleiro vazio tem $S = 0$, o que quer dizer que é impossível preencher o tabuleiro restante com dominós. $\square$

Exemplo 8.3. O príncipe Ivan tem duas espadas mágicas. Uma delas pode cortar 21 cabeças de um dragão perverso. A outra espada pode cortar 4 cabeças, mas depois disso crescem mais 1985 cabeças novas no dragão. O príncipe Ivan pode cortar todas as cabeças, se originalmente o dragão tinha 100 cabeças?

Solução:

Se Ivan utiliza a primeira espada mágica, o dragão perde 21 cabeças. Se Ivan utiliza a segunda espada mágica, o dragão perde 1981 cabeças, pois $1985 - 4 = 1981$. Podemos então utilizar como invariante o resto do número de cabeças do Dragão quando dividido por 7. O uso de qualquer uma das espadas não muda esse resto, pois 21 e 1981 são divisíveis por 7. Como 100 e 0 não são congruentes módulo 7, então o príncipe Ivan não pode cortar todas as cabeças deste dragão. $\square$

Exemplo 8.4. (OPRM 2019) O número 6^{2019} está escrito em um quadro negro. Calculamos a soma de seus algarismos, depois a soma dos algarismos do resultado e assim por diante, até obtermos um único algarismo. Qual é esse algarismo?

Solução:

Como os restos da divisão por 9 de um número natural e da soma de seus algarismos são iguais, o resto de 6^{2019} tem que ser igual ao resto do resultado final x. Temos:

$$6^{2019} \equiv 2^{2019} \cdot 3^{2019} \equiv 2^{2019} \cdot 3^{2017} \cdot 3^2 \equiv 2^{2019} \cdot 3^{2017} \cdot 9 \equiv 0 \pmod 9.$$

Como $x \equiv 0 \pmod 9$ e x é um algarismo, então $x = 0$ ou $x = 9$. Como estamos sempre somando algarismos positivos, a soma nunca será nula e, por isso, $x = 9$. □

Problemas recomendados: **1, 2, 3, 4**.

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Bruna escreve os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 na lousa. Eduardo apaga dois desses números e escreve a soma deles na lousa. Eduardo continua fazendo isso até sobrar apenas um número na lousa. Quais são os valores possíveis para esse número?

2. ▲ Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. É possível colocar sinais de $+$ e $-$ entre eles de forma que a soma dê zero?

3. ♦ Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus no sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirào as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

4. ♦ Um dragão possui 100 cabeças. Um cavaleiro pode cortar 15, 17, 20 ou 5 cabeças com um golpe de sua espada. Em cada um dos casos, 24, 2, 14 ou 17 cabeças crescem novamente, respectivamente. Se todas cabeças são cortadas, o dragão morre. É possível que o dragão morra?

5. ♦ Considere uma barra de chocolate 3×4 que tem um amendoim apenas num pedaço, em um dos cantos. Elias e Fabio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Então combinam dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fabio fique com o amendoim ao final?

6. ♦ Alice e Marcos possuem uma barra de chocolate no formato 10×10. Em cada turno, um jogador pode comer uma barra de chocolate inteira ou dividir qualquer barra de chocolate em duas barras menores, respeitando a divisão de cada bloco. O jogador que fizer o último movimento perde. Sabendo que Alice começa jogando, quem ganha esse jogo?

7. ♦ Seja n um inteiro positivo ímpar. Em um quadro estão escritos os números de 1 a $2n$. Escolhemos então dois números a e b, apagamo-os, e escrevemos $|a-b|$ em seu lugar, repetindo o processo até que haja somente um número no quadro. Prove que este número é ímpar.

8. ♦ Sete copos estão em uma mesa, todos de cabeça para baixo. É permitido virar quaisquer 4 deles em um movimento. É possível chegar a uma situação onde todos os copos estão virados para cima?

9. ♦ Um círculo está dividido em seis setores e os seis números 1, 0, 1, 0, 0, 0 estão escritos no sentido horário, um em cada setor. É permitido somar 1 aos números em dois setores adjacentes. É possível tornar todos os números iguais?

10. ♦ Os números $1, 2, 3, \cdots, n$ estão escritos em uma linha. É permitido transpor dois números vizinhos quaisquer. Se são

executadas 1989 dessas operações, é possível que a ordem final dos números coincida com a original?

11. ♦ Prove que um tabuleiro 102×102 não pode ser coberto, sem sobreposições, por poliminós 1×4.

12. ★ (IMO 2011) Seja $\mathcal{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em $\mathcal{S}$ não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do *pivot* P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de $\mathcal{S}$, que denotaremos por Q. Com Q como novo pivot, a reta continua a rodar no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de $\mathcal{S}$. Este processo continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de $\mathcal{S}$. Demonstre que se pode escolher um ponto $P \in \mathcal{S}$ e uma reta ℓ que passa por P tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de $\mathcal{S}$ como pivot infinitas vezes.

Referências Bibliográficas

Combinatória

Aula 1

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

Aula 2

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

Aula 3

1. HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 5**: combinatória, probabilidade. São Paulo, SP: Atual, 2004.
2. MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.
3. SHINE, C. **Curso de Combinatória – Nível 3, Polos Olímpicos de Treinamento**. Disponível na Internet.
4. TUNALA, N. **Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos**. RPM, nº 20.
5. WAGNER, E. **Probabilidade Geométrica**. RPM, nº 34.

Aula 4

1. ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. New York: Springer-Verlag, 1998.
2. GELCA, R.; ANDREESCU, T. **Putnam and Beyond.** New York: Springer, 2007.
3. ZEITZ, P. **The Art and Craft of Problem Solving**. John Wiley & Sons, 2007.

Aula 5

1. ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. New York: Springer-Verlag, 1998.
2. HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 5**: combinatória, probabilidade. São Paulo, SP: Atual, 2004.

Aula 6

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.
2. HOLANDA, B. **Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento**. Disponível na Internet.
3. MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: combinatória**. 2a ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.
4. SHINE, C. **Curso de Combinatória – Nível 3, Polos Olímpicos de Treinamento**. Disponível na Internet.

Aula 7

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.
2. HOLANDA, B. **Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento**. Disponível na Internet.
3. MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: combinatória**. 2a ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.
4. SHINE, C. **Curso de Combinatória – Nível 3, Polos Olímpicos de Treinamento**. Disponível na Internet.

Aula 8

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: combinatória**. 2a ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.

3. SHINE, C. **Curso de Combinatória – Nível 3, Polos Olímpicos de Treinamento**. Disponível na Internet.