```
import autograd as ag
import autograd.numpy as np
```

1 Moindres carrés linéaires

Question 1. Reprendre les méthodes vues en cours sur un exemple un peu différent. La démarche est la suivante. On part de l'équation d'une cubique

$$y = \alpha\, x^3 + \beta\, x^2 + \gamma\, x + \mu\,.$$

On a $m = 4$ paramètres à estimer. On triche ! On choisit un premier jeu de paramètres. Par exemple :

```
alpha, beta, gamma, mu = 0.5, -2, 1, 7
m = 4
```

On fixe un nombre $p \geq m$ (par exemple $p = 6$) et on place p points expérimentaux à proximité de la courbe :

```
Tx = np.array ([-1.1, 0.17, 1.22, -.5, 2.02, 1.81])
p = Tx.shape[0]
Ty_sur_la_courbe = np.array ([f(x) for x in Tx])
perturbations = 0.5*np.array ([-1.3, 2.7, -5, 0, 1.4, 6])
Ty_experimentaux = Ty_sur_la_courbe + perturbations
```

Le premier jeu de paramètres définit une courbe et donc une erreur :

$$\texttt{erreur\_initiale} = \|\texttt{Ty\_sur\_la\_courbe} - \texttt{Ty\_experimentaux}\|_2\,.$$

Calculer cette erreur. Tracer la courbe initiale (entre -1.2 et 2.1) et les points en bleu.

À partir de maintenant, le but du jeu consiste à oublier les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ dont nous sommes partis et à les retrouver à partir des points expérimentaux. En fait, on va trouver d'autres valeurs, proches de celles dont nous sommes partis mais meilleures dans le sens où elles définissent une erreur plus petite.

Construire le système d'équations linéaires $A\,x = b$ qui pose que la cubique passe par les points (ici, x désigne le vecteur des m paramètres). Calculer la solution optimale `x_optimal` en résolvant le système $A^T\,A\,x = A^T\,b$ et/ou le système $R_1\,x = Q_1^T\,b$ (deux façons différentes de calculer la même chose). Mettre à jour `alpha`, `beta`, `gamma` et `mu`. Calculer l'erreur définie par ces nouveaux paramètres dans une variable `erreur_minimale`. Vérifier qu'elle est inférieure à `erreur_initiale`. Tracer la courbe optimale en orange.

2 Méthode de Newton en une variable

Question 2. Calculer les premiers termes d'une suite (u_n) qui tende vers $\sqrt[3]{2}$ obtenue à partir d'un polynôme à coefficients entiers.

Question 3. Calculer les premiers termes d'une suite qui calcule le minimum local de la cubique optimale obtenue dans la section précédente. Au cas où vous auriez un exemple un peu différent, les coefficients sont

```
alpha, beta, gamma, mu = 1.5870106105525719, \
    -3.1447447637103476, \
    -0.37473299354311346, \
    7.484053576868045
```

Question 4. Même question, en utilisant les fonctions `grad` et éventuellement `hessian` du paquetage `autograd`.