Vincent Breault (111 226 718)

Question #2

AnalyseParLotsDeDix

1. Meilleur cas : une instance de taille n avec un échantillon positif à la position 0

- Analyse est exécutée 2 fois, et retourne ensuite.

$$C_{best} = 2$$

$$C_{best} \in \Theta(1)$$

2. Pire cas : une instance de taille n avec un échantillon positif à la position n-1 (dernière)

- Le nombre d'analyses exécutée est représenté par la sommation suivante :

$$C_{worst} = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{10} \rceil - 1} 1 + \sum_{j=10i}^{z-1} 1$$

$$= \lceil \tfrac{n}{10} \rceil + \sum_{j=10i}^{10i+8} 1$$

$$= \lceil \tfrac{n}{10} \rceil + \sum_{j=10(\lceil \frac{n}{10} \rceil - 1)}^{10(\lceil \frac{n}{10} \rceil - 1)+8} 1$$

(i correspond à la dernière itération de la boucle donc $\lceil \frac{n}{10} \rceil - 1$)

$$= \lceil \tfrac{n}{10} \rceil + 10(\cancel{\lceil \tfrac{n}{10} \rceil - 1}) + 8 - 10(\cancel{\lceil \tfrac{n}{10} \rceil - 1})$$

$$= \lceil \tfrac{n}{10} \rceil + 8$$

$$C_{worst} \in \Theta(n)$$

Analyse Dichotomique

1. Meilleur cas: une instance de taille n sans échantillons positif

- Analyse est éxécutée 3 fois, et retourne ensuite

$$C_{best} = 3$$
$$C_{best} \in \Theta(1)$$

2. Pire cas: une instance de taille n avec un échantillon positif à la position n-1 (dernière). L'ordre de croissance sera le même s'il y a au moins un échantillon positif, mais Analyse sera éxécuté plus souvent si l'échantillon positif est à la dernière position.

$$C_{worst}(n) = \begin{cases} C_{worst}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$$C(n) = C\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2$$

<pour $n = 2^k$> $C(2^k) = C(2^{k-1}) + 2$

$= C(2^{k-2}) + 4$

$= C(2^{k-3}) + 6$

$\vdots$

$= C(2^{k-i}) + 2i$

<avec $i = k$> $= C(2^0) + 2k$

$= 1 + 2k$

<avec $k = \lg n$> $C(n) = 1 + 2\lg n \Rightarrow$ Alors $C(n) \in \Theta(\lg n)$ pour $n = 2^k$

- $\lg(n)$ est une fonction harmonieuse, car $\lg n$ est non décroissante ($n_0 = 1$) et $\lg(2n) = \lg 2 + \lg n \in \Theta(\lg n)$

- Ainsi $C(n) \in \Theta(\lg n)\ \forall n > 1$

Analyse Insensée

1. Meilleur cas: une instance de taille n avec un échantillon positif à la position 42 mod n.
   - Analyse est exécutée 1 fois, et retourne ensuite

$$C_{best} = 1$$
$$C_{best} \in \Theta(1)$$

2. Pire cas: une instance de taille n avec aucun échantillon positif
   - Le nombre d'analyses est représenté par la sommation suivante

$$C_{worst} = \sum_{i=0}^{\sqrt{n}} \sum_{j=i}^{i^2} 1$$
$$= \sum_{i=0}^{\sqrt{n}} (i^2 - i)$$
$$= \sum_{i=0}^{\sqrt{n}} i^2 - \sum_{i=0}^{\sqrt{n}} i$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)(2\sqrt{n}+1) - \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{6}(2n^{3/2} + 3n + \sqrt{n}) - \frac{n+\sqrt{n}}{2}$$
$$= \frac{1}{3}n^{3/2} - \frac{1}{3}\sqrt{n}$$

$$C_{worst} \in \Theta(n^{3/2})$$