Projet F-Safe : résumé sur "multiset ordering"

Nous avons besoin d'une relation d'ordre pour pouvoir comparer les entrées et les sorties des fonctions afin de pouvoir être sûr qu'un programme termine. Ce papier nous en fournit une sous certaines hypothèses, et il comporte en plus des exemples qui sont directement liés au problème de prouvabilité de terminaison.
Nous devons pour cela avoir un ensemble S bien fondé de base. Ca veut dire qu'il existe dans cet ensemble une relation d'ordre tel qu'il n'existe pas de chaîne infinie descendante. Dans notre cas, nous aurons besoin d'une relation d'ordre sur nos types primitifs.

1 Le multiensemble

Un multiensemble est une collection non ordonnée d'éléments qui peut (ou pas) avoir de multiples occurences d'un même élément. Par exemple, sur les multiensembles de $\mathbb{N}$, $\{3,3,3,4,0,0\} = \{0,3,3,0,4,3\} \neq \{3,4,0\}$. L'ensemble des multiensembles de S est noté $M(S)$.

1.1 La relation d'ordre basique

Soit un ensemble ordonné $(S, >)$, l'ordre $\gg$ sur $M(S)$ est défini comme suit :
$M \gg M'$ si $\exists\ X, Y \in M(S), \{\} \neq X \subseteq M,\ M' = (M \backslash X) \cup Y$ et $\forall y \in Y, \exists x \in X, x > y$.
En gros, si en retirant des éléments de M et en les remplaçant par un ensemble d'éléments plus petits (selon $>$) que le plus grand retiré (cet ensemble peut-être vide), on arrive à obtenir M', alors on a $M \gg M'$.
Exemples avec $S = \mathbb{N}$:
$\{3,3,4,0\} \gg \{3,4\}$, on a retiré $\{3,0\}$ et on a ajouté $\{\}$
$\{3,3,4,0\} \gg \{3,2,2,1,1,1,4,0\}$, on a retiré $\{3\}$ et on a ajouté $\{2,2,1,1,1\}$
$\{3,3,4,0\} \gg \{3,3,3,3,2,2\}$, on a retiré $\{4,0\}$ et on a ajouté $\{3,3,2,2\}$

1.2 Propriétés sur la relation basique

Si $(S, >)$ est bien fondé, alors $(M(S), \gg)$ l'est aussi.
Si $>$ est un ordre total pour S, alors l'ordre lexicographique sur $M(S)$ suffit (à condition que les éléments internes soient ordonnés).

2 Multiensembles emboités

Les multiensembles emboités de S fonctionnent comme les multiensembles, excepté que chaque élément interne d'un multiensemble emboité de S est soit un élément de S, soit un autre multiensemble emboité de S. On note $M^*(S)$ l'ensemble des multiensembles emboités de S.

2.1 Relation d'ordre sur les multiensembles de multiensembles

Soit un ensemble ordonné $(S, >)$, l'ordre $\gg^*$ sur $M^*(S)$ est défini comme suit :
$M {\gg^*} M'$ si $(M, M^* \in SetM > M')$ ou $(M \notin S)$ ou
$(\exists\ X, Y \in M^*(S), \{\} \neq X \subseteq M,\ M' = (M \backslash X) \cup Y$ et $\forall y \in Y, \exists x \in X, x {\gg^*} y)$.
C'est une généralisation de l'ordre précédent.

2.2 Profondeur de multiensembles emboîtés et propriété

On note $M^i(S)$ l'ensemble des multiensembles de profondeur i. Grosso modo, $M^0(S) = S$, $M^1(S) = M(S)$, et $M^{i+1}(S)$ est l'ensemble des multiensembles dont les éléments appartiennent à $M^i(S)$.
Si un multiensemble M emboîté a une profondeur plus grande que M', alors $M \gg^* M'$.
Si $(S, >)$ est bien fondé, alors $(M^*(S), \gg^*)$ l'est aussi.

3 Conclusion

A condition que nos types primitifs soient bien ordonnés, alors ce papier nous donne une relation d'ordre qui rend bien ordonné les ensembles construits à partir des types primitifs, et cela de manière récursive. Le papier nous donne d'ailleurs plein d'exemples d'application à la terminaison de programmes, que nous ne détaillons pas ici.