# Codifica binaria dell' informazione



# Codifica binaria dell'informazione

- Tutte le informazioni vanno tradotte in bit (organizzati poi in Byte):
  - Numeri naturali
  - Numeri interi (con segno)
  - Numeri frazionari
  - Numeri reali
  - Caratteri
  - Immagini
- Nell'interazione con il calcolatore sia la codifica in binario che la decodifica in formato leggibile per l'operatore umano avvengono in modo trasparente all'utente



## Numeri naturali: Sistemi di numerazione

- Un sistema di numerazione è composto da:
  - Insieme finito di simboli (o cifre)
  - Regole che permettono di rappresentare i numeri
- Classificazione
  - Sistemi additivi (Es. sistema romano, con alcuni accorgimenti ...):
    - Ogni cifra assume un valore prefissato
    - Il numero si ottiene addizionando le cifre che lo compongono (...)
    - Impossibilità di rappresentare numeri molto grandi e difficoltà di esecuzione delle operazioni matematiche
  - Sistemi posizionali (Es. sistema decimale):
    - Le cifre hanno peso diverso a seconda della posizione che occupano
    - Un numero di n cifre è rappresentato in base p dalla sequenza:

$$a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$$

 Compattezza di rappresentazione anche per numeri molto grandi e facilità di esecuzione delle operazioni



# Sistemi pos.:rappresentazione in base p

Numero naturale composto da *n* cifre, in base *p*:

#### Rappresentazione:

Il numero  $a_{n-1}a_{n-2}...a_0$  in base p rappresenta il valore:

$$a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+...+a_1p^1+a_0p^0=\sum_{i=0}^{n-1}a_ip^i$$

Spazio di Rappresentazione (range):

Con n cifre, in base p si possono rappresentare tutti i numeri nell'intervallo  $[0, p^n - 1]$ 



## Sistema decimale: rappresentazione in base 10

#### Sistema posizionale

• Esempio: 123 = 100 + 20 + 3

Base: p = 10

Insieme di simboli:  $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 

Numero naturale *N* di *n* cifre:

- Rappresentazione:
  - $N_{10} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 10^0$
  - Esempio, con n=3:  $587_{10} = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
- Spazio di rappresentazione: intervallo discreto [0, 10<sup>n</sup>-1]
  - Con n=3, range: [0, 10<sup>3</sup>-1] ossia [0, 999]



## Sistema binario:rappresentazione in base due

Sistema posizionale

Base binaria: p=2

Insieme di simboli:  $a_i \in \{0, 1\}$ 

- Simboli chiamati bit (binary digit)
- Otto bit chiamati Byte (abbreviato con B)

Numero naturale N di n cifre:

• Rappresentazione:

• 
$$N_2 = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + ... + a_0 \cdot 2^0$$

Esempio, con n=5:  $11011_2 = (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{10} = 27_{10}$ 

- Spazio di rappresentazione:
  - intervallo discreto [0, 2<sup>m</sup> -1]

Esempio con n=8:  $[00000000_2, 111111111_2]$ , ovvero:  $[0_{10}, 256-1=255_{10}]$ 



#### Sistema binario: unità di misura

- Kilobyte (KB) =  $2^{10}$  byte = 1024 byte
- Megabyte (MB) =  $2^{20}$  byte = 1048576 byte
- Gigabyte (GB) =  $2^{30}$  byte = 1073741824 byte
- Terabyte (TB) =  $2^{40}$  byte = 1099511627776 byte



# Unità di misura (da wikipedia)

#### Prefissi del Sistema Internazionale

10 <sup>n</sup>	Prefisso	Simbolo	Nome	Equivalente decimale
10 <sup>24</sup>	yotta	Υ	Quadrilione	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10 <sup>21</sup>	zetta	z	Triliardo	1 000 000 000 000 000 000 000
10 <sup>18</sup>	exa	E	Trilione	1 000 000 000 000 000 000
10 <sup>15</sup>	peta	Р	Biliardo	1 000 000 000 000 000
10 <sup>12</sup>	tera	Т	Bilione	1 000 000 000 000
10 <sup>9</sup>	giga	G	Miliardo	1 000 000 000
10 <sup>6</sup>	mega	M	Milione	1 000 000
10 <sup>3</sup>	kilo o chilo	k	Mille	1 000
10 <sup>2</sup>	etto	h	Cento	100
10	deca	da	Dieci	10
10 <sup>-1</sup>	deci	d	Decimo	0,1
10 <sup>-2</sup>	oenti	С	Centesimo	0,01
10 <sup>-3</sup>	milli	m	Millesimo	0,001
10 <sup>-6</sup>	micro	μ	Milionesimo	0,000 001
10 <sup>-9</sup>	nano	n	Miliardesimo	0,000 000 001
10 <sup>-12</sup>	pi∞	р	Bilionesimo	0,000 000 000 001
10 <sup>-15</sup>	femto	f	Biliardesimo	0,000 000 000 000 001
10 <sup>-18</sup>	atto	а	Trilionesimo	0,000 000 000 000 000 001
10 <sup>-21</sup>	zepto	z	Triliardesimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10 <sup>-24</sup>	yocto	у	Quadrilionesimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001



## Basi "significative": ottale ed esadecimale

#### Rappresentazione in base 8:

- Base ottale: *p*=8;
- Insieme di simboli a<sub>i</sub> ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
- Numero N di n cifre:
- Rappresentazione:  $N_8 = (a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + ... + a_0 \cdot 8^0)_{10}$

Es. 
$$234_8 = (2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0)_{10} = 156_{10}$$

Spazio di rappresentazione: [0, 8<sup>n</sup>-1]

#### Rappresentazione in base 16:

- Base esadecimale: p=16;
- Insieme di simboli a<sub>i</sub> ∈ {0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F}
- Notare: "10" al posto di "A" ... "15" al posto di "F"
- Numero N di n cifre:
- Rappresentazione:  $N_{16} = (a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + ... + a_0 \cdot 16^0)_{10}$

Es. B7F<sub>16</sub> = 
$$(11 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0)_{10} = 2943_{10}$$

• Spazio di rappresentazione: [0, 16<sup>n</sup>-1]



# Conversioni: esempi

Base 2

1 0 1 0 
$$_{2}$$
 = 2 $^{3}$  + 2 $^{1}$  = 10  $_{10}$   
1 1 0 0 1 0 0  $_{2}$  = 2 $^{6}$  + 2 $^{5}$  + 2 $^{2}$  = 100  $_{10}$   
1 1 1 1 1 0 1 0 0 0  $_{2}$  = 2 $^{9}$  + 2 $^{8}$  + 2 $^{7}$  + 2 $^{6}$  + 2 $^{5}$  + 2 $^{3}$  = 1000  $_{10}$ 

Base 8

$$12_8 = 8 + 2 = 10_{10}$$

$$1 \ 4 \ 4_{8} = 8^{2} + 4 \bullet 8^{1} + 4 = 100_{10}$$

$$1750_{8} = 8^{3} + 7 \cdot 8^{2} + 5 \cdot 8^{1} = 512 + 448 + 40 = 1000_{10}$$



# Conversioni: esempi

#### Base 16

$$A_{16} = 10_{10}$$

$$64_{16} = 6 \cdot 16 + 4 = 100_{10}$$

$$3 E 8_{16} = 3 \bullet 16^2 + 14 \bullet 16 + 8 = 768 + 224 + 8 = 1000_{10}$$

$$F_{16} = 15_{10}$$

$$5 E_{16} = 5 \cdot 16 + 14 = 94_{10}$$

7 1 B 
$$_{16}$$
 = 7• 16<sup>2</sup> + 1• 16 + 11 = 1792 + 16 + 11 = 1819  $_{10}$ 



# Conversioni: altri esempi

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 32 + 16 + 4 = 52_{10}$$

$$3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 6 = 1536 + 128 + 8 + 6 = 1678_{10}$$

$$AB9E_{16} =$$

$$10 \bullet 16^3 + 11 \bullet 16^2 + 9 \bullet 16 + 15 = 40960 + 2816 + 144 + 15 = 43935_{10}$$



## Conversioni di base: da 10 a 2

Per convertire da base p a base 10:

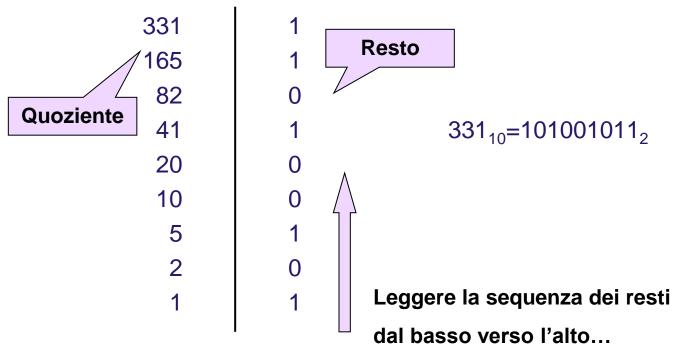
$$N_p = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p^1 + a_0p^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_ip^i$$
  
Esempio: 11011<sub>2</sub> =  $(1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{10} = 27_{10}$ 

- Per convertire da base dieci a base due:
  - Metodo delle divisioni successive: esempio



## Conversioni di base: da 10 a 2

Più schematicamente:





## Conversione di base: da 10 a 2



# Conversione di base: da 10 a 8

Í	i
1258	2
157	5
19	3
2	2
0	



## Conversione di base: da 10 a 16

$$1258_{10} = 4EA_{16}$$



### Conversioni di base

- Le basi ottale ed esadecimale sono di interesse informatico per la facilità di conversione, ( "per parti"):
  - Da base 2 a base 8: si converte a gruppi di tre bit, traducendo ciascuna tripla nella corrispondente cifra ottale

 Da base 2 a base 16: si converte a gruppi di quattro bit, traducendo ciascuna quadrupla nella corrispondente cifra esadecimale

 Le basi ottale ed esadecimale consentono una consistente sintesi rispetto al formato binario



# La somma in base p

- Viene effettuata rispettando le regole che conoscete in base 10.
- Quando si genera un risultato maggiore o uguale alla base, mancando il simbolo per poterlo rappresentare, si riconduce ad un valore minore della base (sottraendo il valore della base stessa) generando un <u>riporto</u> (carry)
- Seguono le tabelle relative all'aritmetica in base 2:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Addendi		Riporto	Risultato
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



# La somma in base n (naturali)

- Viene eseguita incolonnando i numeri e sommando tra loro i bit incolonnati, partendo dai meno significativi, in ordine di peso crescente.
- Per la somma di due numeri positivi di lunghezza K possono essere necessari K+1 posti. Se sono disponibili solo K cifre si genera un errore di overflow (o trabocco).

#### Primo esempio: 11011<sub>2</sub>+00110<sub>2</sub>

$$11011 + (27)$$

$$00110 = (6)$$



# Esempio di somma in base 2 con carry

#### Esempio:

```
1  ← riporto

0101 + (510)

1001 = (910)

-----

1110 (1410)
```

Risulta 25<sub>10</sub> se uso 5 bit; ma 9<sub>10</sub> se considero solo 4 bit: errato!



# Sottrazione tra numeri binari interi positivi

#### Regole base:

- 0-0=0
- 0-1=1 con prestito di 1
- 1-0=1
- 1-1=0

#### Esempio:



## Moltiplicazione tra numeri binari interi positivi

Valgono le regole che già conosci, è però più semplice effettuare la moltiplicazione in quanto le cifre sono solo 0 ed 1...

Gli zeri iniziali possono essere eliminati

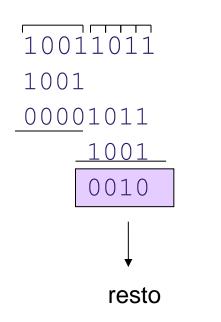


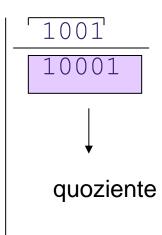
# Moltiplicazione: potenze di 2

Nel caso di moltiplicazione per potenza k-esima di 2 il risultato è uno shift a sinistra di k posizioni:



## Divisione tra Numeri Binari





Verifichiamo la correttezza del calcolo:



## Numeri interi

- Includono anche i numeri negativi
- Rappresentati tramite il segno ed il valore del numero
- Codifica binaria secondo uno delle due modalità seguenti
  - Rappresentazione in modulo e segno
  - Rappresentazione in complemento a due



# Modulo e segno

- In un numero di n bit il primo bit è utilizzato per memorizzare il segno:
  - "1" numero negativo
  - "0" numero positivo
- Spazio di rappresentazione: tra -(2<sup>n-1</sup>-1) e +(2<sup>n-1</sup>-1)
- "Stranezza" dello zero positivo e negativo (doppia rappresentazione)

Esempio n=3

Intero, base 10	Intero, base due, modulo e segno
-3	111
-2	110
<b>–1</b>	101
-0	100
+0	000
+1	001
+2	010
+3	011



# Complemento a due (C2)

- Il MSB ha peso negativo, così tutti i numeri negativi cominciano con il bit più significativo posto a "1", mentre tutti i positivi e lo zero iniziano con uno "0"
- Usando n bit:  $(-N)_{C2} = (2^n N_{10})_2$  vedi tabella sottostante
- Spazio di rappresentazione: intervallo [ $-2^{n-1}$ ,  $2^{n-1}$  1]
  - Asimmetria tra negativi e positivi
  - Esempio (con n=8): [-128, +127], perché  $-2^7 = -128 e^{2^7} 1 = +127$
- Occorre sempre concordare il numero di bit usati per rappresentare il numero!!!

Esempio n=3(-N)<sub>C2</sub> =  $(2^3-N_{10})_2$ 

Num. intero base 10	Trasformazione	Num. intero, base 2,C2, n=3
-4	8 - 4 = 4	4 <sub>10</sub> = 100
-3	8 - 3 = 5	5 <sub>10</sub> = 101
-2	8 - 2 = 6	6 <sub>10</sub> = 110
-1	8 - 1 = 7	7 <sub>10</sub> = 111
0	nessuna	0 <sub>10</sub> = 000
1	nessuna	1 <sub>10</sub> = 001
2	nessuna	2 <sub>10</sub> = 010
3	nessuna	3 <sub>10</sub> = 011



# Complemento a due (C2)

Metodo per ottenere -NC2 avendo già la configurazione binaria di N

#### Ricopiare i bit del modulo N da destra limitatamente a:

- Tutti gli zeri consecutivi a partire da dx
- Ricopiare anche il primo 1 incontrato a partire da dx
- Complementare tutti gli altri bit (0 diventa 1 e viceversa)



# Complemento a due (C2)

- Metodo alternativo per ottenere -N<sub>C2</sub>
  - Complementare i bit della rappresentazione binaria del modulo N (cambiare gli 1 in 0 e viceversa)
  - Sommare 1 al risultato ottenuto

Esempio: 
$$-N=-3$$
  $N=3_{10}=011_2$  complemento ad 1 100 complemento a 2 101



## Somma e sottrazione in C2

- Somma: come per i naturali
- Sottrazione:  $N_1 N_2 = N_1 + (-N_2)_{C2}$
- Carry:
  - Il carry finale non viene considerato!
- Overflow:
  - Se, sommando due interi di n bit dotati di segno concorde, ottengo un risultato di segno discorde (sempre considerando n bit), allora si ha un overflow (il risultato non è codificabile su n bit) e l'operazione è errata
  - L'overflow non può verificarsi se gli operandi sono di segno discorde

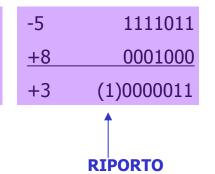


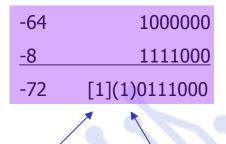
## Somma e sottrazione in C2

Esempi: n=7 spazio di rappresentazione [-64, +63]

+5	0000101
<u>+8</u>	0001000
+13	0001101

+5	0000101
<u>-8</u>	1111000
-3	1111101







**RIPORTO** 





#### Numeri frazionari

#### Rappresentazione:

- Relativa alla parte frazionaria
- Ottenuta tramite la formula

$$N_p = a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + ... + a_{-n}p^{-n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i p^i$$

#### Spazio di rappresentazione:

 Per un numero di n cifre in base p, posso rappresentare numeri nell'intervallo continuo: [0, 1-p-n], ad esempio con 8 cifre dopo la virgola il range sarà [0, 1-2-8]

#### **Errore di approssimazione:**

- minore di *p*-*n* Esempi con *n*=3:
- base 10: Rappresentazione:  $(0,587)_{10} = (5\cdot10^{-1}+8\cdot10^{-2}+7\cdot10^{-3})$

Spazio di rapp.:  $[0, 1-10^{-3}] = [0, 0.999]$ 

Errore: minore di 0.001

• base 2: Rappresentazione:  $(0,101)_2 = (1\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3})10 = (0,625)_{10}$ 

Spazio di rapp.: [0, 1-2<sup>-3</sup>]

Errore: minore di 2-3

# Conversioni di base: parte frazionaria

Per convertire da base p a base 10, vale lo stesso discorso fatto per i decimali riguardo le cifre dopo la virgola. Ad esempio:

$$10101.1101_2 =$$
 $1*2^4 + 1*2^2 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 1*2^{-4} = 21.8125_{10}$ 



# Conversioni di base: parte frazionaria

- Vedremo solo da base 10 a base 2:
  - Si moltiplica progressivamente per 2 la parte frazionaria
  - Si prendono le parti intere di ciascun prodotto dalla più alla meno significativa, con numero di bit proporzionale all'accuratezza

```
0.587*2= 1.174 parte intera 1 parte frazionaria 0.174

0.174*2= 0.348 parte intera 0 parte frazionaria 0.348

0.348*2= 0.696 parte intera 0 parte frazionaria 0.696

0.696*2= 1.392 parte intera 1 parte frazionaria 0.392

0.392*2= 0.784 parte intera 0 parte frazionaria 0.784

0.784*2= 1.568 parte intera 1 parte frazionaria 0.568
```

Risultato: 0.1001 con quattro cifre e approssimazione accurate entro il limite 2<sup>-4</sup> 0.100101 con sei cifre e approssimazione accurate entro il limite 2<sup>-6</sup>



#### Numeri reali

- Modalità di rappresentazione alternative:
  - virgola fissa (Fixed Point)
  - virgola mobile (Floating Point)



#### Rappresentazione in virgola fissa

Data una sequenza di bit, si assume che la posizione della virgola sia fissata in un preciso punto all'interno della sequenza:

Parte intera

Parte frazionaria

M bit

N bit



#### Virgola fissa

- Uso di m bit per parte intera e n bit per parte frazionaria con n ed m fissi
  - Esempio (*m*=8, *n*=6, tot. 14 bit): -123,21<sub>10</sub>
    - $-123_{10} = 10000101_2$
    - $-0.21_{10} \approx 001101_2$
    - $-123,21_{10} \approx 10000101,001101_2$
- m e n scelti in base alla precisione che si vuole tenere





#### Virgola mobile (floating point)

- Il numero è espresso come:  $r = m \cdot b^n$ 
  - m e n sono in base p
  - m: mantissa (numero frazionario con segno)
  - b: base della notazione esponenziale (numero naturale)
  - n: caratteristica (numero intero)
  - Esempio (*p*=10, *b*=10):

$$-331,6875 = -0,3316875 \cdot 10^3$$
  $m = -0,3316875$   $n = 3$ 



## Virgola mobile (floating point)

- Quando la mantissa comincia con una cifra diversa da zero, il numero in virgola mobile si dice *normalizzato* Es. -0,3316875·10<sup>3</sup> è normalizzato perché la mantissa è "3316875"
- La normalizzazione permette di avere, a parità di cifre usate per la mantissa, una maggiore precisione.



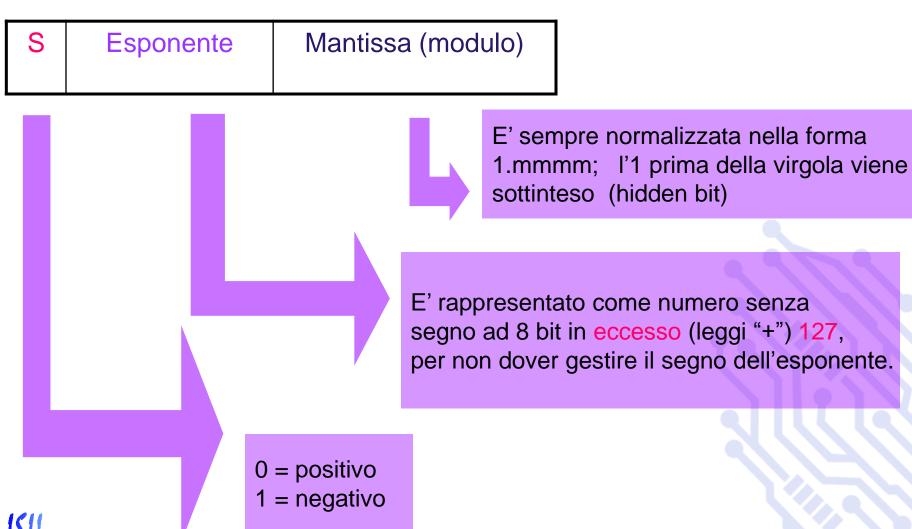
#### Standard IEEE 754

In binario si usa una forma normalizzata (standard IEEE 754) su 32/64 bit suddivisi nel seguente modo:

Segr	Segno		Modulo della m.
	S	Esponente	Mantissa
Singola precisione (SP)  Doppia precisione (DP)	1 bit	8 bit 11 bit	23 bit 52 bit



#### Standard IEEE 754



Classe III Inf 2 a.s. 2014-15

#### Standard IEEE 754

La rappresentazione floating point IEEE 754 è quindi nella forma:

0/1	Esponente	Mantissa (modulo)



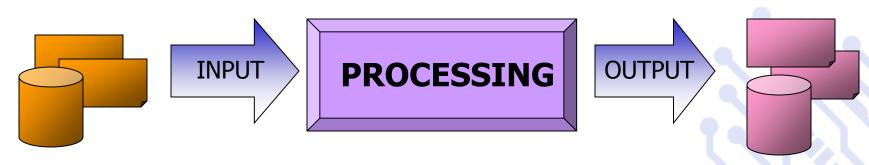
### Glossario di ripasso

Seguono alcune definizioni, che verranno approfondite nel seguito del corso...



#### **AUTOMA**

L'automa è un sistema che (di regola imitando il comportamento umano), è in grado di ricevere informazioni dall'esterno (input), reagire alle stesse elaborandole (processing), e inviare le informazioni di nuovo all'esterno (output).



Il computer è un tipo di automa composto da componenti elettronici



#### Informazione analogica

Si definisce *analogico* un procedimento che rappresenta un fenomeno con continuità, per esempio:

•un orologio classico che con il moto regolare della lancetta segna il trascorrere del tempo in modo continuo







#### Informazione digitale

E' digitale un procedimento che rappresenta lo stesso fenomeno traducendolo in cifre (dall'inglese digit) e quindi in modo discreto, come per esempio avviene in un orologio a cristalli liquidi numerico, nel quale la stessa durata temporale viene misurata da una successione di scatti, oppure un termometro digitale









#### Analogico e digitale

Contrariamente a quanto si potrebbe credere la registrazione digitale, pur procedendo "a salti", può essere più precisa di quella analogica, in quanto meno soggetta ad interferenze e disturbi. Occorre però che il numero di valori utilizzati sia elevato, in modo da cogliere ogni *sfumatura* che possa essere significativa per il destinatario dell'informazione.

E' necessario, dunque, che l'errore introdotto dal procedimento di digitalizzazione non sia troppo elevato.



#### Frequenza di una CPU

- Il tempo in un computer non è continuo, ma "discreto"
- Ogni volta che "scatta" l'orologio interno la CPU esegue un'operazione
- La "frequenza" dell'orologio viene misurata in "Hertz" (cicli al secondo)
- Quindi "Pentium 4 2.0 GHz" vuol dire "due miliardi di scatti di orologio al secondo" – uno scatto ogni mezzo nanosecondo
- Quindi, due miliardi di operazioni...?



# CPU

- .... non esattamente!
- Due miliardi di "microoperazioni" o "microistruzioni"
- Esempio : calcola c = a + b (somma di due variabili in un programma)
  - Leggi dalla memoria il valore di a
  - · Leggi dalla memoria il valore di b
  - Passa a e b all'ALU e dille di calcolare a + b (bit a bit!)
  - Prendi il valore di a+b dall'ALU e salvalo in memoria
- Quindi, la "velocità netta" di un computer non dipende solo dalla frequenza del processore, ma anche da:
  - Tempi di accesso alla memoria
  - "Ottimizzazione" dei circuiti che eseguono calcoli
  - "Sovrapposizione" di operazioni (PIPELINING)
  - Soluzioni "multi-core" (tipo "dual core" Pentium di Intel)

