Глава 5. Малые колебания

Оглавление

§1. Свободные одномерные колебания

Очень распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые малые колебания, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия.

$\boxed{\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ}}$ Положением **устойчивого** равновесия называется такое положение системы, при котором малое отклонение от положения равновесия приводит к возникновению силы, стремящейся вернуть систему обратно.

Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда система имеет всего одну степень свободы.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум. Отклонение от такого положения приводит к возникновению силы $-dU/dq$, стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее минимуму значение обобщенной координаты через q_0. При малых отклонениях от положения равновесия в разложении[1] разности $U(q)-U(q_0)$ по степеням $q-q_0$ достаточно сохранить первый неисчезающий член. В общем случае таковым является член второго порядка[2]:

$$U(q)\approx U(q_0)+\underbrace{\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_0=0}}_{=0}(q-q_0)+\frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0=0}}_{k}(q-q_0)^2+\ldots\Rightarrow$$

$$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2, \qquad (1.1)$$

где k - положительный коэффициент, равный второй производной потенциальной энергии по координате в точке равновесия:

---

[1] Разложение в ряд Тейлора в общем случае имеет следующий вид:

$$f(x)=f(a)+\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}\cdot(x-a)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=a}\cdot(x-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=a}\cdot(x-a)^n+\ldots$$

[2] $\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_0=0}=0$, так как в точке $q=q_0$ потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум.

$$k = \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0=0}.$$

Перенормируем потенциальную энергию таким образом, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия обращалась в ноль: $U(q_0) = 0$.

Введем новую координату $x = q - q_0$, представляющую отклонения координаты от ее равновесного значения. Перейдем в (1.1) к координате x. В результате получим:

$$U(q) = \frac{kx^2}{2}. \tag{1.2}$$

Кинетическую энергию системы с одной степенью свободы запишем в известном виде:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \tag{1.3}$$

где m – масса частицы.

С учетом (1.2) и (1.3) функция Лагранжа рассматриваемой системы, совершающей одномерные малые колебания, будет равна:

$$L = T - U \Rightarrow \boxed{L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}}, \tag{1.4}$$

а соответствующее этой функции уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}, \tag{1.5}$$

где введено обозначение

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}. \tag{1.6}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величина ω в (1.6) называется **циклической частотой** колебаний[3].

[3] В теоретической физике ее называют обычно просто частотой, что мы и будем делать в дальнейшем.

ВАЖНО Частота является основной характеристикой колебаний, независящей от начальных условий движения. Согласно формуле (1.6) она всецело определяется свойствами механической системы как таковой.

Подчеркнем, однако, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний и исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения оно связано с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты.

Уравнение (1.5) представляет собой хорошо изученное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Известно, что общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\boxed{x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}, \tag{1.7}$$

где C_1 и C_2 некоторые константы, определяемые из начальных условий. Общее решение уравнения (1.5) может быть записано в равносильном (1.7) виде:

$$\boxed{x = a \cos(\omega t + \varphi)}, \tag{1.8}$$

где константы a и φ, определяются из начальных условий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Коэффициент a при периодическом множителе в (1.8) называется **амплитудой** колебаний, а аргумент косинуса $(\omega t + \varphi)$ — их **фазой**; φ есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени.

Найдем связь между константами C_1 и C_2 из (1.7) и a и φ из (1.8). Преобразуем выражение (1.7):

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \right) =$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right).$$

С другой стороны, согласно (1.8):

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) = a\cos\omega t\cos\varphi - a\sin\omega t\sin\varphi\,.$$

Таким образом:

$$\underbrace{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}_{a}\left(\underbrace{\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}}_{\cos\varphi}\cos\omega t + \underbrace{\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}}_{-\sin\varphi}\sin\omega t\right) = a\cos\omega t\cos\varphi - a\sin\omega t\sin\varphi\,.$$

Отсюда следует, что произвольные постоянные a и φ связаны с постоянными и C_1 и C_2 соотношениями

$$\boxed{a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,,\ tg\varphi = -\frac{C_2}{C_1}}. \qquad (1.9)$$

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение.

Найдем энергию системы, совершающей малые колебания:

$$E = T + U \Rightarrow E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2}x^2\right) \Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) \Rightarrow E = \frac{m}{2}\left([-a\omega\sin(\omega t + \varphi)]^2 + \omega^2[a\cos(\omega t + \varphi)]^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(a^2\omega^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right]\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2}. \qquad (1.10)$$

ВАЖНО Согласно (1.10) энергия одномерного осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

§2. Вынужденные колебания

П.2.1. Общие положения

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют **вынужденными** в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых **свободных** колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабо, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение *x*.

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией $\frac{kx^2}{2}$ система обладает еще потенциальной энергией $U_e(x,t)$, связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины *x*, получим:

$$U_e(x,t) \approx U_e(0,t) + x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по *t* от некоторой другой функции времени). Во втором члене $-\frac{\partial U_e}{\partial x}$ есть внешняя «сила», действующая на систему в положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как $F(t)$. Таким образом, в потенциальной энергии появляется член $-xF(t)$, так что потенциальная энергия рассматриваемой системы будет равна:

$$U(x,t) = \frac{kx^2}{2} + x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0},$$

и, следовательно, функция Лагранжа примет следующий вид:

$$\boxed{L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t)}. \qquad (2.1)$$

Уравнение движения для лагранжевой функции (2.1) есть:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t)}. \qquad (2.2)$$

где мы снова ввели частоту свободных колебаний ω.

Уравнение (2.1) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее общее решение, равное сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного:

$$x = x_{общ.одн.} + x_{част.неодн.}. \qquad (2.3)$$

Однородное уравнение (2.2) совпадает с уравнением (1.5), общее решение которого было рассмотрено в предыдущем параграфе. Частное решение неоднородного уравнения (2.2) зависит от вида $F(t)$ и подбирается индивидуально для каждой конкретной задачи:

$$\boxed{x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + x_{част.неодн.} = a \cos(\omega t + \varphi) + x_{част.неодн.}}, \qquad (2.4)$$

где константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

П.2.2. Гармоническое внешнее воздействие

Рассмотрим имеющий особый интерес случай, когда вынуждающая сила тоже является простой периодической функцией времени с некоторой частотой γ, то есть рассмотрим $F(t)$, которая имеет следующий вид:

$$F(t) = f \cdot \cos(\gamma t + \beta). \qquad (2.5)$$

Подставим (2.5) в уравнение (2.2). В результате уравнение движения рассмтариваемой колебательной системы примет следующий вид:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\gamma t + \beta)}. \qquad (2.6)$$

Частное решение уравнения (2.6) будем искать в виде:

$$x_{част.неодн.} = C \cdot \cos(\gamma t + \beta), \qquad (2.7)$$

где C – некоторая неизвестная константа.

Подберем константу C таким образом, чтобы решение вида (2.7) удовлетворяло неоднородному уравнению (2.6). Для этого подставим (2.7) в (2.5):

$$\frac{d^2 C \cdot \cos(\gamma t + \beta)}{dt} + \omega^2 \cdot C \cdot \cos(\gamma t + \beta) = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\gamma t + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -C\gamma^2 \cos(\gamma t + \beta) + \omega^2 \cdot C \cdot \cos(\gamma t + \beta) = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\gamma t + \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -C\gamma^2 + \omega^2 \cdot C = \frac{1}{m} f \Rightarrow C = \frac{f}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)}.$$

Подставляя найденную константу в (2.7) получим искомое частное решение:

$$x_{част.неодн.} = \frac{f}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)} \cdot \cos(\gamma t + \beta)$$

и общее решение неоднородного:

$$\boxed{x = a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{f}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)} \cdot \cos(\gamma t + \beta)}. \tag{2.8}$$

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний — с собственной частотой системы ω и с частотой вынуждающей силы γ.

ВАЖНО Решение (2.8) неприменимо в случае так называемого резонанса, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы.

П.2.2. Резонанс

Найдем общее решение (2.6) для случая резонанса, то есть для дифференциального уравнения, имеющее следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\omega t + \beta). \tag{2.9}$$

Общее решение, будет тоже, а частное будем искать в виде:

$$x_{част.неодн.} = C \cdot t \cdot \sin(\omega t + \beta), \tag{2.10}$$

где C некоторая константа, которую найдем, подставив (2.10) в (2.9):

$$\frac{d^2\left[C \cdot t \cdot \sin(\omega t + \beta)\right]}{dt^2} + \omega^2 C \cdot t \cdot \sin(\omega t + \beta) = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\omega t + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left[C \cdot \sin(\omega t + \beta) + C \cdot t \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \beta)\right]}{dt} + \omega^2 C \cdot t \cdot \sin(\omega t + \beta) = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\omega t + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \beta) - C \cdot t \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \beta) + C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \beta) + \omega^2 C \cdot t \cdot \sin(\omega t + \beta) = \frac{1}{m} f \cdot \cos(\omega t + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2C\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+\beta)=\frac{1}{m}f\cdot\cos(\omega t+\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C\omega=\frac{f}{m}\Rightarrow\boxed{C=\frac{f}{2m\omega}}$$

Подставляя последнее выражение в (2.10) получим закон движения с случае резонанса:

$$\boxed{x=a\cdot\cos(\omega t+\varphi)+\frac{f\cdot t\cdot\sin(\omega t+\beta)}{2m\omega}}. \tag{2.11}$$

ВАЖНО В случае резонанса амплитуда колебаний растет линейно со временем (до тех пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой).

§3. Затухающие колебания

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т.е. не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике. Таким образом, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики.

Существует, однако, определенная категория случаев, когда движение в среде может быть приближенно описано с помощью механических уравнений движения путем внедрения в них определенных дополнительных членов. Сюда относятся колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия можно считать, что на тело действует сила трения, зависящая (для заданной однородной среды) только от его скорости.

Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы трения, и первый неисчезающий член пропорционален скорости. Таким образом, обобщенную силу трения f_{TP}, действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщенной координатой x, можно написать в виде

$$f_{TP} = -\alpha \cdot \dot{x}$$

где α - положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя эту силу в правую часть уравнения движения (1.5), получим уравнение движения для механической системы, совершающей колебательные движения при наличии трения:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = -\alpha \cdot \dot{x}}. \qquad (3.1)$$

Разделим его на m и введем обозначения

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \text{ и } \boxed{2\lambda = \frac{\alpha}{m}}, \qquad (3.2)$$

где ω_0 есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения, а λ - коэффициент затухания. Подставляя (3.2) в (3.1) получим:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \cdot \dot{x} = 0}. \qquad (3.3)$$

Следуя общим правилам решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ищем решение в виде $x = e^{rt}$. Записываем относительно r характеристическое уравнение[4]:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0. \qquad (3.4)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.1) представляет собой линейную комбинацию двух экспонент:

[4] Характеристическое уравнение можно получить, подставив $x = e^{rt}$ в (3.3), проведя дифференцирование и сократив e^{rt}.

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},\ r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\ . \qquad (3.5)$$

Рассмотрим три случая.

<u>Случай 1.</u>

Если $\lambda < \omega_0$, то мы имеем два комплексно сопряженных решения характеристического уравнения (3.4), а общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения может быть представлено в следующем виде:

$$x = C_1 e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = C_1 e^{\left(-\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} \Leftrightarrow]$$

$$\Leftrightarrow x = C_1 e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t} + C_2 e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = C_1 e^{-\lambda t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t} + C_2 e^{-\lambda t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\cdot t}\right)$$

Взяв действительную часть от последнего равенства, перегруппировав слагаемые, получим решение в виде:

$$\boxed{x = a \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi),\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}, \qquad (3.6)$$

где a и φ вещественные постоянные, определяемые начальными условиями.

ВАЖНО Выражаемое этими формулами движение представляет собой так называемые <u>**затухающие**</u> колебания.

Его можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Скорость убывания амплитуды определяется показателем λ, а «частота» ω колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения.

При $\lambda << \omega_0$ разница между ω и ω_0 второго порядка малости. Уменьшение частоты при трении следовало ожидать заранее, поскольку трение вообще задерживает движение.

Случай 2.

Пусть теперь $\lambda > \omega_0$. Тогда оба решения характеристического уравнения (3.4) вещественны, причем оба отрицательны. Общий вид решения рассматриваемого дифференциального уравнения (3.3) будет иметь вид:

$$\boxed{x = C_1 \cdot e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 \cdot e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}}. \tag{3.7}$$

В этом случае, возникающем при достаточно большом трении, движение состоит в убывании $|x|$, т.е. в асимптотическом (при $t \to \infty$) приближении к положению равновесия. Этот тип движения называют **апериодическим затуханием**.

Случай 3.

Наконец, в особом случае, когда $\lambda = \omega_0$, характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень $r = -\lambda$. Как известно, общее решение дифференциального уравнения имеет в этом случае вид:

$$\boxed{x = \left(C_1 \cdot + C_2 \cdot t\right) \cdot e^{-\lambda t}}. \tag{3.8}$$

Это — особый случай апериодического затухания. Оно тоже не имеет колебательного характера.

§ 4. Вынужденные колебания при наличии трения

Исследование вынужденных колебаний при наличии трения вполне аналогично произведенному в §2 рассмотрению колебаний без трения. Мы остановимся здесь подробно на представляющем самостоятельный интерес случае периодической вынуждающей силы.

Прибавив в правой части уравнения (3.1) внешнюю силу $F(t) = f \cdot \cos(\gamma t)$ и разделив на m, получим уравнение движения для рассматриваемой системы в виде:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \cdot \dot{x} = \frac{f}{m} \cdot \cos(\gamma t)}. \tag{4.1}$$

Решение этого уравнения удобно находить в комплексной форме, для чего запишем в правой части $e^{i\gamma t}$ вместо $\cos(\gamma t)$, и, после интегрирования, нужно будет просто взять действительную часть полученного решения[5]. Итак имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентами:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \cdot \dot{x} = \frac{f}{m} \cdot e^{i\gamma t}. \tag{4.2}$$

Известно, что общее решение этого уравнение представляет собой сумму его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения. Общее решение однородного было найдено в предыдущем параграфе. Найдем частное решение уравнения (4.2). Будем искать его в виде:

$$x = Be^{i\gamma t}, \tag{4.3}$$

где B некоторая постоянная. Подберем B таким образом, чтобы решение (4.3) удовлетворяло уравнению (4.1). Для этого подставим (4.3) в (4.1), проведем операции дифференцирования и сократим экспоненты:

$$\frac{d^2 Be^{i\gamma t}}{dt^2} + \omega_0^2 Be^{i\gamma t} + 2\lambda \cdot \frac{dBe^{i\gamma t}}{dt} = \frac{f}{m} \cdot e^{i\gamma t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (i\gamma)^2 Be^{i\gamma t} + \omega_0^2 Be^{i\gamma t} + 2\lambda \cdot (i\gamma) Be^{i\gamma t} = \frac{f}{m} \cdot e^{i\gamma t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\gamma^2 B + \omega_0^2 B + 2i\lambda\gamma \cdot B = \frac{f}{m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\left(-\gamma^2 + \omega_0^2 B + 2i\lambda\gamma\right) = \frac{f}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma\right)}}. \tag{4.4}$$

[5] Так как, согласно формуле Эйлера, $e^{i\gamma t} = \cos(\gamma t) + i\sin(\gamma t)$

Для удобства представим B в виде $be^{i\delta}$, где b и δ - вещественные числа:

$$B = \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \underbrace{\frac{\left(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma\right)}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma\right)}}_{\equiv 1} \cdot \frac{f}{m\left(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f}{m} \cdot \frac{\left(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma\right)}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma\right)\left(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 - \left(2i\lambda\gamma\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2}} \cdot \frac{\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2}} \cdot \left(\underbrace{\frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2}}}_{\cos\delta} + i\underbrace{\frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2}}}_{\sin\delta} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f}{\underbrace{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda\gamma^2}}_{\equiv b}} \cdot \underbrace{\left(\cos\delta + i\sin\delta\right)}_{\equiv e^{i\delta}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = b \cdot e^{i\delta},$$

где

$$\boxed{b = \frac{f}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}},\ tg\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}}. \qquad (4.5)$$

Наконец, отделив вещественную часть от выражения $x = Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t + \delta)}$ получим частное решение уравнения (4.1), а прибавив к нему общее решение уравнения без правой части (3.6), которое мы напишем для определенности для случая $\omega_0 > \lambda$ и взяв действительную часть, получим окончательно общее решение уравнения (4.1):

$$\boxed{x = a \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) + b\cos(\gamma t + \delta)}. \qquad (4.6)$$

Первое слагаемое экспоненциально убывает со временем, так что через достаточно большой промежуток времени остается только второй член:

$$\boxed{x = b\cos(\gamma t + \delta)}. \qquad (4.7)$$

ВАЖНО Выражение (4.6) для амплитуды b вынужденного колебания хотя и возрастает при приближении частоты λ у к ω_0 , но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения.

При заданной амплитуде силы f амплитуда колебания максимальна при частоте $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$. При $\lambda << \omega_0$ это значение отличается от ω_0 лишь на величину второго порядка малости.

§5. Колебания систем со многими степенями свободы

Теория свободных колебаний систем с несколькими степенями свободы строится аналогично тому, как были рассмотрены в §1 одномерные колебания.

Найдем закон движения консервативной системы с s степенями свободы, обладающей в точке $q_i = q_{i0}$ положением устойчивого равновесия и совершающую малые колебания около этого положения. В этом положении потенциальная энергия системы, как функция обобщенных координат $U = U(q_1, q_2, ..., q_s)$ будет иметь минимум. Перенося начало системы отсчета в точку равновесия, введем новые координаты, представляющие собой отклонения или смещения от положения равновесия:

$$x_i = q_i - q_{i0}. \qquad (5.1)$$

Будем считать, что потенциальная энергия в положение равновесия равна нулю. Учитывая, что колебания малые, разложим потенциальную энергию системы в ряд Тейлора[6] ограничившись первым неисчезающим порядком малости:

---

[6] $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\vec{x}_0} \cdot (x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}\right)_{\vec{x}_0} \cdot (x_{i_1} - x_{i_1 0})(x_{i_2} - x_{i_2 0}) + \dots$

$$U \approx \underbrace{U_0}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_0}_{=0} \cdot x_i + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0}_{\equiv k_{ik}} \cdot x_i x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k_{ik} x_i x_k \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,l} k_{ik} x_i x_k}, \qquad (5.2)$$

где обобщенные силы $\partial U/\partial x_i$ в положении равновесия равны нулю[7] и введены положительные величины[8] $k_{ki} = k_{ik} \equiv \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0$. Отметим, что выражение для потенциальной энергии (5.2) представляет собой положительно-определенную квадратичную форму.

Вспоминая результаты §12 главы 1, запишем кинетическую энергию в общем виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q_1,..,q_s)\dot{q}_i\,\dot{q}_k\ .$$

Полагая в коэффициентах $q_i = q_{i0}$, и обозначая постоянные $a_{ik}(q_{10},..,q_{s0})$ через m_{ik} перепишем выражение для кинетической энергии в виде положительно-определлнной формы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\,\dot{x}_k\ , \qquad (5.3)$$

$...+\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}...\sum_{i_m=1}^{n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_m}}\right)_{\vec{x}_0}\cdot(x_{i_1}-x_{i_1 0})(x_{i_2}-x_{i_2 0})\cdot...\cdot(x_{i_m}-x_{i_m 0})+...$, где $\vec{x} \equiv (x_1,\overset{\rightarrow}{..},x_n)$, а

$$\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_m}}\right)_{\vec{x}_0} \equiv \left.\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_m}}\right|_{\vec{x}_0}.$$

[7] Так как в положение устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум, следовательно частные производные потенциальной энергии по координатам обращаются в ноль.

[8] Так как в положении устойчивого равновесия вторые производные потенциальной энергии больше нуля. В противном случае, положение было бы неустойчивым (или безразличным).

причем коэффициенты m_{ik} тоже можно всегда считать симметричными по индексам: $m_{ik} = m_{ki}$. Таким образом, лагранжева функция рассматриваемой системы, совершающей свободные малые колебания, имеет вид:

$$L = T - U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\,\dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_i x_k} \Leftrightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_i\,\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k\right)}. \tag{5.4}$$

Составим теперь уравнения движения. Для определения входящих в них производных напишем полный дифференциал функции Лагранжа (5.4):

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\,d\dot{x}_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}d\dot{x}_i\,\dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_i dx_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}dx_i x_k\ .$$

Поскольку величина суммы не зависит, разумеется, от обозначения индексов суммирования, меняем в первом и третьем членах в скобках *i* на *k*, а *k* на *i*; учитывая при этом симметричность коэффициентов m_{ik} и k_{ik} ($m_{ik} = m_{ki}$ и $k_{ik} = k_{ki}$) получим:

$$dL = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\,d\dot{x}_k}_{\substack{i\to k\\ k\to i}} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}d\dot{x}_i\,\dot{x}_k \underbrace{- \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_i dx_k}_{\substack{i\to k\\ k\to i}} - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}dx_i x_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dL = \frac{1}{2}\sum_{k,i} m_{ki}\dot{x}_k d\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}d\dot{x}_i\,\dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{k,i} k_{ki}x_k dx_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}dx_i\,x_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_k dx_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_k dx_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dL = \sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - \sum_{i,k} k_{ik}x_k dx_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dL = \sum_{i} d\dot{x}_i \sum_{k} m_{ik}\dot{x}_k - \sum_{i} dx_i \sum_{k} k_{ik}x_k\ . \tag{5.5}$$

В выражении полного дифференциала функции нескольких переменных множитель при дифференциале какой-либо переменной равен частной производной функции по этой переменной. Следовательно, из (5.5):

$$dL = \sum_i d\dot{x}_i \underbrace{\sum_k m_{ik}\dot{x}_k}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} + \sum_i dx_i \underbrace{\left(-\sum_k k_{ik}x_k\right)}_{\frac{\partial L}{\partial x_i}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k \text{ и } \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k .$$

Подставляя полученные производные в общий вид уравнений Лагранжа[9]. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,...,s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_k m_{ik}\dot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0,\ i = 1,2,...,s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0,\ i = 1,2,...,s}. \tag{5.6}$$

Мы получили систему s линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Используя правила решения таких систем уравнений ищем s неизвестных функций $x_k(t)$ в виде

$$x_k(t) = A_k e^{i\omega t}, \tag{5.7}$$

где $A_к$ - некоторые комплексные постоянные, которые необходимо определить. Далее подставляем (5.7) в систему (5.6):

$$\sum_k m_{ik}\frac{d^2 A_k e^{i\omega t}}{dt^2} + \sum_k k_{ik}A_k e^{i\omega t} = 0,\ i = 1,2,...,s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_k m_{ik}\left(-\omega^2\right)A_k e^{i\omega t} + \sum_k k_{ik}A_k e^{i\omega t} = 0,\ i = 1,2,...,s \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \sum_k A_k e^{i\omega t}\left(k_{ik} - m_{ik}\omega^2\right) = 0,\ i = 1,2,...,s .$$

Сократив все уравнения на $e^{i\omega t}$, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, ..., A_s:

[9] См. формулу (3.5) главы 1

$$\sum_k A_k\left(k_{ik}-m_{ik}\omega^2\right)=0\,,\ i=1,2,...,s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1\left(k_{11}-m_{11}\omega^2\right)+A_2\left(k_{12}-m_{12}\omega^2\right)+...+A_s\left(k_{1s}-m_{1s}\omega^2\right)=0 \\ A_1\left(k_{21}-m_{21}\omega^2\right)+A_2\left(k_{22}-m_{22}\omega^2\right)+...+A_s\left(k_{2s}-m_{2s}\omega^2\right)=0 \\ ... \\ A_s\left(k_{s1}-m_{s1}\omega^2\right)+A_s\left(k_{s2}-m_{s2}\omega^2\right)+...+A_s\left(k_{ss}-m_{ss}\omega^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 & ... & k_{1s}-m_{1s}\omega^2 \\ k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 & ... & k_{2s}-m_{2s}\omega^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{s1}-m_{s1}\omega^2 & k_{s2}-m_{s2}\omega^2 & ... & k_{ss}-m_{ss}\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.8)$$

Для того чтобы эта система имела решение отличное от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 & ... & k_{1s}-m_{1s}\omega^2 \\ k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 & ... & k_{2s}-m_{2s}\omega^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{s1}-m_{s1}\omega^2 & k_{s2}-m_{s2}\omega^2 & ... & k_{ss}-m_{ss}\omega^2 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (5.9)$$

Уравнение (5.9) является так называемым характеристическим уравнением и представляет собой уравнение степени s относительно ω^2. Оно имеет в общем случае s различных вещественных положительных корней ω_α^2, $\alpha=1,2,...,s$ (в частных случаях некоторые из этих корней могут совпадать). Определенные таким образом величины ω_α называются **<u>собственными частотами</u>** системы.

Вещественность и положительность корней уравнения (5.9) заранее очевидны уже из физических соображений. Действительно, наличие у ω мнимой части означало бы наличие во временной зависимости координат x_k (а с ними и скоростей $\dot{x}_k$) экспоненциально убывающего или экспоненциально возрастающего множителя. Но наличие такого множителя в данном случае недопустимо, так как оно привело бы к изменению со временем полной энергии $E = U + T$ системы, что противоречит закону её сохранения.

Итак, решая характеристическое уравнение (5.9) мы найдем s собственных частот системы[10]: ω_1 , ω_2 , ..., ω_s . Подставляя поочередно ω_α^2 в систему уравнений (5.8) и решая эту систему, находим все A_k , отвечающие различным ω_α . Как известно, коэффициенты A_k будут пропорциональны минорам[11] определителя (5.9), в котором ω заменена соответствующим значением ω_α . Обозначим эти миноры через $\Delta_{k\alpha}$. Тогда искомые константы можно записать в виде:

$$A_k = C_\alpha \Delta_{k\alpha},$$

где C_α - произвольная комплексная постоянная. Подставляя полученные значения констант в (5.7) запишем общее решение системы дифференциальных уравнений (5.6), которое, как известно, представляет собой сумму всех частных решений вида (5.7), то есть:

$$x_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} C_\alpha \Delta_{k\alpha} e^{i\omega_\alpha t} \,. \qquad (5.10)$$

Извлекая из (5.10) вещественную часть, получим искомый закон движения:

$$x_k(t) = \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{s} C_\alpha \Delta_{k\alpha} e^{i\omega_\alpha t} \Leftrightarrow x_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha}\, \mathrm{Re}\left(C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha), k = 1,2,\ldots,s}, \qquad (5.11)$$

где введены амплитуды a_α и начальный сдвиг по фазе φ_α, которые определяются из начальных условий[12].

ВАЖНО Таким образом, изменение каждой из координат системы со временем, представляет собой наложение s простых гармонических колебаний, частоты которых равны собственным частотам системы.

---

[10] Будем считать, что все корни характеристического уравнения не равны друг другу.

11 Минор - это определитель матрицы составленный из элементов данной матрицы на пересечении строк и столбцов

[12] Похожую процедуру мы уже проделывали в §3 этой главы

Естественно возникает вопрос, нельзя ли выбрать обобщенные координаты таким образом, чтобы каждая из них совершала только одно простое колебание? Ответ - можно. Форма найденного закона движения (5.11) указывает путь к решению этой задачи. Введем обозначение: $\Psi_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)$. Тогда (5.11) можно переписать в виде:

$$x_k(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} \Psi_\alpha \,, \; k = 1,2,\ldots,s \,. \tag{5.12}$$

Соотношения (5.12) представляет собой систему s линейных алгебраических уравнений с s неизвестными величинами Ψ_α. Решая эту систему, получим величины Ψ_α, $\Psi_2,\ldots,\Psi_s$, выраженные через координаты $x_1, x_2,\ldots,x_s$, Следовательно, Ψ_α можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты называют **нормальными** (или главными), а совершаемые ими простые периодические колебания **нормальными колебаниями** системы.

Нормальные координаты Ψ_α удовлетворяют, как это явствует из их определения, уравнениям:

$$\ddot{\Psi}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Psi_\alpha = 0 \,, \; \alpha = 1,2,\ldots s \,. \tag{5.13}$$

Это значит, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на s независимых друг от друга уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой координаты, и для полного определения ее временной зависимости надо знать начальные значения только ее же самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы.

Из сказанного очевидно, что функция Лагранжа, выраженная через нормальные координаты, распадается на сумму слагаемых, каждое из которых соответствует одномерному колебанию с одной из частот ω_α, т.е. имеет вид:

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \left(\ddot{\Psi}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Psi_\alpha \right), \tag{5.14}$$

где m_α положительные постоянные. С математической точки зрения это означает, что преобразованием (5.12) обе квадратичные формы кинетическая энергия (5.2) и потенциальная (5.3) одновременно приводятся к диагональному виду.