Глава 2. Законы сохранения

Оглавление

§1. Общие понятия

При движении механической системы 2*s* величин q_i, и $\dot{q}_i$, (i = 1, 2, ... , *s*), определяющих ее состояние, изменяются со временем[1]. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые сохраняют при движении постоянные значения и зависят только от начальных условий. Эти функции называют интегралами движения.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Интегралом движения** называется любая функция $I = I(q, \dot{q})$, зависящая от обобщенных координат и обобщенных скоростей и сохраняющая при движении свое значение. То есть: $I = I(q, \dot{q}) = const$.

Далеко не все интегралы движения играют одинаково важную роль в механике. Среди них есть несколько, постоянство которых имеет весьма глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени их однородностью и изотропией. Все эти, как говорят, сохраняющиеся величины имеют важное общее свойство аддитивности. Это означает, что значение величины для системы, состоящей из частей, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности. Именно свойство аддитивности придает соответствующим величинам особенно важную механическую роль.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Интегралы движения, обладающие свойством аддитивности (или асимптотической аддитивности) называют **законами сохранения**[2].

В качесвте иллюстрации, предположим, например, что два тела взаимодействуют в течение некоторого времени. Поскольку как до, так и после взаимодействия каждый из аддитивных интегралов всей системы равен сумме их значений для обоих тел в

1 Напоминаю, что *s*, число степеней свободы.

2 Сравните с определением, которая дает нам общая физика: **Законы сохранения** - фундаментальные физические законы, согласно которым при определённых условиях некоторые измеримые физические величины, характеризующие замкнутую физическую систему, не изменяются с течением времени.

отдельности, то законы сохранения этих величин сразу дают возможность сделать ряд заключений о состоянии тел после взаимодействия, если их состояния до взаимодействия известны.

Фундаментальный смысл законов сохранения раскрывается теоремой Нётер[3]. Согласно этой теореме, каждый закон сохранения однозначно соответствует той или иной симметрии уравнений, описывающих физическую систему. В частности, закон сохранения энергии соответствует однородности времени, закон сохранения импульса - однородности пространства, закон сохранения момента импульса - изотропии пространства.

§2. Закон сохранения энергии

Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с однородностью времени. Рассмотрим замкнутую механическую систему из N частиц. В силу однородности времени лагранжева функция этой системы не зависит явно от времени. Следовательно, полная производная функции Лагранжа по времени может быть вычислена следующим образом:

$$\frac{dL(q,\dot{q})}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

(если бы L зависела явно от времени, к правой части равенства добавился бы член $\frac{\partial L}{\partial t}$).

Так как, согласно уравнениям Лагранжа, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Подставляем в последнее равенство:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i \underbrace{\left(\dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right)}_{\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Leftrightarrow$$

[3] Амалия Эмми Нётер (нем. Amalie Emmy Noether; 23 марта 1882, Эрланген, Германия - 14 апреля 1935, Брин-Мор, Пенсильвания, США) — немецкий математик, «самая крупная женщина-математик, когда-либо существовавшая».

$$\Leftrightarrow \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{dL}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const\,.$$

Отсюда видно, что величина

$$\boxed{E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L} \qquad (2.1)$$

остается неизменной при движении замкнутой системы.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Скалярную величину *E*, определяемую по формуле (2.1), называют **<u>энергией</u>** системы.

ВАЖНО! Аддитивность энергии непосредственно следует из аддитивности функции Лагранжа[4], через которую она выражается, согласно (2.1), линейным образом. Это означает, что соотношение (2.1), согласно определению, можно считать законом сохранения. Более того, этот закон принято назвать **<u>законом сохранения энергии</u>**.

Выразим энергию системы *E* через кинетическую *T* и потенциальную *U* энергии. Как мы видели[5], лагранжева функция замкнутой (или находящейся в постоянном поле) системы имеет вид:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{l,k} a_{ik}(q)\dot{q}_l\,\dot{q}_k}_{T} - U(q).$$

Дифференцируя это соотношение, найдем первое слагаемое правой части уравнения (2.1):

---

[4] См. §4 главы 1

[5] См. §12 главы 1 (формула 12.1)

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\sum_{l,k} a_{lk}(q)\dot{q}_l\,\dot{q}_k - U(q)\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \sum_{l,k} a_{lk}(q)\dot{q}_l\,\dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\dot{q}_1\left[2\cdot a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots + a_{s1}\dot{q}_s + \ldots\right]}_{i=1} + \underbrace{\dot{q}_2\left[a_{12}\dot{q}_2 + 2\cdot a_{22}\dot{q}_2 + \ldots + a_{s2}\dot{q}_s + \ldots\right] + \ldots}_{i=2}\right) =$$

$$= \sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\,\dot{q}_k = 2T$$

Подставляя полученный результат в (2.1), получим:

$$E = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 2T - L = 2T - (T - U) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow E = T + U}. \tag{2.2}$$

Запишем выражение (2.2) для частного случая декартовых координат:

$$E = T + U = \sum_n \frac{m_n \vec{V}_n^2}{2} + U\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \ldots, \vec{R}_n\right). \tag{2.3}$$

ВАЖНО! Из выражения (2.3) можно сделать важный вывод. Энергия системы может быть представлена в виде суммы двух существенно различных членов: кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц.

ВАЖНО! Закон сохранения энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для систем, находящихся в постоянном (т.е. независящем от времени) внешнем поле; единственное использованное в приведенном выводе свойство функции Лагранжа отсутствие явной зависимости от времени имеется и в этом случае.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Механические системы, энергия которых сохраняется, называют **<u>консервативными</u>**.

§3. Закон сохранения импульса

Другой закон сохранения возникает в связи с однородностью пространства. Как и в случае закона сохранения энергии, рассмотрим замкнутую систему из N частиц. Для удобства все выкладки будем делать в декартовых координатах[6].

В силу однородности пространства механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого. В соответствии с этим, рассмотрим бесконечно малый перенос на вектор $\vec{\varepsilon}$ и потребуем, чтобы функция Лагранжа осталась неизменной[7]. Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы смещаются на один и тот же постоянный вектор $\vec{\varepsilon}$, т.е. их радиус-векторы $\vec{R}_n' = \vec{R}_n + \vec{\varepsilon}$. При этом, очевидно, $\vec{V}_n' = \vec{V}_n$.

Изменение функции L в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть

$$\delta L = L\left(\vec{R}_1',\ldots,\vec{R}_n',\vec{V}_1',\ldots,\vec{V}_n'\right) - L\left(\vec{R}_1,\ldots,\vec{R}_n,\vec{V}_1,\ldots,\vec{V}_n\right) =$$

$$= L\left(\vec{R}_1 + \vec{\varepsilon},\ldots,\vec{R}_n + \vec{\varepsilon},\vec{V}_1,\ldots,\vec{V}_n\right) - L\left(\vec{R}_1,\ldots,\vec{R}_n,\vec{V}_1,\ldots,\vec{V}_n\right) =$$

$$= \sum_n \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n}, \delta\vec{R}_n \right\rangle = \left\langle \vec{\varepsilon}, \sum_n \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} \right\rangle,$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. С другой стороны

$$\delta L = L - L' = 0 .$$

Следовательно,

$$\delta L = \sum_n \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n}, \vec{\delta}_n \right\rangle = \left\langle \vec{\varepsilon}, \sum_n \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} \right\rangle = L - L' = 0 \Rightarrow$$

---

[6] С тем же успехом можно оперировать обобщенными координатами

[7] Тут следует внести ясность. Мы знаем, что функция Лагранжа замкнутой системы равна разнице кинетической и потенциальной энергий. Очевидно, что кинетические энергии в системах K и K' равны друг другу. Это означает, что разница функций Лагранжа в этих системах равна разнице потенциальных энергий взаимодействия частиц. Очевидно, что потенциальная энергия взаимодействия зависит только от конфигурации самой системы, то есть она не зависит от выбора системы координат. Следовательно, $L' - L = 0$.

$$\Rightarrow \left\langle \vec{\varepsilon}, \sum_n \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} \right\rangle = 0 .$$

Ввиду произвольности вектора $\vec{\varepsilon}$ требование $\delta L = 0$ эквивалентно требованию

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} = \vec{0} . \tag{3.1}$$

Далее, сложим все уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы[8] и с учетом (3.1) получим:

$$\underbrace{\sum_n \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n}}_{=0} - \sum_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \vec{0} \Rightarrow \sum_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \vec{0} .$$

Интегрируя последнее равенство получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \vec{0} \Rightarrow \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \overrightarrow{const} .$$

Обозначим $\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n}$ через букву $\vec{P}$:

$$\boxed{\vec{P} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \overrightarrow{const}} . \tag{3.2}$$

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что при движении в замкнутой механической системе векторная величина $\vec{P}$ остается неизменной.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Векторную величину $\vec{P}$, определяемую по формуле (3.2), называют **полным импульсом системы**.

ВАЖНО! Аддитивность импульса очевидна. Более того, в отличие от энергии импульс системы равен сумме импульсов отдельных частиц вне зависимости от возможности

[8] См. §3 главы 1 (формула 3.5)

пренебрежения взаимодействием между ними. Это означает, что (3.2), согласно определению, можно считать законом сохранения. Более того, соотношение (3.2) принято назвать **законом сохранения импульса**.

Дифференцируя функцию Лагранжа, записанную в декартовых координатах[9] $L = \sum_n \frac{m_n}{2} V_n^2 - U\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, ..., \vec{R}_n\right)$, получим:

$$\vec{P} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_n} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_n} = \sum_n m_n \vec{V}_n = \overrightarrow{const}$$

ВАЖНО! Исходное равенство (3.1) имеет простой физический смысл. Производная[10] $\frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}_n}$ есть сила $\vec{F}_n$, действующая на *n*-ю частицу. Таким образом, равенство (3.1) означает, что сумма сил, действующих на все частицы замкнутой системы, равна нулю:

$$\sum_n \vec{F}_n = \vec{0}. \tag{3.3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ В частности, в случае системы, состоящей всего из двух материальных точек, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Это означает, что $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, то есть сила, действующая на первую частицу со стороны второй, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на вторую частицу со стороны первой. Это утверждение известно как закон равенства действия и противодействия или как *третий закон Ньютона*.

ВАЖНО! Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса имеет место лишь в отсутствие внешнего поля. Однако отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии поля, если потенциальная энергия в нем не зависит от какой-либо из декартовых координат. При переносе вдоль соответствующей координатной оси механические свойства системы, очевидно, не меняются, и тем же способом мы найдем, что проекция импульса на эту ось сохраняется. Так, в однородном поле, направленном вдоль оси *z*, сохраняются компоненты импульса вдоль осей *x* и *y*.

[9] См. §9 главы 1

[10] См. §11 главы 1

Перейдем от декартовых координат к любым другим обобщенным координатам q_1, q_2, …,q_s.

> $\boxed{\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ}}$ Производные лагранжевой функции по обобщенным скоростям $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ называются **обобщенными импульсами**, а производные $F_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ называются **обобщенными силами**.

В этих обозначениях уравнения Лагранжа можно записать следующим образом:

$$\dot{p}_i = F_i . \tag{3.4}$$

§4. Центр инерции, движение механической системы как целого

Рассмотрим замкнутую механическую систему из N частиц. Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным инерциальным системам отсчета. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K'. Пусть K' движется относительно системы отсчета K со скоростью $\vec{V}_{K'}$. Согласно преобразованиям Галилея[11] скорости $\vec{V}_n$ и $\vec{V}'_n$ одних и тех же частиц по отношению к этим системам связаны соотношением $\vec{V}_n = \vec{V}'_n + \vec{V}_{K'}$. Следовательно, связь между значениями полного импульса $\vec{P}$ и $\vec{P}'$ определяется следующим образом:

$$\vec{P} = \sum_n m_n \vec{V}_n = \sum_n m_n \left(\vec{V}'_n + \vec{V}_{K'}\right) = \underbrace{\sum_n m_n \vec{V}'_n}_{\vec{P}'} + \vec{V}_{K'} \underbrace{\sum_n m_n}_{\mu} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}' + \mu \vec{V}_{K'}}, \tag{4.1}$$

где $\mu = \sum_n m_n$ - полная масса рассматриваемой механической системы (сумма масс всех

[11] См. §7 главы 1

частиц).

Из равенства (4.1) следует, что всегда существует такая система отсчета K', в которой полный импульс $\vec{P}'$ обращается в нуль. Действительно, положив в (4.1) $\vec{P}' = \vec{0}$, найдем скорость этой системы отсчета относительно K:

$$\vec{P} = \vec{V}_{K'}\Big|_{\vec{P}'=\vec{0}} \sum_n m_n \Rightarrow \vec{V}_{K'}\Big|_{\vec{P}'=\vec{0}} = \frac{\vec{P}}{\sum_n m_n} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{V}_{ЦИ} \equiv \vec{V}_{K'}\Big|_{\vec{P}'=\vec{0}} = \frac{\sum_n m_n \vec{V}_n}{\sum_n m_n}}. \tag{4.2}$$

То есть, если система отсчета K' двигается со скоростью $\vec{V}_{ЦИ}$, определяемой формулой (4.2), то суммарный импульс рассматриваемой механической системы в этой системе равен нулю.

ВАЖНО! Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она ***покоится*** относительно соответствующей системы отсчета. Это является вполне естественным обобщением понятия покоя отдельной материальной точки. Соответственно скорость, даваемая формулой (4.2), приобретает смысл скорости «***движения как целого***» механической системы с отличным от нуля импульсом.

Мы видим, таким образом, что закон сохранения импульса позволяет естественным образом сформулировать понятия покоя и скорости механической системы как целого.

ВАЖНО! Формула (4.2) показывает, что связь между импульсом $\vec{P}$ и скоростью $\vec{V}$ системы как целого такая же, какая была бы между импульсом и скоростью одной материальной точки с массой $\mu = \sum_n m_n$, равной сумме масс всех частиц в системе. Это обстоятельство можно сформулировать как утверждение об ***аддитивности массы***.

Скорость $\vec{V}_{ЦИ}$ может быть получена как полная производная по времени от радиус вектора, задваемого следующим выражением:

$$
\boxed{\vec{R}_{ЦИ} = \frac{\sum_n m_n \vec{R}_n}{\sum_n m_n}}. \tag{4.3}
$$

Можно сказать, что скорость системы как целого, есть скорость перемещения в пространстве точки с массой, равное сумме масс всех частиц в нее входящих, радиус-вектор которой дается формулой (4.3). Такую точку называют *центром инерции системы*.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Центр инерции** геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого.

Исходя из вышесказанного, закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции или покоится или движется прямолинейно и равномерно. В таком виде это есть обобщение закона инерции, который был выведен[12] для одной свободной материальной точки, «центр инерции» которой совпадает с ней самой.

При изучении механических свойств замкнутой системы естественно пользоваться той системой отсчета, в которой ее центр инерции покоится. Тем самым упрощая математические выкладки, в которых исключается из рассмотрения равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

§5. Преобразование энергии при переходе между различными инерциальными системами отсчета

Введем понятие внутренней энергии.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Энергию покоящейся как целое механической системы называют ее **внутренней энергией**.

Найдем закон преобразования энергии при переходе от инерциальной системы K отсчета к другой инерциальной системе K', двигающейся со скоростью $\vec{V}_{K'}$ относительно

[12] См. §6 главы 1

первой. Пусть в системе отсчета K рассматриваемая механическая система покоится как целое, то есть ее полный импульс равен нулю. Обозначим через $E_{внутр.}$ ее внутреннюю энергию. Тогда

$$E_{внутр.} = \frac{1}{2}\sum_n m_n V_n^2 + U = \frac{1}{2}\sum_n m_n \left(\vec{V}'_n + \vec{V}_{K'}\right)^2 + U =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n m_n \left(V_n'^2 + 2\left\langle V'_n, V_{K'}\right\rangle + V_{K'}^2\right) + U =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n m_n V_n'^2 + \frac{1}{2}\sum_n m_n 2\left\langle V'_n, V_{K'}\right\rangle + \frac{1}{2}\sum_n m_n V_{K'}^2 + U =$$

$$= \frac{1}{2} V_{K'}^2 \underbrace{\sum_n m_n}_{\mu} + \left\langle \vec{V}_{K'}, \underbrace{\sum_n m_n \vec{V}'_n}_{=\vec{P}'} \right\rangle + \underbrace{\sum_n \frac{m_n V_n'^2}{2} + U}_{=E'_{внутр.}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow E_{внутр.} = \frac{\mu V_{K'}^2}{2} + \left\langle \vec{V}_{K'}, \vec{P}' \right\rangle + E'_{внутр.}}, \tag{5.1}$$

где $\mu = \sum_n m_n$ - полная масса рассматриваемой механической системы.

§6. Закон сохранения момента импульса

Перейдем к выводу закона сохранения, возникновение которого связано с изотропией пространства. Рассмотрим замкнутую механическую систему, состоящую из N частиц. Изотропия пространства означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом её повороте как целого. В соответствии с этим, рассмотрим бесконечно малый поворот механической системы и потребуем, чтобы ее функция Лагранжа при этом не изменилась[13].

[13] Соображения, по которым $\delta L = 0$ аналогичны тем, которые обсуждались в §3 настоящей главы

Введем вектор $\delta\vec{\varphi}$ бесконечно малого поворота, абсолютная величина которого равна углу $\delta\varphi$ поворота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению $\delta\vec{\varphi}$).

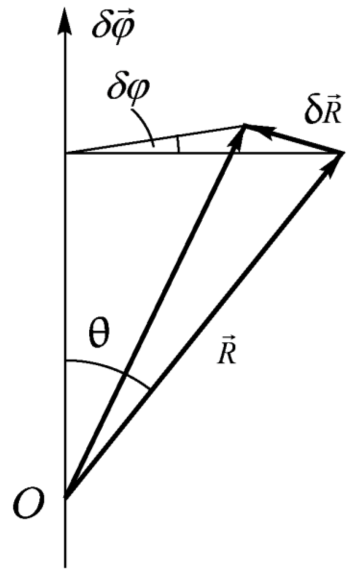

Рис. 6.1.

Найдем, прежде всего, чему равно при таком повороте приращение радиус-вектора, проведенного из общего начала координат (расположенного на оси вращения) к какой-либо из материальных точек поворачиваемой системы. Линейное перемещение конца радиус-вектора связано с углом соотношением (рис. 6.1)

$$\left|\delta\vec{R}\right| = R \cdot \sin\theta \cdot \delta\varphi .$$

Направление же вектора $\delta\vec{R}$ перпендикулярно к плоскости, проходящей через $\vec{R}$ и $\delta\vec{\varphi}$. Поэтому ясно, что

$$\delta\vec{R} = \left[\delta\vec{\varphi}, \vec{R}\right]. \qquad (6.1)$$

При повороте системы меняется направление не только радиус-векторов, но и скорости всех частиц, причем все векторы преобразуются по одинаковому закону. Поэтому приращение скорости относительно неподвижной системы координат

$$\delta\vec{V} = \left[\delta\vec{\varphi}, \vec{V}\right]. \qquad (6.2)$$

Подставим эти выражения в условие неизменяемости функции Лагранжа при повороте:

$$\delta L = L\left(\vec{R}'_1,...,\vec{R}'_n,\vec{V}'_1,...,\vec{V}'_n\right) - L\left(\vec{R}_1,...,\vec{R}_n,\vec{V}_1,...,\vec{V}_n\right) =$$

$$= L\left(\vec{R}_1 + \delta\vec{R},...,\vec{R}_n + \delta\vec{R},\vec{V}_1 + \delta\vec{V},...,\vec{V}_n + \delta\vec{V}\right) - L\left(\vec{R}_1,...,\vec{R}_n,\vec{V}_1,...,\vec{V}_n\right) =$$

$$\delta L\left(\vec{R},\vec{V}\right) = \sum_n \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n}, \delta\vec{R}_n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_n}, \delta\vec{V}_n \right\rangle\right) =$$

$$= \sum_n \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n}, \left[\delta\vec{\varphi}, \vec{R}_n\right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_n}, \left[\delta\vec{\varphi}, \vec{V}_n\right] \right\rangle\right) = 0$$

Заменив производные $\frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} = \dot{\vec{p}}_n$ и $\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_n} = \vec{p}_n$ получим:

$$\delta L = \sum_n \left(\left\langle \dot{\vec{p}}_n, \left[\delta\vec{\varphi}, \vec{R}_n\right]\right\rangle + \left\langle \vec{p}_n, \left[\delta\vec{\varphi}, \vec{V}_n\right]\right\rangle\right) = 0 .$$

Далее сделаем циклическую перестановку[14] множителей и вынесем $\delta\vec{\varphi}$ за знак суммы:

$$\delta L = \left\langle \delta\vec{\varphi}, \sum_n \left(\left[\vec{R}_n, \dot{\vec{p}}_n\right] + \left[\vec{V}_n, \vec{p}_n\right]\right)\right\rangle = \left\langle \delta\vec{\varphi}, \sum_n \left(\underbrace{\left[\vec{R}_n, \frac{d}{dt}\vec{p}_n\right] + \left[\frac{d}{dt}\vec{R}_n, \vec{p}_n\right]}_{\frac{d}{dt}\left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right]}\right)\right\rangle \Rightarrow$$

$$\delta L = \left\langle \delta\vec{\varphi}, \frac{d}{dt}\sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right]\right\rangle = 0.$$

Ввиду произвольности $\delta\vec{\varphi}$ отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right] = \vec{0}.$$

Интегрируя последнее равенство получим:

[14] $\left\langle \vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right\rangle = \left\langle \vec{b},[\vec{c},\vec{a}]\right\rangle = \left\langle \vec{c},[\vec{a},\vec{b}]\right\rangle$

$$\sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right] = \overrightarrow{const}\,.$$

Обозначим $\sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right]$ через букву $\vec{M}$:

$$\boxed{\vec{M} = \sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right] = \overrightarrow{const}}\,. \qquad (6.3)$$

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что в замкнутой механической системе векторная величина $\vec{M}$ остается неизменной при движении.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Векторную величину $\vec{M}$, определяемую по формуле (6.3), называют **моментом импульса системы** (или просто моментом).

Аддитивность момента импульса следует непосредственно из его определяющей формулы (6.3). Это означает, что неизменность момента импульса механической системы можно считать законом сохранения, который так и называется: **закон сохранения момента импульса**.

ВАЖНО Хотя закон сохранения всех трех компонент момента (относительно произвольного начала координат) имеет место только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может иметь место и для систем, находящихся во внешнем поле. Из приведенного выше вывода очевидно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и потому механические свойства системы не меняются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой же оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с центральной симметрией, т.е. поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется вектор $\vec{M}$ момента, но определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля.

§7. Преобразование момента импульса при переходе между различными инерциальными системами отсчета

Поскольку в определение момента входят радиус-вектор частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Посмотрим, как изменяется момент импульса при переходе от системы отсчета K к системе отсчета K', смещенной относительно K на вектор $\vec{\varepsilon}$. Пусть $\vec{R}_n$ и $\vec{R}'_n$ - радиус-векторы одной и той же точки в системах отсчета K и K' соответственно. Следовательно эти радиус-векторы смещены на друг относительно друга на вектор $\vec{\varepsilon}$ и, очевидно, связаны соотношением $\vec{R}_n = \vec{R}'_n + \vec{\varepsilon}$. Поэтому:

$$\vec{M} = \sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right] = \sum_n \left[\vec{R}'_n + \vec{\varepsilon}, \vec{p}_n\right] = \sum_n \left[\vec{R}'_n, \vec{p}_n\right] + \sum_n \left[\vec{\varepsilon}, \vec{p}_n\right] =$$

$$= \underbrace{\sum_n \left[\vec{R}'_n, \vec{p}_n\right]}_{\vec{M}'} + \left[\vec{\varepsilon}, \underbrace{\sum_n \vec{p}_n}_{\vec{P}}\right]$$

или

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}' + \left[\vec{\varepsilon}, \vec{P}\right]}, \tag{7.1}$$

где $\vec{P} = \sum_n \vec{p}_n$ - полный импульс системы.

ВАЖНО! Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое покоится (т.е. $\vec{P} = \vec{0}$), ее момент не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Выведем также формулу, связывающую значения момента импульса в двух различных инерциальных системах отсчета K и K', вторая из которых движется относительно первой со скоростью $\vec{V}_{K'}$. Тогда радиус-векторы частиц в этих системах отсчета будут связаны соотношением $\vec{R}_n = \vec{R}'_n + \vec{V}_{K'} t$, а скорости связаны выражением $\vec{V}_n = \vec{V}'_n + \vec{V}_{K'}$. Поэтому:

$$\vec{M} = \sum_n \left[\vec{R}_n, \vec{p}_n\right] = \sum_n m_n \left[\vec{R}_n, \vec{V}_n\right] = \sum_n m_n \left[\vec{R}'_n + \vec{V}_{K'} \cdot t, \vec{V}'_n + \vec{V}_{K'}\right] =$$

$$=\sum_n m_n\left(\left[\vec{R}'_n,\vec{V}'_n\right]+\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+\left[\vec{V}_{K'}\cdot t,\vec{V}'_n\right]+\left[\vec{V}_{K'}\cdot t,\vec{V}_{K'}\right]\right)=$$

$$=\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}'_n\right]+\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+\sum_n m_n\left[\vec{V}_{K'}\cdot t,\vec{V}'_n\right]+\sum_n m_n\left[\vec{V}_{K'}\cdot t,\vec{V}_{K'}\right]=$$

$$=\sum_n\left[\vec{R}'_n,\underbrace{m_n\vec{V}'_n}_{\vec{p}'_n}\right]+\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+\sum_n t\left[\vec{V}_{K'},\underbrace{m_n\vec{V}'_n}_{\vec{p}'_n}\right]+\sum_n m_n t\underbrace{\left[\vec{V}_{K'},\vec{V}_{K'}\right]}_{=\vec{0}}=$$

$$=\sum_n\left[\vec{R}'_n,\vec{p}'_n\right]+\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+\sum_n t\left[\vec{V}_{K'},\vec{p}'_n\right]=$$

$$=\underbrace{\sum_n m_n\left[\vec{R}_n,\vec{V}'_n\right]}_{\vec{M}'}+\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+t\left[\vec{V}_{K'},\underbrace{\sum_n\vec{p}'_n}_{\vec{P}'}\right]=$$

$$=\vec{M}'+\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+t\left[\vec{V}_{K'},\vec{P}'\right].$$

Введем, согласно (4.3), радиус-вектор центра инерции:

$$\vec{M}=\vec{M}'+\sum_n m_n\left[\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+t\left[\vec{V}_{K'},\vec{P}'\right]=\vec{M}'+\sum_n m_n\left[\vec{R}_n,\vec{V}_{K'}\right]+t\left[\vec{V}_{K'},\vec{P}'\right]=$$

$$=\vec{M}'+\left[\sum_n m_n\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+t\left[\vec{V}_{K'},\vec{P}'\right]=$$

$$=\vec{M}'+\left[\frac{\sum_n m_n}{\sum_n m_n}\sum_n m_n\vec{R}'_n,\vec{V}_{K'}\right]+t\left[\vec{V}_{K'},\frac{\sum_n m_n}{\sum_n m_n}\vec{P}'\right]=$$

$$=\vec{M}'+\underbrace{\sum_n m_n}_{\mu}\left[\underbrace{\frac{\sum_n m_n\vec{R}'_n}{\sum_n m_n}}_{\vec{R}_{ЦИ}},\vec{V}_{K'}\right]+t\underbrace{\sum_n m_n}_{\mu}\left[\vec{V}_{K'},\underbrace{\frac{\vec{P}'}{\sum_n m_n}}_{\vec{V}_{ЦИ}}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow\vec{M}=\vec{M}'+\mu\left[\vec{R}_{ЦИ},\vec{V}_{K'}\right]+\mu\cdot t\left[\vec{V}_{K'},\vec{V}_{ЦИ}\right]}\qquad(7.1`)$$

или

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}' + \mu\left[\vec{R}_{ЦИ}, \vec{V}_{K'}\right] + t\left[\vec{V}_{K'}, \vec{P}'\right]}. \qquad (7.1``)$$

$\boxed{\text{ВАЖНО}}$ Эта формула определяет закон преобразования момента импульса при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому, как для импульса и энергии аналогичные законы даются формулами (4.1) и (5.1).

$\boxed{\text{ВАЖНО}}$ Другими словами, момент импульса $\vec{M}$ механической системы складывается из ее «собственного момента» относительно системы отсчета, в которой она покоится, и момента $\mu\left[\vec{R}_{ЦИ}, \vec{V}_{K'}\right] + \mu \cdot t\left[\vec{V}_{K'}, \vec{V}_{ЦИ}\right]$, связанного с ее движением как целого.

§8. Заключение

В заключении, просуммируем все изученные закона сохранения.

$\boxed{\text{ЗАКОН}}$ Закон сохранения энергии заключается в том, что энергия замкнутой системы сохраняется.

$\boxed{\text{ЗАКОН}}$ Закон сохранения импульса заключается в том, что векторная сумма импульсов всех тел замкнутой системы сохраняется.

$\boxed{\text{ЗАКОН}}$ Закон сохранения момента импульса заключается в том, что векторная сумма моментов импульсов всех тел замкнутой системы сохраняется.

Этим исчерпываются аддитивные интегралы движения. Таким образом, всякая замкнутая система имеет всего семь таких интегралов: энергия и по три компоненты векторов импульса и момента импульса.