# Глава 3. Интегрирование уравнений движения

## Оглавление

## §1. Одномерное движение

Перед нами стоит задача найти закон движения механической для случая одномерного движения. Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. Конечно, можно решать эту задачу для каждого конкретного случая по стандартной схеме: записать функцию Лагранжа, составить уравнения Лагранжа и проинтегрировать получившиеся дифференциальные уравнения.

Но эта задача может быть решена в общем виде исходя из закона сохранения энергии. Для удобства запишем функцию Лагранжа в декартовых координатах:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{1.1}$$

Найдем закон движения для механической системы, описываемой функцией (1.2). Запишем для рассматриваемой системы закон сохранения энергии:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const\,. \tag{1.2}$$

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрирующееся путем разделения переменных:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \pm dt\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \Rightarrow dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}}, \tag{1.3}$$

где $t_0$ - время начала отсчета, а $x_0$, координата в момент времени $t_0$. Где знак “+”или “ – ” определяется знаком скорости в начальный момент времени.

Выразив из формулы (1.3) координату через время получим искомый закон движения, записанный, правда, в неявной форме.

Проанализируем характер движения частицы. Поскольку кинетическая энергия — величина положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т.е. движение может происходить только в тех областях пространства, где $U(x) < E$. В области $U(x) \geq E$ – движение в классической механике невозможно.

Рассмотрим движение частицы в поле $U(x)$, показанном на рисунке 1.1. Проведя на этом же графике горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению полной энергии, мы сразу же выясним возможные области движения. Так в изображенном на рис. 1.1 случае движение может происходить лишь в области *AB* или в области справа от *C*.

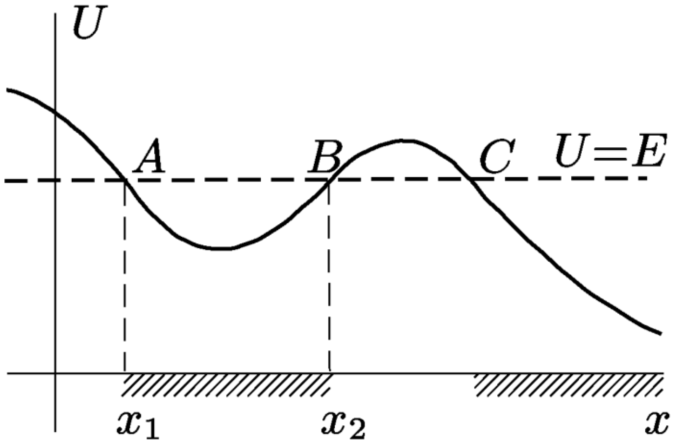


Рис. 1.1

Точки, в которых потенциальная энергия равна полной

$$U(x) = E, \tag{1.4}$$

определяют границы движения. Они называются **<u>точками останова</u>**, поскольку в них кинетическая энергия и, как следствие, скорость обращается в нуль. Часто эти точки называют ***точками поворота***.

Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства; оно является, как говорят, **<u>финитным</u>**. Если же область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, —

движение **инфинитно**, частица уходит на бесконечность. Одномерное финитное движение является колебательным — частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами (на рис. 1.1 в потенциальной яме AB между точками $x_1$ и $x_2$). При этом согласно общему свойству обратимости время движения от $x_1$ до $x_2$ равно времени обратного движения от $x_2$ до $x_1$. Поэтому период колебания $T$, т.е. время, за которое точка пройдет от $x_1$ до $x_2$ и обратно, равен удвоенному времени прохождения отрезка $x_1x_2$ или согласно (1.3) равен:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{1.5}$$

причем пределы $x_1$ до $x_2$ являются корнями уравнения (1.4) при данном значении $E$. То есть формула (1.5) определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

## §2. Задача двух тел, приведенная масса

Полное решение в общем виде допускает чрезвычайно важная задача о движении системы, состоящей всего из двух взаимодействующих частиц. Такая задача называется **задачей двух тел**. Таким образом, наша задача найти закон движения для системы из двух взаимодействующих частиц.

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, т.е. от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Поэтому лагранжева функция такой системы

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{R}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{R}}_2^2}{2} - U\left(\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right|\right). \tag{2.1}$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2.$$

Поместим начало координат в центре инерции. Согласно определению[1], это означает, что

$$m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = \vec{0}.$$

[1] См. §4 главы 2

Из двух последних равенств составим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$. Решаем ее:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \\ m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ \vec{R}_1 = -\dfrac{m_2\vec{R}_2}{m_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ \vec{R} + \vec{R}_2 = -\dfrac{m_2\vec{R}_2}{m_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ m_1\vec{R} + m_1\vec{R}_2 = -m_2\vec{R}_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ m_1\vec{R} = -m_2\vec{R}_2 - m_1\vec{R}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ m_1\vec{R} = -m_2\vec{R}_2 - m_1\vec{R}_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ \vec{R}_2\left(m_2 + m_1\right) = -m_1\vec{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{R}_2 \\ \vec{R}_2 = -\dfrac{m_1}{m_2 + m_1}\vec{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} + -\dfrac{m_1}{m_2 + m_1}\vec{R} \\ \vec{R}_2 = -\dfrac{m_1}{m_2 + m_1}\vec{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \dfrac{m_2}{m_2 + m_1}\vec{R} \\ \vec{R}_2 = -\dfrac{m_1}{m_2 + m_1}\vec{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \dfrac{m_2}{m_2 + m_1}\vec{R} \\ \vec{R}_2 = -\dfrac{m_1}{m_2 + m_1}\vec{R} \end{cases}. \tag{2.2}$$

Подставляя эти выражения в (2.1), получим:

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_2 + m_1}\dot{\vec{R}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_2 + m_1}\dot{\vec{R}}\right)^2 - U\left(R\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{\left(m_2 + m_1\right)^2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{\left(m_2 + m_1\right)^2}\dot{\vec{R}}^2 - U\left(R\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{\left(m_2 + m_1\right)^2}\left(m_2 + m_1\right)\dot{\vec{R}}^2 - U\left(R\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_2+m_1}}_{m}\dot{\vec{R}}^2-U(R)\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow L=\frac{m\dot{\vec{R}}^2}{2}-U(R)}. \qquad (2.3)$$

где введено обозначение

$$\boxed{m=\frac{m_1 m_2}{m_2+m_1}}. \qquad (2.4)$$

> ОПРЕДЕЛНИЕ Величина $m$, определяемая по формуле (2.4), называется **приведенной массой**.

Функция (2.3) формально совпадает с функцией Лагранжа одной материальной точки с массой $m$, движущейся во внешнем поле $U(R)$ симметричном относительно неподвижного начала координат.

ВАЖНО Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных точек сводится к решению задачи о движении одной точки в заданном внешнем поле $U(R)$. По решению $\vec{R}=\vec{R}(t)$ этой задачи законы движения каждой из частиц $\vec{R}_1=\vec{R}_1(t)$ и $\vec{R}_2=\vec{R}_2(t)$ в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (2.2).

## §3. Движение в центральном поле

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли к вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния $\vec{R}$ до определенной неподвижной точки; такое поле называют **центральным**. Сила

$$\vec{F}(R)=-\frac{\partial U}{\partial \vec{R}},$$

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только от $R$ и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора.

Наша задача найти в общем виде закон движения частицы в центральном поле. Для решения поставленной задачи учтем результаты предыдущего параграфа и воспользуемся законами сохранения момента импульса и энергии.

Как было уже показано[2], при движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы это есть

$$\vec{M} = \left[\vec{R}, \vec{P}\right].$$

Поскольку векторы $\vec{M}$ и $\vec{P}$ взаимно перпендикулярны, постоянство $\vec{M}$ означает, что при движении частицы ее радиус-вектор $\vec{R}$ все время остается в одной плоскости - плоскости, перпендикулярной к $\vec{M}$ .

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Повернем систему отсчета так, чтобы оси *X* и *Y* лежали в плоскости движения. Так как движение происходит в одной плоскости *XY*, то всегда $z = 0$. Перейдем в плоскости движения к полярным координатам $r$ , $\varphi$ и $z$ (см. рис. 3.1).:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \\ z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

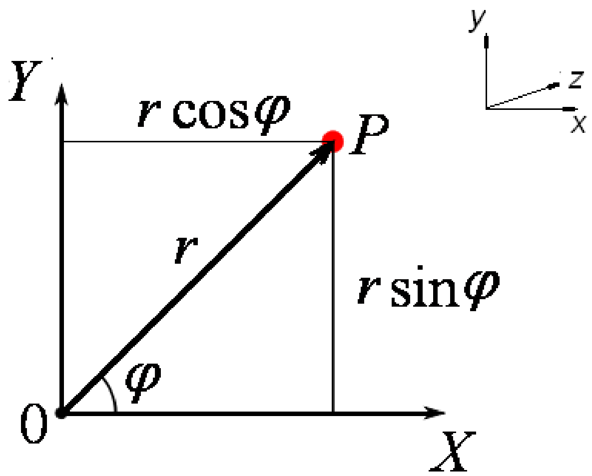


Рис. 3.1

[2] См. §4 главы 2

Запишем закон сохранения для рассматриваемой механической системы в полярных координатах:

$$E=\frac{mV^2}{2}+U=\frac{m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)}{2}+U=$$

$$=\frac{m\left(\left[\dot{r}\cdot\cos\varphi-r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi\right]^2+\left[\dot{r}\cdot\sin\varphi+r\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi\right]^2+0^2\right)}{2}+U=$$

$$=\frac{m\left(\dot{r}^2\cdot\cos^2\varphi-2\cdot\dot{r}\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi+r^2\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\sin^2\varphi+\dot{r}^2\cdot\sin^2\varphi+2\cdot\dot{r}\cdot\sin\varphi\cdot r\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi+r^2\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\cos^2\varphi^2\right)}{2}+U\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow E=\frac{m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)}{2}+U(r)}. \qquad (3.1)$$

Аналогично, запишем закон сохранения момента импульса:

$$\vec{M}=\left[\vec{R},\vec{P}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x&y&z\\m\dot{x}&m\dot{y}&m\dot{z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x&y&0\\m\dot{x}&m\dot{y}&0\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\underbrace{\begin{vmatrix}y&0\\m\dot{y}&0\end{vmatrix}}_{M_x}-\vec{j}\underbrace{\begin{vmatrix}x&0\\m\dot{x}&0\end{vmatrix}}_{M_y}+\vec{k}\underbrace{\begin{vmatrix}x&y\\m\dot{x}&m\dot{y}\end{vmatrix}}_{M_z}=$$

$$=\vec{i}\cdot 0-\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\underbrace{\left(x\cdot m\dot{y}-y\cdot m\dot{x}\right)}_{M_z}\Rightarrow$$

$$M_z=x\cdot m\dot{y}-y\cdot m\dot{x}=$$

$$=m\left(r\cdot\cos\varphi\cdot\left[\dot{r}\cdot\sin\varphi+r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi\right]-r\cdot\sin\varphi\cdot\left[\dot{r}\cdot\cos\varphi-r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi\right]\right)=$$

$$=m\left(r\cdot\cos\varphi\cdot\dot{r}\cdot\sin\varphi+r^2\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos^2\varphi-r\cdot\sin\varphi\cdot\dot{r}\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot\sin\varphi+r^2\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin^2\varphi\right)=$$

$$=m\left(r^2\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos^2\varphi+r^2\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin^2\varphi\right)=m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow M_z=m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}}. \qquad (3.2)$$

В силу закона сохранения импульса, единственная отличная от нуля проекция момента импульса $M_z$ сохраняется, то есть $M_z=m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}=const\equiv M$.

Выразим $\dot{\varphi}$ из (3.2) и подставим в (3.1):

$$\dot{\varphi}=\frac{M}{m\cdot r^2}\Rightarrow E=\frac{m\left(\dot{r}^2+r^2\left[\frac{M}{m\cdot r^2}\right]^2\right)}{2}+U(r)=$$

$$=\frac{m\left(\dot{r}^2+r^2\frac{M^2}{m^2\cdot r^4}\right)}{2}+U(r)\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2m\cdot r^2}+U(r)}. \tag{3.3}$$

Выразим из (3.3) $\dot{r}$:

$$\dot{r}^2=\frac{2}{m}\left(E-U-\frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U-\frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)},$$

где знак “+” или “$-$” определяется знаком скорости в начальный момент времени. Далее, для удобства, будем “$\pm$” будем опускать:

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U-\frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}.$$

Далее, разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U-\frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dr=dt\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U-\frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U-\frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}}\Rightarrow \tag{3.4}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U - \frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U - \frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}} + t_0}. \qquad (3.5)$$

Соотношение (3.5) связывает в общем виде $r$ и время $t$, то есть является искомым законом движения, правда, записанным в неявном виде.

Если из формулы (3.2) выразить $dt$ и подставить его в формулу (3.4), то, проинтегрировав, можно получить соотношение, связывающее между собой координаты, то есть траекторию движения. Действительно:

$$M = m\cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \Leftrightarrow M = m\cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{m\cdot r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{M}{m\cdot r^2} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{m\cdot r^2}{M} d\varphi .$$

Далее:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U - \frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}} = \frac{m\cdot r^2}{M} d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{M}{m\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U - \frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{M}{\sqrt{2m\left(E - U - \frac{M^2}{2m\cdot r^2}\right)}} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \varphi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{M}{\sqrt{2m\left(E - U - \dfrac{M^2}{2m \cdot r^2}\right)}} \frac{dr}{r^2} + \varphi_0}. \tag{3.6}$$

Повторяясь, отметим, что формулы (3.5) и (3.6) решают в общем виде поставленную задачу. Первая из них представляет закон движения, записанный в неявном виде, а вторая – уравнение траектории движения.

ВАЖНО Закон сохранения энергии (3.3) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной» потенциальной энергией (или эффективным потенциалом), определяемым по формуле:

$$\boxed{U_{эфф} = U(r) + \frac{M^2}{2m \cdot r^2}}. \tag{3.6}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величину $\frac{M^2}{2m \cdot r^2}$ называют центробежной энергией.

Значения $r$, при которых $E = U_{эфф}$, определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении этого равенства радиальная скорость $\dot{r}$ обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость $\varphi$ не обращается в нуль. Равенство $\dot{r} = 0$ означает «точку поворота» траектории, в которой функция $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Если область допустимого изменения $r$ ограничена лишь одним условием $r \ge r_{\min}$, то движение частицы инфинитно — ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.

Если область изменения $r$ имеет две границы $r_{\min}$ и $r_{\max}$, то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями $r_{\min} \le r \le r_{\max}$. Это, однако, не означает, что траектория непременно является замкнутой кривой.

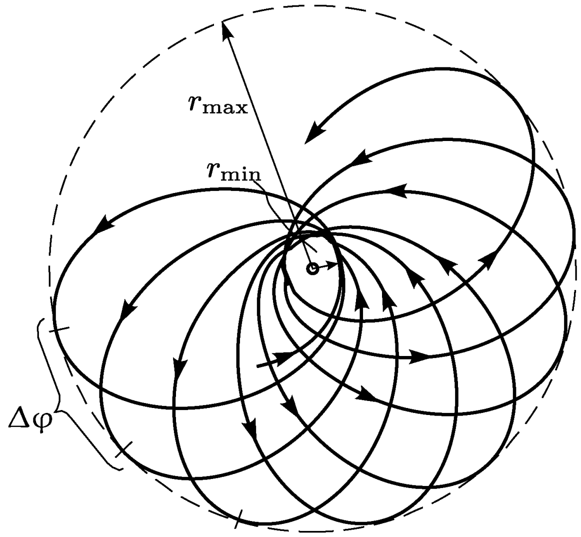


Рис. 3.2

## §4. Кеплерова задача

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна $r$ и соответственно силы обратно пропорциональны $r^2$. Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля; первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения, в котором

$$U = -\alpha/r \tag{15.1}$$

с положительной постоянной $\alpha$. График «эффективной» потенциальной энергии

$$U_{эф} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15.2}$$

имеет вид, изображенный на рис. 10. При $\mathbf{r} \to 0$ она обращается в $+\infty$, а при $r \to \infty$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при $r = M^2/\alpha m$ она имеет минимум, равный

$$(U_{эф})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{15.3}$$

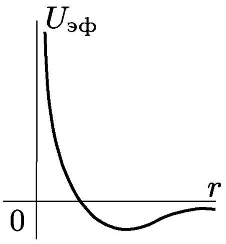

Рис. 10

Из этого графика очевидно, что при $E > 0$ движение частицы будет инфинитным, а при $E < 0$ — финитным.

Форма траектории получается с помощью общей формулы (14.7). Подставляя в нее $U = -\alpha/r$ и производя элементарное интегрирование, получим

$$\varphi = \arccos \frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}} + \text{const}\,.$$

Выбирая начало отсчета угла $\varphi$ так, чтобы $\text{const} = 0$, и вводя обозначения

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15.4}$$

перепишем формулу для траектории в виде

$$p/r = 1 + e\cos\varphi. \tag{15.5}$$

Это есть уравнение конического сечения с фокусом в начале координат; $p$ и $e$ — так называемые *параметр* и *эксцентриситет* орбиты. Сделанный нами выбор начала отсчета $\varphi$ заключается, как видно из (15.5), в том, что точка с $\varphi = 0$ является ближайшей к центру (так называемый *перигелий* орбиты).

В эквивалентной задаче двух тел, взаимодействующих по закону (15.1), орбита каждой из частиц тоже представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции.

Из (15.4) видно, что при $E < 0$ эксцентриситет $e < 1$, т.е. орбита является эллипсом (рис. 11) и движение финитно в соответствии со сказанным в начале параграфа. Согласно известным формулам аналитической геометрии большая и малая полуоси эллипса

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15.6}$$

Наименьшее допустимое значение энергии совпадает с (15.3), при этом $e = 0$, т.е. эллипс обращается в окружность. Отметим, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента) частицы. Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (фокуса эллипса) равны

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \qquad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \tag{15.7}$$

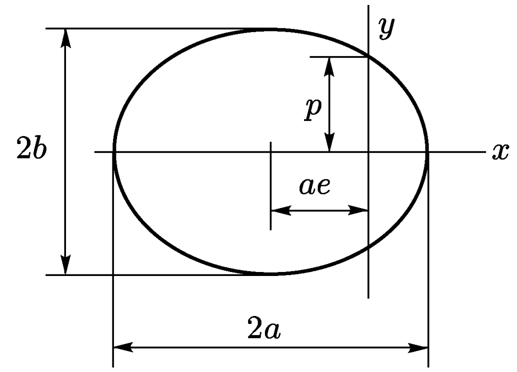

Рис. 11

Эти выражения (с $a$ и $e$ из (15.6) и (15.4)) можно было бы, конечно, получить и непосредственно как корни уравнения $U_{эф}(r) = E$.

Время обращения по эллиптической орбите, т.е. период движения $T$, удобно определить с помощью закона сохранения момента в форме «интеграла площадей» (14.3). Интегрируя это равенство по времени от нуля до $T$, получим

$$2mf = TM,$$

где $f$ — площадь орбиты. Для эллипса $f = \pi ab$, и с помощью формул (15.6) находим

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \tag{15.8}$$

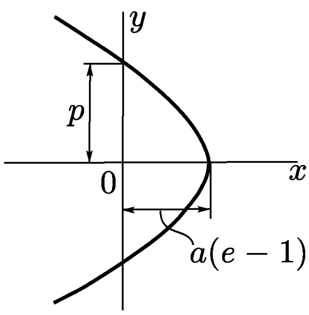

Рис. 12

Тот факт, что квадрат периода должен быть пропорционален кубу линейных размеров орбиты, был указан уже в § 10. Отметим также, что период зависит только от энергии частицы.

При $E \geqslant 0$ движение инфинитно. Если $E > 0$, то эксцентриситет $e > 1$, т.е. траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус), как показано на рис. 12. Расстояние перигелия от центра

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \tag{15.9}$$

где

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}$$

— «полуось» гиперболы.

В случае же $E = 0$ эксцентриситет $e = 1$, т.е. частица движется по параболе, с расстоянием перигелия $r_{\min} = p/2$. Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Зависимость координат частицы от времени при движении по орбите может быть найдена с помощью общей формулы (14.6). Она может быть представлена в удобном параметрическом виде следующим образом.

Рассмотрим сначала эллиптические орбиты. Вводя $a$ и $e$ согласно (15.4), (15.6), запишем интеграл (14.6), определяющий время, в виде

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}.$$

С помощью естественной подстановки

$$r - a = -ae\cos\xi$$

этот интеграл приводится к виду

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e\cos\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi) + \mathrm{const}\,.$$

Выбирая начало отсчета времени так, чтобы обратить const в нуль, получим окончательно следующее параметрическое представление зависимости $r$ от $t$:

$$\mathbf{r} = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi) \qquad (15.10)$$

(в момент $t = 0$ частица находится в перигелии). Через тот же параметр $\xi$ можно выразить и декартовы координаты частицы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (оси $x$ и $y$ направлены соответственно по большой и малой полуосям эллипса). Из (15.5) и (15.10) имеем

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e),$$

а $y$ найдем, как $\sqrt{r^2 - x^2}$. Окончательно:

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin\xi. \qquad (15.11)$$

Полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра $\xi$ от нуля до $2\pi$.

Совершенно аналогичные вычисления для гиперболических траекторий приводят к результату

$$r = a(e\operatorname{ch}\xi - 1), \qquad t = \sqrt{ma^3/\alpha}\,(e\operatorname{sh}\xi - \xi),$$
$$x = a(e - \operatorname{ch}\xi), \qquad y = a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}\xi, \tag{15.12}$$

где параметр $\xi$ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Обратимся к движению в поле отталкивания, в котором

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{15.13}$$

($\alpha > 0$). В этом случае эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эф}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

монотонно убывает от $+\infty$ до нуля при изменении $r$ от нуля до $\infty$. Энергия частицы может быть только положительной и движение всегда инфинитно. Все вычисления для этого случая в точности аналогичны произведенным выше. Траектория является гиперболой

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15.14}$$

($p$ и $e$ определяются прежними формулами (15.4)). Она проходит мимо центра поля, как показано на рис. 13. Расстояние перигелия

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1). \tag{15.15}$$

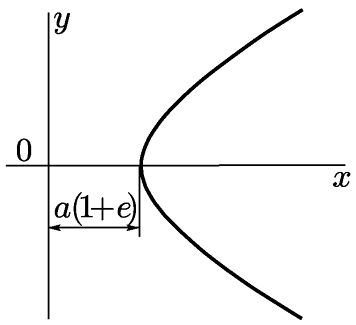


Рис. 13

Зависимость от времени дается параметрическими уравнениями

$$r = a(e\operatorname{ch}\xi + 1), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\operatorname{sh}\xi + \xi),$$
$$x = a(\operatorname{ch}\xi + e), \qquad y = a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}\xi. \tag{15.16}$$

В заключение параграфа укажем, что при движении в поле $U = \alpha/r$ (с любым знаком $\alpha$) имеется интеграл движения, специфический именно для этого поля. Легко проверить непосредственным вычислением, что величина

$$[\mathbf{vM}] + \frac{\alpha\mathbf{r}}{r} = \text{const}\,. \tag{15.17}$$

Действительно, ее полная производная по времени равна

$$[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3},$$

или, подставив $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$:

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3};$$

положив здесь согласно уравнениям движения $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha\mathbf{r}/r^3$, мы найдем, что это выражение обращается в нуль.

Сохраняющийся вектор (15.17) направлен вдоль большой оси от фокуса к перигелию, а по величине равен $\alpha e$. В этом проще всего можно убедиться, рассмотрев его значение в перигелии.

Подчеркнем, что интеграл движения (15.17), как и интегралы $M$ и $E$, является однозначной функцией состояния (положения и скорости) частицы. Мы увидим в § 50, что появление такого дополнительного однозначного интеграла связано с так называемым вырождением движения.