Глава 6. Метод Гамильтона-Якоби в классической механике

Оглавление

§1.Уравнения Гамильтона

Формулирование законов механики с помощью функции Лагранжа (и выводимых из нее уравнений Лагранжа) предполагает описание механического состояния системы путем задания ее обобщенных координат и скоростей. Такое описание, однако, не является единственно возможным. Ряд преимуществ, в особенности при исследовании различных общих вопросов механики, представляет описание с помощью обобщенных координат и импульсов системы.

Гамильтон получил уравнения движения, в которых независимыми переменными являются обобщенные координаты q_k и обобщенные импульсы $p_к$ - Уравнения Гамильтона или, как их еще называют, канонические уравнения (соответственно q_k и $p_к$ называются каноническими переменными[1]), в отличие от уравнений Лагранжа. являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Не зато число их, необходимое для описания системы с s степенями свободы, оказывается равным $2s$. Естественно, что они не дают ничего нового по существу. Однако канонические уравнения симметричнее уравнений Лагранжа и, кроме того, будучи инвариантными по отношению к каноническим преобразованиям, они открывают большие возможности для обобщений, играющих важную роль в электродинамике, статистической физике и квантовой механике.

Уравнения Гамильтона можно вывести двумя способами: либо из уравнений Лагранжа, либо непосредственно из принципа наименьшего действия (ниже мы приведем оба вывода).

Способ 1.

Выведем уравнения Гамильтона из уравнений Лагранжа. Для этого запишем её полный дифференциал:

$$L = L(q_1,...,q_s,\dot{q}_1,...,\dot{q}_s,t) \Rightarrow dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt\,.$$

[1] Уравнения Гамильтона называются каноническими в связи с тем что они остаются инвариантными при весьма общих преобразованиях переменных. С помощью таких канонических преобразований можно перейти от переменных q_k и $p_к$ к другим каноническим переменным $Q_i(q_1,...,q_s,p_1,...,p_s,t)$ и $P_i(q_1,...,q_s,p_1,...,p_s,t)$. При этом уравнения Гамильтона сохраняют свою форму, правда, с некоторой новой функцией Гамильтона $H'(Q_1,...,Q_s,P_1,...,P_s,t)$, которая заменяет функцию $H(q_1,...,q_s,p_1,...,p_s,t)$. Переменные Q_i и P_i могут иметь другой физически смысл, чем переменные q_k и $p_к$.

Поскольку производные $\partial L/\partial q_i$ являются, по определению, обобщенными импульсами p_i, а $\partial L/\partial \dot{q}_i = \dot{p}_i$ в силу уравнений Лагранжа, прееобразуем последнее равенство к виду:

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{1.1}$$

Учитывая, что:

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i dp_i \dot{q}_i \Leftrightarrow \sum_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i,$$

перепишем полученное соотношение (1.1):

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \Leftrightarrow dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - dL = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\underbrace{\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right)}_{E} = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{1.2}$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала в (1.2), представляет собой энергию системы[2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Энергия системы, выраженная через координаты и импульсы, называется **гамильтоновой функцией системы** (**гамильтонианом**) и обозначается буквой *H*:

$$\boxed{H(p_1, ..., p_s, q_1, ..., q_s, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L}. \tag{1.3}$$

Объединяя (1.2) и (1.3) запишем полный дифференциал функции Гамильтона:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{1.4}$$

С другой стороны полный дифференциал гамильтониана как функции многих переменных равен:

[2] См. §2 главы 2

$$H\left(p_1,\dots,p_s,q_1,\dots,q_s,t\right)\Rightarrow dH=\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt\,. \qquad (1.5)$$

Приравниваем (1.4) и (1.5):

$$dH=\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt=\sum_i\dot q_i dp_i-\sum_i\dot p_i dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt\,.$$

Для того, чтобы последнее равенство выполнялось, необходимо обеспечить выполнение следующих условий (то есть множители при одинаковых дифференциалах должны быть равны друг другу):

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q_i\\ \dfrac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot p_i\\ i=1,\dots s\end{cases}}, \qquad (1.6)$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}}. \qquad (1.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнения (1.6) суть искомые уравнения движения, называемые **уравнениями Гамильтона**.

Уравнения Гамильтона составляют систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $q_i(t)$ и $p_i(t)$, заменяющих собой s уравнений второго порядка метода Лагранжа. Ввиду их формальной простоты и симметрии эти уравнения называют также **каноническими**.

Способ 2.

Теперь получим уравнения Гамильтона из принципа наименьшего действия. Напомним, что согласно этому принципу система движется так, что действие S имеет наименьшее возможное значение[3]. Это означает, что вариация действия δS равна нулю:

[3] См. §2 главы 1

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_1,...,q_s,\dot q_1,...,\dot q_s)dt = 0\,. \tag{1.8}$$

Выразим функцию Лагранжа через гамильтониан, используя (1.3), и подставим в подынтегральное выражение (1.8):

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_1,...,q_s,\dot q_1,...,\dot q_s)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i p_i\dot q_i - H\right)dt = 0\,.$$

Перенесем варьирование под знак интеграла и вычислим вариацию подынтегрального выражения:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\sum_i p_i\dot q_i - H\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_i p_i\dot q_i - \delta H\right)dt = = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i \delta(p_i\dot q_i) - \underbrace{\left[\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right]}_{\delta H}\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i \delta p_i\dot q_i + \sum_i p_i\delta\dot q_i - \sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\dot q_i\delta p_i + p_i\delta\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)dt = 0\,. \tag{1.9}$$

Проинтегрируем второе слагаемое, стоящее под знаком суммы, воспользовавшись формулой интегрирования по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i\delta\dot q_i dt = p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\dot p_i\delta q_i dt = -\int_{t_1}^{t_2}\dot p_i\delta q_i dt\,,$$

так как вариации δq_i при подстановке пределов интегрирования обращаются в нуль[4].В результате, условие (1.9) примет следующий вид:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\dot q_i\delta p_i - \dot p_i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\left\{\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right\}\delta p_i - \left\{\dot p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right\}\delta q_i\right)dt = 0\,.$$

[4] При варьировании траекторий начальная и конечные точки предполагаются закрепленными (см. §3 главы 1)

В силу произвольности вариаций δp_i и δq_i это условие может выполняться только в случае, если выражения в фигурных скобках будут равны нулям. Отсюда сразу получаются система уравнений (1.6).

§2. Некоторые свойства функции Гамильтона

Исследуем функцию Гамильтона *H*. Найдем полную производную от этой функции по времени, воспользовавшись разложением (1.5):

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}+\sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

Учитывая систему уравнений Гамильтона (1.6) заменим соответствующие частные производные:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot q_i}\dot p_i+\sum_i \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{-\dot p_i}\dot q_i+\frac{\partial H}{\partial t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{dH}{dt}=\sum_i \dot q_i\dot p_i-\sum_i \dot p_i\dot q_i+\frac{\partial H}{\partial t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\boxed{\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}}. \qquad (1.10)$$

ВАЖНО Таким образом, если функция *H* не зависит явно от времени, она сохраняет свое значение, что является ожидаемым в силу закона сохранения энергии.

Возьмем второе уравнение из системы (1.6):

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot p_i \Leftrightarrow \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

С другой стороны, согласно уравнениям Лагранжа:

$$\frac{dL}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{p_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\Leftrightarrow \dot p_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Приравнивая последние два равенства друг к другу, получим:

$$\boxed{\dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}}. \qquad (1.11)$$

Отсюда следует, что те обобщенные координаты, которые являются циклическими, т. е. не входят явно в функцию Лагранжа *L*, не войдут явно и в функцию Гамильтона *H*.

Ранее было установлено, что обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам, являются интегралами движения.

$\boxed{\text{ВАЖНО}}$ Из сказанного можно заключить, что обобщенные импульсы, соответствующие координатам q_i не входящим явно в гамильтониан (т.е. циклическим относительно функции *H*), остаются постоянными, то есть $p_k = const$ при условии, что $\partial H/\partial q_i = 0$.

§2. Скобки Пуассона

Пусть $f(p,q,t)$ — некоторая функция координат, импульсов и времени. Составим ее полную производную по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k \right).$$

Подставив сюда вместо $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ их выражения из уравнений Гамильтона (40.4), получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, \tag{42.1}$$

где введено обозначение

$$\{Hf\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \tag{42.2}$$

Выражение (42.2) называют *скобками Пуассона* для величин H и f.

Такие функции от динамических переменных, которые остаются постоянными при движении системы, называются, как мы знаем, *интегралами движения.* Мы видим из (42.1), что условие того, чтобы величина f была интегралом движения ($df/dt = 0$), можно написать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0. \tag{42.3}$$

Если же интеграл движения не зависит от времени явно, то

$$\{Hf\} = 0, \tag{42.4}$$

т.е. его скобки Пуассона с функцией Гамильтона должны обращаться в нуль.

Для любой пары величин f и g скобки Пуассона определяются аналогично (42.2):

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \qquad (42.5)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами, легко выводимыми из определения.

Если переставить функции, то скобки переменят знак; если одна из функций — постоянная (c), то скобка равна нулю:

$$\{fg\} = -\{gf\}, \qquad (42.6)$$

$$\{fc\} = 0. \qquad (42.7)$$

Далее,

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \qquad (42.8)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2 g\} + f_2\{f_1 g\}. \qquad (42.9)$$

Взяв частную производную от (42.5) по времени, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \qquad (42.10)$$

Если одна из функций f или g совпадает с одним из импульсов или координат, то скобки Пуассона сводятся просто к частной производной:

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \qquad (42.11)$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \qquad (42.12)$$

Формулу (42.11), например, получим, положив в (42.5) $g = q_k$; вся сумма сведется при этом к одному члену, так как $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$, а $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = 0$. Положив в (42.11) и (42.12) функцию f равной q_i и p_i, получим, в частности,

$$\{q_i q_k\} = 0, \quad \{p_i p_k\} = 0, \quad \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \qquad (42.13)$$

Между скобками Пуассона, составленными из трех функций, существует соотношение

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0; \qquad (42.14)$$

оно называется *тождеством Якоби.*

Очень важным свойством скобок Пуассона является их инвариантность относительно канонических преобразований. Это означает, что

$$\{\varphi, \psi\}_{q,p} = \{\varphi, \psi\}_{Q,P}, \qquad (31.17)$$

где Q, P — переменные, полученные из q, p с помощью канонических преобразований.

В квантовой механике мы познакомимся с квантовыми скобками Пуассона, которые являются квантовомеханическим аналогом рассмотренных в этом параграфе классических скобок Пуассона.

§3. Теорема Лиувилля

Для геометрической интерпретации механических явлений часто пользуются понятием о так называемом *фазовом пространстве* как о пространстве $2s$ измерений, на координатных осях которого откладываются значения s обобщенных координат и s импульсов данной механической системы. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую *фазовой траекторией*. Произведение дифференциалов

$$d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s$$

можно рассматривать как «элемент объема» фазового пространства. Рассмотрим теперь интеграл $\int d\Gamma$, взятый по некоторой области фазового пространства и изображающий собой ее объем. Покажем, что эта величина обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям: если произвести каноническое преобразование от переменных p, q к переменным P, Q, то объемы соответствующих друг другу областей пространств p, q и P, Q одинаковы:

$$\int \!\!\ldots\!\! \int dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s = \int \!\!\ldots\!\! \int dQ_1 \ldots dQ_s \, dP_1 \ldots dP_s. \quad (46.1)$$

Как известно, преобразование переменных в кратном интеграле производится по формуле

$$\int \!\!\ldots\!\! \int dQ_1 \ldots dQ_s \, dP_1 \ldots dP_s = \int \!\!\ldots\!\! \int D dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s,$$

где

$$D = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)} \quad (46.2)$$

есть так называемый *якобиан преобразования*. Поэтому доказательство теоремы (46.1) сводится к доказательству того, что якобиан всякого канонического преобразования равен единице:

$$D = 1. \quad (46.3)$$

Воспользуемся известным свойством якобианов, которое позволяет обращаться с ними в определенном смысле, как с дробями. «Разделив числитель и знаменатель» на $\partial(q_1, \ldots, q_s,\ P_1, \ldots, P_s)$, получим

$$D = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)} \Bigg/ \frac{\partial(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)}. \qquad (46.4)$$

Согласно другому известному правилу якобиан, у которого в «числителе» и «знаменателе» фигурируют одинаковые величины, сводится к якобиану от меньшего числа переменных, причем при всех дифференцированиях в нем выпавшие одинаковые величины должны считаться постоянными. Поэтому

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s)} \right\}_{P=\mathrm{const}} \Bigg/ \left\{ \frac{\partial(p_1, \ldots, p_s)}{\partial(P_1, \ldots, P_s)} \right\}_{q=\mathrm{const}}. \qquad (46.5)$$

Рассмотрим якобиан, стоящий в числителе этого выражения. Согласно определению это есть определитель ранга s, составленный из элементов $\partial Q_i/\partial q_k$ (элемент на пересечении i-й строки и k-го столбца). Представив каноническое преобразование с помощью производящей функции $\Phi(q, P)$ в форме (45.8), получим

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}.$$

Таким же образом найдем, что i, k-й элемент определителя в знаменателе выражения (46.5) равен $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}$. Это значит, что оба определителя отличаются только заменой строк на столбцы и обратно. Поэтому они равны друг другу, так что отношение (46.5) равно единице, что и требовалось доказать.

Представим себе теперь, что каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом его объем остается неизменным:

$$\int d\Gamma = \mathrm{const}\,. \qquad (46.6)$$

Это утверждение (так называемая *теорема Лиувилля*) непосредственно следует из инвариантности фазового объема при канонических преобразованиях и из того, что самое изменение p и q при движении можно рассматривать (как было указано в конце предыдущего параграфа) как каноническое преобразование.

Совершенно аналогичным образом можно доказать инвариантность интегралов

$$\iint \sum_i dq_i\, dp_i,$$

$$\iiiint \sum_{i\neq k} dq_i\, dp_i\, dq_k\, dp_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

в которых интегрирование производится по заданным двух-, четырех- и т.д. -мерным многообразиям в фазовом пространстве.

§4. Уравнение Гамильтона - Якоби

Непосредственно относится к классической (не квантовой) механике, однако хорошо приспособлено для установления связи между классической механикой и квантовой, так как его можно, например, получить практически прямо из уравнения Шрёдингера в приближении быстроосциллирующей волновой функции (больших частот и волновых чисел).

Г.- Я. у. и связанный с ним метод решения задач механики играют важную роль и в др. областях физики, особенно в оптике и квантовой механике.

Варьирование действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{32.1}$$

при нахождении истинной траектории движения системы (имеется в виду траектория в конфигурационном пространстве, т. е. в пространстве s измерений; s — число степеней свободы системы) заключается в сравнении значений S для близких траекторий с закрепленными концами, т. е. с одинаковыми значениями $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$ и $q_k(t_2) = q_k^{(2)}$. Наглядно это можно представить с помощью рис. 32.1. Лишь та траектория, для которой S минимально, отвечает действительному движению (на рисунке она изображена сплошной линией).

В этом параграфе мы будем рассматривать действие S как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и исследуем, как эта величина ведет себя при изменениях точки $q^{(2)}$ (при $t_2 = \text{const}$), а также при изменениях t_2 (символ $q^{(2)}$ означает совокупность всех $q_k^{(2)}$). Таким образом, мы будем обращаться с действием как с функцией:

$$S = S(q_k, t), \tag{32.2}$$

где q_k — координаты конечного положения системы, а t — момент времени, когда это положение достигается.

Возьмем вблизи точки $q^{(2)}$ точку с координатой $q^{(2)}+\delta q$, в которую система попадает в тот же момент времени t_2, в который она приходит в точку $q^{(2)}$ (рис. 32.2). Действие для траектории, приводящей систему в точку $q^{(2)}+\delta q$, отличается от действия для

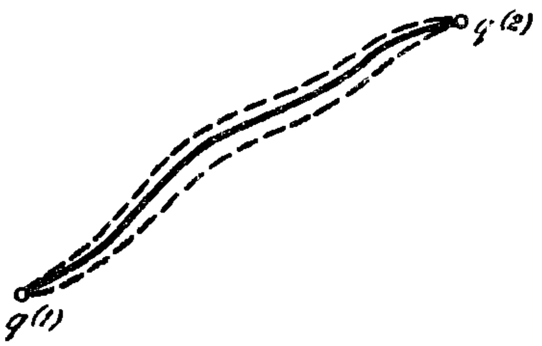

Рис. 32.1

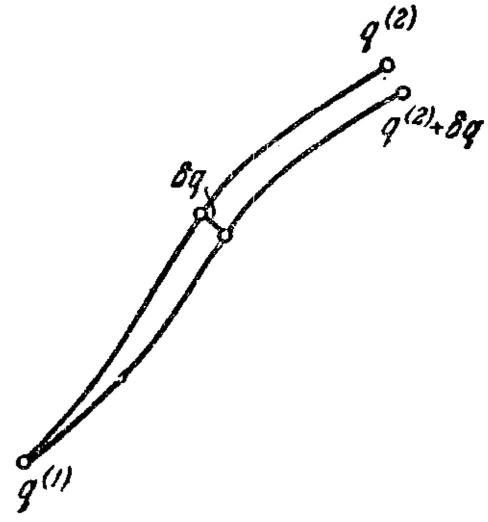

Рис. 32.2

траектории, по которой система приходит в точку $q^{(2)}$, на величину

$$\delta S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)dt. \qquad (32.3)$$

Здесь δq_k есть разность значений q_k, взятых для обеих траекторий в один и тот же момент времени t; аналогично $\delta\dot{q}_k$ — разность $\dot{q}_k$ в момент t.

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в (32.3):

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\,dt=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\Big|_{t_1}^{t_2}-\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,dt. \qquad (32.4)$$

Для истинной траектории $\partial L/\partial\dot{q}_k$ представляет собой обобщенный импульс p_k. Начала обеих траекторий совпадают, поэтому $\delta q_k(t_1)=0$. Величину $\delta q_k(t_2)$ можно обозначить просто δq_k. Следовательно, первый член в правой части (32.4) можно представить в виде $p_k\delta q_k$.

Подставим (32.4) в выражение (32.3):

$$\delta S = \sum_k p_k \delta q_k + \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \, dt.$$

Истинные траектории удовлетворяют уравнениям Лагранжа. Поэтому подынтегральная функция, а значит, и сам интеграл будет нулем. Таким образом, мы получаем для приращения действия S, обусловленного изменением координат конечного положения системы на δq_k (при неизменном времени движения), значение

$$\delta S = \sum_k p_k \delta q_k. \tag{32.5}$$

Здесь p_k — величина импульса в момент t_2.

Из выражения (32.5) вытекает, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k. \tag{32.6}$$

Следовательно, частные производные от действия по обобщенным координатам равны соответствующим обобщенным импульсам.

Теперь допустим, что верхний предел интегрирования в (32.1) не фиксирован. Чтобы подчеркнуть это, запишем действие в виде

$$S = \int_{t_1}^{t} L \, dt. \tag{32.7}$$

Представленное так действие является функцией верхнего предела интегрирования, т. е. $S = S(t)$. Из (32.7) следует, что

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{32.8}$$

Вместе с тем, в соответствии с (32.2) можно написать, что

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_k p_k \dot{q}_k \tag{32.9}$$

(мы учли соотношение (32.6)). Приравняв правые части выражений (32.8) и (32.9), получим для частной производной от S по t значение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L\right).$$

Выражение в скобках есть гамильтониан H. Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_k, p_k, t). \qquad (32.10)$$

В соответствии с формулами (32.6) и (32.10) дифференциал функции (32.2) можно представить в виде

$$dS = \sum_k p_k\, dq_k - H\, dt. \qquad (32.11)$$

Заменим в уравнении (32.10) p_k их значениями из (32.6) и запишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0. \qquad (32.12)$$

Мы получили дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $S(q_1, q_2, \ldots, q_s; t)$. Его называют *уравнением Гамильтона — Якоби*. Оно является уравнением в частных производных первого порядка.

Уравнение (32.12) лежит в основе некоторого общего метода интегрирования уравнений движения. Однако рассмотрение этого метода выходит за рамки нашего курса.

В случае консервативной системы со стационарными связями время не входит явно в функцию H и $H = E = \mathrm{const}$ (см. (30.9)). Поэтому согласно (32.10) зависимость S от t выражается слагаемым $-Et$. Следовательно, действие распадается на два члена, один из которых зависит только от обобщенных координат, а другой — только от времени

$$S(q_k, t) = S_0(q_k) - Et. \qquad (32.13)$$

Функцию $S_0(q_k)$ называют *укороченным действием*. Подставив S в виде (32.13) в уравнение (32.12), придем к уравнению Гамильтона — Якоби для укороченного действия

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \qquad (32.14)$$

В частном

случае при движении одной материальной точки в силовом поле, определяемом силовой ф-цией *U(x, y, z, t)*, Г.- Я. у. имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]-U(x, y, z, t)=0,$$

где *m* - масса точки, *x, y, z* - её координаты.