

Глава 4. Столкновения частиц

Оглавление

§1.	Распад частиц.....	2
§2.	Упругие столкновения частиц	5
§3.	Классическая теория рассеяния. Сечение рассеяния.....	11
§4.	Формула Резерфорда.....	13

§1. Распад частиц

Уже сами по себе законы сохранения импульса и энергии позволяют сделать во многих случаях ряд важных заключений о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами.

Начнем с процесса, представляющего собой «самопроизвольный» (т.е. без воздействия внешних сил) распад частицы на две «составные части», т.е. на две другие частицы, движущиеся после распада независимо друг от друга.

Прежде чем начать содержательное обсуждение, объединим все характеристики участвующих в распаде частиц в единую таблицу (см. таб. 1.1). Смысл этих величин будет раскрыт ниже.

Таб. 1.1

$E_{\text{внутр.}}$	Внутренняя энергия частицы до распада
\vec{V}	Скорость частицы до распада в л- системе
$E_{1\text{внутр.}}, m_1$	Внутренняя энергия и масса первой, образовавшейся после распада, частицы
$\vec{p}_1, \vec{v}_1, \theta_1$	Импульс, скорость и угол вылета правой, образовавшейся после распада, частицы в л- системе
$\vec{p}_{01}, \vec{v}_{01}, \theta_{01}$	Импульс, скорость и угол вылета правой, образовавшейся после распада, частицы в ц- системе
$E_{2\text{внутр.}}, m_2$	Внутренняя энергия и масса второй, образовавшейся после распада, частицы
$\vec{p}_2, \vec{v}_2, \theta_2$	Импульс, скорость и угол вылета второй, образовавшейся после распада, частицы в л- системе
$\vec{p}_{02}, \vec{v}_{02}, \theta_{02}$	Импульс, скорость и угол вылета второй, образовавшейся после распада, частицы в ц- системе

Рассмотрим частицу, двигающуюся в лабораторной системе отсчета (л- системе) со скоростью \vec{V} и обладающей внутренней энергией $E_{1\text{внутр.}}$. Наиболее просто этот процесс выглядит при рассмотрении его в системе отсчета, в котором частица до распада покоилась, то есть системе отсчета, связанной с центром масс двигающейся частицы (ц - системе). Поэтому рассмотрим распад частицы в ц- системе. В силу закона сохранения импульса сумма импульсов обеих образовавшихся в результате распада частиц тоже равна нулю¹, т.е. частицы разлетаются с равными и противоположно направленными импульсами \vec{p}_{01} и \vec{p}_{02} , то есть $\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{01} = -\vec{p}_{02}$. Их общее абсолютное значение (обозначим его $p_{0X} = |\vec{p}_{01}| = |\vec{p}_{02}|$) определяется законом сохранения энергии:

$$\begin{aligned} E_{\text{внутр.}} &= E_{1\text{внутр.}} + \frac{p_{01}^2}{2m_1} + E_{2\text{внутр.}} + \frac{p_{02}^2}{2m_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{\text{внутр.}} &= E_{1\text{внутр.}} + \frac{p_{0X}^2}{2m_1} + E_{2\text{внутр.}} + \frac{p_{0X}^2}{2m_2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где m_1 и m_2 массы частиц, образовавшиеся после распада, а $E_{1\text{внутр.}}$ и $E_{2\text{внутр.}}$ - их внутренние энергии. Обозначим буквой ε «энергию распада», т.е. разность внутренних энергий до и после распада

$$\varepsilon = E_{\text{внутр.}} - (E_{1\text{внутр.}} + E_{2\text{внутр.}}).$$

Очевидно, что эта величина должна быть положительной для того, чтобы распад был вообще возможен. Тогда из (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon = E_{\text{внутр.}} - (E_{1\text{внутр.}} + E_{2\text{внутр.}}) &= \frac{p_{0X}^2}{2m_1} + \frac{p_{0X}^2}{2m_2} = \frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_{0X}^2}{2} \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}_{1/m} \Rightarrow \\ \varepsilon &= \frac{p_{0X}^2}{2m}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где m - приведенная масса частиц.

ВАЖНО Таким образом, уменьшение внутренней энергии идет на кинетическую энергию частиц, образовавшихся после распада.

¹ Это очевидно, так как в ц- системе до распада общий импульс равен нулю.

По формуле (1.2) определяется величина импульса p_{0x} и скорости частиц в системе центра масс:

$$v_{10} = \frac{p_{01}}{m_1} \text{ и } v_{20} = \frac{p_{01}}{m_2}.$$

Вернемся обратно к л- системе отсчета, в которой первичная частица движется до распада со скоростью \vec{V} . Рассмотрим одну из распадных частиц и пусть \vec{v}_1 и \vec{v}_{10} ее скорости соответственно в л- и ц-системах. Из очевидного равенства² $\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_{10}$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 - \vec{V} &= \vec{v}_{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\vec{v}_1 - \vec{V})^2 &= v_{10}^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v_1^2 + V^2 - 2v_1V \cos \theta_1 &= v_{10}^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где θ_1 - **угол вылета** рассматриваемой частицы в л- системе по отношению к направлению начальной скорости частицы \vec{V} . Этим уравнением определяется зависимость скорости ее вылета в л-системе. Она может быть представлена графически с помощью диаграммы, изображенной на рисунке 1.1.

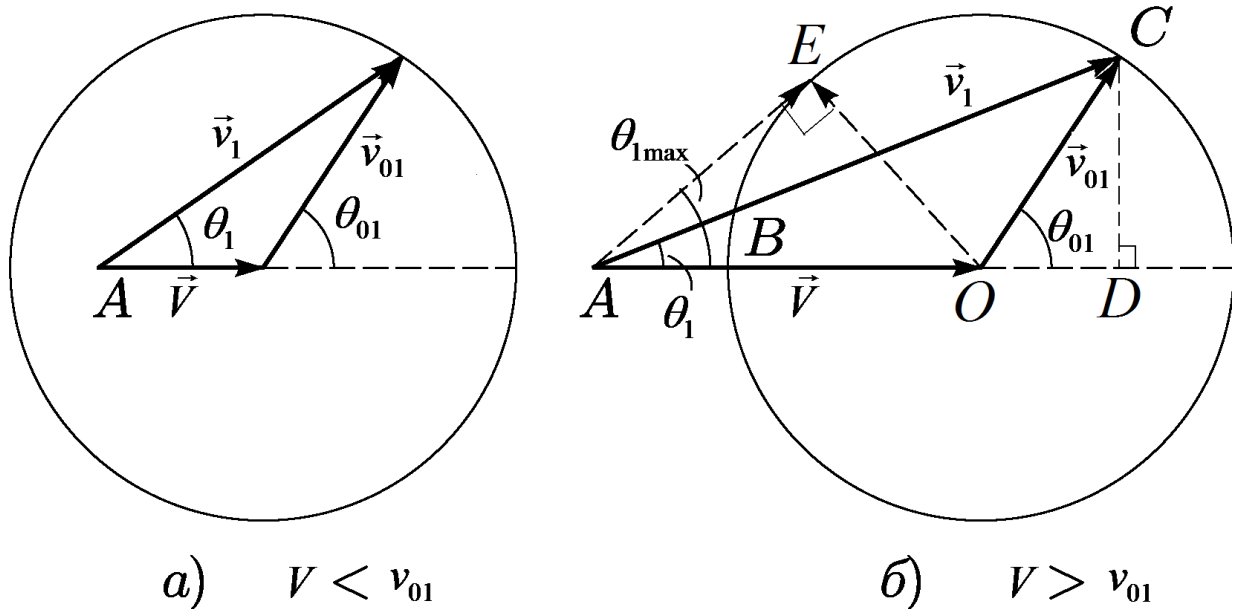


Рис. 1.1.

² Это преобразование Галилея (см. §7 главы 1)

Скорость \vec{v}_1 частицы в л-системе дается вектором, проведенным в какую-либо точку окружности радиуса v_{01} из точки A , отстоящей на расстояние \vec{V} от центра окружности³. Случаям $V < v_{01}$ и $V > v_{01}$ отвечают соответственно рис. 1.1а и 1.1б. В первом случае относительно л- системы частица может вылететь под любым углом θ_1 . Во втором же случае частица может вылететь только вперед, под углом θ_1 , не превышающим значения $\theta_{1\max}$, даваемого равенством

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{OE}{AO} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \sin \theta_{1\max} = \frac{v_{01}}{V}} \quad (1.4)$$

(направление к касательной к окружности, проведенной из точки A).

Связь между углами вылета θ_1 и θ_{01} в л- и ц- системах очевидна из той же диаграммы и дается формулой:

$$tg \theta_1 = \frac{CD}{AD} \Rightarrow tg \theta_1 = \frac{CD}{AO + OD} \Rightarrow$$

$$\boxed{tg \theta_1 = \frac{v_{01} \sin \theta_{01}}{V + v_{01} \cos \theta_{01}}} \quad (1.5)$$

§2. Упругие столкновения частиц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Столкновением называется процесс, заключающийся в том, что взаимодействующие друг с другом частицы, придя из бесконечности (то есть с такого расстояния, при котором взаимодействием можно пренебречь), сближаются, а затем либо расходятся снова на бесконечность, либо остаются на конечном расстоянии друг от друга. В первом случае столкновение называется рассеянием частиц, а во втором – захватом.

³ Точнее любую точку сферы радиуса v_{01} , диаметральной сечением которой является изображенная на рис. 1.1 окружность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Столкновение двух частиц называют упругим, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния (то есть внутренней энергии).

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц. Так же как и в предыдущем параграфе, прежде чем начать содержательное обсуждение, объединим все характеристики участвующих в рассеянии частиц в единую таблицу (см. таб. 2.1). Смысл величин из таблицы будет раскрыт ниже.

Таб. 2.1

m_1 и m_2	Массы частиц, взаимодействующих друг с другом
\vec{p}_1, \vec{v}_1	Импульс и скорость первой частицы в л- системе до взаимодействия
$\vec{p}_{01}, \vec{v}_{01}$	Импульс и скорость первой частицы в ц- системе до взаимодействия
\vec{p}'_1, \vec{v}'_1	Импульс и скорость первой частицы в л- системе после взаимодействия
$\vec{p}'_{01}, \vec{v}'_{01}$	Импульс и скорость первой частицы в ц- системе после взаимодействия
\vec{p}_2, \vec{v}_2	Импульс и скорость второй частицы в л- системе после взаимодействия
$\vec{p}_{02}, \vec{v}_{02}$	Импульс и скорость второй частицы в ц- системе до взаимодействия
\vec{p}'_2, \vec{v}'_2	Импульс и скорость второй частицы в л- системе после взаимодействия
$\vec{p}'_{02}, \vec{v}'_{02}$	Импульс и скорость второй частицы в ц- системе после взаимодействия
\vec{n}_0	Единичный вектор в направлении скорости \vec{v}'_1
χ	Центральный угол, представляющий собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции.

Так как соударение частиц упругое, то при применении закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц. Проще всего столкновение выглядит в системе отсчета, в которой центр инерции обеих частиц покоится (ц- система); будем отличать, как и в предыдущем параграфе, индексом О значения величин в этой системе. Скорости частиц до столкновения в ц- системе связаны с их скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 в лабораторной системе соотношениями⁴

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \text{ и } \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v},$$

где $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

ВАЖНО Из закона сохранения импульса следует, что в ц- системе импульсы обеих частиц могут отличаться лишь знаком, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины.

Таким образом, результат столкновения сводится в ц- системе к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Если обозначить через \vec{n}_0 единичный вектор в направлении скорости \vec{v}_1' частицы m_1 после столкновения, то скорости обеих частиц после столкновения (отличаем их штрихом) будут

$$\vec{v}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0$$

и

(2.1)

$$\vec{v}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0.$$

Чтобы возвратиться к лабораторной системе отсчета, надо добавить к этим выражениям скорость \vec{V} центра инерции⁵. Таким образом, для скоростей частиц в л- системе после столкновения получаем

⁴ См. §2 главы 3

⁵ Согласно определению скорость центра инерции $\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ (см. §4 главы 2)

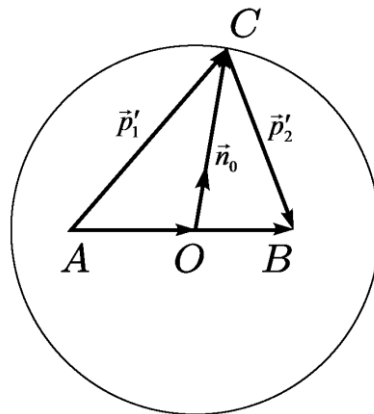
$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (2.2)$$

Этим исчерпываются сведения, которые можно получить о столкновении, исходя из одних только законов сохранения импульса и энергии. Что касается направления вектора \vec{n}_0 , то он зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Полученные результаты можно интерпретировать геометрически. При этом удобнее перейти от скоростей к импульсам.

Умножив равенства (2.2) соответственно на m_1 и m_2 , получим

$$\begin{cases} \underbrace{m_1 \vec{v}'_1}_{\vec{p}'_1} = \underbrace{\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0}_m + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underbrace{m_1 \vec{v}_1}_{\vec{p}_1} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underbrace{m_2 \vec{v}_2}_{\vec{p}_2} \\ \underbrace{m_2 \vec{v}'_2}_{\vec{p}'_2} = -\underbrace{\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0}_m + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{m_1 \vec{v}_1}_{\vec{p}_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{m_2 \vec{v}_2}_{\vec{p}_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}'_1 = m v \vec{n}_0 + \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}_{\vec{AO}} \\ \vec{p}'_2 = -m v \vec{n}_0 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}_{\vec{OB}} \end{cases} \quad (2.3)$$



$$\vec{OC} = m \vec{v}$$

$$\vec{AO} = \frac{m_1 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{OB} = \frac{m_2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{m_1 + m_2}$$

Рис. 2.1.

Построим окружность с радиусом mv и произведем указанное на рис. 2.1 построение. Если единичный вектор \vec{n}_0 направлен вдоль \vec{OC} , то векторы \vec{AC} и \vec{CB} дают соответственно импульсы \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2 . При заданных \vec{p}'_1 и \vec{p}'_2 радиус окружности и положение точек A и B неизменны, а точка C может иметь любое положение на окружности.

Рассмотрим подробнее случай, когда одна из частиц (пусть это будет частица m_2) до столкновения покоилась. В этом случае $\vec{v}_2 = \vec{0}$ и $\vec{p}_2 = \vec{0}$, а длина вектора \vec{OB} будет равна:

$$\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1 \vec{v}_1 = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \left(\vec{v}_1 - \underbrace{\vec{v}_2}_{=\vec{0}} \right) = m \vec{v}.$$

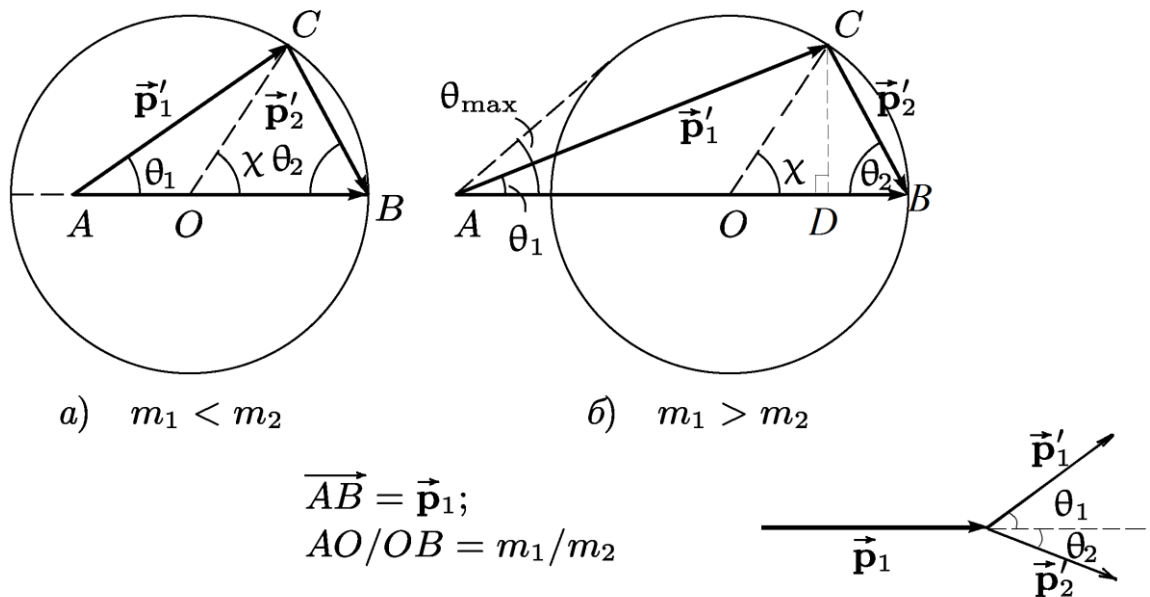


Рис. 2.2

То есть длина вектора \vec{OB} совпадает с радиусом и точка B лежит на окружности. Вектор же \vec{AB} совпадает с импульсом \vec{p}_1 первой частицы до рассеяния. При этом точка A

лежит внутри (если $m_1 < m_2$) или вне (если $m_1 > m_2$) окружности. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 2.2а и 2.2б. Указанные на них углы θ_1 и θ_2 представляют собой углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению удара (направлению \vec{p}_1). Центральный же угол, обозначенный на рисунках через χ , дающий направление \vec{n}_0 , представляет собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции. Из рисунка (2.2) очевидно, что углы θ_1 и θ_2 могут быть выражены через угол χ формулами:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{CD}{AD} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{CD}{AO + OD} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{CD}{OB \frac{m_1}{m_2} + OD} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{mv \sin \chi}{mv \frac{m_1}{m_2} + mv \cos \chi} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v \sin \chi}{v \frac{m_1}{m_2} + v \cos \chi} \Rightarrow \\
 &\boxed{\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}}. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Второе соотношение получено исходя из того, что $\triangle BOC$ является равнобедренным и, следовательно, $\angle BOC = \angle ABC = \theta_2$.

Выпишем также формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через тот же угол χ . Применим теорему косинусов для $\triangle AOC$:

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AO^2 + OC^2 - 2 \cdot AO \cdot OC \cdot \cos(\pi - \chi) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow AC^2 = AO^2 + OC^2 + 2 \cdot AO \cdot OC \cdot \cos \chi \Rightarrow \\
 \Rightarrow (\vec{p}_1')^2 &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 \right)^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 \right)^2 + 2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cdot \cos \chi \Rightarrow \\
 \Rightarrow m_1^2 v_1'^2 &= \left(\frac{m_1 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 + \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 + 2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1^2 \cdot \cos \chi \Rightarrow \\
 \Rightarrow v_1'^2 &= \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \cos \chi \right] \cdot v_1^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v'_1 = v_1 \cdot \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 \cdot m_2 \cdot m_1 \cdot \cos \chi}}{m_1 + m_2}. \quad (2.4)$$

v'_2 найдем по теореме синусов из равнобедренного треугольника ΔOCB с учетом формулы (2.3) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_2}{OC} &= \frac{\sin \chi}{CB} \Leftrightarrow \frac{\sin \theta_2}{mv_1} = \frac{\sin \chi}{m_2 v'_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow v'_2 &= \frac{m_1 m_2 v_1}{m_1 + m_2} \frac{\sin \chi}{m_2 \sin \theta_2} \stackrel{(2.3)}{\Leftrightarrow} v'_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \frac{\sin \chi}{\sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v'_2 &= \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \frac{\sin \chi}{\cos \frac{\chi}{2}} \Leftrightarrow v'_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \frac{2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}}{\cos \frac{\chi}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow v'_2 &= \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Сумма $\theta_1 + \theta_2$ называется **углом разлета** частиц после столкновения.

Очевидно, что $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ при $m_1 < m_2$ и $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ при $m_1 > m_2$.

§3. Классическая теория рассеяния. Сечение рассеяния

Рассмотрим задачу об отклонении однородного пучка частиц, падающих на центр поля из бесконечности и уходящих на бесконечность после взаимодействия с полем. Такая постановка задачи характерна для экспериментов по рассеянию частиц в ядерной физике и физике элементарных частиц. Некоторые аспекты таких опытов можно анализировать с помощью классической механики. Схема опыта по рассеянию частиц приведена на рисунке 3.1.

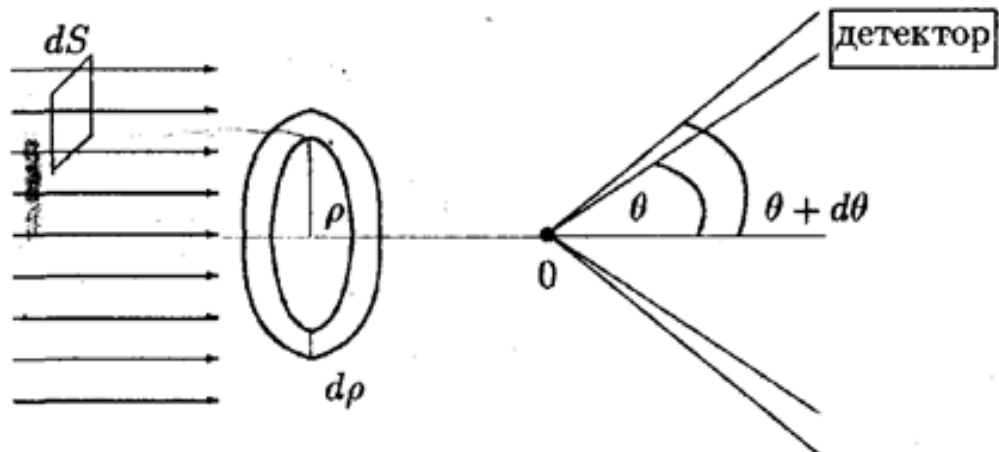


Рис. 3.1.

Все частицы потока, падающего на рассеивающий центр, имеют вдали от центра одинаковую скорость \vec{v}_∞ и летят по параллельным траекториям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Расстояние от этой траектории до параллельной ей прямой, проходящей через центр поля, называется **прицельным расстоянием** и обозначается через ρ .

Введем плотность потока частиц n как отношение числа частиц dN , прошедших через площадку dS , расположенную перпендикулярно потоку, к величине этой площадки:

$$n = \frac{dN}{dS}. \quad (3.1)$$

Поток формируется таким образом, что плотность постоянна по всему поперечному сечению пучка. Рассеянные частицы регистрируются детектором. На опыте измеряется количество частиц $dN(\theta)$, отклоненных на различные углы θ и попадающих в интервал углов между θ и $\theta + d\theta$. Для того чтобы дать интерпретацию опыта, не зависящую от плотности потока падающих частиц, вводят величину $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{dN(\theta)}{n}. \quad (3.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величина $d\sigma$ называется **эффективным сечением рассеяния**.

Размерность ее равна размерности площади. Если считать, что между углом отклонения частицы и ее прицельным расстоянием существует однозначная зависимость, то эффективное сечение рассеяния равно площади кольца с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, проходя через которое на большом расстоянии от рассеивающего центра, частицы отклоняются в интервал углов между θ и $\theta + d\theta$, то есть

$$d\sigma = \frac{dN(\theta)}{n} = \frac{dN(\rho)}{n} = 2\pi\rho d\rho. \quad (3.3)$$

Зависимость $\rho(\theta)$ может быть рассчитана, если известна потенциальная энергия взаимодействия частиц с полем. Тогда эффективное сечение рассеяния запишется в форме

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (3.4)$$

Здесь берется абсолютное значение производной от ρ по θ , так как в большинстве случаев эта производная отрицательна. Эффективное сечение рассеяния как правило выражают через элемент телесного угла $d\Omega$, заключенного между конусами с растворами θ и $\theta + d\theta$. Элемент телесного угла равен $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Подставляя его в (3.4) получим:

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (3.5)$$

§4. Формула Резерфорда

Найдем эффективное сечение рассеяния для поля отталкивания с потенциальной энергией $U(R) = \frac{\alpha}{R}$. Это поле описывает взаимодействие одноименных точечных зарядов по закону Кулона. На рис. 4.1 показана траектория заряда, налетающего на неподвижный рассеивающий центр. Уравнением траектории является гипербола, задаваемая формулой⁶

$r = \frac{p}{-1 + e \cos\varphi}$. На оси симметрии гиперболы $\varphi = 0$. Введем угол φ_0 , отсчитываемый от

⁶ $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ и $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ – параметр и эксцентриситет орбиты (см. §4 главы 3). Параметр орбиты не путать с импульсом!

оси симметрии до направления на бесконечно удаленную точку траектории. Значение этого угла можно получить, устремляя r к бесконечности в уравнении гиперболы, что дает:

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \varphi} \Rightarrow e \cos \varphi = \frac{p}{r} + 1 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{p}{er} + \frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\cos \varphi_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \cos \varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{er} + \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos \varphi_0 = \frac{1}{e}}. \quad (4.1)$$

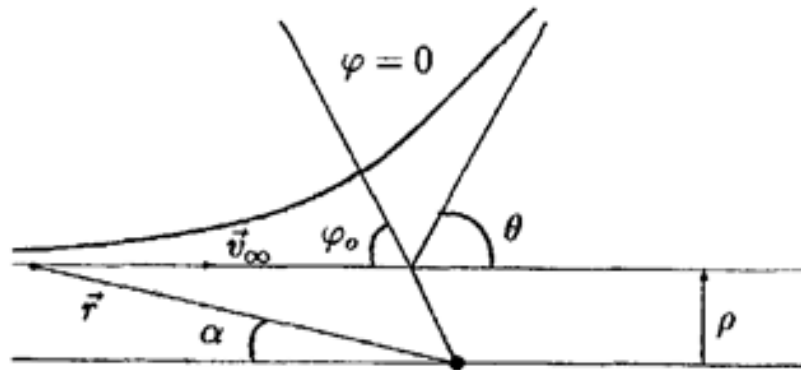


Рис. 4.1.

Из рис 4.1 находим, что

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}. \quad (4.2)$$

Остается выразить эксцентриситет e через прицельное расстояние ρ , чтобы получить зависимость $\rho(\theta)$ и рассчитать эффективное сечение. Для этого запишем законы сохранения энергии и момента импульса налетающей частицы на бесконечно далеком расстоянии от рассеивающего центра:

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2} \quad (4.3)$$

и

$$M = mv_{\infty} \underbrace{r \sin \alpha}_{\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = mv_{\infty} \rho. \quad (4.4)$$

Подставляем (4.3) и (4.4) в выражение для эксцентриситета:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2}. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в формулу (4.1) и учитывая связь (4.2) между φ_0 и θ , находим зависимость $\rho(\theta)$:

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{e} \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2 = \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{m^2 v_{\infty}^4}{\alpha^2} \rho^2 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (4.6)$$

Далее по формуле (3.4) с учетом (4.6) находим эффективное сечение рассеяния:

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d\sigma = 2\pi \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left| \frac{d\left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right)}{d\theta} \right| d\theta \Rightarrow \\
&\Rightarrow d\sigma = 2\pi \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \Rightarrow \\
&\Rightarrow d\sigma = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \Rightarrow \\
&\boxed{\Rightarrow d\sigma = \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta.} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Если эффективное сечение рассеяния выразить через телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, то соотношение (4.7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \frac{d\Omega}{2\pi \underbrace{\sin \frac{\theta}{2}}_{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}} \Rightarrow \\
&\boxed{\Rightarrow d\sigma = \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega.} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Первым опытом, в котором измерялось рассеяние частиц, был опыт Резерфорда по рассеянию α - частиц на ядрах атомов золота. Формула (4.8) как раз дает эффективное сечение рассеяния для этого опыта и поэтому называется **формулой Резерфорда**.