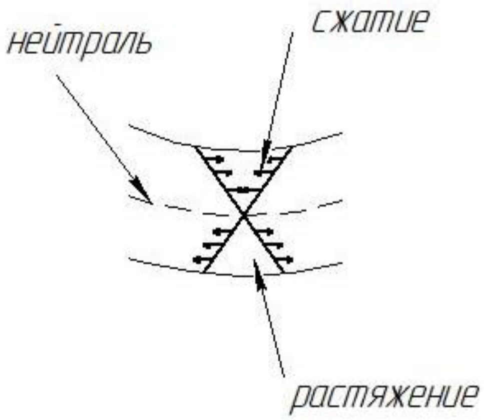
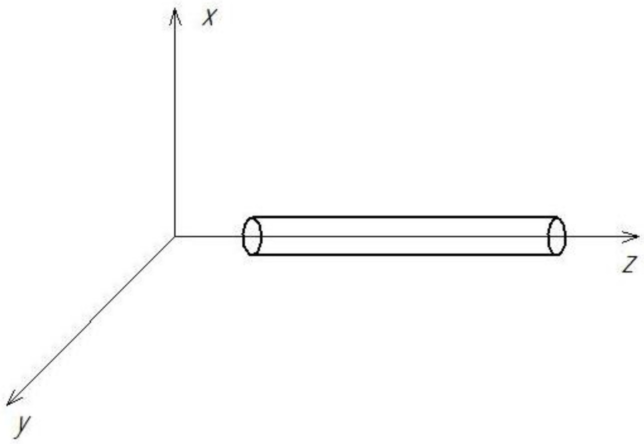
Глава 10. Деформация тонких стержней

Оглавление

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие.





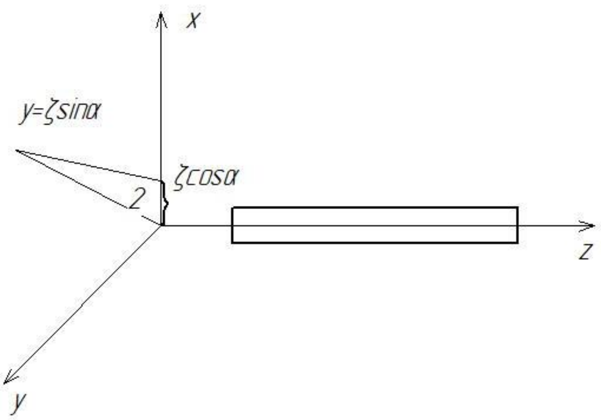
Допущения

1. Будем считать деформацию малой (изгиб малым):
    - Компоненты тензора малы
    - Абсолютное смещение точек тензора мало
2. Будем считать, что изгиб находится в одной плоскости. Пусть это будет плоскость (X0Z)
3. Будем считать, что внешние силы, приводящие к деформации малы по сравнению

Все составляющие внешней изгибающей силы по осям x и y пренебрежимо малы=>

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = 0$$

Общий изгиб в плоскости (ζz)



$$x = \zeta cos\alpha$$
$$y = \zeta sin\alpha$$

$$\zeta^2 = x^2 + y^2$$

Изгиб вдоль плоскости (ζz)

ζ-величина изгиба

1. Деформация мала. Деформацией по x, y пренебрегаем.
2. Внешние силы малы по сравнению с напряжением, напряжениями вдоль x, y – пренебрегаем =>

$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$, т.е. в каждом элементе стержня происходит простое растяжение/сжатие.=>

$U_{ik} = \begin{pmatrix} U_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & U_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & U_{zz} \end{pmatrix}$=> т.е. тензор имеет диагональный вид.

§1. Общие положения.

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие.

Как и в случае пластинок, вдоль длины стержня внутри него существует «нейтральная» поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения.

Начнем с исследования деформации изгиба в небольшом участке длины стержня, в котором изгиб можно считать слабым; под слабым мы понимаем здесь изгиб, при котором мал не только тензор деформации, но и абсолютная величина смещений точек стержня. Выберем систему координат с началом в некоторой точке нейтральной поверхности внутри рассматриваемого участка стержня. Ось z направим параллельно оси стержня (недеформированного); изгиб пусть происходит в плоскости z, x. При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости.

Аналогично тому, что мы имели в случае изгиба пластинок и кручения стержней, и при изгибе тонких стержней внешние силы, действующие на боковую поверхность стержня, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями, и при определении граничных условий на этой поверхности их

С внутренними напряжениями.

То есть, пренебрегаем напряжениями вдоль оси x и y.

На поверхностях $\left.\begin{matrix}\vec{\sigma_x}=\vec{0}\\ \vec{\sigma_y}=\vec{0}\end{matrix}\right|$ => если на границах все по нулям => и внутри тоже.

$$=> \left.\begin{matrix}\sigma_{xx} = 0\\ \sigma_{xy} = 0 = \sigma_{yx}\\ \sigma_{xz} = 0 = \sigma_{zx}\\ \sigma_{yy} = 0\\ \sigma_{yz} = 0 = \sigma_{zy}\end{matrix}\right| => \sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Т.е. в каждом элементе происходит простое растяжение\сжатие.

$=> U_{ik} = \begin{pmatrix} U_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & U_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & U_{zz} \end{pmatrix}$, т.е. тензор деформации имеет диагональный вид.

Будем считать, что стержень имеет цилиндрическую форму и нейтральная лини проходит через его центр.

Наш это находятся для внеш. интеграле.

$$\int_S xyds = 0$$

§2. Деформация тонкого стержня.

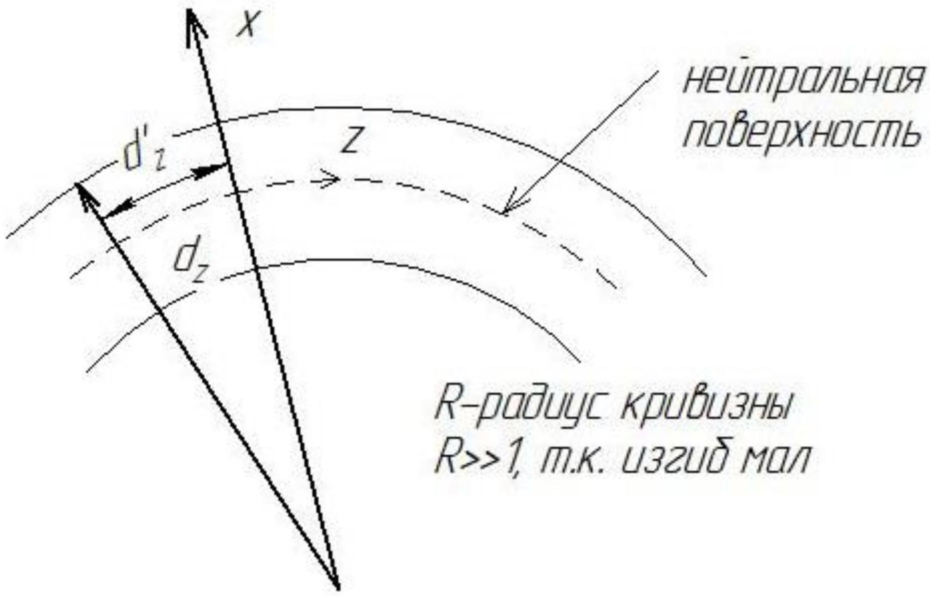
$$U_{ik} = \frac{1}{E}\left((1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{il}f_{ik}\right) => U_{ik} = \frac{1}{E}(1+\sigma)\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{zz} + 0 + 0) \leftrightarrow U_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$U_{xx} = \frac{1}{E}\left((1-\sigma)\cdot 0 - \sigma(\sigma_{zz} + 0 + 0)\right) \leftrightarrow U_{xx} = -\frac{\sigma\sigma_{zz}}{E}$$

$$U_{yy} = \frac{1}{E}\big((1-\sigma)\cdot 0 - \sigma(\sigma_{zz} + 0 + 0)\big) \leftrightarrow U_{yy} = -\frac{\sigma\sigma_{zz}}{E}$$

Итого:

$$U_{ik} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\sigma_{zz}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma\sigma_{zz}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{zz}}{E} \end{pmatrix}$$



$$\frac{dz}{R} = \frac{dz'}{R+x} => dz' = \frac{R+x}{R}dz => dz' = dz + \frac{x}{R}dz => \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}$$

Вспоминаем 1-ую лекцию по теории упругости: если тензор приведен к главным осям, то $\frac{dz' - dz}{dz} = U_{zz} => U_{zz} = \frac{x}{R}$

Найдем деформацию:

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{xE}{R} \end{pmatrix}, a\ U_{ik} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma x}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sigma x}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{x}{R} \end{pmatrix}$$

Найдем деформацию по осям x,y,z:

При этом помним, что $U_z\big|_{x=0} = U_y\big|_{x=0} = 0$

$$\begin{cases} U_{zz} = \dfrac{\partial U_z}{\partial z} \\ U_{xx} = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} \\ U_{yy} = \dfrac{\partial U_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} = \dfrac{\partial U_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial y} = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = \dfrac{x}{R} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial x} = -\dfrac{\sigma x}{R} \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial y} = -\dfrac{\sigma x}{R} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_x = -\dfrac{\sigma x^2}{2R} + C_{yz}(y,z) \\ U_y = -\dfrac{\sigma x^4}{R} + C_{xz}(x,z) \\ U_z = \dfrac{xz}{R} + C_{xy}(x,y) \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} = \dfrac{\partial U_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial y} = 0 \end{cases} =>$$

$$=> 1)\ \frac{\partial C_{yz}}{\partial y} - \frac{\sigma y}{R} + \frac{\partial C_{xz}}{\partial x} = 0$$

$$2)\frac{\partial C_{yz}}{\partial z}+\frac{z}{R}+\frac{\partial C_{xy'}}{\partial x}=0$$

$$3)\ \frac{\partial C_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial C_{xy}}{\partial y}=0$$

$$4)\ \frac{\partial C_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial C_{xy}}{\partial y}=0=>$$

$$=>\left.\begin{array}{r} C_{xz}=z\cdot f(x)\\ C_{xy}=y\cdot g(x)\\ f(x)+g(x)=0\end{array}\right|=>$$

$$=>\begin{cases} C_{xz}=f(x)\cdot z\\ C_{xy}=-f(x)\cdot y\end{cases}$$

3,4, =>

$$=>\begin{cases}\dfrac{\partial C_{yz}}{\partial y}-\dfrac{\sigma y}{R}+\dfrac{\partial C_{xz}}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial C_{yz}}{\partial z}+\dfrac{z}{R}+\dfrac{\partial C_{xy}}{\partial x}=0\end{cases}=>$$

$$=>\begin{cases}\dfrac{\partial C_{yz}}{\partial y}-\dfrac{\sigma y}{R}+z\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial C_{yz}}{\partial z}+\dfrac{z}{R}-y\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}=0\end{cases}=>$$

$$=>f(x)=A\cdot x=>\begin{cases} C_{xz}=A\cdot x\cdot z\\ C_{xy}=-A\cdot x\cdot y\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} C_{yz}=\dfrac{\sigma y^2}{2R}-Azy+\zeta(z)\\ C_{yz}=-\dfrac{z^2}{2R}+Azy+\eta(y)\end{cases};a\ A=0$$

В итоге:

$$\begin{cases} U_x = -\dfrac{\sigma x^2}{2R} + \dfrac{\sigma y^2}{2R} - \dfrac{z^2}{2R} \\ U_y = -\dfrac{\sigma xy}{R} \\ U_z = \dfrac{xz}{R} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} U_x = -\dfrac{1}{2R}\left(z^2 + \sigma(x^2 - y^2)\right) \\ U_y = -\dfrac{\sigma xy}{R} \\ U_z = \dfrac{xz}{R} \end{cases}$$

Место для уравнения.

можно считать равными нулю. Таким образом, вдоль всей
боковой поверхности стержня имеем $\sigma_{ik}n_k = 0$, или, поскольку $n_z = 0$

можно считать равными нулю. Таким образом, вдоль всей
боковой поверхности стержня имеем $\sigma_{ik}n_k = 0$, или, поскольку $n_z = 0$

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0$$

и аналогично для $i = y, z$. Выберем такую точку на контуре поперечного сечения стержня, в которой нормаль n направлена параллельно оси x. Другая такая же точка имеется где-нибудь на противоположной стороне контура. В обеих этих точках $n_y = 0$, и из написанного выше равенства имеем $\sigma_{xx} = 0$. Но поскольку самый стержень предполагается тонким, то,
если σ_{xx} исчезает на двух сторонах его сечения, оно мало и вдоль всего сечения, так что можно положить $\sigma_{xx} = 0$ во всем стержне. Аналогичным образом убеждаемся в том, что все компоненты тензора напряжений должны быть равными нулю, за исключением только компоненты σ_{zz}. Другими словами, при изгибе тонкого стержня большой является только растягивающая (или сжимающая) компонента тензора внутренних напряжений. Деформация, в которой отлична от нуля только
компонента σ_{zz} тензора напряжений, есть не что иное, как деформация простого растяжения или сжатия (§ 5). Таким образом, в каждом элементе объема изгибаемого стержня происходит простое растяжение (или сжатие). Самая величина этого растяжения, конечно, различна в разных точках каждого из поперечных сечений стержня, что и приводит в результате к изгибу всего стержня.

Легко определить величину относительного растяжения в каждой точке стержня. Рассмотрим какой-нибудь элемент длины dz параллельный оси стержня и находящийся где-нибудь вблизи начала координат. При изгибании стержня длина dz изменится, сделавшись равной dz'. Неизменными остаются только те элементы длины, которые расположены на нейтральной поверхности. Пусть R есть радиус кривизны нейтральной поверхности вблизи начала координат. Длины dz и dz' можно рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами соответственно R и $R+x$ где x — значение координаты x в точке, в которой выбран элемент dz'. Поэтому

$$dz' = \frac{R+x}{R} dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz.$$

Относительное удлинение равно, следовательно,

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

С другой стороны, относительное удлинение элемента длины dz равно компоненте u_{zz} тензора деформации. Следовательно,

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \qquad (1.1)$$

Мы можем написать теперь σ_{zz} воспользовавшись непосредственно соотношением $\sigma_{zz} = Eu_{zz}$, имеющим место при простом растяжении. Таким образом,

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \qquad (1.2)$$

До сих пор еще расположение нейтральной поверхности в изогнутом стержне оставалось неопределенным. Его можно определить из условия, что рассматриваемая нами здесь деформация должна представлять собой чистый изгиб, без какого бы то ни было общего растяжения или сжатия стержня. Для этого полная сила внутренних напряжений, действующая на поперечное сечение стержня, должна быть равной нулю, т. е. должен исчезать интеграл

$$\int \sigma_{zz} df,$$

взятый по этой поверхности. В связи с выражением (1,2) для σ_{zz} это приводит к условию

$$\int x df = 0. \tag{1.3}$$

С другой стороны, можно ввести понятие о центре инерции сечения стержня, как о центре инерции однородного плоского диска соответствующей формы. Координаты этого центра:

$$\int x df \Big/ \int df, \quad \int y df \Big/ \int df.$$

Таким образом, условие (1,3) означает, что в системе координат с началом, лежащим на нейтральной поверхности, x - координата центра инерции сечения стержня равна нулю. Другими словами, нейтральная поверхность проходит через центры инерции поперечных сечений стержня.

Помимо u_{zz} отличны от нуля еще две компоненты тензора деформации, так как при простом растяжении имеем $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$. Зная тензор деформации, легко найти также и смещения точек. Пишем:

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этих соотношений приводит к следующим выражениям для компонент перемещения:

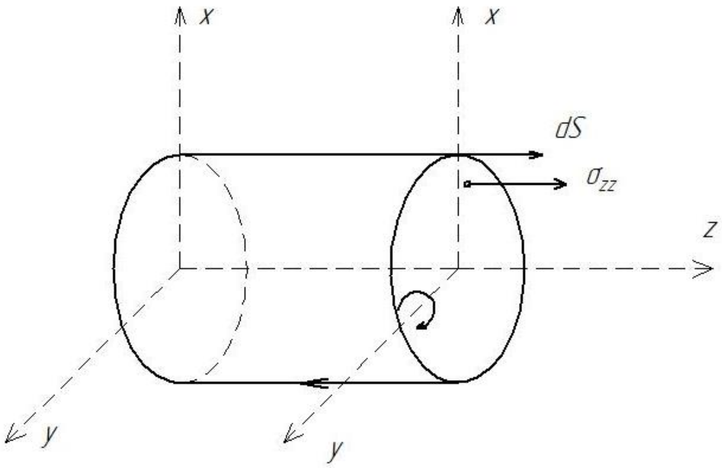
$$u_x = -\frac{1}{2R}[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)],$$

$$u_y = -\sigma\frac{xy}{R}, \qquad u_z = \frac{xy}{R}. \tag{1.4}$$

§3. Изгибающий момент.

Определим момент сил внутренних напряжений, действующий в данном сечении стержня. Этот момент называется изгибающим.

$\boxed{!}$ Для простоты восприятия можем считать, что стержень имеет цилиндрическую форму, а нейтральная линия проходит через ось симметрии.



Изгиб в плоскости (X0Z)=>(т.е. относительно оси y)=> $dM_x=0$

$$d\vec{M} + [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{0} \leftrightarrow d\vec{M} = -\begin{pmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} dS \end{pmatrix}$$

$$= -\overrightarrow{n_x} y \sigma_{zz} dS - (-\overrightarrow{n_y}) x \sigma_{zz} dS = -\overrightarrow{n_x} y \sigma_{zz} dS - (-\overrightarrow{n_y}) x \sigma_{zz} dS$$

$$= -\frac{\overrightarrow{n_x} y E dS}{R} + \overrightarrow{n_y} \frac{x^2 E}{R} dS => \vec{M} = \overrightarrow{n_y} \frac{E}{R} \int_S x^2 dS - \overrightarrow{n_x} \frac{E}{R} \int_S yx dS$$

$\int_S x^2 dS \equiv I$ – момент инерции поперечного сечения стержня

$\frac{E}{R} \int_S yx dS = 0$, для простоты пусть стержень цилиндричный.

Итого:

$$M_y = \frac{EI}{R}$$

Из дифф. Геометрии известно:

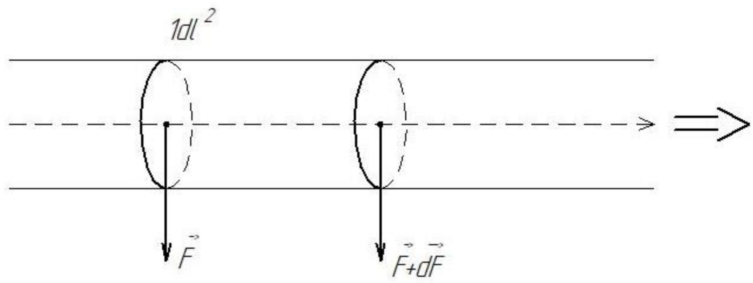
$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2x}{dl^2}}{\left(1 + \left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2\right)^{3/2}} \cong \frac{d^2x}{dl^2} \cong \frac{d^2x}{dz^2}$$

Т.е. производную вдоль стержня можно заменить производной по z (т.к. изгиб мал)

В итоге:

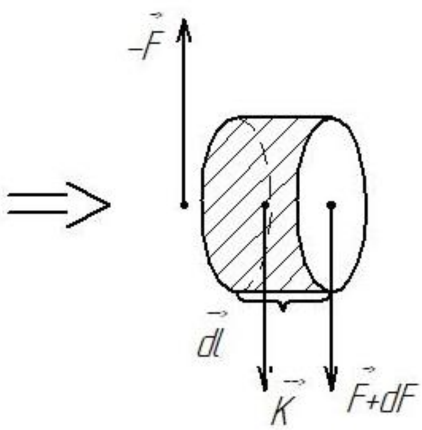
$$M_y = EI \cdot \frac{d^2x}{dz^2}$$

§4. Уравнение равновесия стержней.



1. $\overrightarrow{F}$ – суммарная сила, действующая на основание 1.

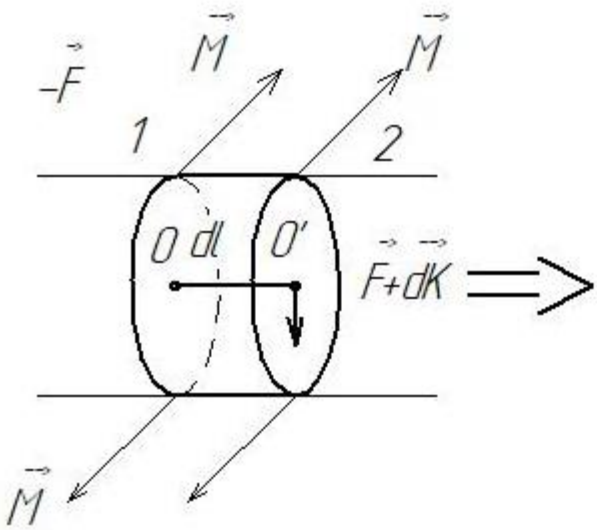
$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{dF}$-суммарная сила, действующая на основание 2.



Сумма внешних всех сил, действующих на элемент.

$$-\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{dF} + \overrightarrow{K}dl => \overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{K}dl$$

$$=> \frac{\overrightarrow{dF}}{dl} = -\overrightarrow{K}$$



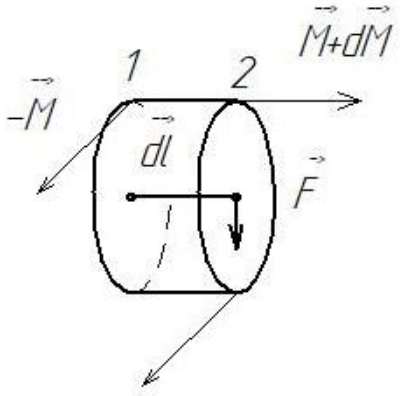
2. О совпадает с О' =>

$$=>\overrightarrow{M} + \overrightarrow{dM} - \overrightarrow{M} + [\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{F} + \overrightarrow{dk}] = \vec{0}$$

$$=>\overrightarrow{dM} = -[\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{F} + \overrightarrow{dk}]=>$$

$$=>\overrightarrow{dM} \cong [\overrightarrow{F}, \overrightarrow{dl}] =>$$

$$=>\frac{\overrightarrow{dM}}{dl} = [\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n_l}]$$



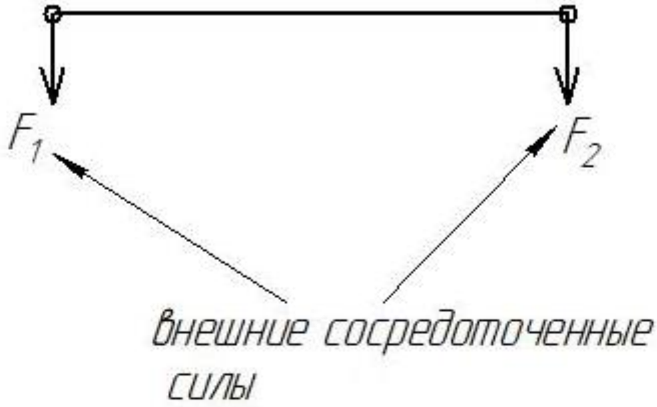
Итого:

$$\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{dF}}{dl} = -\overrightarrow{K} \\ \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dl} = [\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n_l}] \end{cases}, \text{т. к. деформации малы} =>$$

$$=> \begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{dF}}{dz} = -\overrightarrow{K} \\ \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dl} = [\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n_l}] \end{cases},$$

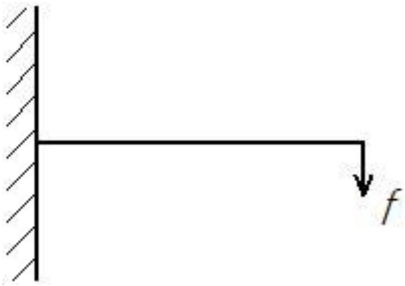
Полная система уравнений равновесия изогнутого стержня.

Замечание 1 Если $\overrightarrow{K} = 0 => \frac{\overrightarrow{dF}}{dz} = \vec{0} => \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{F_1} = const$



Т.е. силы внутренних напряжений постоянны вдоль длины каждого участка и терпят разрыв в точках приложения силы.

Замечание 2 Если на стержень действует одна сосредоточенная сила f, то внутреннее напряжение $\overrightarrow{F}$ постоянно вдоль всей длины стержня.



$$M_y = EIx''$$

$$\frac{d^2\vec{M}}{dz^2} = \left[\overrightarrow{n_z}, \vec{K}\right] \leftrightarrow \overrightarrow{n_y}\frac{d^2\vec{M}}{dz^2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{n_x} & \overrightarrow{n_y} & \overrightarrow{n_z} \\ 0 & 0 & 1 \\ K_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{n_y} \cdot K_x \leftrightarrow \frac{d^2}{dz^2}\left(EI\frac{d^2x}{dz^2}\right) = K_x$$

$$\leftrightarrow EIx''' - K_x = 0$$

$$\frac{d\vec{M}}{dz} = \left[\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n_z}\right] => \vec{M}' = \begin{vmatrix} \overrightarrow{n_x} & \overrightarrow{n_y} & \overrightarrow{n_z} \\ F_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} => M_y' = Fx =>$$

$$=> EIx''' - Fx = 0$$

§5. Слабый изгиб стержней.

Уравнения равновесия значительно упрощаются в практически важном случае слабого изгиба стержней. Изгиб является слабым, если направление касательной t к стержню медленно меняется вдоль его длины, т. е. производная dt/dl мала. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводятся к требованию малости поперечного прогиба, стержня по сравнению с: его длиной. Подчеркнем, что при этом отнюдь не требуется малости прогиба по сравнению с толщиной стержня, как это должно было быть в приближенной теории слабого изгиба пластинок, развитой в §§ 11—12. Продифференцируем (4,3) по длине:

$$\frac{d^2M}{dl^2} = \left[\frac{dF}{dl}t\right] + \left[F\frac{dt}{dl}\right]. \qquad (2,1)$$

Второй член содержит малую величину $\frac{dt}{dl}$ вследствие чего им обычно (за исключением некоторых особых случаев, о которых речь идет ниже) можно пренебречь. Подставляя в первом члене $dF/dl = -K$, получаем, уравнение равновесия в виде

$$\frac{d^2M}{dl^2} = [tK], \qquad \frac{dM}{dl} = [n_z, F] \qquad (2.2)$$

Напишем это уравнение в компонентах, для чего подставим в него, согласно (18,6) и (18,9),

$$M_x = -El_1Y'' \quad , M_y = El_2X'', \qquad M_z = 0 \qquad (2.3)$$

(знак 1 означает везде дифференцирование по z). Единичный вектор t можно считать направленным по оси z. Тогда мы получим

$$EI_2X'''' - K_x = 0, \quad EI_1Y'''' - K_y = 0. \qquad (2.4)$$

Эти уравнения определяют зависимость прогибов X и Y от z, т. е. форму слабо изогнутого стержня.

Силу F внутренних напряжений, действующую на поперечное сечение стержня, также можно выразить через производные от X и V. Подставляя (2,3) в (19,3), получаем

$$F_x = -EI_2X''', \qquad F_y = -EI_1Y'''. \qquad (2.5)$$

Мы видим, что вторые производные определяют момент сил внутренних напряжений, а третьи производные определяют сами эти силы. Силу (2,5), называют перерезывающей силой. Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил, а в каждой из этих точек испытывает скачок, равный приложенной внешней силе.

$$\frac{dM}{dl} = [\overrightarrow{n_z}, \overrightarrow{F}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{n_x} & \overrightarrow{n_y} & \overrightarrow{n_z} \\ 0 & 0 & 1 \\ F_x & F_y & F_y \end{vmatrix} = -\overrightarrow{n_x}F_y + \overrightarrow{n_y}F_x + \overrightarrow{n_z} \cdot 0$$

$$F_y = \frac{dM_x}{df} \cong \frac{dM_x}{dz} = -EI_x\frac{d^3y}{dz^2}$$

$$F_x = \frac{dM_y}{dl} \cong \frac{dM_y}{dl} = -EI_y\frac{d^3x}{dz^2}$$

Второе уравнение равновесия (4,3) тоже упрощается. Написав в нем $t = dI/dl = dr/dl$ (где r — радиус-вектор от некоторой заданной точки к произвольной точке стержня) и интегрируя, получаем ввиду постоянства F

$$M = [Fr] + const. \qquad (19,6)$$

Если же отсутствуют также и сосредоточенные силы, а изгиб стержня происходит под действием приложенных к нему сосредоточенных моментов (т. е. сосредоточенных пар сил), то **F**=const вдоль всей длины стержня, а **M** испытывает в точках приложения сосредоточенных пар скачки, равные их моментам.

Замечание 2 Обратимся, далее, к вопросу о граничных условиях на концах изгибаемого стержня. Здесь могут представиться различные случаи.

Конец стержня называют заделанным (рис. 4, а см. с. 66), если он не может испытывать никаких смещений — ни продольных, ни поперечных, и, сверх того, не может измениться его направление (т. е. направление касательной к стержню в его конце). В этом случае граничные условия заключаются в том, что задаются координаты конца стержня и единичный вектор касательной t к нему. Сила же и момент сил реакции, действующие на стержень со стороны опоры в точке закрепления, определяются в результате решения уравнений.

Противоположным является случай свободного конца стержня. В этом случае координаты конца и его направление произвольны. Граничные условия заключаются в том, что сила **F** и момент сил **M** на конце стержня должны обратиться в нуль.

Если конец стержня закреплен на шарнире, то он не может испытывать никаких смещений, но его направление не задано. Момент сил, действующих на такой свободно поворачивающийся конец, должен исчезать.

Наконец, если стержень опёрт в некоторой точке опоры (рис. 4, б), то он может скользить по этой точке, но не может испытывать в ней поперечных смещений. В этом случае незаданными являются направление **t** и положение точки, в которой опирается стержень, по его длине. Момент сил в точке опоры должен быть равным нулю соответственно тому, что стержень может свободно поворачиваться, а сила **F** в этой точке должна быть перпендикулярна к стержню; продольная компонента силы вызвала бы дальнейшее его скольжение в точке опоры.

Аналогичным образом легко установить граничные условия и при других способах закрепления стержня. Мы не будем останавливаться здесь на этом, ограничившись приведенными типичными примерами.

Перерезывающая сила **F** лежит в той же плоскости, что и **K**, и равна

$$F = -EI\zeta'''. \tag{2.8}$$

Величина *I* играет роль эффективного значения момента инерции сечения стержня.

Напишем в явном виде граничные условия для уравнений равновесия слабо изогнутого стержня. Если конец стержня заделан, то на нем должно быть $X = Y = 0$ и, сверх того, не может измениться его направление, т. е. должно быть $X' = Y' = 0$. Таким образом, на заделанном конце стержня должны выполняться условия

$$X = Y = 0, \qquad X' = Y' = 0. \tag{2.9}$$

Сила же и момент сил реакции в точках опоры определяются по известному решению формулами (2,3) и (2,5).

При достаточно слабом изгибе стержня закрепление его конца в шарнире и опирание его в точке эквивалентны в отношении граничных условий. Дело в том, что во втором случае продольное смещение стержня в точке опоры является при слабом изгибе величиной второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом и потому должно считаться равным нулю. Граничные условия исчезновения поперечного смещения и момента сил дают в этих случаях

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \qquad (2.10)$$

Направление же конца стержня и сила реакции в точке опоры определяются в результате решения уравнений.

Наконец, на свободном конце должны отсутствовать сила **F** и момент сил **M**. Согласно (2,3) и (2,5) это приводит к условиям

$$X'' = Y'' = 0, \; X''' = Y''' = 0. \qquad (2,11)$$

(если к свободному концу приложена сосредоточенная сила, то F должно быть равно этой силе, а не нулю).

Нетрудно обобщить уравнения (2,4) на случай стержней переменного сечения. У таких стержней моменты инерции I_1 и I_2 являются функциями z. Формулы (2,3), определяющие моменты сил в каждом данном сечении стержня, по-прежнему остаются справедливыми. Подстановка их в (2,2) приводит теперь к уравнениям

$$E\frac{d^2}{dz_2}\left(I_1\frac{d^2Y}{dz^2}\right) = K_y, \; E\frac{d^2}{dz^2}\left(I_2\frac{d^2X}{dz^2}\right) = K_x \qquad (2,12)$$

в которых I_1 и I_2 нельзя вынести из-под знака производной. Для перерезывающей силы имеем

$$F_x = -E\frac{d}{dz}\left(I_2\frac{d^2X}{dz^2}\right), \qquad F_y = -E\frac{d}{dz}\left(I_1\frac{d^2Y}{dz^2}\right). \qquad (2.13)$$

§6. Уравнения равновесия стержней.

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений равновесия изогнутых стержней. Рассмотрим опять какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими сечениями, и вычислим, полную действующую на него силу. Обозначим силу внутренних напряжений, приложенную к площади сечения стержня, посредством **F** Компоненты этого вектора равны интегралам от $\sigma_{i\zeta}$ по площади сечения:

$$F_i = \int \sigma_{i\zeta} df. \tag{4.1}$$

Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила **F**=d**F** а на нижнее — сила — **F**; их сумма есть дифференциал d**F** Пусть далее **K** *dl* есть действующая на стержень внешняя сила, отнесенная к единице его длины. Тогда на элемент длины *dl* действует внешняя сила **K** *dl* Равнодействующая всех сил, действующих на этот элемент, есть, следовательно, d**F** + **K** *dl*. В равновесии эта сила должна обращаться в нуль. Таким образом, получаем

$$\frac{dF}{dl} = -K. \tag{4.2}$$

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть **M** есть момент сил внутренних напряжений, действующих на площадь сечения стержня.

Этот момент берется относительно точки (начала координат), лежащей в самой плоскости этого сечения; его компоненты определяются формулами (18,6). Будем вычислять суммарный момент, приложенный к данному элементу стержня, относительно точки (назовем ее точкой O), лежащей в плоскости его верхнего основания. Тогда внутренние напряжения на этом основании дают момент **M**+d**M**. Момент же (относительно О) сил внутренних напряжений в нижнем основании элемента складывается из момента — **M** этих сил относительно качала координат в плоскости нижнего основания (точка О) и момента (относительно О) суммарной силы — **F**, действующей на этом основании. Этот второй момент равен $[(-dl)(-F)]$, где dl — вектор элемента длины стержня от O' к O. Момент же, обусловленный внешними силами **K**, является малой величиной высшего порядка. Таким образом, полный действующий на элемент стержня момент сил есть $dM + [dlF]$. В равновесии он должен быть равным нулю:

$$dM + [dlF] = 0.$$

Разделив это равенство на *dl* и замечая, что *dI/dl* = t есть единичный вектор касательной к стержню (рассматриваемому как линия), получаем уравнение

$$\frac{dM}{dl} = [Ft]. \tag{4.3}$$

Уравнения (4,2) и (4,3) представляют собой полную систему уравнений равновесия произвольным образом изогнутого стержня.

Если действующие на стержень внешние силы являются, как говорят, сосредоточенными, т. е. приложены только к отдельным изолированным его точкам, то на участках стержня между точками приложения сил уравнения равновесия заметно упрощаются. Из (4,2) имеем при K=0

$F = const,$ (4,4)

т. е. силы внутренних напряжений постоянны вдоль длины каждого из указанных участков стержня. Значения этих постоянных определяются тем, что разность $F_2 - F_1$ значений силы в точках 1 и 2 равна

$$F_2 - F_1 = -\sum K, \tag{4.5}$$

где сумма берется по всем силам, приложенным к отрезку стержня между точками 1 и 2. Обращаем внимание на то, что в разности $F_2 - F_1$ точка 2 является более удаленной от начала отсчета длины стержня (т. е. длины дуги *l*), чем точка 1; это замечание существенно при определении знаков в равенстве (19,5). В частности, если на стержень действует всего одна сосредоточенная сила f, приложенная к его свободному концу, то F постоянно вдоль всей длины стержня и равно f.