Глава 7. Теория упругости. Напряжения и деформация

Оглавление

§1. Общие сведения

Рассмотрим произвольное твердое тело с наложенными на него опорными реакциями. Воздействие окружающих тел заменяется силами, которые называется внешними. Внешние нагрузки можно разделить на объемные (массовые), поверхностные и сосредоточенные. Последние могут рассматриваться как предельный случай приложения поверхностных нагрузок на малой части поверхности тела.

Теория упругости является частью механики сплошной среды и занимается определением деформации и внешних сил в упругих телах при заданных нагрузках. При этом принимаются следующие основные гипотезы и допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера деформаций.

1. *Гипотеза однородности и сплошности*. Это предположение дает возможность изучать механические свойства тел на образцах сравнительно малых размеров и позволяет использовать для исследования деформации аппарат дифференциального исчисления.

2. *Допущение о малости деформаций*. Деформации в точках тела считаются настолько малыми, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок, приложенных к телу. Это позволяет при составлении уравнений равновесия считать геометрию тела неизменной.

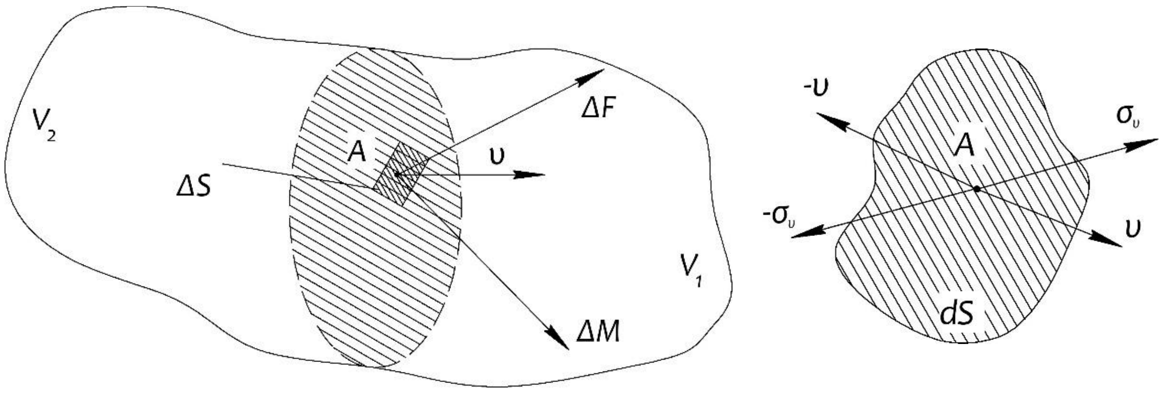
3. *Принцип напряжений Эйлера и Коши*. В каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил по типу распределенных по поверхности нагрузок. То есть, применяя метод сечений, мы можем действие одной части тела на другую заменять поверхностными усилиями, действующими в сечении.

Это связано с допущением о малом радиусе действия взаимодействующих частиц.

4. *Аксиома отвердевания* (замороженности): в любой фиксированный момент времени t материальное тело рассматривается как абсолютно твердое, и для него справедливы законы теоретической механики, в том числе законы Ньютона. При этом используются аксиоматические понятия силы и массы.

Очевидно, что согласно гипотезе сплошности движение материи изучается на так называемом *макроскопическом уровне*, то есть не учитывается элементарное строение вещества. Это оправдано тем, что в огромном числе практических задач представляет интерес не поведение каждой молекулы (атома), а общее состояние тела. Справедливость введенных допущений окончательно может быть установлена лишь опытом.

Предположим, что воображаемое сечение делит тело на две области —V_1 и V_2, рисунок 1(а). Элемент поверхности сечения ΔS с центром в точке А характеризуется единичным вектором нормали υ, направленным к V_1.



(а) (б)

Рисунок 1

Действие, оказываемое частью V_1 тела в точке А на часть V_2, можно представить вектором силы **F** и вектором момента **M**.

В пределе, при стягивании элементарной площадки к рассматриваемой точке $\Delta S \to 0$ (при фиксированном направлении v), могут быть приняты следующие физически обоснованные предположения:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} = \sigma_v = (\sigma_{\mathrm{n}}, \sigma_\tau) \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0 \tag{2}$$

Определяемый соотношением (1) вектор σ_v называется вектором напряжений в точке A. Он действует на элемент поверхности с направлением нормали v и меняется при изменении направления этой нормали к ΔS. Совокупность векторов напряжений $\sigma_v(A)$ для всех направлений и определяет напряженное состояние в точке А.

В общем случае вектор напряжений $\sigma_v(A)$ направлен не по нормали v. Его проекция на произвольное направление (определяемое единичным вектором) называется компонентой вектора напряжении в этом направлении. Если разложить σ_v по нормали и касательной к площадке dS, то его координаты — так называемые нормальное напряжение σ_{n} и касательное напряжение τ_{n}, рисунок 2.

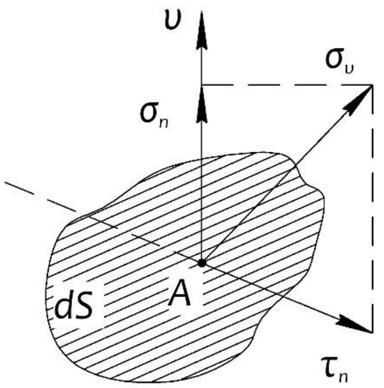


Рисунок 2

При этом для модулей этих величин справедливо соотношение:

$$\sigma_v^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_v^2 + \tau_{n_x}^2 + \tau_{n_y}^2 \tag{3}$$

Следует помнить, что напряжения σ_n и τ_n, определенные подобным образом, не являются компонентами вектора в обычном смысле. Заметим, что касательные напряжения в плоскости элемента dS обычно раскладывают на два координатных направления.

§2. Тензор деформации

Механика твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, составляет содержание теории упругости.

У нас все преобразования афинные, поскольку контрвариантный и ковариантный тензоры совпадают, то индексы будем писать внизу.

Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной степени деформируются, то есть. меняют свою форму и объем. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ (с компонентами $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определенную точку тела; если ее радиус-вектор до деформирования был $\boldsymbol{r}$, то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение $\boldsymbol{r}'$ (с компонентами x_i'). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$, который обозначается $\boldsymbol{u}$:

$$u_i = x_i' - x_i \tag{4}$$

Вектор $\boldsymbol{u}$ называют *вектором деформации* (или *вектором смещения*). Координаты x_i' смещенной точки являются функциями от координат x_i той же точки до ее смещения. Поэтому вектор деформации является функцией координат x_i. Задание вектора $\boldsymbol{u}$ как функции от x_i полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был dx_i то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет $dx_i' = dx_i + du_i$. Расстояние между точками было равно до деформирования:

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \tag{5}$$

а после деформации:

$$dl = \sqrt{{dx_1'}^2 + {dx_2'}^2 + {dx_3'}^2} \tag{5}$$

Согласно общему правилу написания сумм:

$$dl^2 = dx_i^2, \qquad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 \tag{6}$$

Подставив $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, переписываем в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l \tag{7}$$

Поскольку во втором члене оба индекса i и k к является немыми, их можно переставить и соответственно записать этот член в явно симметричном виде

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k \tag{8}$$

Если в третьем члене поменять местами i и l, тогда можно получить

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k \tag{9}$$

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{10}$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела.
Замечание 1 Тензор u_{ik} называют тензором деформации; по своему определению он симметричен:

$$u_{ik} = u_{ki} \tag{11}$$

Замечание 2 Как и. всякий симметричный тензор, тензор u_{ik} можно привести в каждой точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат – главные оси тензора, – в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только диагональные компоненты u_{11}, u_{22}, u_{33}. Эти компоненты – главные значения тензора деформации – обозначаются

посредством $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$. Если тензор u_{ik} приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он недиагонален во всех других точках.

Замечание 3 Если тензор деформации приведен в данной точке к главным осям, то в окружающем ее элементе объема элемент длины (9) приобретает вид

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = \left(1 + 2u^{(1)}\right) dx_i^2 + \left(1 + 2u^{(2)}\right) dx_i^2 + \left(1 + 2u^{(3)}\right) dx_i^2 \tag{12}$$

Видно, что выражение распадается на три независимых члена. Тогда в каждом элементе объема тела деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям – главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина dx_i вдоль первой из главных осей превращается в длину

$$dx_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}dx_1 \tag{13}$$

и аналогично для двух других осей:

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \tag{14}$$

представляют собой, следовательно, относительные удлинения $(dx_i' - dx_i)/dx_i$ вдоль этих осей.

Замечание 4 Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием.

Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается

вектора деформации, то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением изгибов тонких пластинок в цилиндрическую поверхность, поворот «трехмерного» тела вокруг некоторой оси на конечный угол наряду с деформацией, при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трехмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не малы ни в каком направлении) не может быть, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

В остальных же случаях, при малых деформациях смещения u_i, а с ними и их производные по координатам, малы. Поэтому в общем выражении (10) можно пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{15}$$

Замечание 5 Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)} \tag{16}$$

то есть непосредственно главным значениям тензора u_{ik}.

Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема dV и определим его величину dV' после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора

деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины dx_1, dx_2, dx_3 вдоль этих осей после деформирования перейдут в $dx'_1 = \left(1 + u^{(1)}\right)dx_1$ и так далее. Объем dV есть произведение $dx_1 dx_2 dx_3$ объем же dV' равен $dx'_1 dx'_2 dx'_3$. Таким образом,

$$dV' = dV\left(1 + u^{(1)}\right)\left(1 + u^{(2)}\right)\left(1 + u^{(3)}\right) \tag{17}$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV\left(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}\right) \tag{18}$$

Замечание 6 Но сумма $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ главных значений тензора, есть, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$.

Таким образом,

$$dV' = dV(1 + u_{ii}) \tag{19}$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации дает относительное изменение объема $(dV' - dV)/dV = U$.

Замечание 7 Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведем для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах R, θ, φ имеем

$$\begin{gathered}
u_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial \mathrm{R}}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R}, \\
u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{R}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_R}{R}, \\
2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\
2u_{R\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \theta}, \\
2u_{\varphi R} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R}
\end{gathered} \tag{5}$$

Замечание 8 В цилиндрических координатах r, θ, z

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial \mathrm{r}}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{z}},$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \tag{6}$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}$$

§3. Тензор напряжения

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются внутренними напряжениями. Если тело не деформировано, то внутренние напряжений в нем отсутствуют.

Внутренние напряжения обусловливаются молекулярными силами, то есть силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенными для теории упругости являются то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным радиусом действия. Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояниях порядка межмолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теорий, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обусловливающие внутренние напряжения являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от каждой точки только к ближайшим с ней. Тогда следует, что силы, оказываемые на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих ее частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части.

Пусть имеется тело, на которое действуют силы рисунок 1.

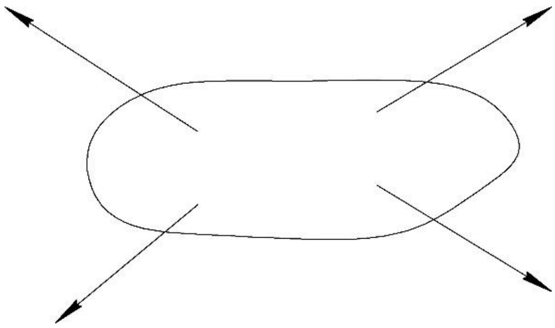


Рисунок 1

Рассечем тело на две части плоскостью (рисунок 2).

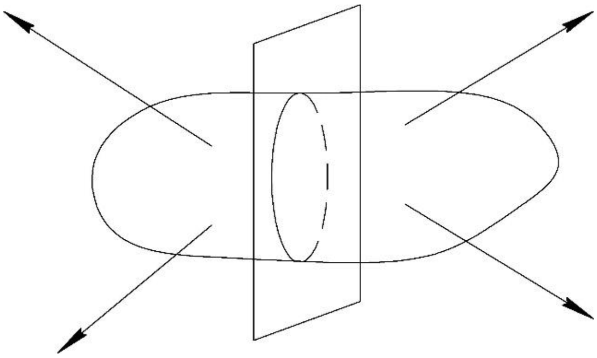


Рисунок 2

Исключим правую часть из рассмотрения (рисунок 3).

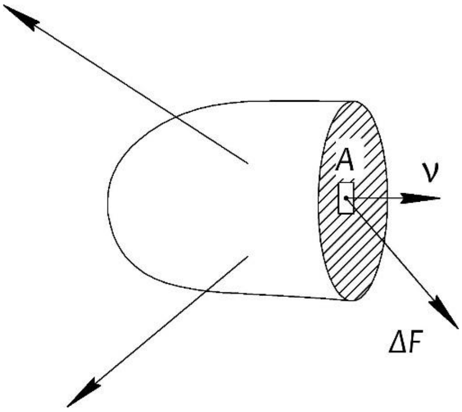


Рисунок 3

Рассмотрим точку A в сечении и выделим вокруг нее площадь ΔS. Пусть на ΔS действует равнодействующая $\Delta\boldsymbol{F}$, а $\boldsymbol{\nu}$ – неединичный нормаль. Тогда $\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nu}\Delta S/|\boldsymbol{\nu}|$.

Полным напряжением $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ в точке A называется:

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta S} \tag{7}$$

то есть площадь стремиться в точку.

Вообще говоря, $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ может иметь направление существенно отличающееся от $\Delta\boldsymbol{F}$.

Как показал опыт, работать с полным напряжением неудобно и его раскладывают на две составляющие:

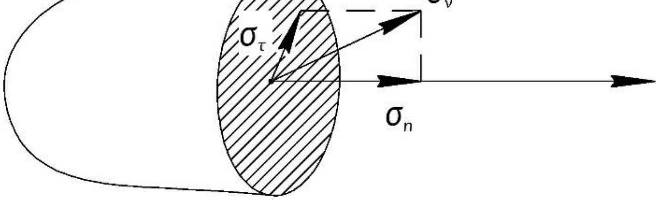
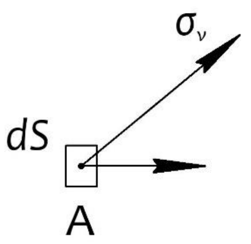


Рисунок 4

σ_n – проекция $\vec{\sigma}_{\vec{\nu}}$ на нормаль к сечению (нормальна составляющая).

σ_τ – проекция на площадь сечения (тангенциальная или касательная напряжения).

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ: Хоть и говорится о напряжении в точке, но согласно определению, напряжения в точке быть не может, так как точка не имеет размера. Поэтому рассматривается площадь, хоть и стремящаяся к нулю, но все равно имеющая размер.



$\frac{\vec{\nu}}{|\vec{\nu}|}$

Теперь разобьём объем другим сечением, проходящим через точку A, рисунок 5.

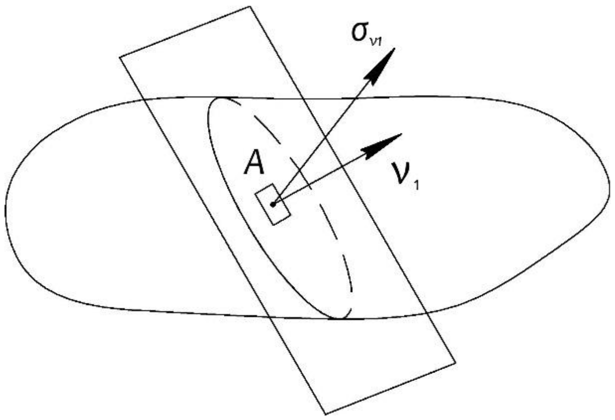


Рисунок 5

$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}_1} \neq \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}}$, то есть направление в точке зависит от ориентации площади в пространстве. ν_1 – новый вектор нормали $\Delta\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{\nu}\Delta S/|\boldsymbol{\nu}|$. ($\nu_1$ не единичный вектор).

Вопрос: Как описать напряжение в точке для любого сечения, проходящего через точку A?

Ответ заключается в том, что необходимо задать напряжение в трех взаимно перпендикулярных площадях, проходящих через точку. Далее будет показано, что такой подход позволит задать напряжения для любой ориентации сечения (рисунок 6).

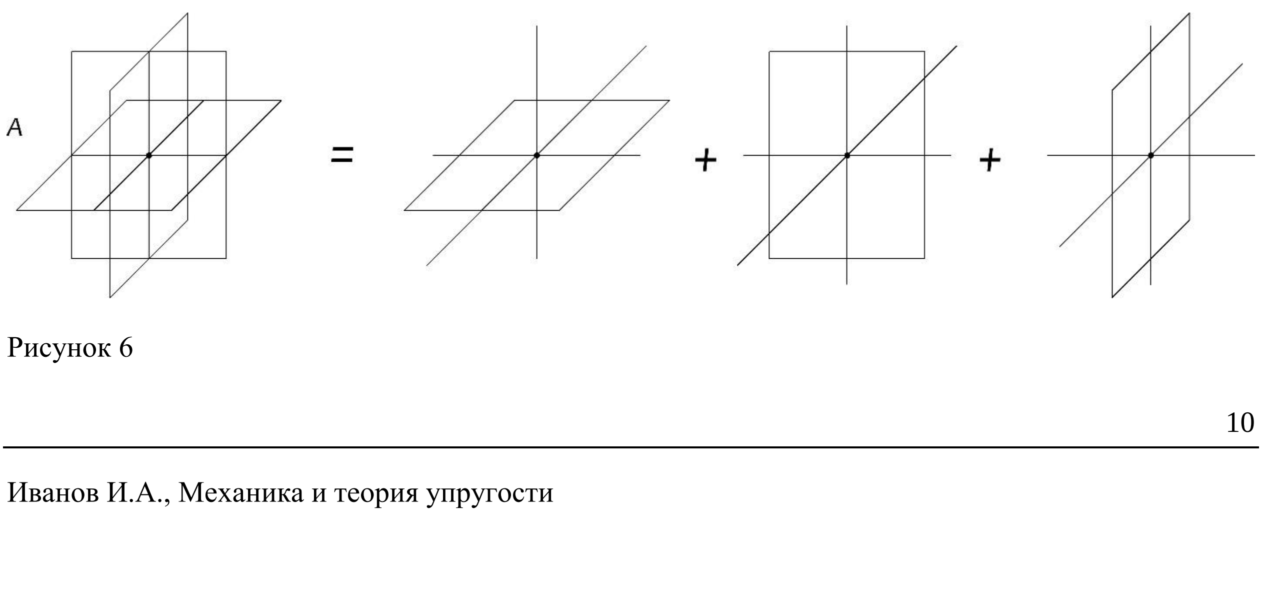
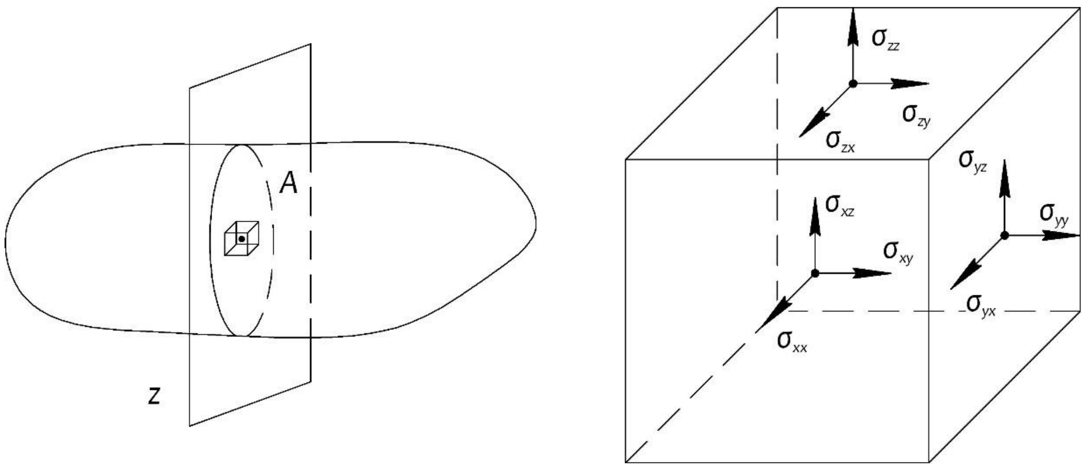


Рисунок 6

Комбинация этих напряжений позволяет найти напряжение любой другого площадки, проходящей через эту точку.

Выделив элементарный объем вокруг точки A – параллелепипед (рисунок 7а и 7б). Пусть три грани этого параллелепипеда являются теми тремя бесконечно близкими к точке A гранями.



(а) (б)

Рисунок 7

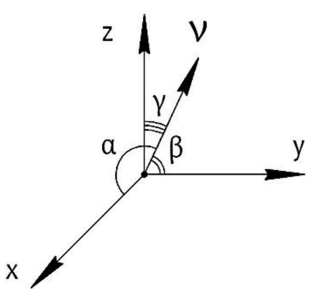
Замечание: на невыбранных гранят действуют те же напряжения, но имеющие противоположные знаки.

$$\overrightarrow{\sigma_{\vec{k}}} = \vec{i}\sigma_{zx} + \vec{j}\sigma_{zy} + \vec{k}\sigma_{zz}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{\vec{j}}} = \vec{i}\sigma_{yx} + \vec{j}\sigma_{yy} + \vec{k}\sigma_{yz} \qquad (8)$$

$$\overrightarrow{\sigma_{\vec{i}}} = \vec{i}\sigma_{xx} + \vec{j}\sigma_{xy} + \vec{k}\sigma_{xz}$$

Полное напряжение в окружности точки A для любой площади, ориентация которой задается вектором нормали $\vec{\nu}$.



Пусть направляющие векторы:

$$\left.\begin{matrix} \cos\alpha = l \\ \cos\beta = m \\ \cos\gamma = n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \qquad \vec{\nu} = \overrightarrow{(l, m, n)}$$

Задача:

Найти напряжение на площадке, определенной вектором $\vec{\nu}$.

Часть параллелепипеда, вырезанного плоскостью, определяется вектором $\vec{\nu} \perp \overrightarrow{(l, m, n)}$. (то есть часть рассматриваемой площади).

$\vec{\sigma}_{\vec{v}}$ – искомое напряжение.

$\vec{\sigma}_{\vec{v}} = \overrightarrow{(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)}$.

S – часть площади.

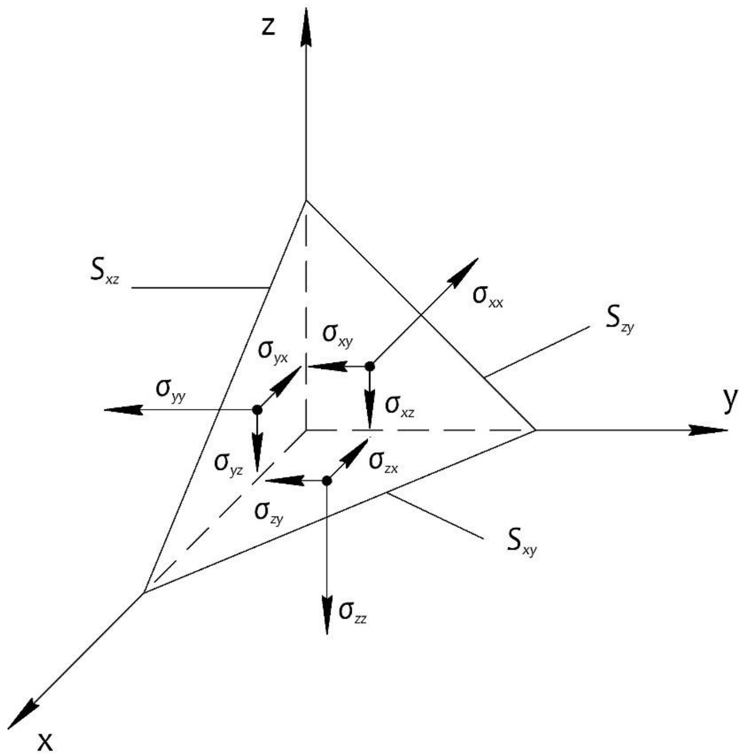


Рисунок 8

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 = \sigma_x S - \sigma_{xx} S_{yz} - \sigma_{yx} S_{xz} - \sigma_{zx} S_{xy} \\ \sum F_y = 0 = \sigma_y S - \sigma_{xy} S_{yz} - \sigma_{yy} S_{xz} - \sigma_{zy} S_{xy} \\ \sum F_z = 0 = \sigma_z S - \sigma_{xz} S_{yz} - \sigma_{yz} S_{xz} - \sigma_{zz} S_{xy} \end{cases} \quad (9)$$

Зная:

$$\vec{S} = \overrightarrow{(S_{yz}, S_{xz}, S_{xy})} = \overrightarrow{(lS, mS, nS)} \quad (10)$$

Тогда можно получить:

$$\begin{cases} S_{yz} = lS \\ S_{xz} = mS \\ S_{xy} = nS \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 = \sigma_x S - \sigma_{xx} lS - \sigma_{yx} mS - \sigma_{zx} nS \\ \sum F_y = 0 = \sigma_y S - \sigma_{xy} lS - \sigma_{yy} mS - \sigma_{zy} nS \\ \sum F_z = 0 = \sigma_z S - \sigma_{xz} lS - \sigma_{yz} mS - \sigma_{zz} nS \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma_{xx} l + \sigma_{yx} m + \sigma_{zx} n \\ \sigma_y = \sigma_{xy} l + \sigma_{yy} m + \sigma_{zy} n \\ \sigma_z = \sigma_{xz} l + \sigma_{yz} m + \sigma_{zz} n \end{cases}$$

Что и требовалось доказать:

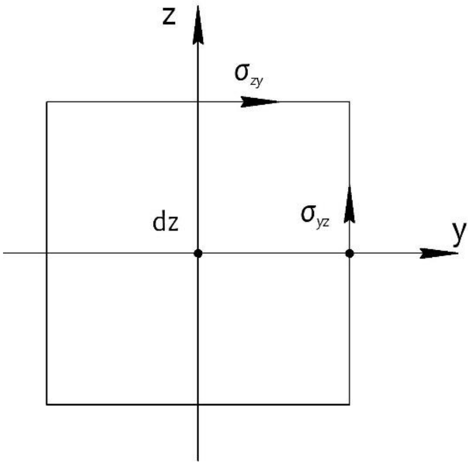
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ l \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\sigma_{\vec{v}}} = T_\sigma \cdot \vec{v} \tag{11}$$

где $\overrightarrow{\sigma_{\vec{v}}}$ – вектор полного напряжения;

T_σ – Тензор напряжения;

$\vec{v}$ – нормаль.

Зная уравнение (11) можно найти напряжение в любой площадки, зная T_σ. Согласно закону парности можно показать, что тензор напряжений симметричен.



Закон парности:

Элементарный параллелепипед не должен вращаться вокруг любой оси, то есть сумма моментов равна нулю.

$$(\sigma_{zy} \cdot dx\, dy)dz = (\sigma_{yz} \cdot dx\, dz)dy \Rightarrow$$

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz},$$

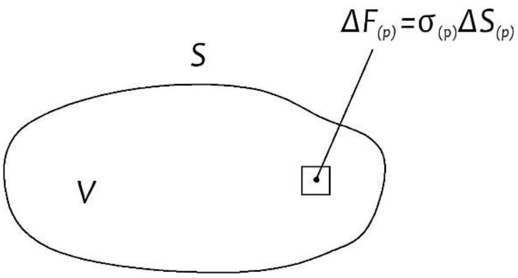
где $\sigma_{zy} \cdot dx\, dy$ – касательная сила;

dz – плечо.

Аналогично $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ и $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, следовательно тензор симметричный.

§4. Условия равновесия

Рассмотрим объем и рассчитаем все поверхностные силы:



$$\Delta\vec{F}_{(p)} = \vec{\sigma}_{(p)}\Delta S_{(p)} \quad \Rightarrow \Delta\vec{F}_{\Sigma} = \sum_p \Delta\vec{F}_{(p)} = \sum_p \vec{\sigma}_{(p)}\Delta S_{(p)} \quad \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_x = \sum_p \Delta F_{(p)x} = \sum_p \sigma_{(p)x} \Delta S_{(p)} \\ F_y = \sum_p \Delta F_{(p)y} = \sum_p \sigma_{(p)y} \Delta S_{(p)} \\ F_z = \sum_p \Delta F_{(p)z} = \sum_p \sigma_{(p)z} \Delta S_{(p)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = \sum_p \left(\sigma_{(p)xx} \Delta S_{(p)x} + \sigma_{(p)xy} \Delta S_{(p)y} + \sigma_{(p)xz} \Delta S_{(p)z}\right) \\ F_y = \sum_p \left(\sigma_{(p)yx} \Delta S_{(p)x} + \sigma_{(p)yy} \Delta S_{(p)y} + \sigma_{(p)yz} \Delta S_{(p)z}\right) \\ F_x = \sum_p \left(\sigma_{(p)zx} \Delta S_{(p)x} + \sigma_{(p)zy} \Delta S_{(p)y} + \sigma_{(p)zz} \Delta S_{(p)z}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

где $\Delta S_{(p)x} = dydz$, $\Delta S_{(p)y} = dxdy$, $\Delta S_{(p)z} = dxdy$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_x = \oint \left(\sigma_{xx}(\vec{R}) dS_x + \sigma_{xy}(\vec{R}) dS_y + \sigma_{xz}(\vec{R}) dS_z\right) \\ F_y = \oint \left(\sigma_{yx}(\vec{R}) dS_x + \sigma_{yy}(\vec{R}) dS_y + \sigma_{yz}(\vec{R}) dS_z\right) \\ F_z = \oint \left(\sigma_{zx}(\vec{R}) dS_x + \sigma_{zy}(\vec{R}) dS_y + \sigma_{zz}(\vec{R}) dS_z\right) \end{cases} \Leftrightarrow F_i = \oint \sum_{k=1}^{i} \sigma_{ik} \, dS_k \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{F_i = \oint_S \sigma_{ik} dS_k} \tag{12}$$

С другой стороны:

$$F_i = \int_V f_i \, dV \tag{13}$$

где f_i – внешняя сила на единицу объема.

Приравнивая обе формулы, имеем:

$$F_i = \int_V f_i \, dV = \oint_S \sigma_{ik} dS_k \tag{14}$$

Согласно теории Остроградского – Гаусса:

$$F_i = \int_V f_i \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{\zeta} \, dV = \oint_S \left(\vec{\zeta}, d\vec{S}\right) = \oint \zeta_k \, dS_k \tag{15}$$

Зная выражение 14 и 15, можно получить:

$$\boxed{F_i = \int_V f_i \, dV = \oint_S \sigma_{ik} dS_k = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV} \tag{16}$$

Это значит, что сила, отнесенная к единице объема, может быть представлена в виде градиента тензора σ_{ik}.

Замечание 1 (условие равновесия).

В равновесии силы внутренних напряжений компенсируют друг друга, что значит:

$$F_i = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Замечание 2.

При наличии внешнего поля силы тяжести:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + g\rho_i = 0$$

Замечание 3.

Сила с котороq объем действует на окружающую его поверхность имеет обратный знак

$$-\sum_k \oint \sigma_{ik}\, df_k$$

Замечание 4

Значение компоненты тензора напряжений для случая всестороннего сжатия (см 1п. стр.16)

§5. Закон Гука

Для того чтобы иметь возможность применять общие термодинамические соотношения к тем или иным конкретным случаям деформаций, необходимо иметь выражение для свободной энергии тела F как функции от тензора деформации. Это выражение легко получить, воспользовавшись малостью деформаций и соответственно этому разложив свободную энергию з ряд по степеням u_{ik}. При этом мы будем пока рассматривать только изотропные тела; соответствующие выражения для кристаллов будут получены ниже, и § 10.

Рассматривая деформированное тело, находящееся при некоторой (постоянной вдоль тела) температуре, мы будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при той же температуре (эта оговорка необходима ввиду теплового расширения: см. подробнее § 6). Тогда при $u_{ik} = 0$ должны отсутствовать также и внутренние напряжения, т. е. должны быть $\sigma_{ik} = 0$. Поскольку $\sigma_{ik} = \partial F / \partial u_{ik}$, то отсюда следует, что в разложении F по степеням u_{ik} должны отсутствовать линейные члены.

Далее, поскольку свободная энергия является величиной скалярной, до и каждый член в разложении F тоже должен быть скаляром.

Из компонент симметричного тензора u_{ik}. можно со- і ставить два независимых скаляра второй степени: в качестве них можно выбрать квадрат u_{ik}^2 суммы диагональных компонент и сумму u_{ik}^2 квадратов всех компонент тензора u_{ik}. Разлагая F по степеням u_{ik}, мы получим, следовательно, с точностью до членов второго порядка выражение вида

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ik}^2 + \mu u_{ik}^2 \quad (4,1)$$

u_{ik}^2 - квадрат суммы диагоналей элипса;

μu_{ik}^2 - сумма квадратов всех координат.

Это есть общее выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела. Величины λ и μ называют коэффициентами Ламэ.

Мы видели в § 1, что изменение объема при деформации определяется суммой u_{ik}. Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остается неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называют *сдвигом.*

Обратным случаем является деформация, сопровождающаяся изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остаётся подобным самому себе. Из § 1 следует, что тензор такой деформации имеет вид $u_{ik} = const.\,\delta_{ik}$. Такую деформацию называют *всесторонним сжатием.*

Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Для этого достаточно написать тождество

$$u_{ik} = \left(u_{ik}^2 - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_u \right) + \frac{1}{3}\delta_{ik} u_u \qquad (4.2)$$

Первый член справа представляет собой, очевидно, чистый сдвиг, поскольку сумма его диагональных членов равна нулю (напоминаем, $\delta_{ik} = 3$). Второй же член связан со всесторонним сжатием.

В качестве общего выражения для свободной энергии деформированного изотропного тела удобно написать вместо (4.1) другое, воспользовавшись указанным разложением произвольной деформации на сдвиг и всестороннее сжатие. Именно, выберем в качестве двух независимых скаляров второй степени суммы квадратов компонент соответственно первого и второго членов в (4.2). Тогда г будет иметь вид[1]

$$F = \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{u} \right)^{2} + \frac{K}{2}u_{u}^{2} \quad (4.3)$$

Величины K и μ называют соответственно *<u>модулем всестороннего сжатия</u>* и *<u>модулем сдвига</u>;* связано с коэффициентами Ламэ соотношением

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.4)$$

В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия, как известно, минимальна. Если на тело не действуют никакие внешние силы, то F как функция от *щк* должно иметь минимум, при *щк* = 0. Это значит, что квадратичная форма (4.3) должна быть положительна. Если выбрать тензор *щк* таким, что *щк* =0, то в (4.3) останется только первый член; если же выбрать- тензор вида $u_{ik} = const \cdot \delta_{ik}$, то останется только второй член. Отсюда следует, что необходимым (и, очевидно, достаточным) условием положительности формы (4.3) является положительность каждого из коэффициентов K и μ.

Таким образом, мы приходим к результату» что модули сжатия и сдвига всегда положительны:

К>0. μ > 0, (4,5)

---

[1] Постоянный член F_0 — свободная энергия недеформированного тела — в дальнейшем не будет нас интересовав. Поэтому мы будем для краткости всегда опускать его. подразумевая под F одну только интересующую нас свободную энергию деформации или, как говорят, упругую свободную энергию.

Воспользуемся теперь общим термодинамическим соотношением (3.6) и определим с его помощью тензор напряжений. Для вычисления производных $\partial F / \partial u_{ik}$ напишем полный дифференциал dF (пря постоянной температуре). Имеем

$$du_u^2 = d(\sum u_u)^2 = 2(u_{11} + u_{22} + u_{33})d(u_{11} + u_{22} + u_{33}) = \sum 2u \sum du_u$$
$$dF = Ku_u du_u + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_u\delta_{ik}\right)d\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_u\delta_{ik}\right).$$

Во втором члене умножение первой скобки на δ_{ik} дает нуль, так что остается

$$dF = Ku_u du_u + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_u\delta_{ik}\right)du_{ik}$$

или, написав du_u в виде $\delta_{ik}du_{ik}$,

$$dF = \left[Ku_u\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_u\delta_{ik}\right)\right]du_{ik}$$

Отсюда имеем для тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = Ku_u\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_u\right) \qquad (4.6)$$

Это выражение определяет тензор напряжений через тензор деформации для изотропного тела. Из него видно, что если деформация является чистым сдвигом или чистым всесторонним сжатием, то связь между σ_{ik} и u_{ik} определяется соответственно одним только модулем сдвига или модулем всестороннего сжатия.

Нетрудно получить к обратные формулы, выражающие u_{ik} через σ_{ik}. Для этого найдем сумму диагональных членов σ_u. Поскольку для второго члена (4.6) эта сумма обращается в нуль, то $\sigma_u = 3Ku_u$, или

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11} &= K\sum u_u \\ \sigma_{22} &= K\sum u_u \\ \sigma_{33} &= K\sum u_u\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum u_u = \sum \frac{1}{3K}\sigma_u = \frac{-P+P+P}{3K} = \frac{-P}{K} \qquad (4.7)$$

Подставляя это выражение в (4.6)) и определяя оттуда u_{ik} находим

$$u_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_u + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_u\right), \quad (4.8)$$

что и определяет тензор деформации по тензору напряжений.

Замечание 1 Равенство (4.7) показывает., что относительное изменение объема u_u при всякой деформации изотропного тела зависит только от суммы σ_u диагональных компонент тензора напряжений, причем связь между u_u и σ_u определяется только модулем всестороннего сжатия. При всестороннем (равномерном) сжатии тела тензор напряжений имеет вид $\sigma_u = -\rho\delta_{ik}$. Поэтому в этом случае имеем из (4.7):

$$u_{ik} = -\rho / K \quad (4.9)$$

Поскольку деформации малы, то u_u и ρ — малые величины, и мы можем написать отношение u_u / ρ относительного изменения объема к давлению в дифференциальном виде; тогда

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_T.$$

Величину 1/K называют коэффициентом всестороннего сжатия (или просто коэффициентом сжатия).

Из (4.8) мы видим, что тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik}. Другими словами, деформация пропорциональна приложенным к телу силам. Этот закон, имеющий место для малых деформаций, называют законом Гука[2]).

Приведем еще полезную форму выражения для свободной энергии деформированного тела, получающуюся непосредственно из квадратичности F по тензору деформации. Согласно теореме Эйлера имеем

$$u_{ik}^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2c_{ik}u_{ik} \Rightarrow F = c_{ik}\cdot u_{ik}\cdot u_{ik} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{c}_{ik}\cdot u_{ik}}{2\cancel{c}_{ik}}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \Rightarrow u_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F,$$

Откуда, ввиду того что $\partial F/\partial u_{ik} = \sigma_{ik}$,

$$F = \sigma_{ik}u_{ik}/2$$

Если в эту формулу подставить u_{ik} выраженные в виде линейных комбинаций компонент σ_{ik}, то упругая энергия будет представлена как квадратичная функция величин σ_{ik}. Снова применяя теорему Эйлера, будем иметь

$$\sigma_{ik}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F$$

и сравнение с (4.10) показывает, что

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \qquad (4,11)$$

[2] Фактически закон Гука применим практически ко всем упругим деформациям. Дело в том, что деформации обычно перестают быть упругими еще тогда, когда они настолько малы, что закон Гука является достаточно хорошим приближением (исключение представляют тела типа резины).

Следует, однако, подчеркнуть, что, в то время как формула $\sigma_{ik} = \partial F / \partial u_{ik}$ является общим термодинамическим соотношением, справедливость обратной формулы. (4.11) связана с выполнением закона Гука.

§6. Однородные деформации. Простое растяжение. Коэффициент Пуассона. Модуль Юнга.

Рассмотрим несколько простейших случаев однородных деформаций, т.е. деформаций, при которых тензор деформации постоянен вдоль всего объема тела[3]. Однородной деформацией является, например, уже рассмотренное нами равномерное всестороннее сжатие.

Рассмотрим, теперь так называемое простое растяжение (или сжатие) стержня. Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его- в противоположные стороны. Эти силы действуют равномерно на всю поверхность концов стержня; сила, действующая на единицу поверхности, пусть будет p.

Поскольку деформация однородна, т. е. u_u постоянны вдоль тела, то постоянен также и тензор в напряжений σ_{ik}, а поэтому его можно определить непосредственно из граничных условий (2.9). На боковой поверхности стержня внешние силы отсутствуют, откуда следует, что $\sigma_{ik} n_k = 0$, Поскольку единичный вектор на боковой поверхности перпендикулярен к оси z, т. е. имеет компоненты n_x, n_y, то отсюда следует, что все компоненты σ_{ik}

[3] Компоненты тензора деформации как функция координат не являются вполне независимыми величинами, поскольку шесть различных компонент u_{ik} через производные всего трех независимых функций — компонент вектора σ (см. задачу 9 § 7). Но шесть постоянных величин u_{ik} могут быть в принципе заданы произвольным образом.

исключением только σ_{zz}, равны нулю. На поверхности концов стержня имеем $\sigma_{zi}n_i = p$, откуда $\sigma_{zz} = p$.

Из общего выражения (4.8) связывающего компоненты тензоров деформации и напряжений, мы видим, что все компоненты u_{ik}, а $i \neq k$ равны нулю. Для остальных компонент находим

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p. \qquad (5.1)$$

Компонента определяет относительное удлинение стержня вдоль оси z. Коэффициент при p называют коэффициентам растяжения, а обратную величину — <u>модулем растяжения</u> <u>(или модулем Юнга) E:</u>

$$u_{zz} = p/E \qquad (5.2)$$

где

$$E = 9K\mu/(3K + \mu). \qquad (5.3)$$

Компоненты u_{xx} и u_{yy} определяют относительное сжатие стержня в поперечном направлении. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению называют коэффициентом Пуассона[4]:

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz} \qquad (5.4)$$

Где

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \qquad (5.5)$$

[4] Обозначение коэффициента Пуассона посредством σ, а компонент тензора напряжений посредством σ_{ik} не может привести к недоразумению, поскольку последние, в отличие от первого, всегда имеют индексы.

Поскольку К и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при К = 0) до 1/2 (при μ = 0). Таким образом[5],

$$-1 \le \sigma \le 1/2. \qquad (5.6)$$

Замечание 1 Наконец, относительное увеличение объема стержня при его растяжении равно

$$u_u = p/K. \qquad (5.7)$$

Свободную энергию растянутого стержня можно написать, воспользовавшись непосредственно формулой (4.10). Поскольку от нуля отлична только компонента σ_{zz}, то

$$F = \frac{1}{2} u_{zz} \sigma_{zz} = \frac{p^2}{2E}. \qquad (5.8)$$

Замечание 2 В дальнейшем мы будем пользоваться, как это обычно принято, величинами Е и σ. Эти последние, а также второй коэффициент Ламэ λ выражаются через Е и σ формулами

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \; \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \qquad (5.9)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}.$$

Выпишем здесь общие формулы предыдущего параграфа с коэффициентами, выраженными через Е и σ. Для свободной энергии имеем

[5] Фактически коэффициент Пуассона меняется только в пределах от 0 до 1/2. В настоящее время неизвестны тела, у которых было бы < 0, т. е. которые бы утолщались при продольном растяжении. Укажем также, что неравенству > 0 отвечает > 0; другими словами, всегда положительны оба члена не только в выражении (4.3), но и в (4,1), хотя это и не требуется термодинамикой. Близкие к 1/2 значения (например, у резины) соответствуют модулю сдвига, малому по сравнению с модулем сжатия.

$$F=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2+\frac{\sigma}{1-2\sigma}u_u^2\right). \quad (5.10)$$

Тензор напряжений выражается через тензор деформации согласно

$$\sigma_{ik}=\frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}u_u\delta_{ik}\right). \quad (5.11)$$

Обратно

$$u_{ik}=\frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\sigma_{ik}-\sigma\sigma_u\delta_{ik}\right]. \quad (5.12)$$

Поскольку формулам (5.11) и (5.12) приходится постоянно пользоваться, выпишем их здесь для удобства в расписанном по компонентам виде:

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{xx}+\sigma(u_{yy}+u_{zz})\right],$$

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{yy}+\sigma(u_{xx}+u_{zz})\right], \quad (5.13)$$

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{zz}+\sigma(u_{xx}+u_{yy})\right],$$

$$\sigma_{xy}=\frac{E}{1+\sigma}u_{xy},\ \sigma_{xz}=\frac{E}{1+\sigma}u_{xz},\ \sigma_{yx}=\frac{E}{1+\sigma}u_{yz},$$

и обратные формулы:

$$u_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}-\sigma(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right],$$

$$u_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}-\sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right], \quad (5.14)$$

$$u_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right],$$

$$u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy},\ u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz},\ u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz},$$

§7. Однородная деформация. Одностороннее сжатие.

Рассмотрим теперь сжатие стержня, боковые стороны которого закреплены так, что его поперечные размеры не могут меняться. Внешние силы, производящие сжатие стержня, приложены к его основаниям и действуют вдоль его длины, которую мы опять выберем в качестве оси z. Такую деформацию называют односторонним сжатием. Поскольку стржень деформируется только вдоль оси z, то из всех компонент u_{ik} от нуля отлична только u_{iz}. Из (5.13) имеем теперь

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz},\ \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz},$$

Обозначая опять сжимающую силу посредством $p(\sigma_{zz} = p; p$ отрицательно при сжатии), имеем

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}p, \qquad (5.15)$$

Коэффициент при p называется коэффициентом одностороннего сжатия. Для напряжений, возникающих в поперечном направлении, имеем

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p\frac{\sigma}{1-\sigma}, \qquad (5.16)$$

Наконец, для свободной энергии стержня имеем

$$F = p^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)} \qquad (5.17)$$