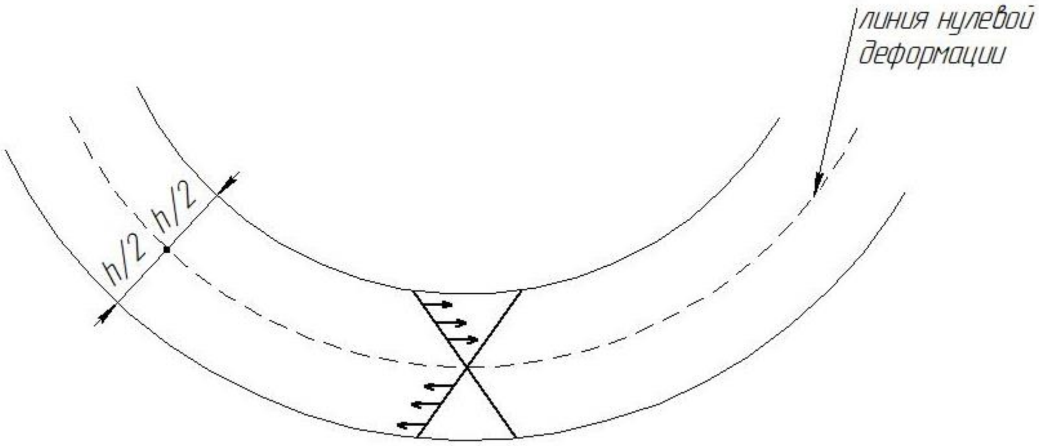
Глава 9. Деформация изогнутой пластинки

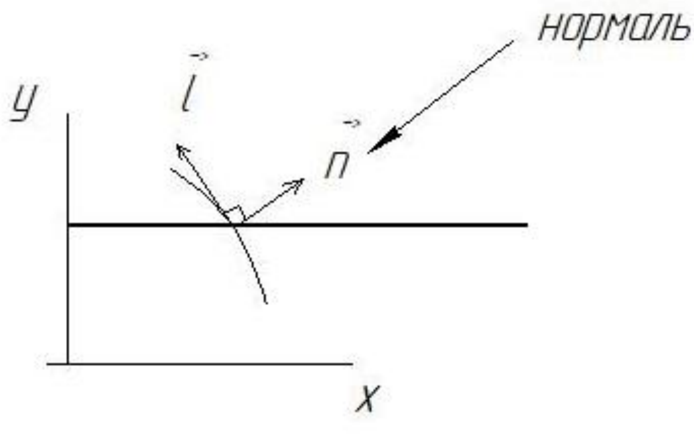
Оглавление

Допущения.

1. Смещением вдоль оси x и y пренебрегаем.
2. Деформирующие силы пренебрежимо малы, по сравнению с внутренними напряжениями, т.е. $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ на поверхности.
3. Пренебрегаем компонентами σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz} по всей толщине пластины.
4. Процесс деформации квазистатический.



Подсказки



1. $\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(U_{ik} + \left(\frac{\gamma}{1-2\sigma}\right)U_u f_{ik}\right)$
2. $U_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)$

3. $F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(U_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}U_u^2\right)$

4. $div\left(\psi\overrightarrow{A}\right) = \left(\overrightarrow{A}, grad\psi\right) + \psi div\overrightarrow{A};\ \Delta\psi = \frac{div}{grad\psi}$

5. $\int div\overrightarrow{A}df = \oint\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{h}\right)dl$

6. $\left(grad\varphi, \overrightarrow{h}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial\overrightarrow{h}}$

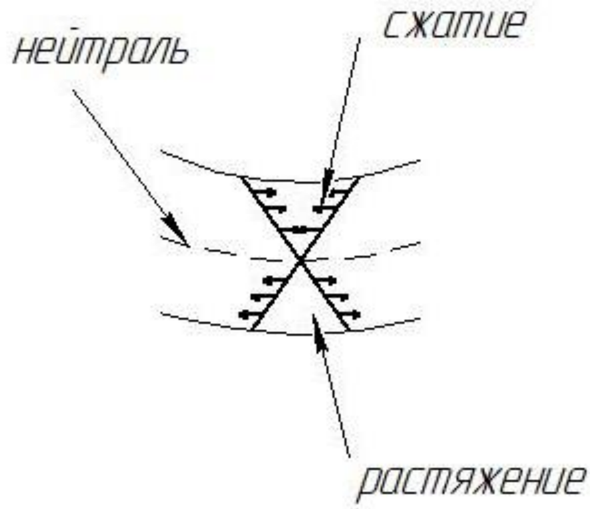
7. $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = cos\theta\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{h}} + \cos\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{l}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = sin\theta\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{h}} + \sin\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{l}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = cos\theta\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{h}} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{l}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = sin\theta\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{h}} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{l}} \end{cases}$

8. $\int div\overrightarrow{A}df = \oint(dl\ cos\theta A_x + dl\ sin\theta A_y)$

§1. Основные определения

В этой главе мы будем заниматься изучением некоторых частных случаев равновесия деформируемых тел и начнем с рассмотрения деформаций тонких пластинок. Когда мы говорим, что пластинка является тонкой, то подразумевается, что ее толщина мала по сравнению с размерами в двух других направлениях. Самые деформации по-прежнему считаются малыми. В данном случае критерием малости деформации является малость смещений точек пластинки по сравнению с ее толщиной.

При применении к тонким пластинкам общие уравнения равновесия значительно упрощаются. Удобнее, однако, выводить эти упрощенные уравнени не непосредственно из общих, а вычислив заново свободную энергию изогнутой пластинки и затем проварьировав эту энергию.



При сгибании пластинки в некоторых местах внутри нее возникают растяжения, а в других – сжатия. Именно на выпуклой стороне пластинки, очевидно, происходит растяжение; по мере углубления в толщу пластинки это растяжение постепенно уменьшается, достигая в конце концов нуля, вслед за чем в дальнейших слоях начинается постепенно увеличиваться сжатие. Таким образом, внутри пластинки имеется нейтральная поверхность, на которой растяжение вообще отсутствует, а по двум сторонам ее деформация имеет положительный знак. Очевидно, что эта поверхность расположена по середине толщины пластинки.

Выберем систему координат с началом в какой-нибудь точке нейтральной поверхности и осью z, направленной по нормали к ней. Плоскость x, y совпадает с плоскостью недеформированной пластинки. Обозначим вертикальное смещение точек нейтральной поверхности, т.е. их z-координату, посредством ζ (рис. 2). Что касается компонент смещений этих точек в плоскости x,y, то они являются, очевидно, величинами второго порядка малости по сравнению с ζ и потому могут быть положены равными нулю. Таким образом, вектор смещения точек нейтральной поверхности:

$$u_x^0 = u_y^0 = 0, \qquad u_z^0 = \zeta(x, y). \tag{11,1}$$

Для дальнейших вычислений необходимо сделать следующее замечание относительно напряжений, действующих в деформированной пластинке.

I. $\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(U_{ik} + \left(\frac{\gamma}{1-2\sigma}\right) U_u f_{ik}\right)$

II. $\left.\begin{matrix} U_x^{(0)} = 0 \\ U_y^{(0)} = 0 \\ U_z^{(0)} = \sum(x,y) \end{matrix}\right\}$деформации неи тр нов-ти

III. $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

VI. $\sigma_{zx} = \frac{E}{1+\sigma} U_{zx}; \sigma_{zy} = \frac{E}{1+\sigma} U_{zy}$

$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\sigma}\left(U_{zz} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right)\right) = \frac{E\left[(1+\sigma)U_{zz} + \sigma\left(U_{xx}+U_{yy}\right)\right]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$.

V. 1) $\partial_{zx} = \frac{E}{1+\sigma} U_{zx} = 0 => \frac{\partial U_z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U_x}{\partial z} = -\frac{\partial U_z}{\partial x}$

2) $\frac{\partial U_y}{\partial z} = -\frac{\partial U_z}{\partial y} -$ аналогично; $U_{xz} = U_{yz} = 0$

3) $U_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(U_{xx} + U_{yy}\right)$

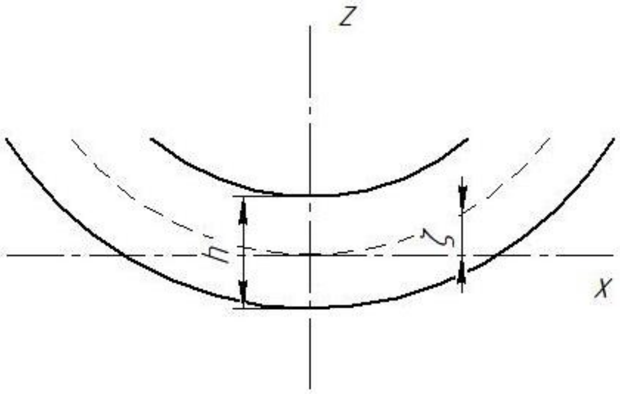
4) $\frac{\partial U_x}{\partial z} = -\frac{\partial U_z}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \frac{\partial U_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial z} => U_x = -z\frac{\partial \zeta}{dx} + C_x; U_y = -z\frac{\partial \zeta}{\partial y} + C_y; U_x|_{z=0} = U_y|_{z=0} = 0 =>$
$C_x = 0, C_y = 0$

Поскольку пластинка тонкая, то, для того, чтобы изогнуть ее требуется приложить к ее поверхности сравнительно небольшие силы. Эти силы во всяком случае будут значительно меньше, чем те внутренние напряжения, которые возникают внутри деформированной пластинки благодаря имеющим в них место растяжениям и сжатиям. Поэтому в граничных условиях (2,9) можно пренебречь силами P_t, так что остается

$\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку пластинка слабо изогнута, то можно считать, что вектор нормали n направлен по оси z. Таким образом, на обеих поверхностях пластинки должно быть

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0.$$

Но поскольку толщина пластинки мала, то из равенства этих величчин нулю на двух сторонах пластинки следует, что они малы и внутри нее. Таким образом, мы приходим к выводу, что во всей пластинки компоненты малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. На этом основании мы можем положить их равными нулю и определить компоненты тензора деформации из этого условия.



Согласно общим формулам (5,13) имеем

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{1+\sigma}u_{zx}\,, \qquad \sigma_{zy} = \frac{E}{1+\sigma}u_{zy},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\right]. \qquad (11.2)$$

Приравнивая эти выражения нулю, находим

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \qquad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(u_{xx}+u_{yy}\right).$$

В первые два уравнения можно для u_z с достаточной точностью подставить *ζ (x, y):*

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

Откуда

$$u_x = -z\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad u_y = -z\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \tag{11.3}$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю так, чтобы при z = 0 имело место $u_x = u_y = 0$. Зная u_x и u_y, можно определить все компоненты тензора деформации:

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \qquad u_{yy} = -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}, \qquad u_{xy} = -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y},$$

$$u_{xz} = u_{yz} = 0, \qquad u_{zz} = z\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma} \tag{11.4}$$

$$U_{ik}=\begin{pmatrix} -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} & -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} & 0 \\ -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} & -z\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & z\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma} \end{pmatrix}$$, т.к.

$$U_{xx}=\frac{\partial U_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)=-z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

$$U_{yy}=\frac{\partial U_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=-z\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}$$

$$U_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}+\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(-z\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=-z\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)=-z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}$$

$$F=\frac{1}{2}U_u^2+\mu U_{ik}^2=\frac{E\sigma U_{il}^2}{2(1-2\sigma)(1+\sigma)}+\frac{E}{2(1+\sigma)}U_{ik}^2=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[U_{ik}^2+\frac{\sigma}{1-2\sigma}U_{il}^2\right]=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(-z\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.z\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+z\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\right)^2+z^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+z^2\frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+2z^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=$$

$$\frac{Ez^2}{2(1+\sigma)}\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(-x+\frac{\sigma}{1-\sigma}x\right)^2+\frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2}x^2+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=$$

$$\frac{Ez^2}{2(1+\sigma)}\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{(1-2\sigma)^2x^2}{(1-\sigma)^2}+\frac{\sigma^2x^2}{(1-\sigma)^2}+x^2-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=\frac{Ez^2}{2(1+\sigma)}\left[x^2\left(\frac{\sigma-2\sigma^2}{(1-\sigma)^2}+\frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2}+1\right)+\right.$$

$$\left.2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=\frac{Ez^2}{2(1+\sigma)}\left[x^2\frac{\sigma-2\sigma^2+\sigma^2+1+\sigma^2-2\sigma}{(1-\sigma)^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\text{->}$$

Теперь уже можно вычислить, воспользовавшись общей формулой (5.10), свободную энергию F единицы объема пластинки. Простое вычисление приводит к выражению

->$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma}\left\{\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}.$ (11.5)

Полная свободная энергия пластинки получится отсюда интегрированием по всему объему. Интегрирование по *z* производится в пределах от *–h/2* до *+h/2*, где *h* – толщина пластинки, а по *x, y* – по всей поверхности пластинки. В результате находим свободную энергию $F_{\text{пл}} = \int F dV$ деформированной пластинки в виде

$$F_{\text{пл}} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\\ +2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\end{matrix}\right\}dxdy \qquad (11.6)$$

(для элемента поверхности можно ввиду малости деформации писать с достаточной точностью просто *dx dy*.)

После того как получено выражение для свободной энергии, можно рассматривать пластинку как не обладающую толщиной, т.е. как геометрическую поверхность, поскольку нас интересует только форма, принимаемая ею под влиянием приложенных сил, а не распределение деформации внутри самой пластинки. Величина ζ является тогда смещением точек пластинки, рассматриваемой как поверхность, при ее смещении.

§ 2. Уравнение равновесия пластинки

$$\begin{cases} div(\varphi\vec{A}) = \vec{A}\,grad\varphi + \varphi div\vec{A} \\ \Delta\varphi = div(grad\varphi)\end{cases}$$

Уравнение равновесия пластинки мы выведем из условия минимума ее свободной энергии. Для этого надо вычислить вариацию выражения (11,6).

Разобьем стоящий в (11,6) интеграл на сумму двух интегралов и будем варьировать каждый из них в отдельности. Первый интеграл можно написать в виде

$$\int(\Delta\zeta)^2 df,$$

Где $df = dx\,dy$– элемент поверхности, а $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ Обозначает здесь (и везде в §§ 12-14) двухмерный оператор Лапласа. Варьируя этот интеграл, имеем

$$\delta\frac{1}{2}\int(\Delta\zeta)^2 df = \int \Delta\zeta\Delta\delta\zeta df = \int \Delta\zeta div\ grad\ \delta\zeta\ df = \int div(\Delta\zeta\nabla\delta\zeta)df - \int div(\Delta\delta\zeta\nabla\Delta\zeta)df$$

$$div(\varphi\overrightarrow{A}) = (\overrightarrow{A}, grad\varphi) + \varphi div\overrightarrow{A} => \overrightarrow{\varphi} div\overrightarrow{A} = div(\varphi\overrightarrow{A}) - (\overrightarrow{A}, grad\varphi) =>$$

Энергия Гельмгольца (или просто свободная энергия) – термодинамический потенциал, убыль которого в квазистатическом изотермическом процессе равна работе, совершенной системой над внешними телами.

Уравнение равновесия.

$$8(F-U)=0,\text{где}$$

U – работа, совершенная внешними силами. Т.е. внешние силы совершают работу и увеличивают потенциальную энергию пластины.

Подсказка. Известны формулы

1. $div\left(\varphi\overrightarrow{A}\right)=\overrightarrow{A}grad\varphi+\varphi div\overrightarrow{A}$
2. $\Delta\varphi=div(grad\varphi)$

Т.е. $F=\frac{Ez^2}{2(1+\sigma)}\left[x^2\frac{1-\sigma}{(1-\sigma)^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{Ez^2}{1-\sigma}\left\{\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}\right.$

$$F_\Sigma=\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{Ez^2dz}{1+\sigma}\iint\{\cdots\}dxdy=\frac{Ez^3}{3(1+\sigma)}\iint\{\cdots\}dxdy\Bigg|_{-h/2}^{+h/2}=\frac{2Eh^3}{24(1+\sigma)}\iint\{\cdots\}dxdy$$

$$=\frac{2Eh^3}{24(1+\sigma)^2}\iint\left((\Delta\zeta)^2+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right)dxdy$$

$$8F=\frac{2Eh^3}{24(1+\sigma)^2}\left(2\cdot\int\frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2df+2(1-\sigma)\int\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]df\right)$$

$$I_1=\int\frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2df$$

$$I_2=\int\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]df$$

Следовательно,

$$fI_1=8\frac{1}{2}\int(\Delta\zeta)^2df=\frac{1}{2}\int2\Delta\zeta\Delta f\zeta d\zeta=\int\Delta\zeta\Delta f\zeta d\zeta=\int\Delta\zeta div\,gradf\zeta df=>$$

Вспоминаем:

$$div(\varphi\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{A}grad\varphi + \varphi div\overrightarrow{A} <=> \varphi div\overrightarrow{A} = div(\varphi\overrightarrow{A}) - (\overrightarrow{A}grad\varphi) => \Delta\zeta div\, grad f\zeta$$
$$= div(\Delta\zeta grad f\zeta) - (grad f\zeta, grad\Delta\zeta) => fI_1$$
$$= \int div(\Delta\zeta\vec{\nabla}f\varphi)df - \int(\vec{\nabla}f\zeta, \vec{\nabla}\Delta\zeta)df$$

Все векторные операции производятся здесь, конечно, в двухмерной системе координат *x, y*. Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по замкнутому контуру, охватывающему пластинку [1]):

$$\int div(\Delta\zeta\nabla\delta\zeta)df = \oint \Delta\zeta(n\, grad\, \delta\zeta)\, dl = \oint \Delta\zeta\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}dl$$

Где $\partial/\partial n$ Означает дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру.

Во втором интеграле применяем такое же преобразование и получаем

$$\int \nabla\delta\zeta\nabla\Delta\zeta df = \int \nabla(\delta\zeta\nabla\Delta\zeta)df - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta df = \oint \delta\zeta(n\nabla)\Delta\zeta df - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta df$$
$$= \oint \delta\zeta\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}df - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta df$$

Подставляя полученные результаты, получаем

$$\delta\frac{1}{2}\int(\Delta\zeta)^2 df = \int \delta\zeta\Delta^2\zeta df - \oint \delta\zeta\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}df + \oint \Delta\zeta\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}df \qquad (12.1)$$

Преобразование вариации второго интеграла в (11,6) несколько более длинно. Это преобразование удобнее производить не в векторном виде, а в компонентах. Имеем:

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df = \int\left\{2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df$$

Подынтегральное выражение здесь можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right),$$

т.е. как двухмерную дивергенцию некоторого вектора. Поэтому можно переписывать вариацию в виде интеграла по контуру:

$$\delta \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df$$

$$= \oint dl \sin\theta \left\{ \frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta\zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\}$$

$$+ \oint dl \cos\theta \left\{ \frac{\partial \delta\zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}, \qquad (12.2)$$

[1]) Формула преобразования двухмерных интегралов в точности аналогична трехмерной формуле. Роль элемента объема *dV* играет теперь элемент поверхности *df* (рассматриваемый как скаляр), а вместо элемента поверхности *df* стоит элемент длины контура *dl*, умноженный на вектор *n* внешней нормали к контуру. Преобразование интеграла по *df* в интеграл по *dl* осуществляется заменой оператора $df\, \partial/\partial x_i$ на величину $n_i\, dl$. Так, если есть некоторый скаляр, то

$$\int div\vec{A}\, df = \oint (\vec{A}, \vec{n})\, dl$$

$$\int \nabla\varphi df = \oint \varphi\vec{n}\, dl$$

$$fI_{11} = \int div\left(\Delta\zeta \cdot \vec{\nabla} f\zeta\right)df = \left\{\iint div\vec{A}\,df = \oint\left(\vec{A},\vec{n}\right)dl;\ (\vec{n}, grad\varphi) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right\}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к контуру

$$= \int div\left(\Delta\zeta \cdot \vec{\nabla} f\zeta\right)df = \oint\left(\Delta\zeta \cdot \vec{\nabla} f\zeta, \vec{n}\right)df = \oint \Delta\zeta \frac{\partial f\zeta}{d\vec{n}} dl$$

$$fI_{12} = \int \left(\vec{\nabla} f\zeta, \vec{\nabla}\Delta\zeta\right)df$$

$$= \int div\left(f\zeta\vec{\nabla}\Delta\zeta\right)df - \left\{\begin{matrix}\varphi div\vec{A} = div\left(\varphi\vec{A}\right) - \left(\vec{A}, grad\varphi\right) \\ \left(\vec{A}, grad\varphi\right) = div\left(\varphi\vec{A}\right) - \varphi div\vec{A}\end{matrix}\right\} - \int f\zeta\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\Delta\zeta\right)df$$

$$= \oint\left(f\zeta\vec{\nabla}\Delta\zeta, \vec{n}\right)dl - \int f\zeta\Delta\Delta\zeta df$$

Таким образом

$$fI_1 = fI_{11} - fI_{12} = \oint \Delta\zeta \frac{\partial f\zeta}{\partial\vec{n}} dl - \oint f\zeta \frac{\partial f\zeta}{\partial\vec{n}} dl + \int f\zeta\Delta\zeta^2 df$$

$$fI_2 = f\int\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]df = \int\left[2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]df$$

$$= \int\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f\zeta}{\partial y^2}\right)df$$

$$= \int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right\}$$

$$= \oint dlcos\theta\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$

$$+ \oint dlsin\theta\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)$$

$$= \oint dlcos\theta\left[\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\vec{n}} + cos\theta\frac{\partial}{\partial\vec{l}}\right)f\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \left(cos\theta\frac{\partial}{\partial\vec{n}} - sin\theta\frac{\partial}{\partial\vec{l}}\right)f\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]$$

$$+ \oint dlsin\theta\left[\left(cos\theta\frac{\partial}{\partial\vec{n}} - sin\theta\frac{\partial}{\partial\vec{l}}\right)f\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\vec{n}} + cos\theta\frac{\partial}{\partial\vec{l}}\right)f\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]$$

$$= \oint dl\left[\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\vec{n}}\left(2cos\theta sin\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$+ \oint dl\left[\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\vec{l}}\left((\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} + cos\theta sin\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right)\right]$$

где θ– угол между осью x и нормалью n к контуру (рис. 3).

Производные $\delta\zeta$ от по x и y выразим через производные по направлению нормали n к контуру и направлению касательной l к нему согласно формулам

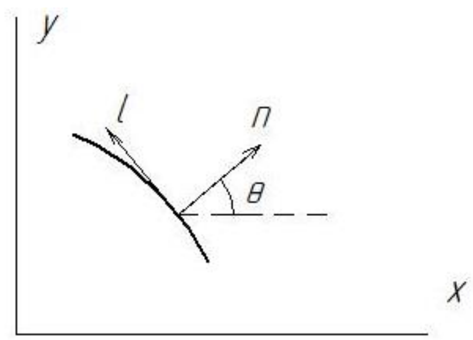
$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial n} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial n} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial l}.$$

Тогда интегралы в формуле (12.2) приобретают следующий вид:

$$\delta\int\{\cdots\}df = \oint dl\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}$$
$$+\oint dl\frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}\left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}.$$

Второй интеграл можно вычислить, взяв его по частям. Поскольку он берется по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, и потому мы получаем просто



$$-\oint dl\delta\zeta\frac{\partial}{\partial l}\left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}$$

Сводя все полученные выражения вместе и написав перед ними коэффициент согласно формуле (11,6), получаем окончательно следующее выражение для вариации свободной энергии:

$$\delta F_{\text{пл}} = D\left\{\iint \Delta^2\zeta\delta\zeta df - \oint\delta\zeta dl\left[\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n} + (1+\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)\right] + \int\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}dl\left[\Delta\zeta + (1-\sigma)(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\} \qquad (12.3)$$

Где $D = Eh^3/12(1-\sigma^2)$

Для того чтобы получить отсюда уравнение равновесия пластинки, надо приравнять нулю сумму вариации δF и вариации δU потенциальной энергии пластинки, связанной с наличием действующих на нее внешних сил.

$$= \oint dl \frac{\partial \delta\zeta}{\partial \vec{n}} \left(2cos\theta sin\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \sin^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)$$

$$+ f\zeta \left((\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + cos\theta sin\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right) \Big|_A^A$$

$$- \oint dl \delta\zeta \frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left((\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + cos\theta sin\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right)$$

Получаем:

$$\equiv D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma)^2}$$

Жесткость пластинки при изгибе

$$\delta F_\Sigma = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma)^2} 2x \left[\oint \Delta\zeta \frac{\partial \delta\zeta}{\partial \vec{n}} dl - \oint \delta\zeta \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial \vec{n}} dl \right.$$

$$+ \int \delta\zeta \Delta^2 \zeta df + (1$$

$$- \sigma) \left\{ \oint dl \frac{\partial \delta\zeta}{\partial \vec{n}} \left(2cos\theta sin\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \sin^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right.$$

$$\left. \left. - \oint dl \delta\, \zeta \frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left((\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + cos\theta sin\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right) \right\} \right]$$

$$fU = \int Pf\zeta df < -\text{P} - \text{действующая внешняя сила}$$

$$8F_\Sigma = fU =>$$

$$\begin{cases} D\Delta\Delta\zeta = P - \text{уравнение равновесия} \\ \dfrac{\partial \delta\zeta}{\partial \vec{n}} + (1-\sigma) \dfrac{\partial}{\partial \vec{l}} \left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + cos\theta sin\theta \left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = 0 \right] \\ \Delta\zeta + (1-\sigma) \left(2cos\theta sin\theta \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \cos^2\theta \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \sin^2\theta \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = 0 \end{cases}$$

Эта последняя вариация равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки. Пусть P есть действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади ее поверхности и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведенная силами при смещении точек пластинки на $\delta\zeta$ равна

$$\int P\delta\zeta df.$$

Таким образом, имеем в качестве условия минимальной полной свободной энергии пластинки уравнение

$$\delta F_{\text{пл}} - \int P\delta\zeta df = 0$$

В левой части этого равенства стоят как интегралы по поверхности, так и интегралы по контуру. Поверхностный интеграл есть

$$\int \{D\Delta^2\zeta - P\}\delta\zeta df.$$

Вариация $\delta\zeta$ в нем произвольна. Поэтому интеграл равен нулю, если

$$D\Delta^2 \zeta = P. \qquad (12.5)$$

Это – уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на нее внешними силами. Коэффициент в этом уравнении называют жесткостью пластинки при изгибе или цилиндрической жесткостью.

Граничные условия для этого уравнения получаются из равенства нулю контурных интегралов в (12.3). При этом следует рассмотреть несколько различных частных случаев.

Предположим, что часть края пластинки свободна, т.е. на нее не действуют никакие внешние силы. Тогда вариация $\delta\zeta$ и $\delta(\delta\zeta/\partial n)$ на ней произвольны и должны быть равными нулю коэффициенты при этих вариациях в интегралах по контуру Это приводит к уравнениям

$$-\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n} + (1+\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\} = 0, \qquad (12.6)$$

$$\Delta\zeta + (1-\sigma)\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\} = 0. \quad (12.7)$$

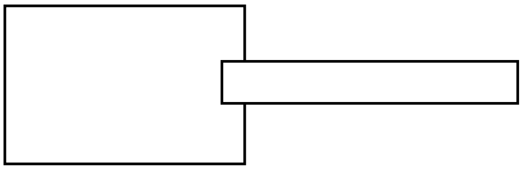
Они должны выполняться на всей свободной границе пластинки.

Краевые условия (12,6-7) весьма сложны. Значительно более просты случаи, когда края пластинки заделаны или оперты.

[1] Сила P может являться здесь результатом действия объемных сил (например, силы тяжести) и равна тогда интегралу от последней по толщине пластинки.

I. Заделанный конец.

Оба конт. Интеграла тк $\delta\zeta$ и $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\vec{n}}$ на контуре равно 0

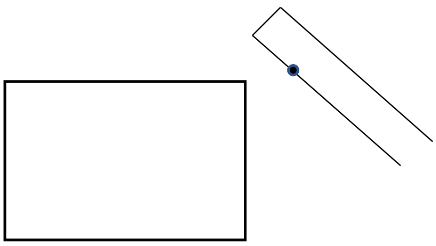


$\zeta = 0$ – нет вертикального смещения

$\frac{\partial\zeta}{\partial\vec{n}} = 0$, т.е. угол на заделанном не меняется, т.е. остается горизонтальным.

II. Опертый конец.

Аналогично $\delta\zeta$ на контуре равен нулю, а $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\vec{n}}$ - нет.



$$\begin{cases} \zeta = 0 \\ \Delta\zeta + (1-\sigma)\left(2cos\theta sin\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) = 0 \end{cases} <=>$$

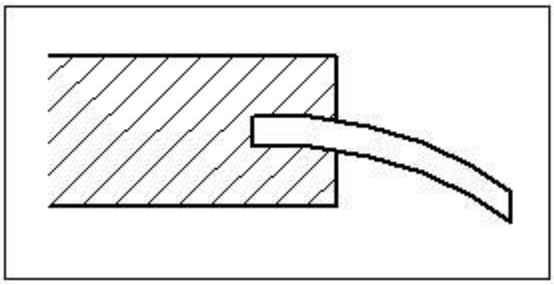
$<=> \begin{cases} \zeta = 0 \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial\vec{n}^2} + \sigma\frac{\partial\theta}{\partial\vec{l}}\frac{\partial\zeta}{\partial\vec{n}} = 0 \end{cases}$ Без доказательства от $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ к $\frac{\partial}{\partial\vec{l}}$ и $\frac{\partial}{\partial\vec{n}}$

Если края пластинки заделаны (рис. 4 а), то они не могут испытывать никакого вертикального смещения и, сверх того, не может измениться также и направление этих краев. Угол, на который поворачивается данный участок края пластинки относительно своего первоначального положения, равен (при малых смещениях ζ) производной $\partial\zeta/\partial n$. Таким образом, на заделанных краях пластинки вариации δ и $\delta(\partial\zeta/\partial n)$ равны нулю, так что контурные интегралы в (12,3) исчезают тождественно. Граничные условия имеют в этом случае простой вид:

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \tag{12,8}$$

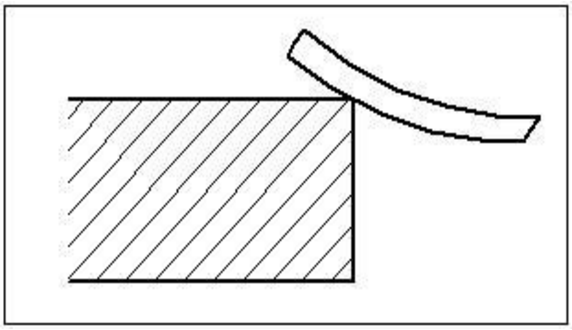
Первое выражает собой тот факт, что края пластинки вообще не испытывают вертикального смещения при деформации, а второе — что направление края остается горизонтальным.

а)



Легко определить силы реакции, действующие на пластинку со стороны опоры в точках закрепления. Эти силы равны и противоположны силам, действующим на опору со стороны пластинки.

б)



Как известно механики, сила, действующая в некотором направлении; равна производной от энергии по координатам, взятой по этому направлению. В частности, сила, с которой пластинка действует па опору, определяется

Рис. 4

производной от энергии по смещению ζ края пластинки, взятой с обратным знаком, а обратная сила реакции —той же производной с положительным знаком. Но эта производная есть не что иное, как коэффициент при δζ во втором интеграле в (12,3). Таким образом, сила реакции, отнесенная к единице длины контура, равна выражению, стоящему в левой части уравнения (12,6) (конечно, не равному теперь нулю), умноженному на D. Аналогично, момент сил реакции определяется выражением, стоящим в левой части уравнения (12,7), умноженным на тот же коэффициент D. Это следует из известного из механики обстоятельства, что момент силы равен производной от энергии по углу поворота тела. Угол же поворота края пластинки равен производной $\partial\zeta/\partial n$, так что соответствующий момент сил определяется коэффициентом при

$\delta(\partial\zeta/\partial n)$ в третьем интеграле в (12,3). При этом оба эти выражения (для силы и момента) ввиду условий (12,8) сильно упрощаются. Именно, поскольку ζ и $\partial\zeta/\partial n$ равны нулю вдоль всего контура края пластинки, то обращаются тождественно в нуль также и их производные всех порядков по направлению касательной l. Учитывая это обстоятельство и переходя в (12,6) и (12,7) от производных по x и y к производным в направлениях n и 1, получим следующие простые выражения для силы F и момента M реакции опоры:

$$F = -D\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} + \frac{d\theta}{dl}\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}\right], \tag{12.9}$$

$$M = D\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}. \tag{12.10}$$

Другой важный случай – опертая пластинка (рис. 4, б), у которой края только опираются на неподвижную опору, но не закреплены в ней. В таком случае на контуре пластинки (т. е. на линии, по которой пластинка опирается на опору) вертикальное смещение по-прежнему отсутствует, но направление отнюдь не остается неизменным. Соответственно этому в (12,3) в интеграле по контуру

$$\delta\,\zeta = 0,$$

но

$$\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n} \neq 0.$$

Поэтому из двух условий (12,6), (12,7) остается только второе. Выражение же, стоящее в левой части (12,6), определяет, как и в предыдущем случае, силу реакции, действующую в точках опоры пластинки (момент же этих сил равен теперь в равновесии нулю). Граничное условие (12,7) упрощается, если перейти к производным по направлениям n и l, причем учесть, что в силу равенства $\zeta = 0$ на всем контуре обращаются в нуль также и производные $\partial\zeta/\partial l$ и $\partial^2\zeta/\partial l^2$. В результате получим граничные условия в виде

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} + \sigma\frac{d\theta}{dl}\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \tag{12.11}$$

Задачи

1. Определить деформацию круглой пластинки (радиуса R) с заделанными краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Выбираем полярные координаты с началом в центре пластинки. Сила, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна P- phg. Уравнение (12,5) приобретает вид

$$\Delta^2 \zeta = 64\beta, \qquad \beta = \frac{3pg(1-\sigma^2)}{16h^2E}$$

(положительные ζ соответствуют смещению по направлению действия силы тяжести). Поскольку ζ есть функция только от r, то для Δ в полярных координатах надо писать Δ= $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$. общий интеграл этого уравнения есть

$$\zeta = \beta r^4 + \alpha r^2 + b + cr^2 ln\frac{r}{R} + dln\frac{r}{R}.$$

В данном случае надо положить d 0, так как In $\frac{r}{R}$ обращается при r = 0 в бесконечность, а также c = 0, так как этот член приводит к особой точке у Δζ ори r = 0 (это соответствовало бы силе, приложенной к центру пластинки, —

Сила, действующая на ΔS -> $g\rho h\Delta S$

$$\Delta^2\zeta = 64\beta \left(D\Delta^2\zeta = g\rho h, D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma)}\right)$$

$$\frac{Eh^3\Delta^2\zeta}{12(1-\sigma)} = g\rho h => 64\beta = \frac{g\rho(1-\sigma)}{Eh^2\frac{64}{12}} = \frac{3g\rho(1-\sigma)}{16Eh^2}$$

$$\Delta\zeta = \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]$$

$$\Delta\Delta\zeta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]\right) = 64\beta$$

$$64\beta r = \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]\right)$$

$$32\beta r^2 + C_1 = r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]$$

$$32\beta r + \frac{C_1}{r} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]$$

см. задачу 3). Постоянные а и б определяются из граничных условий $\zeta = 0, \frac{d\zeta}{dr} = 0$ при r = R. В результате находим

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)^2.$$

2. То же для пластинки с опертыми краями.

Решение. Граничные условия (12,11) в случае круглой пластинки приобретают вид

$$\zeta = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Решение аналогично решению задачи 1 и приводит к результату

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}R^2 - r^2\right).$$

3. Определить деформацию круглой пластинки с заделанными краями, к центру которой приложена сила /

Решение. Везде, кроме начала координат, имеет место уравнение

$$\Delta^2\zeta = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\zeta = \alpha r^2 + b + cr^2 ln\frac{r}{R}$$

(член с *ln r* опять опускаем). Полная сила, действующая на пластинку, равна силе f, приложенной к ее центру; поэтому интеграл от $\Delta^2\zeta$ по поверхности пластинки должен быть равен

$$2\pi\int_0^R r\Delta^2\zeta dr = \frac{f}{D}.$$

Отсюда получается с $= f/8\pi D$. Постоянные *а* и *б* определяются из граничных условий, и в результате находим

$$\zeta = \frac{f}{8\pi D}\left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 ln\frac{R}{r}.\right]$$

4. То же для пластинки с опертыми краями.

Решение.

$$\zeta = \frac{f}{16\pi D}\left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma}(R^2-r^2) - 2r^2 ln\frac{R}{r}.\right]$$

5. Определить деформацию круглой пластинки, подвешенной в своем центре н находящейся в поле тяжести.

Решение.

Уравнение для ζ и его общее решение – такие же, как в задаче 1. Поскольку в центре смещение ζ = 0, то c = 0. Постоянные *a, b* определяются из граничных условий (12,6) и (12,7), имеющих при круговой симметрии вид

$$\frac{d\Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right) = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

В результате находим

$$\zeta = \beta r^2\left[r^2 + 8R^2 ln\frac{R}{r} + 2R^2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}\right].$$

$$32\beta r + \frac{C_1}{r} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]$$

$$16\beta r^2 - \frac{C_1}{2r^2} + C_2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\zeta}{dr}\right)$$

$$16\beta r^3 - \frac{C_1}{2r} + C_2 r = \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\zeta}{dr}\right)$$

$$4\beta r^4 + \frac{C_1}{4r^2} + \frac{C_2 r^2}{2} - C_3 = r\frac{d\zeta}{dr}$$

$$32\beta r + \frac{C_1}{r} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\zeta\right)\right]$$

$$16\beta r^2 - \frac{C_1}{2r^2} + C_2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\zeta}{dr}\right)$$

$$16\beta r^3 - \frac{C_1}{2r} + \frac{C_2}{r} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\zeta}{dr}\right)$$

$$4\beta r^4 + \frac{C_1}{4r^2} - \frac{C_2}{2r^2} = r\frac{d}{dr}\zeta$$

$$4\beta r^3 + \frac{C_1}{4r^3} = \frac{d}{dr}\zeta$$