

А. В. ХАНЕФТ

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ**

Кемерово 2009 (2013)

Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»
Кафедра теоретической физики

А. В. ХАНЕФТ

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ**

Учебное пособие

Кемерово 2009

ББК В253.31/32_я73

УДК 531

X19

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»*

Рецензенты:

кафедра общенаучных дисциплин Кемеровского государственного
сельскохозяйственного университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук,
профессор **Г. И. Колесников**);
д-р техн. наук, профессор **Д. В. Алексеев**.

Ханефт Александр Вилливич

X19 Основы теории упругости / А. В. Ханефт; ГОУ ВПО «Кемеровский
государственный университет». – , 2009. – 99 с.

Обнаруженные опечатки исправлены летом 2013 года.

ISBN 978-5-8353-0915-3

Учебное пособие разработано по курсу «Основы механики сплошных сред»
по специальности 010400 «Физика» в соответствии ГОС ВПО и
рассматривает основы классической теории упругости: виды деформаций,
теория деформаций и напряжений, уравнения движения и равновесия,
термодинамика деформирования и упругие волны. (

ISBN 978-5-8353-0915-3

ББК В253.31/32_я73

© Ханефт А. В., 2009

© ГОУ ВПО «Кемеровский
государственный университет», 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курсу «Основы механики сплошных сред», читаемом в Кемеровском государственном университете, отводится один семестр – одна лекция и одна практика в неделю. В состав курса входят дисциплины: «Гидродинамика» и «Теория упругости». Поэтому в связи с ограниченностью числа часов возникла необходимость в кратком изложении теории упругости.

Учебное пособие «Основы теории упругости» написано по расширенным и дополненным материалам лекций по теории упругости. Учебное пособие включает в себя классическую линейную теорию упругости и состоит из трех глав.

В первой главе изложена элементарная теория упругости, рассмотрены на примере простых задач типы деформаций, а также распространение продольных волн, волн кручения и изгиба в стержнях.

Во второй главе рассмотрены тензоры деформаций, поворота и напряжений, рассмотрены условия сплошности твердого упругого тела.

Третья глава посвящена выводу основных уравнений движения упругой среды. Рассмотрены термодинамика деформирования твердого тела, обобщенный закон Гука, уравнение Ламэ, энергия упруго деформированного тела. Изложена теория распространения волн в изотропной среде и монокристалле.

Учебное пособие «Основы механики сплошных сред» предназначено для студентов физических факультетов, а также может быть использовано на некоторых инженерных специальностях.

Данное учебное пособие отличается от «бумажного» издания исправлением замеченных опечаток. Опечатки в учебном пособии исправлены летом 2013 года.

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости изучает поведение идеальных упругих твердых тел, деформации которых являются однозначными функциями напряжений и исчезают после снятия внешних нагрузок.

Целью теории упругости является определение внутренних усилий и относительных смещений частиц в идеально упругом теле при действии на него внешних сил, а также изучение закономерностей распространения волн деформации.

В основе теории упругости лежат закон Гука и второй закон Ньютона. Считается, что твердое тело является непрерывной средой, т. е. дифференциал объема dV содержит достаточно большое число атомов. Причем для dV должно выполняться следующее неравенство:

$$v_0 \ll dV \ll V,$$

где v_0 – объем, приходящийся на один атом или молекулу в твердом теле; V – характерный объем тела. Данное приближение называется континуальным.

Дифференциал времени в теории упругости также должен удовлетворять неравенству

$$\tau \ll dt \ll t_0,$$

где τ – период колебаний атомов в кристаллической решетке; t_0 – характерное время процесса в рассматриваемой задаче. Левая часть данного неравенства обусловлена тем, что передача взаимодействия в упругой среде осуществляется движением атомов.

ГЛАВА 1

ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 1. Закон Гука

Опыт показывает, что для большого числа упругих материалов достаточно малые удлинения Δl пропорциональны растягивающей силе F , приложенной к торцам бруска

$$F \sim \Delta l.$$

Удлинение бруска зависит от его длины l и площади поперечного сечения бруска S . Данные закономерности были установлены Гуком. Закон Гука имеет вид

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.1)$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем Юнга. Модуль Юнга зависит только от природы материала. Закон Гука является основой линейной механики изотропных упругих деформируемых сред.

Силу, действующую на единицу площади, называют напряжением σ , а относительное удлинение, называют деформацией

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Таким образом, деформация твердого тела, согласно закону Гука (1.1), равна

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad (1.2)$$

При деформации упругое тело приобретает энергию. Определим ее. Сила упругости равна

$$f(x) = kx,$$

где k – коэффициент жесткости. При деформации твердого тела совершается работа A . Вся работа в данном процессе пойдет на увеличение упругой энергии твердого тела W . Следовательно

$$W = A = \int_0^{\Delta l} kx dx = k \frac{\Delta l^2}{2}.$$

Так как в конечном состоянии $x = \Delta l$, то внешняя сила $F = f(\Delta l) = k\Delta l$. Таким образом, запасаемая упругая энергия твердым телом равна

$$W = \frac{F\Delta l}{2}. \quad (1.3)$$

Отсюда плотность упругой энергии, т. е. энергии приходящейся на единицу объема бруска $V = Sl$, определяется выражением

$$w = \frac{W}{V} = \frac{F\Delta l}{2Sl} = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Для решения ряда практических задач необходимо иметь закон Гука (1.1) в дифференциальной форме. Для этого рассмотрим деформацию струны (рис. 1.1). На рис. 1.1, *a* изображена струна до деформации.

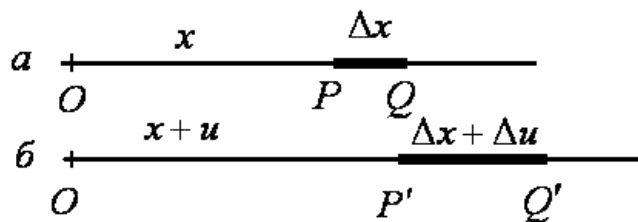


Рис. 1.1. Деформация растяжимой струны: *a* – до растяжения; *б* – после растяжения.

Зафиксируем в пространстве начало координат O и затем растянем струну. После растяжения произвольная точка P (рис. 1.1, *б*) перейдет в P' . Пусть отрезки

$$OP = x, OP' = x + u,$$

где величина u называется смещением. При растяжении точка Q , близкая к точке P , перейдет в Q' . Пусть

$$PQ = \Delta x, P'Q' = \Delta x + \Delta u.$$

При изучении деформации нас интересует не абсолютное смещение точек, а их смещение друг относительно друга. Деформация отрезка PQ определяется как отношение приращения его длины к первоначальной длине, т. е.

$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Устремляя $\Delta x \rightarrow 0$, получим выражение для деформации в дифференциальной форме

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}. \quad (1.4)$$

Подставим данное выражение для деформации в формулу (1.2), получим закон Гука в дифференциальной форме

$$\sigma = E \frac{du}{dx}. \quad (1.5)$$

Из линейности закона Гука (1.1) следует принцип суперпозиции. Если при некоторой силе \mathbf{F} имеется деформация ε и если силу \mathbf{F} можно представить как сумму

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n,$$

т. е. суперпозицию n сил, то и деформацию ε можно представить как сумму n деформаций:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n.$$

При этом каждая ε_i может быть получена из \mathbf{F}_i с помощью соотношения (1.1).

Опыт показывает, что под действием растягивающей или сжимающей силы F изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Если сила F – растягивающая, то

поперечные размеры стержня уменьшаются. Если она сжимающая, то они увеличиваются. Пусть a_0 – толщина стержня до деформации, a – после деформации. Для круглого стержня a_0 это его диаметр, а для прямоугольного – одна из сторон его прямоугольного основания. Отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему продольному удлинению называется коэффициентом Пуассона:

$$\nu = -\frac{\Delta a / a}{\Delta l / l}.$$

Коэффициент Пуассона, как и модуль Юнга, зависит только от материала тела и является одной из важных постоянных, характеризующих его упругие свойства.

§ 2. Деформация прямоугольного параллелепипеда

Рассмотрим изотропное тело в форме прямоугольного параллелепипеда, к противоположным граням которого приложены силы F_x , F_y , F_z , нормальные к этим граням (рис. 1.2). Соответствующие им напряжения обозначим σ_x , σ_y , σ_z . Определим деформации, которые возникнут в параллелепипеде под действием этих сил. Будем предполагать деформации малыми. Тогда для решения данной задачи можно воспользоваться принципом суперпозиции малых деформаций.

Направим координатные оси параллельно ребрам параллелепипеда. Обозначим через x , y и z длины данных ребер. Если бы действовала только сила F_x , то ребро x получило бы приращение $\Delta_1 x$, определяемое соотношением

$$\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (1.6)$$

Если бы действовала только сила F_y , то размеры параллелепипеда, перпендикулярные оси Y , сократились бы. В частности ребро x

при этом получило бы отрицательное приращение $\Delta_2 x$, которое можно вычислить по формуле

$$\frac{\Delta_2 x}{x} = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (1.7)$$

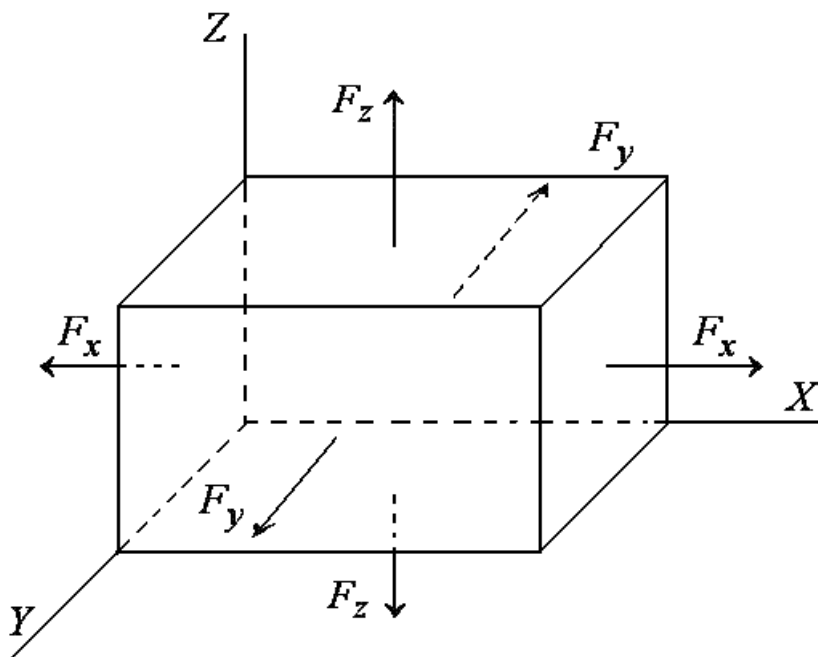


Рис. 1.2. Деформация параллелепипеда.

Наконец, относительное приращение ребра x под действием одной только силы F_z было бы равно

$$\frac{\Delta_3 x}{x} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}. \quad (1.8)$$

И наконец, если бы все силы действовали одновременно, то согласно принципу суперпозиции малых деформаций результирующее удлинение ребра x будет равно

$$\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x + \Delta_3 x.$$

Аналогично вычисляются удлинения параллелепипеда и вдоль остальных двух направлений Y и Z . В результате для деформаций всех трех ребер параллелепипеда можно написать:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z), \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.11)$$

В случае всестороннего сжатия давление

$$p = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z,$$

а деформации, согласно выражениям (1.9)-(1.11) равны между собой и определяются выражением

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu). \quad (1.12)$$

Определим деформацию параллелепипеда, объемом

$$V = xyz$$

в случае всестороннего сжатия. Для этого возьмем логарифм от данного выражения

$$\ln V = \ln x + \ln y + \ln z,$$

а потом продифференцируем. В итоге получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

С учетом (1.12) данное выражение в случае всестороннего сжатия примет вид:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}, \quad (1.13)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.14)$$

Эта постоянная называется модулем всестороннего сжатия. Следует заметить, что формула (1.13) применима к телам любой

формы, а не только прямоугольной. Доказательство заключается в том, что любое тело мы можем мысленно разбить на малые части в виде прямоугольных параллелепипедов. Относительные изменения их объемов, а следовательно, изменение объема всего тела одинаковы и определяются формулой (1.13).

§ 3. Деформация сдвига

Приложим к кубику, «косое» напряжение. Под косым напряжением мы будем понимать такое воздействие, как показано на рис. 1.3. При косом сдвиге у нас изменяются размеры диагоналей кубика: одна диагональ растягивается, а другая сжимается.

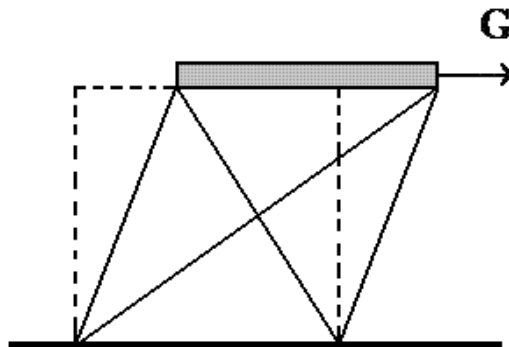


Рис. 1.3. Однородный сдвиг.

В качестве предварительной задачи посмотрим, какова будет деформация кубика под действием сил, показанных на рис. 1.4.

Данную задачу можно разделить на две: вертикальное давление и горизонтальное растяжение. Подобная по смыслу задача уже решена. Изменение горизонтальной длины определяется выражением

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} + \nu \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{F}{S}$$

или

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma. \quad (1.15)$$

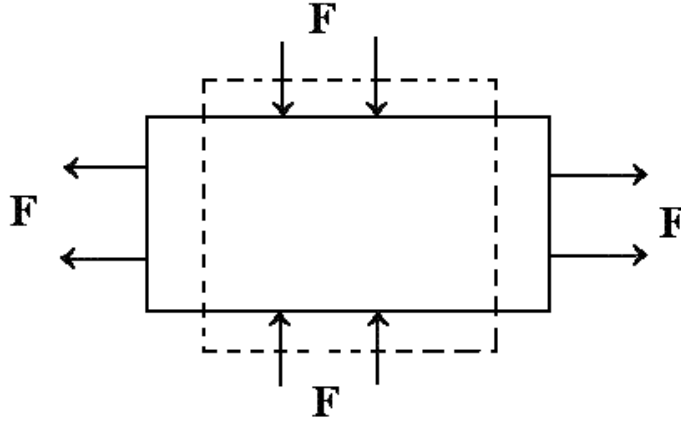


Рис. 1.4. Действие сжимающих на вершину и основание сил и равных им приложенных к боковым граням растягивающих сил.

Изменение высоты по вертикали равно данному выражению с обратным знаком:

$$\varepsilon = -\frac{1+\nu}{E} \sigma. \quad (1.16)$$

А теперь перейдем к однородному сдвигу. Пусть мы имеем кубик с диагональю грани D и площадью грани S . Подвергнем кубик действию сдвиговых сил как показано на рис. 1.5 а. Естественно эти силы и моменты сил должны быть равны, так как тело должно находиться в равновесии.

Действие данных сил сдвига эквивалентно действию сил $\sqrt{2}G$ на куб со стороной D и площадью $\sqrt{2}S$. Таким образом, две пары сил сдвига (рис. 1.5 а) создают то же самое напряжение, что и сжимающие – растягивающие силы, изображенные на рис. 1.5 б. А такую задачу мы с вами только что решили. Следовательно, изменение длины диагонали равно

$$\varepsilon = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1+\nu}{E} \frac{G}{S} = \frac{1+\nu}{E} \tau, \quad (1.17)$$

где $\tau = G/S$ – напряжение сдвига: отношение тангенциальной силы, действующей на грань к площади грани.

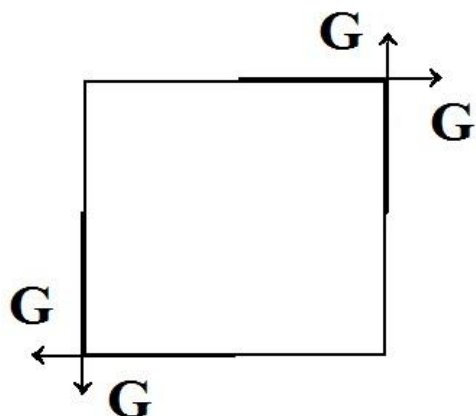


Рис. 1.5 а.

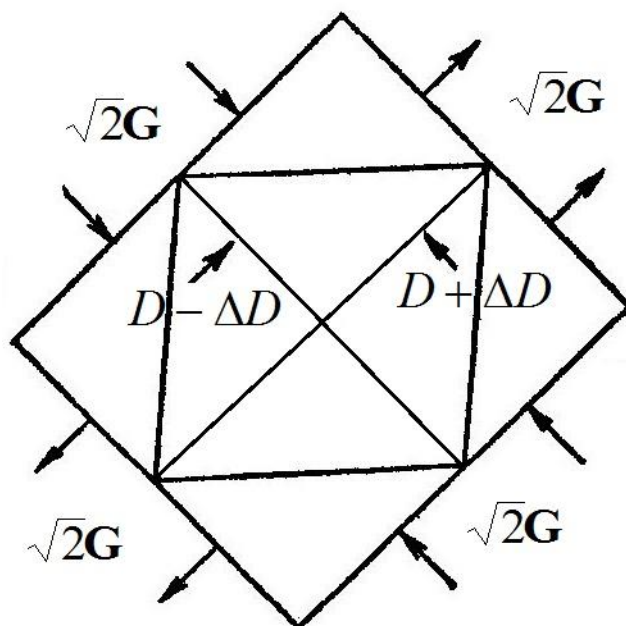


Рис. 1.5 б.

Деформацию сдвига удобно описывать с помощью угла сдвига ϑ (рис. 1.6). Из рис. 1.6 видно, что горизонтальный сдвиг δ верхнего края равен:

$$\delta = \sqrt{2} \cdot \Delta D.$$

Отсюда тангенс угла ϑ будет определяться выражением

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2} \Delta D}{l} = 2 \frac{\Delta D}{D}.$$

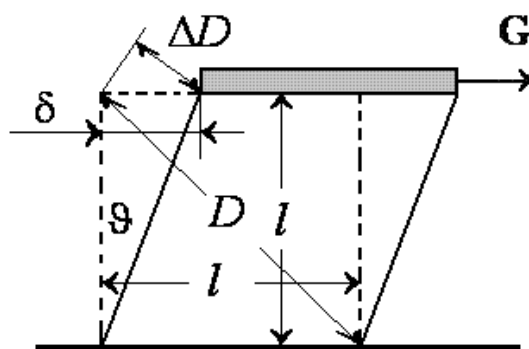


Рис. 1.6.

Далее учтем, что для малых деформаций $\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta$, в результате получим

$$\vartheta = 2 \frac{\Delta D}{D}.$$

С учетом выражения (1.17), имеем

$$\vartheta = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau$$

или обозначая

$$\frac{E}{2(1+\nu)} = \mu, \quad (1.18)$$

получим

$$\tau = \mu \vartheta. \quad (1.19)$$

Коэффициент пропорциональности μ называется модулем сдвига.

§ 4. Задача о бруске с закрепленными боковыми границами

Рассмотрим задачу о бруске, который растягивается и в то же время закреплен таким образом, что боковое сокращение невозможно (рис. 1.7).

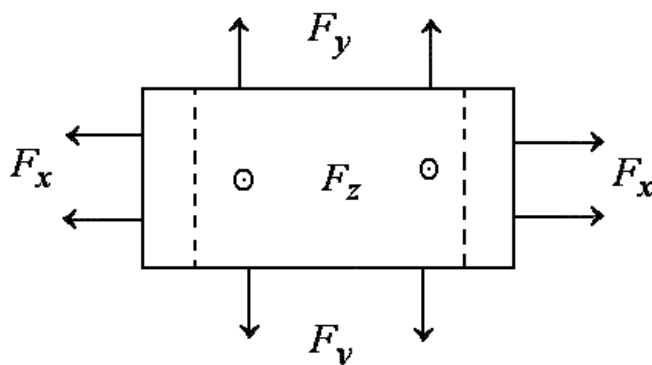


Рис. 1.7. Растяжение без сокращения бокового размера.

Запишем систему уравнений (которую мы с вами уже писали) в случае растяжения бруска под действием сил F_x , F_y , F_z :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \quad (1.20)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z), \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.22)$$

Поскольку по условию задачи $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, то уравнения (1.21) и (1.22) дают два соотношения, связывающие σ_x , σ_y и σ_z . Решая данные уравнения, найдем

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x.$$

Подставим данное выражение в уравнение (1.20), получим

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \right). \quad (1.23)$$

Соотношение (1.23) можно переписать в виде:

$$\sigma_x = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_x E. \quad (1.24)$$

Из данного соотношения следует, что коэффициент Пуассона $\nu < 0,5$.

Для изотропных материалов коэффициент Пуассона

$$\frac{1}{3} \geq \nu \geq \frac{1}{4}.$$

Для металлов $\nu \approx 0,3$.

Так как $\nu < 0,5$, то дробь в формуле (1.24) больше единицы. Таким образом растянуть брусок, когда его боковые грани закреплены, гораздо труднее, т. е. брусок становится жестче.

§ 5. Кручение стержня

Рассмотрим более сложный пример, когда различные части материалы напряжены по-разному. Рассмотрим кручение стержня длиной L и радиусом a , один из концов которого закручен на угол φ , а другой закреплён (рис. 1.8). Обычно такая нагрузка приходится на приводной вал какого-либо механизма, например на карданный вал.

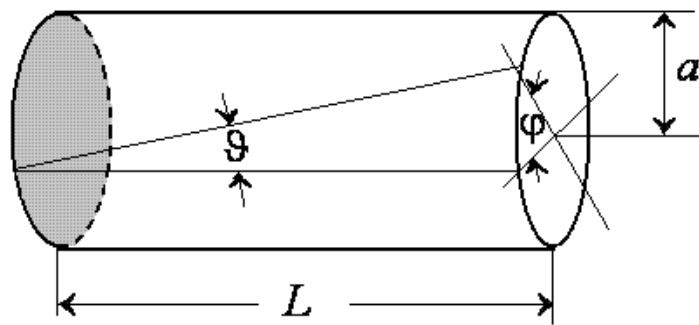


Рис. 1.8. Кручение цилиндрического стержня.

Представим далее стержень в виде множества тонких цилиндров толщиной Δr , вложенных друг в друга. Рассмотрим один из таких цилиндров. Пусть радиус цилиндра r , а толщина Δr (рис. 1.9, *а*). При его кручении элемент цилиндра, например в виде квадрата, превращается в параллелограмм (рис. 1.9, *б*). Каждый элемент цилиндра при кручении сдвигается на угол ϑ . При этом

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r\varphi}{L}.$$

Так как мы рассматриваем только малые деформации, то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \vartheta = \frac{r\varphi}{L}$$

и отсюда напряжение сдвига, согласно формуле (1.19), будет определяться выражением

$$\tau = \mu \vartheta = \mu \frac{r\varphi}{L}. \quad (1.25)$$

С другой стороны напряжение сдвига равно тангенциальной силе ΔF , действующей на конец квадрата, поделенной на его площадь $\Delta S = \Delta r \Delta l$ (рис. 1.9, б):

$$\tau = \frac{\Delta F}{\Delta r \Delta l}.$$

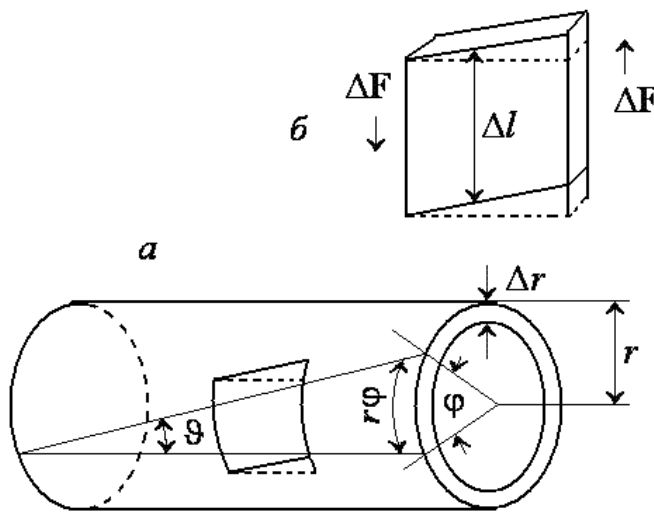


Рис. 1.9. *а* – кручение цилиндрического слоя; *б* – сдвиг элемента цилиндрического слоя.

Сила ΔF , действующая на конец такого квадрата, создает относительно оси стержня момент сил ΔM , равный

$$\Delta M = r \Delta F = r \tau \Delta r \Delta l. \quad (1.26)$$

Полный момент сил M равен сумме моментов по всему периметру цилиндра. Складывая все моменты, так, чтобы

$$\sum \Delta l = 2\pi r,$$

получим, что полный момент сил для пустотелой трубы равен

$$M = r \tau (2\pi r) \Delta r.$$

Подставим в данное выражение формулу (1.25) для напряжения сдвига, получим, что

$$M = 2\pi\mu \frac{\varphi r^3 \Delta r}{L}. \quad (1.27)$$

Отсюда крутильная жесткость тонкостенной трубы будет равна

$$f = \frac{M}{\varphi} = 2\pi\mu \frac{r^3 \Delta r}{L}.$$

Для определения момента сил сплошного цилиндра необходимо проинтегрировать выражение (1.27) от 0 до a :

$$M = 2\pi\mu \frac{\varphi}{L} \int_0^a r^3 dr.$$

После интегрирования получим

$$M = \pi\mu \frac{a^4 \varphi}{2L}. \quad (1.28)$$

Если стенка трубки имеет конечную толщину, то выражение для крутящего момента будет равно

$$M = \pi\mu \frac{\varphi}{2L} (r_2^4 - r_1^4).$$

Крутильные жесткости сплошного цилиндра и цилиндра конечной толщины будут определяться формулами:

$$f = \frac{\pi\mu a^4}{2L}, \quad f = \frac{\pi\mu}{2L} (r_2^4 - r_1^4).$$

§ 6. Деформация изгиба

6.1. Изгиб балки

Рассмотрим балку длиной l_0 (рис. 1.10). Прямая линия NN' является средней линией балки. При изгибе балки волокна, лежащие выше NN' растягиваются, а ниже – сжимаются, т. е. балка подвергается деформации. При этом в балке возникают напряжения

σ : выше линии NN' – растягивающие; а ниже линии NN' – сжимающие. Таким образом, в любом сечении балки возникает пара сил, которая создает изгибающий момент силы M относительно нейтральной линии.

Пусть R – радиус кривизны нейтральной линии NN' . Тогда удлинение волокон балки на расстоянии y от нейтральной линии будет равно:

$$l = l_0 + \Delta l = \alpha(y + R).$$

Учитывая, что

$$l_0 = \alpha R,$$

получим выражение для деформации данного слоя балки

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{y}{R}. \quad (1.29)$$

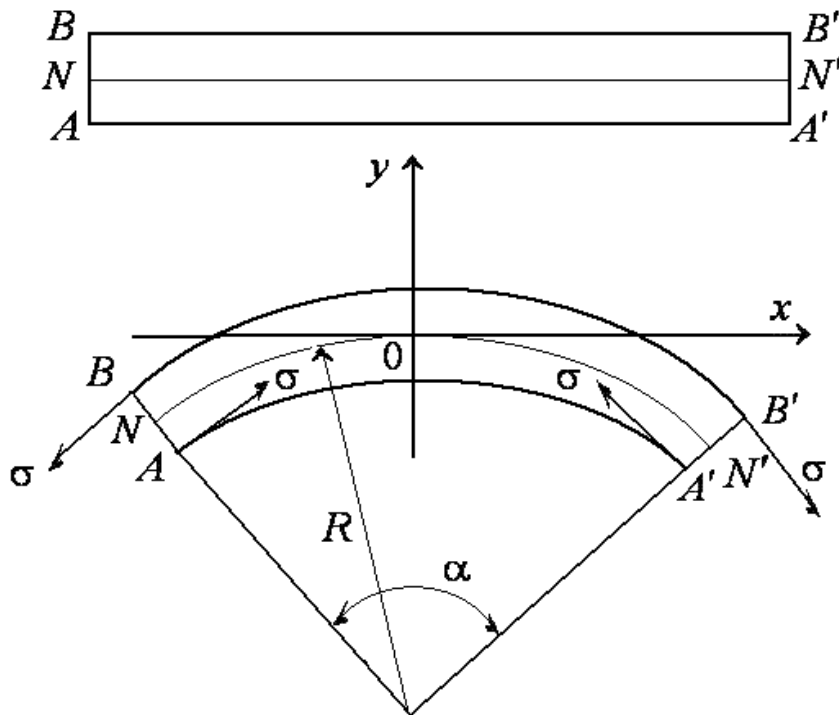


Рис. 1.10. Изгиб балки

С другой стороны согласно закону Гука деформация удлинения равна

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Из данного выражения и формулы (1.29) получим выражение для распределения напряжения по толщине балки:

$$\sigma = E \frac{y}{R}.$$

Полный момент сил, действующий на поперечное сечение балки равен

$$M = \int_0^S y \sigma dS = \frac{E}{R} \int_0^S y^2 dS = \frac{E}{R} I. \quad (1.30)$$

Величина I называется моментом инерции поперечного сечения балки и равна интегралу

$$I = \int_0^S y^2 dS. \quad (1.31)$$

Например, если у нас имеется балка прямоугольного сечения шириной a и высотой h , $dS = a dy$. Подставляя данное выражение для dS в формулу (1.31), получим выражение для момента инерции поперечного сечения балки

$$I = a \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{ah^3}{12}. \quad (1.32)$$

При выводе выражения для момента инерции поперечного сечения балки мы предполагали, что изменение поперечного сечения балки незначительно. Однако в общем случае этим эффектом пренебречь нельзя.

6.2. Деформация консольной балки

Рассмотрим деформацию балки один конец которой вмурован в стенку. Пусть на другой, свободный конец балки действует сосредоточенная сила F (рис. 1.11). Определим форму балки при данном виде деформации. Обозначим отклонение балки на расстоянии x через z . Следовательно, наша цель – найти функцию $z(x)$. Будем вычислять только малые отклонения балки от оси x . Как известно из дифференциальной геометрии, кривизна любой кривой $z(x)$ задается выражением:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (1.33)$$

Ввиду того, что нас интересуют только малые отклонения, поэтому квадратом производной $(dz/dx)^2$ в знаменателе выражения (1.33) можно пренебречь по сравнению с единицей и считать

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (1.34)$$

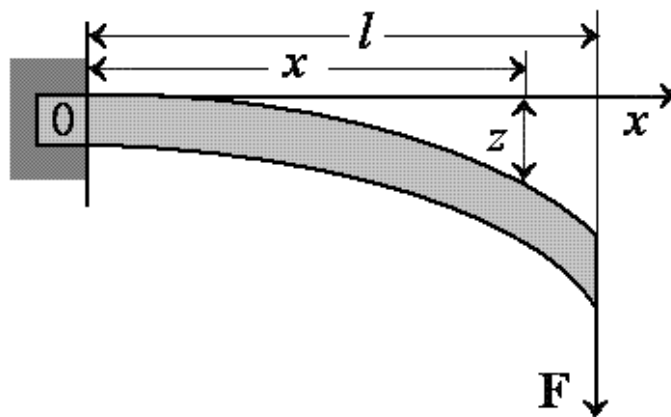


Рис. 1.11. Деформация консольной балки.

На балку, длиной l , действует изгибающий момент, вызванный действием силы F . Изгибающий момент, в случае пренебрежения весом балки, на расстоянии x равен:

$$M(x) = F(l - x)$$

Данный момент сил равен моменту сил, возникающему в балке при деформации относительно нейтральной линии, т. е. согласно (1.30)

$$F(l - x) = \frac{EI}{R} = EI \frac{d^2 z}{dx^2},$$

или

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F}{EI} (l - x). \quad (1.35)$$

Используя граничные условия при $x = 0$:

$$z|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.36)$$

получим

$$z = \frac{F}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (1.37)$$

Величина прогиба балки (стрела прогиба), согласно (1.37) будет равна

$$z(l) = \frac{F}{EI} \frac{l^3}{3}.$$

6.3. Продольный прогиб

Рассмотрим продольный изгиб стержня при действии двух противоположных сил, давящих на его концы. Пусть отклонение стержня от прямой линии между концами будет $y(x)$, где x – расстояние от левого конца. Изгибающий момент M в точке A на

рис. 1.12 равен силе F , умноженное на плечо, перпендикулярное к y :

$$M(x) = yF. \quad (1.38)$$

С другой стороны, мы получили ранее, что изгибающий момент

$$M = \frac{IE}{R}.$$

Следовательно

$$\frac{IE}{R} = yF. \quad (1.39)$$

При малых отклонениях кривизна равна

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Знак «-» выбран потому, что кривизна направлена вниз. Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{IE}y. \quad (1.40)$$

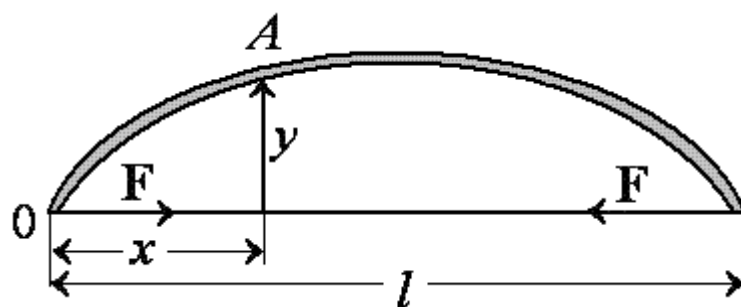


Рис. 1.12. Продольно изогнутый стержень.

Общее решение этого уравнения есть

$$y = C \cos kx + D \sin kx,$$

где C и D – постоянные интегрирования. При $x = 0$ ордината $y = 0$. Таким образом, постоянная $C = 0$. На другом конце стержня при $x = l$ ордината также равна нулю. Следовательно

$$\sin kl = 0,$$

т. е.

$$k = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Итак, стержень принимает форму дуги синусоиды в соответствии с уравнением

$$y = D \sin \frac{\pi x}{l}$$

при наименьшем значении $m = 1$. Взяв вторую производную по x от данного решения, получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} y.$$

Сравнивая данное уравнение с (1.40), видим, что сила

$$F = EI \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (1.41)$$

Для малого продольного изгиба сила не зависит от перемещения y . Пусть

$$F^* = EI \frac{\pi^2}{l^2}$$

есть критическая сила. Если внешняя сила

$$F < F^*,$$

то никакого продольного изгиба не будет. Но если внешняя сила F хоть немного превысит критическую силу F^* , то балка внезапно и очень сильно согнется.

Следует заметить, что в случае больших изгибов необходимо пользоваться точной формулой для радиуса кривизны (1.33). Однако этот путь сложный. Вместо того чтобы описывать кривую

изгиба через x и y , можно воспользоваться двумя новыми переменными: s – расстоянием вдоль кривой и ϑ – углом наклона касательной к кривой. В этом случае кривизна будет равна скорости изменения угла с расстоянием

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

С учетом этого точное уравнение (1.39) можно записать в виде

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{F}{EI} y.$$

После взятия производной от данного уравнения по s , получим

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = -\frac{F}{EI} \sin \vartheta, \quad (1.42)$$

где учтено, что

$$\frac{dy}{ds} = \sin \vartheta.$$

Решение уравнения (1.42) выражается через эллиптическую функцию Якоби первого рода.

§ 7. Энергия упругой деформации

7.1. Деформация растяжения

При квазистатическом растяжении параллелепипеда вдоль оси X совершается работа

$$A_1 = \frac{1}{2} \sigma_x \Delta x S_x,$$

где $S_x = yz$ – площадь грани, перпендикулярной к оси X . Эту работу можно представить в виде

$$A_1 = \frac{1}{2} xyz \sigma_x \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x V,$$

где $V = xyz$ – объем параллелепипеда. Аналогично запишутся работы при растяжениях параллелепипеда в направлениях координатных осей Y и Z :

$$A_2 = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y V, \quad A_3 = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z V.$$

Сложив эти три работы и разделив на объем параллелепипеда, получим выражение для плотности упругой энергии:

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z). \quad (1.43)$$

Далее подставим выражения для деформаций всех трех ребер параллелепипеда

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

в формулу (1.43). В итоге получим, что

$$w = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)]. \quad (1.44)$$

В случае всестороннего сжатия под давлением p

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Выражение (1.44) принимает вид

$$w = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{p^2}{2K}, \quad (1.45)$$

где K , как уже отмечалось, есть модуль всестороннего сжатия.

7.2. Деформация сдвига

Для деформации сдвига касательное напряжение, согласно (1.19) равно

$$\tau = \mu \vartheta.$$

Работа, затрачиваемая на сдвиг, пойдет на увеличение упругой энергии тела. Совершаемая работа равна

$$A = \frac{1}{2} \tau \delta S,$$

где δ – смещение верхней грани, а S – площадь грани (рис. 1.6). Если длина грани равна l , то

$$\delta = l \operatorname{tg} \vartheta \approx l \vartheta,$$

а потому работа

$$A = \frac{1}{2} \tau \vartheta l S = \frac{1}{2} \tau \vartheta V,$$

где V – объем куба. Таким образом, объемная плотность упругой энергии выражается формулой

$$w = \frac{1}{2} \tau \vartheta = \frac{\tau^2}{2\mu}. \quad (1.46)$$

7.3. Деформация кручения

Мы получили, что жесткость пустотелой трубки равна

$$f = \frac{M}{\varphi} = 2\pi\mu \frac{r^3 \Delta r}{L}. \quad (1.47)$$

Постоянную f называют также модулем кручения. Как видно из данной формулы, модуль кручения зависит не только от материала, но и от геометрических размеров тела. Итак

$$M = f\varphi.$$

Работа при закручивании стержня (трубки) равна

$$A = \frac{1}{2} M \varphi = \frac{M^2}{2f}.$$

Разделим формулу для работы на объем трубки

$$V = 2\pi r \Delta r L$$

найдем плотность упругой энергии при деформации кручения

$$w = \frac{\pi \tau^2 r^3 \Delta r}{fL}. \quad (1.48)$$

Подставим в формулу (1.48) выражение для f (1.47), получим

$$w = \frac{\tau^2}{2\mu}.$$

Таким образом, плотность энергии при деформации кручения совпадает с плотностью энергии деформации сдвига.

§ 8. Волны в стержнях

8.1. Продольные волны

Если ударить по торцу длинного стержня в продольном направлении, то вдоль стержня побежит возмущение – продольная волна. Получим уравнение, описывающее распространение продольной волны. Направим ось z вдоль стержня. Рассмотрим участок стержня длиной Δz . Сечение с координатой z при продольной деформации сместится в положение $z + u(z, t)$, где t – время. Согласно закону Гука в дифференциальной форме (1.5) в сечении z возникает напряжение

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.49)$$

Аналогичное выражение можно написать и для напряжения действующее в сечении $z + \Delta z$. Разность этих напряжений

$$\sigma(z + \Delta z) - \sigma(z) \approx \frac{\partial \sigma}{\partial z} \Delta z$$

создает ускорение элемента стержня, заключенного между сечениями z и $z + \Delta z$. Масса участка стержня длиной Δz равна

$$\Delta m = \rho \Delta z S,$$

где ρ – плотность материала стержня. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$\rho \Delta z S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial \sigma}{\partial z} \Delta z.$$

Сократив на $\Delta z S$ и подставив значение σ из (1.49), получаем искомое волновое уравнение для продольных волн в стержне

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1.50)$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны.

Волновому уравнению удовлетворяет и напряжение. Если взять производные по z от левой и правой частей уравнения (1.50), а далее воспользовавшись законом Гука в дифференциальной форме (1.49), то получим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}.$$

Решением уравнения (1.50) являются функции

$$u(z, t) = f_1(z - ct) + f_2(z + ct).$$

Волна f_1 называется прямой и распространяется слева направо. Волна f_2 называется обратной и распространяется справа налево.

В случае гармонических волн, когда f_1 и f_2 являются синусоидальными функциями с круговой частотой ω , имеем

$$u(z, t) = a \cos(kz - \omega t + \psi_1) + b \cos(kz + \omega t + \psi_2). \quad (1.51)$$

Здесь a и b – амплитуды волн; ψ_1 и ψ_2 – начальные фазы волн; k – волновое число. Волновое число

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

В стержне бесконечной длины волна без учета потерь будет распространяться сколь угодно долго. В стержне конечной длины волна отражается от его конца. Если стержень граничит с другим упругим стержнем, то в последнем появляется уходящая от границы прошедшая волна. Процессы отражения и прохождения зависят от граничных условий. Рассмотрим граничные условия для продольных волн в стержне длиной l .

1. Абсолютно жесткая граница, смещение частиц невозможно:

$$u|_{z=l} = 0. \quad (1.52)$$

Практически этот случай реализуется, если торец стержня граничит с массивной стенкой из материала с очень большим модулем Юнга.

2. Свободная граница – стержень граничит с воздухом или вакуумом. На границе такого типа исчезают напряжения:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0. \quad (1.53)$$

3. Граница двух стержней одинакового сечения, но с разными модулями Юнга (E_1, E_2) и плотностями вещества (ρ_1, ρ_2). В этом случае слева и справа от границы одинаковы смещения и напряжения:

$$(u_1 - u_2)|_{z=l} = 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_2)|_{z=l} = 0 \quad \text{или} \quad \left(E_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} - E_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=l} = 0. \quad (1.54)$$

8.2. Волны кручения

При резком закручивании одного из концов стержня возникает волна кручения, которая распространяется вдоль стержня. Получим уравнение, описывающее распространение волны кручения.

Рассмотрим элемент круглого стержня длиной Δz и радиуса a (рис. 1.13). Пусть z – расстояние от некоторого сечения до основания стержня. Если кручение стержня неравномерно вдоль стержня, то уравнение (1.28) следует изменить и записать его в виде

$$M = \pi\mu \frac{a^4}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.55)$$

В сечении z действует момент сил $M(z)$, а в сечении $z + \Delta z$ действует момент сил $M(z + \Delta z)$. Если величина Δz мала, то, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора $M(z + \Delta z)$ до членов первого порядка малости, получим

$$M(z + \Delta z) = M(z) + \frac{\partial M}{\partial z} \Delta z. \quad (1.56)$$

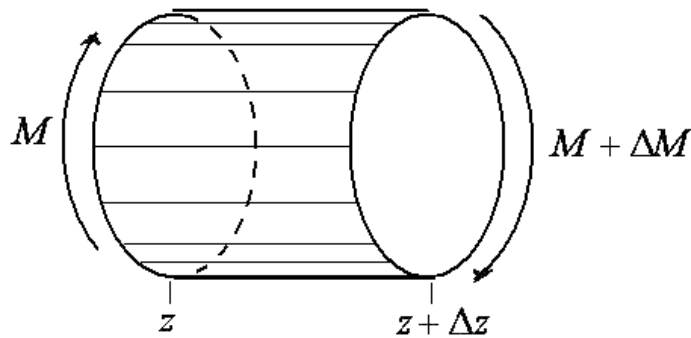


Рис. 1.13. Моменты сил, возникающие при деформации кручения.

Полный момент сил ΔM , согласно (1.56), действующий на отрезке Δz равен

$$\Delta M = M(z + \Delta z) - M(z) = \frac{\partial M}{\partial z} \Delta z. \quad (1.57)$$

Дифференцируя выражение (1.55) и подставляя производную в (1.57), получим

$$\Delta M = \pi\mu \frac{a^4}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Delta z. \quad (1.58)$$

Действие данного момента сил вызывает угловое ускорение отрезка Δz стержня. Масса данного отрезка равна

$$\Delta m = \rho \pi a^2 \Delta z. \quad (1.59)$$

Момент инерции отрезка определяется выражением

$$\Delta I = \frac{1}{2} a^2 \Delta m = \frac{1}{2} \pi a^4 \Delta z \rho. \quad (1.60)$$

Согласно второму закону Ньютона, момент силы равен произведению момента инерции на угловое ускорение

$$\Delta M = \Delta I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (1.61)$$

Подставляя в (1.61) выражения (1.58) и (1.60) и сокращая одинаковые сомножители, получим волновое уравнение для волн кручения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_d^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.62)$$

Волны кручения распространяются со скоростью

$$c_d = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.63)$$

Чем больше плотность вещества стержня, тем медленнее движется волна, а чем он жестче, тем больше скорость волны. Скорость распространения волн кручения и продольных волн различна.

Запишем граничные условия для волн кручения в стержне длиной l :

1. Закрепленный конец:

$$\varphi|_{z=l} = 0.$$

2. Свободный конец:

$$M|_{z=l} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=l} = 0.$$

3. Жесткий контакт двух стержней одинакового радиуса, но из разных материалов с μ_1 , ρ_1 и μ_2 , ρ_2 соответственно. В этом случае слева и справа от границы одинаковы углы закручивания и моменты сил:

$$\varphi_1|_{z=l} = \varphi_2|_{z=l}, (M_1 - M_2)|_{z=l} = 0$$

или

$$\left(\mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=l} = 0.$$

8.3. Волны изгиба в стержнях

При ударе по стержню в поперечном направлении в месте удара возникает изгиб. Этот изгиб начинает перемещаться по стержню от места удара в виде волны, которая и называется волной изгиба. На рис. 1.14. изображен участок стержня, по которому бежит волна изгиба.

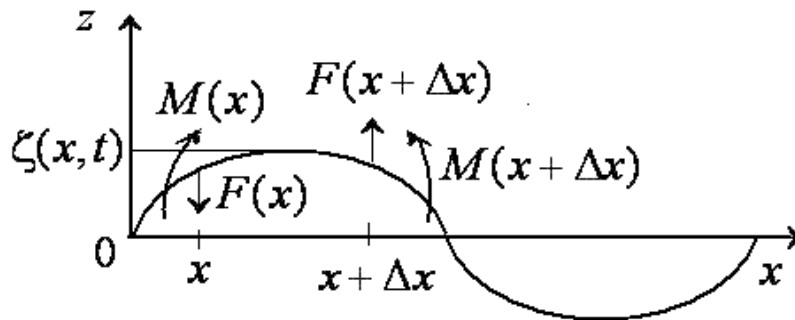


Рис. 1.14. Волна изгиба (изображена нейтральная линия стержня).

Пусть ζ – смещение нейтральной линии стержня. Смещение нейтральной линии стержня будем полагать достаточно малым, чтобы можно было пренебречь растяжением стержня. Выделим достаточно малый элемент стержня Δx . В сечении x возникает

перерезывающая сила $F(x)$, а в сечении $x + \Delta x$ – сила $F(x + \Delta x)$.
Запишем второй закон Ньютона для элемента Δx :

$$\rho \Delta x S \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x) \approx \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x, \quad (1.64)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

При изгибе в каждом сечении стержня возникает момент сил $M(x)$, который согласно (1.30) и (1.35) при

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \ll 1$$

равен

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (1.65)$$

Полный момент сил, действующий на элемент Δx , определяется разностью моментов в сечениях $x + \Delta x$ и x :

$$M(x + \Delta x) - M(x) \approx \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x.$$

Общий крутящий момент должен быть уравновешен моментом, возникающим из-за инерции вращения элемента Δx вокруг оси, нормальной к плоскости чертежа.

$$\left(F + \frac{\partial M}{\partial x} \right) \Delta x = \rho I \Delta x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}.$$

Здесь α – угол наклона нейтральной линии в данной точке к оси x ; $\rho I \Delta x$ – момент инерции элемента Δx . При

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \ll 1$$

угол

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Отсюда уравнение балансов моментов примет вид

$$\rho I \frac{\partial^3 \alpha}{\partial t^2 \partial x} = F + \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Взяв один раз от данного выражения производную по x и подставив в него M из (1.65) и производную $\partial F/\partial x$ из (1.64), получим уравнение для смещения $\zeta(x, t)$:

$$\rho I \frac{\partial^4 \alpha}{\partial t^2 \partial x^2} = EI \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \quad (1.66)$$

Обычно на практике для описания волн изгиба используется упрощенное уравнение, в котором пренебрегается левой частью уравнения (1.66) вследствие того, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с длиной волны λ . В итоге получаем уравнение для волн изгиба в виде

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0. \quad (1.67)$$

Запишем некоторые граничные условия для волн изгиба в стержне длиной l :

1. Зажатый конец – обращается в нуль как смещение ζ , так и его производная (угол наклона):

$$\zeta|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

2. Свободный конец – момент M и перерезывающая сила F равны нулю:

$$\left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0.$$

3. Опертый конец – равны нулю смещение и момент:

$$\zeta|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0.$$

В гармоническом приближении решение уравнения (1.67) имеет вид

$$\zeta(x, t) = A\Phi(x) \exp(-i\omega t).$$

Подставляя данное решение в (1.67), получим

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - k^4 \Phi = 0, \quad k = \left(\frac{\rho S}{EI} \right)^{1/4} \omega^{1/2}. \quad (1.68)$$

Общее решение уравнения (1.68) можно записать в виде

$$\Phi(x) = A_+ \exp(ikx) + A_- \exp(-ikx) + B_+ \exp(kx) + B_- \exp(-kx).$$

Фазовая скорость

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{EI}{\rho S} \right)^{1/4} \omega^{1/2}$$

для волн изгиба зависит от частоты, т. е. имеет место дисперсия: волновое возмущение конечной длительности при распространении будет изменять свою форму.

Групповая скорость для волн изгиба равна

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 2 \left(\frac{EI}{\rho S} \right)^{1/4} \omega^{1/2} = 2c_f,$$

т. е. в два раза больше фазовой.

ГЛАВА 2

ТЕНЗОРЫ ДЕФОРМАЦИЙ, ПОВОРОТА И НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Тензор деформаций

1.1. Вектор смещения

В первой главе мы рассмотрели независимо упругие деформации растяжения (сжатия) и сдвига. Однако данные деформации можно объединить, если ввести тензор деформации.

Рассмотрим в декартовой системе координат твердое тело (рис. 2.1). Выделим на нем две близко лежащие точки P и Q с координатами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ соответственно. Под действием внешних сил, приложенных к твердому телу, тело деформируется. Это означает, что расстояние между точками тела, подверженного действию сил, отличаются от расстояний между теми же точками, до воздействия сил.

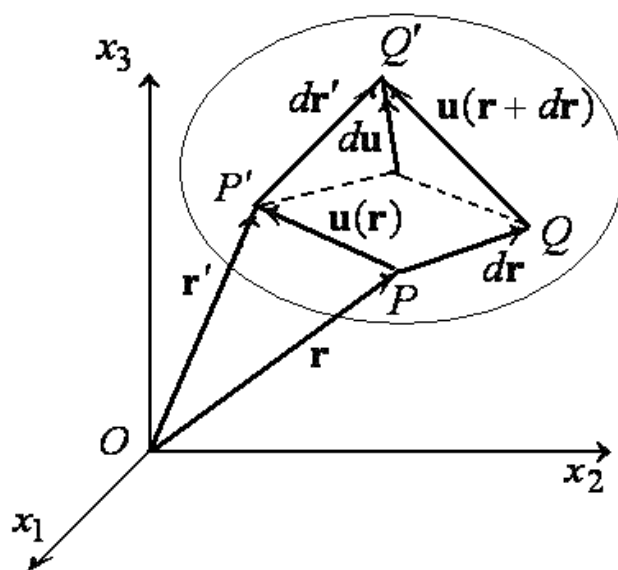


Рис. 2.1. Деформация элемента объема твердого тела.

Пусть при деформации точка P перейдет в точку P' с координатой \mathbf{r}' , а точка Q в точку Q' с координатой $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$. При этом вектор смещения точки P равен

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}, \quad (2.1)$$

или в координатах

$$u_i(\mathbf{r}) = x'_i - x_i. \quad (2.2)$$

Вектор смещения точки Q , согласно рис. 2.1, равен

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{r}' + d\mathbf{r}' - \mathbf{r} - d\mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u}, \quad (2.3)$$

или в координатах

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + du_i. \quad (2.4)$$

Вектор $d\mathbf{u}$ называется вектором относительного смещения. Радиус-вектор между точками P' и Q' определяется суммой векторов

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Квадрат расстояния между точками P' и Q' равен

$$(d\mathbf{r}')^2 = (d\mathbf{r})^2 + 2d\mathbf{r}d\mathbf{u} + (d\mathbf{u})^2. \quad (2.6)$$

В компонентах уравнение (2.6) имеет вид

$$(dx'_i)^2 = (dx_i)^2 + 2dx_i du_i + (du_i)^2. \quad (2.7)$$

Здесь и в дальнейшем всегда предполагается суммирование по паре повторяющихся индексов от 1 до 3. Таким образом, например,

$$(dx'_i)^2 = \sum_{i=1}^3 dx'_i dx'_i = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2,$$

$$dx_i du_i = \sum_{i=1}^3 dx_i du_i = dx_1 du_1 + dx_2 du_2 + dx_3 du_3.$$

Так как компоненты вектора смещения u_i точки P являются функциями компонент радиуса-вектора этой точки, то можно написать

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3. \quad (2.8)$$

В итоге равенство (2.7) принимает вид

$$(dx'_i)^2 = (dx_i)^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l. \quad (2.9)$$

Дважды повторяющиеся, так называемые «немые» индексы, можно обозначать как угодно, не меняя выражения, в которые они входят. Поэтому можно во втором слагаемом правой части (2.9) переставить индексы i и k . В результате получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k.$$

Переставляя аналогичным образом в третьем слагаемом индексы i и l , приведем выражение (2.9) к виду

$$(dx'_i)^2 = (dx_i)^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \quad (2.10)$$

Здесь величина

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (2.11)$$

имеет тензорный характер и называется тензором деформации. Правая часть тензора деформации не меняется при перестановке индексов i и k , т. е.

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$$

Следовательно, тензор деформации симметричен. Как всякий симметричный трехмерный тензор второго ранга он содержит шесть независимых компонент:

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}.$$

1.2. Физический смысл компонент тензора деформации

Практически во всех случаях деформирования упругих тел деформации являются малыми. Это означает, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Поэтому в выражении (2.11) в правой части

можно пренебречь последним слагаемым как величиной второго порядка малости. В итоге мы будем пользоваться для тензора деформации выражением

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) можно записать сокращенно

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}),$$

где индекс после запятой обозначает частную производную по пространственной координате.

Компоненты тензора деформации образуют матрицу

$$(\varepsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Тензор деформации, как всякий симметричный тензор можно привести к главным осям. В данной системе координат (X_1, X_2, X_3) тензор деформации имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Координатные оси X_i называют главными осями, а диагональные элементы ε_i — главными значениями тензора деформации. Смещения в главных осях запишутся в виде

$$du_i = \varepsilon_i dX_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Здесь du_i есть смещение отрезка dX_i . Следовательно, главные деформации описывают локальное растяжение или сжатие элемента объема в направлении главных осей.

Главные значения тензора деформации определяются из условия, что определитель

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Это кубическое уравнение называется характеристическим уравнением тензора деформаций, и оно может быть записано в виде

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0,$$

где I_i – инварианты тензора деформации. Инварианты тензора деформации не зависят от ориентации системы координат и определяются выражениями

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Определим изменение объема тела при деформации. Представим элемент объема тела в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами ΔX_i . Объем тела в главных осях до деформации равен

$$\Delta V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 = \prod_{i=1}^3 \Delta X_i.$$

После деформации ребра параллелепипеда получают приращения

$$\Delta X'_i = \Delta X_i + du_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Объем параллелепипеда после деформации, согласно (2.13), будет равен

$$\Delta V' = \Delta V \prod_{i=1}^3 (1 + \varepsilon_i). \quad (2.14)$$

Так как мы рассматриваем малые деформации, то пренебрегая в произведении (2.14) слагаемыми второго порядка малости, получим

$$\Delta V' = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \Delta V.$$

Относительное изменение элемента объема при деформации в главных осях равно

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (2.15)$$

и не зависит естественно от выбора системы координат. Следовательно, след тензора деформации, т.е. сумма его диагональных элементов, является инвариантом

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{ii} = I_1.$$

Таким образом, первый инвариант имеет простой геометрический смысл. Это относительное изменение объема. Итак, компоненты тензора деформации с одинаковыми индексами характеризуют деформации растяжения или сжатия в направлении соответствующей оси.

Соотношение (2.15) с учетом (2.12) можно записать в виде:

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (2.16)$$

Выясним физический смысл недиагональных элементов тензора деформаций. Рассмотрим, например, компоненту ε_{12} . Возьмем снова элементарный параллелепипед с ребрами длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, параллельными осям координат. На рис. 2.2 изображена грань параллелепипеда, лежащая до деформации в плоскости $x_1 x_2$. Пусть и деформация тела происходит в плоскости $x_1 x_2$. В результате деформации вершины грани O, A, B и C смещаются.

Обозначим через O', A', B' и C' проекции новых положений соответствующих точек на плоскости $x_1 x_2$. Учитывая малость деформаций и, следовательно, углов θ_1 и θ_2 (рис. 2.2), получим, что

$$\theta_1 \approx \operatorname{tg} \theta_1 \approx \frac{u_2(A) - u_2(O)}{\Delta x_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

$$\theta_2 \approx \operatorname{tg} \theta_2 \approx \frac{u_1(C) - u_1(O)}{\Delta x_2} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

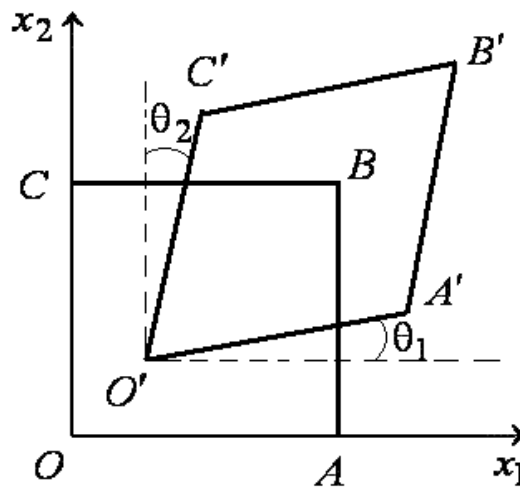


Рис.2.2. Деформация сдвига.

Отсюда имеем

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \theta_1 + \theta_2 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}. \quad (2.17)$$

Итак, сумма симметричных недиагональных компонент тензора деформаций $\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$ определяет изменение угла между соответствующими гранями параллелепипеда. Перекос углов означает сдвиг. Следовательно, недиагональные компоненты тензора деформаций ε_{ik} описывают деформацию сдвига.

1.3. Условие сплошности

Представим сплошное тело составленным из элементарных кубиков (рис. 2.3, а). Если каждый отдельный кубик подвергнуть

деформации, а затем их сложить, то в общем случае между ними могут появиться пустоты (рис. 2.3, б). Для того чтобы деформированные кубики остались составными частями сплошного твердого тела (рис. 2.3, в), необходимо, чтобы их деформации удовлетворяли определенным условиям. Данные условия называются условиями сплошности.

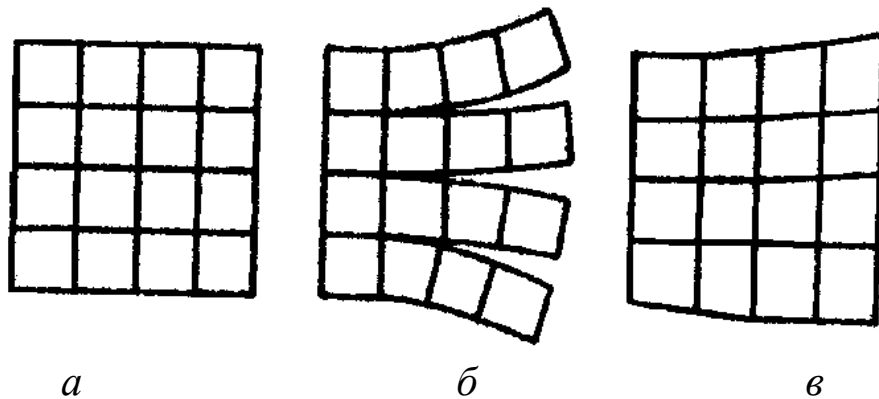


Рис.2.3.

Если тело остается сплошным, то его деформация происходит вследствие определенного перемещения всех его точек. Эти перемещения u_i определяются из шести равенств (2.12).

Рассмотрим, например, перемещения частиц сплошного тела u_1 . Эти перемещения можно определить, если известны частные производные:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

Производная

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}.$$

Производная

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

не может быть найдена непосредственно из (2.12). Но из (2.12) легко можно выразить вторые производные:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2\varepsilon_{12} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2\varepsilon_{12} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2\varepsilon_{31} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \\
&= \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Таким же образом можно получить выражения для частных производных по x_1, x_2, x_3 от функций

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Для того чтобы правые части равенств (2.18) являлись частными производными по x_1, x_2, x_3 от одной и той же функции $\partial u_1 / \partial x_2$, они должны удовлетворять трем соотношениям, выражающим, что результат дифференцирования по двум независимым переменным не зависит от порядка дифференцирования:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right], \\
\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right], \\
\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Подстановка выражений для

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

из (2.18) приводит к первому, четвертому и пятому из нижезаписанных равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

При определении каждой из функций

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

также получим три условия. Однако из полученных 18 соотношений только шесть являются различными. Они и записаны в (2.20). Эти шесть равенств и являются условиями сплошности или уравнениями Сен-Венана совместимости деформаций. Систему уравнений Сен-Венана (2.20) можно записать в виде одного уравнения:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0.$$

1.4. Эллипсоид деформации

Рассмотрим в элементе объема сферу единичного радиуса, центр которой находится в начале координат. Запишем уравнение сферы в главных осях

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1. \quad (2.21)$$

После деформации точки сферы будут иметь координаты

$$X'_i = X_i + \varepsilon_{ii} X_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

а уравнение (2.21) преобразуется к виду

$$\frac{(X'_1)^2}{(1 + \varepsilon_1)^2} + \frac{(X'_2)^2}{(1 + \varepsilon_2)^2} + \frac{(X'_3)^2}{(1 + \varepsilon_3)^2} = 1.$$

Таким образом, при деформации в общем случае уравнение сферы переходит в уравнение эллипсоида. Данный вывод справедлив не только в главных осях, но и при произвольной линейной деформации.

1.5. Компоненты тензора деформации в цилиндрической и сферической системах координат

Часто бывает удобным при решении задач пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовой системе координат, а в цилиндрической или сферической системах координат. Приведем без вывода данные формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в данных координатах.

В цилиндрических координатах r, φ, z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

В сферических координатах r, θ, φ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2\varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \theta} - \frac{u_{\varphi}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \varphi}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2\varepsilon_{\varphi r} &= \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

§ 2. Тензор поворота

Перепишем выражение (2.8) для компонент вектора относительного смещения

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.\tag{2.24}$$

Производную $\partial u_i / \partial x_k$ можно записать в виде суммы компонент симметричного тензора (тензора деформации)

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

и антисимметричного тензора

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),\tag{2.25}$$

т.е. в виде суммы

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{ik} + \varphi_{ik}. \quad (2.26)$$

Антисимметричный тензор (2.25) называется тензором поворота. Компоненты тензора φ_{ik} образуют матрицу

$$(\varphi_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Поскольку φ_{ik} антисимметричный тензор, то

$$\varphi_{ik} = -\varphi_{ki},$$

и он включает в себя только три независимые компоненты.

Антисимметричному тензору можно поставить в соответствие вектор $\vec{\varphi}$, называемый вектором поворота и компоненты которого равны соответствующим компонентам тензора поворота:

$$\varphi_{23} = \varphi_1, \varphi_{31} = \varphi_2, \varphi_{12} = \varphi_3, \quad (2.28)$$

или в компактной форме записи

$$\varphi_{mk} = e_{mkl} \varphi_l, \quad (2.29)$$

где e_{mkl} – тензор Леви-Чивита или символ перестановок. Тензор Леви-Чивита является тензором третьего ранга и определяется следующим образом:

$$e_{mkl} = \begin{cases} 1 & \text{при } m, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \\ -1 & \text{при } m, k, l = 1, 3, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3, \\ 0 & \text{при } m = k, m = l, k = l. \end{cases}$$

Матрица (2.27), выраженная через компоненты вектора поворота, будет иметь вид

$$(\varphi_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.27), компоненты вектора поворота можно записать как компоненты ротора, деленные пополам

$$\varphi_i = \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{u})_i. \quad (2.30)$$

Компоненты вектора относительного смещения с учетом выражения (2.26) можно записать в виде

$$du_i = \varepsilon_{ik} dx_k + \varphi_{ik} dx_k, \quad (2.31)$$

а выражение (2.4)

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ik} dx_k + \varphi_{ik} dx_k. \quad (2.32)$$

Таким образом, согласно (2.32) перемещение частицы Q из окрестности P складывается из смещения $u_i(\mathbf{r})$, поворота $\varphi_{ik} dx_k$ и собственно деформации $\varepsilon_{ik} dx_k$.

§ 3. Тензор напряжений

3.1. Понятие напряжения

Есть два типа внешних сил, которые действуют на твердое тело. Это объемные силы и силы, действующие на поверхность. К объемным силам относятся сила тяжести, сила инерции (например, центробежная), макроскопические электрические поля и так далее. К поверхностной силе относится давление. Объемные силы пропорциональны объему тела, а поверхностные – его площади.

При воздействии на тело внешних сил происходит его деформация. Расстояние между атомами и молекулами при деформации изменяется. Это приводит к тому, что возникают силы, стремящиеся вернуть тело в исходное недеформированное состояние. Эти силы называются внутренними напряжениями. Вследствие близкого действия межатомных сил считается, что элементы объема твердого тела взаимодействуют между собой через поверхность. Таким образом, внутренние напряжения также являются поверхностными силами. Силу (внешнюю или

внутреннюю), приходящуюся на единицу площади будем называть напряжением.

Рассмотрим элемент поверхности твердого тела, например

$$x_3 = \text{const}$$

на которую действует вектор напряжений $\vec{\sigma}_3$. Вектор напряжений в общем случае может иметь любую ориентацию в пространстве. Разложение данного вектора по координатным осям x_i имеет вид (рис. 2.4):

$$\sigma_3 = \mathbf{n}_1 \sigma_{13} + \mathbf{n}_2 \sigma_{23} + \mathbf{n}_3 \sigma_{33} = \mathbf{n}_k \sigma_{k3}. \quad (2.33)$$

Здесь \mathbf{n}_i – базисные векторы ($i=1,2,3$), направленные по соответствующим осям координат. Проекции вектора напряжений σ_{ik} на координатные оси удобно обозначать двойным индексом.

В общем случае справедливо равенство

$$\sigma_i = \mathbf{n}_k \sigma_{ki}. \quad (2.34)$$

Скалярное умножение на базисный вектор \mathbf{n}_j дает

$$\mathbf{n}_j \sigma_i = \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \sigma_{ki} = \delta_{jk} \sigma_{ki} \text{ или } \sigma_{ki} = \mathbf{n}_k \sigma_i, \quad (2.35)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера.

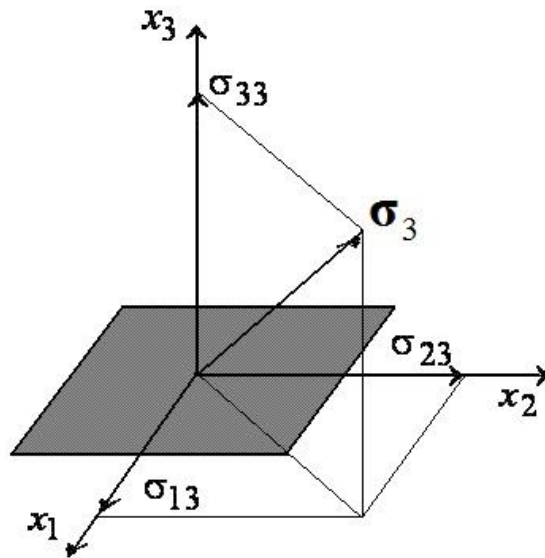


Рис. 2.4. Разложение вектора напряжений σ_3 , действующего на элемент поверхности на компоненты.

Девять компонент напряжений, заданных соотношением (2.35), описывают напряженное состояние в точке деформируемого тела. Данные компоненты представляют собой тензор второго ранга и могут быть представлены матрицей напряжений

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

Причем первый индекс указывает ось координат, вдоль которой направлено действие силы, а второй индекс указывает ось координат, вдоль которой направлена нормаль к плоскости, к которой приложена сила (номер координатной поверхности).

Компоненты σ_{ik} при $i = k$ называют нормальными компонентами напряжения. Положительные значения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} соответствуют напряжениям растяжения, а отрицательные – напряжениям сжатия. Компоненты σ_{ik} при $i \neq k$ называют касательными компонентами напряжения. Касательные компоненты напряжения записывают иногда через τ_{ik} .

3.2. Условие равновесия при однородном напряжении

Рассмотрим случай, когда напряжение во всем теле однородно, все части тела находятся в состоянии статического равновесия и объемные силы и моменты отсутствуют. Выделим в таком теле единичный куб с ребрами, параллельными осям координат (рис. 2.5.). Силу, приложенную к каждой грани согласно (2.34), можно разложить на три компоненты.

Ввиду того, что единичный куб должен находиться в состоянии статического равновесия между компонентами напряжения σ_{ik} должна существовать определенная взаимосвязь. Так как напряжение однородно, силы, действующие на куб через три задние грани, равны и противоположно направлены.

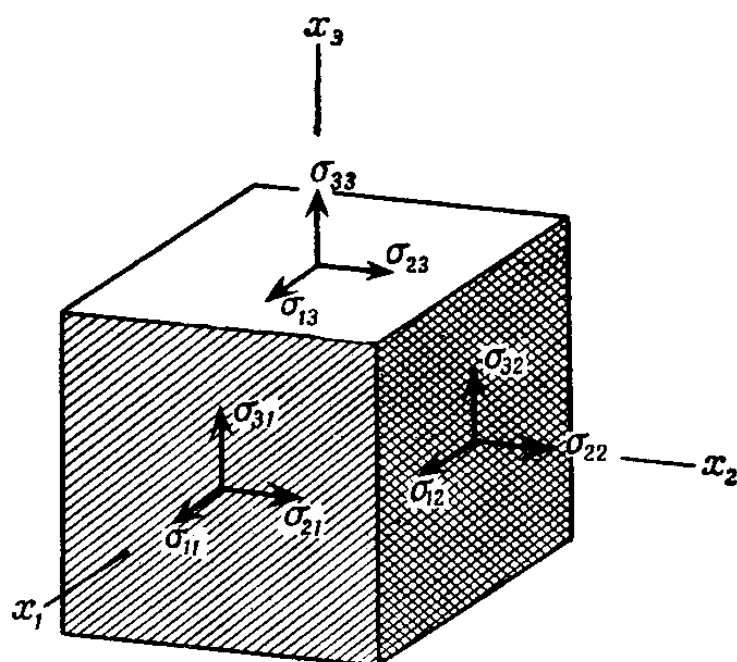


Рис. 2.5. Компоненты напряжений, действующие на грани единичного куба.

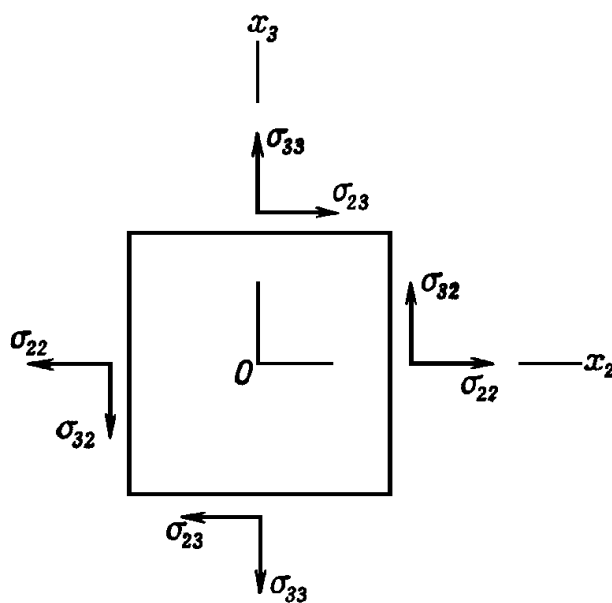


Рис. 2.6. Взаимосвязь компонент напряжений в плоскости $x_1 = \text{const}$.

Рассмотрим момент относительно оси, проведенной через центр куба параллельно оси Ox_1 (рис. 2.6). Так как напряжение однородно, то все три компоненты силы, приложенные к любой

грани, проходят через среднюю точку грани. Следовательно, нормальные компоненты напряжения и компоненты сдвига не создают момента на гранях. Отсюда в качестве условия равновесия относительно оси Ox_1 будет равенство

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}.$$

Аналогичные выражения можно получить для осей Ox_2 и Ox_3 :

$$\sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21},$$

или в общем случае

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad i \neq k. \quad (2.37)$$

Таким образом, тензор упругих напряжений является симметричным тензором. Из девяти компонент только шесть являются независимыми.

Условие (2.37) выполняется, когда нет объемных моментов сил. Объемные моменты возникают под воздействием электрических и магнитных полей, например, в ферромагнитных средах, находящихся во внешнем магнитном поле.

Зная компоненты тензора напряжений в точке, можно вычислить вектор напряжений $\vec{\sigma}$ на произвольно ориентированной площадке δS , проходящей через эту точку.

Выберем внутри напряженного тела малый элемент объема в форме тетраэдра $OABC$ содержащего точку O (рис. 2.7). Треугольники тетраэдра BOC , AOC и AOB лежат в координатных плоскостях. Пусть к поверхности треугольника ABC , площадью δS и нормалью \mathbf{l} , приложена сила $\mathbf{F} = f\delta S$. Разложение нормального к δS единичного вектора имеет вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{n}_1 l_1 + \mathbf{n}_2 l_2 + \mathbf{n}_3 l_3. \quad (2.38)$$

Компоненты нормали \mathbf{l} являются направляющими косинусами

$$l_i = \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}_i)$$

и естественно удовлетворяют условию

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1.$$

Площади треугольников тетраэдра BOC , AOC и AOB равны проекциям δS на соответствующие плоскости:

$$\delta S_1 = l_1 \delta S, \delta S_2 = l_2 \delta S, \delta S_3 = l_3 \delta S. \quad (2.39)$$

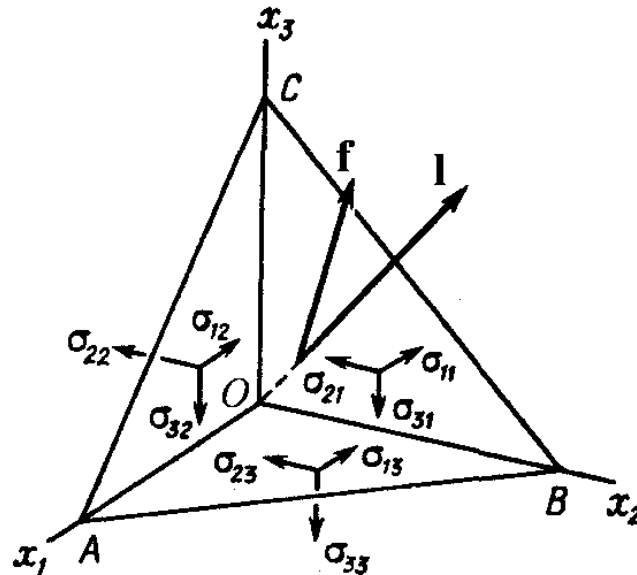


Рис. 2.7. Вектор напряжения и его компоненты на поверхностях бесконечно малого тетраэдра.

Запишем условие равновесие сил вдоль осей x_1, x_2 и x_3

$$f_1 \delta S = \sigma_{11} \delta S_1 + \sigma_{12} \delta S_2 + \sigma_{13} \delta S_3,$$

$$f_2 \delta S = \sigma_{21} \delta S_1 + \sigma_{22} \delta S_2 + \sigma_{23} \delta S_3,$$

$$f_3 \delta S = \sigma_{31} \delta S_1 + \sigma_{32} \delta S_2 + \sigma_{33} \delta S_3.$$

Учитывая взаимосвязь (2.39) между площадями граней тетраэдра, в итоге получим

$$f_1 = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{12} l_2 + \sigma_{13} l_3,$$

$$f_2 = \sigma_{21} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{23} l_3,$$

$$f_3 = \sigma_{31} l_1 + \sigma_{32} l_2 + \sigma_{33} l_3.$$

Следовательно, мы можем записать

$$f_i = \sigma_{ik} l_k. \quad (2.40)$$

Так как уравнения (2.40) справедливы для произвольно направленной силы, то это доказывает тензорную природу компонент напряжения. Соотношение (2.40) справедливо и в тех случаях, когда напряжение неоднородно.

Тензор напряжений, как и тензор деформации можно с помощью преобразования координат привести к главным осям. Относительно главных осей недиагональные компоненты тензора обратятся в нуль, и он приобретет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы σ_i называют главными значениями тензора напряжения.

Главные значения тензора напряжения определяются из условия, что определитель

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Это кубическое уравнение называется характеристическим уравнением тензора напряжений, и оно может быть записано в виде

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (2.41)$$

где I_i – инварианты тензора напряжения. Инварианты тензора напряжений не зависят от ориентации системы координат и определяются выражениями

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (2.41) можно записать в форме

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0.$$

Сравнение данного уравнения с уравнением (2.41) позволяет получить выражения для инвариантов, записанные через главные значения тензора напряжений

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Характеристическая поверхность второго порядка для тензора напряжений в главных осях имеет вид

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = 1,$$

где длины полуосей равны соответственно

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_3}}.$$

Так как напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ могут быть как положительными, так и отрицательными, то поверхность напряжений может быть действительным или мнимым эллипсоидом или гиперboloидом.

Приведем несколько примеров тензора напряжений, приведенного к главным осям.

1. Линейно-напряженное состояние (одноосное напряжение)

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Плоско-напряженное состояние (двуосное напряжение)

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Гидростатическое давление

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

4. Напряжение чистого сдвига

$$\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Уравнения движения и условия равновесия

1.1. Неоднородное напряжение

Пусть на тело действуют однородные объемные силы с плотностью

$$\mathbf{f} = \mathbf{n}_1 f_1 + \mathbf{n}_2 f_2 + \mathbf{n}_3 f_3.$$

Рассмотрим внутри напряженного тела элементарный прямоугольный параллелепипед с центром в начале координат и длинами ребер δx_1 , δx_2 , δx_3 , параллельными осям координат. Напряжение в центре элементарного объема обозначим через σ_{ik} .

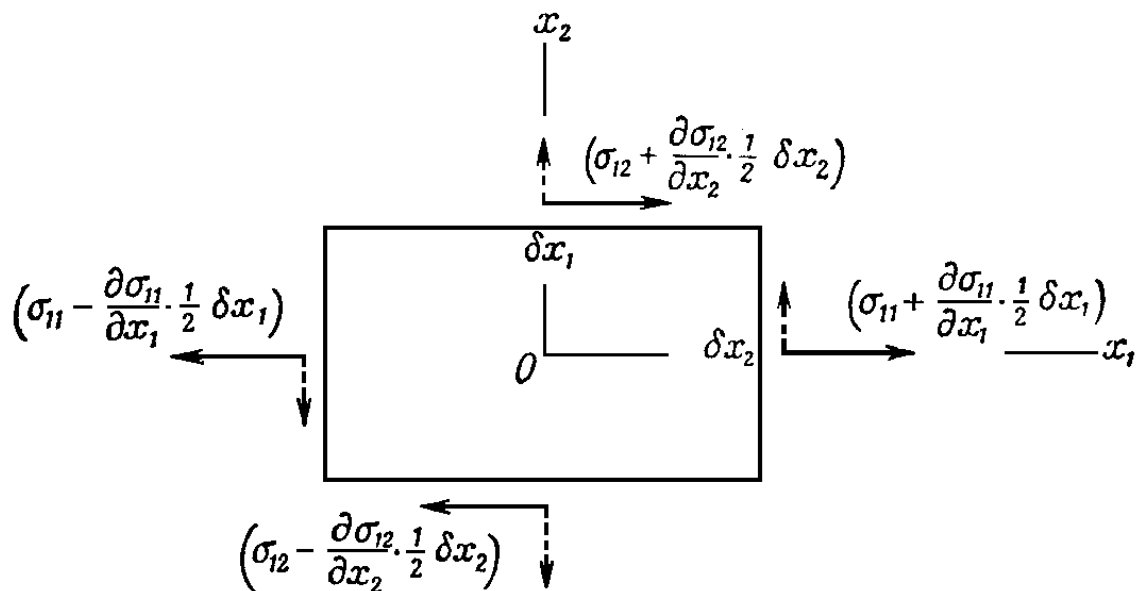


Рис. 3.1. Силы, действующие на элементарный параллелепипед в направлении оси Ox_1 .

Получим уравнение движения элементарного параллелепипеда. Рассмотрим движение в направлении оси Ox_1 (рис. 3.1). Средние значения компонент σ_{11} и σ_{12} для каждой из двух граней, перпендикулярных оси Ox_1 , указаны на рис. 3.1. Средние значения компоненты σ_{13} , направленной также вдоль оси Ox_1 для данных двух граней на рис. 3.1 не показаны.

Согласно второму закону Ньютона движение параллелепипеда вдоль оси Ox_1 будет определяться уравнением:

$$\begin{aligned} & \left[- \left(\sigma_{11} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \frac{1}{2} \delta x_1 \right) + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \frac{1}{2} \delta x_1 \right) \right] \delta x_2 \delta x_3 + \\ & + \left[- \left(\sigma_{12} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \frac{1}{2} \delta x_2 \right) + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \frac{1}{2} \delta x_2 \right) \right] \delta x_1 \delta x_3 + \\ & + \left[- \left(\sigma_{13} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \frac{1}{2} \delta x_3 \right) + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \frac{1}{2} \delta x_3 \right) \right] \delta x_1 \delta x_2 + \\ & + f_1 \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = \rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \end{aligned}$$

где ρ – плотность вещества. Сокращая левую и правую части уравнения на $\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$, получим

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \frac{d^2 x_1}{dt^2}.$$

Аналогичные соотношения можно получить и для двух других направлений Ox_2 и Ox_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{d^2 x_3}{dt^2}. \end{aligned}$$

В общем случае эти три уравнения можно записать в тензорной форме

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \ddot{x}_i, \quad (3.1)$$

или более кратко

$$\sigma_{ik,k} + f_i = \rho \ddot{x}_i.$$

Для деформируемого тела, находящегося в поле тяжести уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = \rho \ddot{x}_i, \quad (3.2)$$

где g_i – компоненты объемной силы на единицу массы вещества; \ddot{x}_i – ускорение в направлении Ox_i .

Если деформируемое тело находится в состоянии статического равновесия под действием внешних сил, то и любая выделенная часть тела также находится в состоянии равновесия. Следовательно, в случае статического равновесия деформируемого тела уравнения (3.1) и (3.2) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0, \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3), (3.4) определяют условие равновесия упругого тела при наличии объемных сил. В случае отсутствия объемных сил уравнения равновесия (3.3) и (3.4) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0,$$

т. е. силы внутренних напряжений должны компенсировать друг друга в каждом элементе объема деформированного тела. По физическому смыслу

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

есть сила внутренних напряжений, приходящаяся на единицу объема упругого тела.

Дифференциал смещения du_i в направлении x_i равен dx_i .

Отсюда скорость смещения

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt}$$

и соответственно ускорение

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_i. \quad (3.5)$$

В выражении (3.5) учтена зависимость смещения от координаты.

В линейной теории упругости смещения полагаются малыми. Следовательно, в (3.5) можно пренебречь слагаемым второго порядка малости. Отсюда

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

а уравнения движения (3.1) и (3.2) соответственно примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (3.7)$$

1.2. Условия равновесия в цилиндрической и сферической системах координат

Запишем без вывода уравнения равновесия в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе координат r, φ, z (см. рис. 3.2) уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + f_r = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}}{r} + f_z = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + f_\varphi = 0.$$

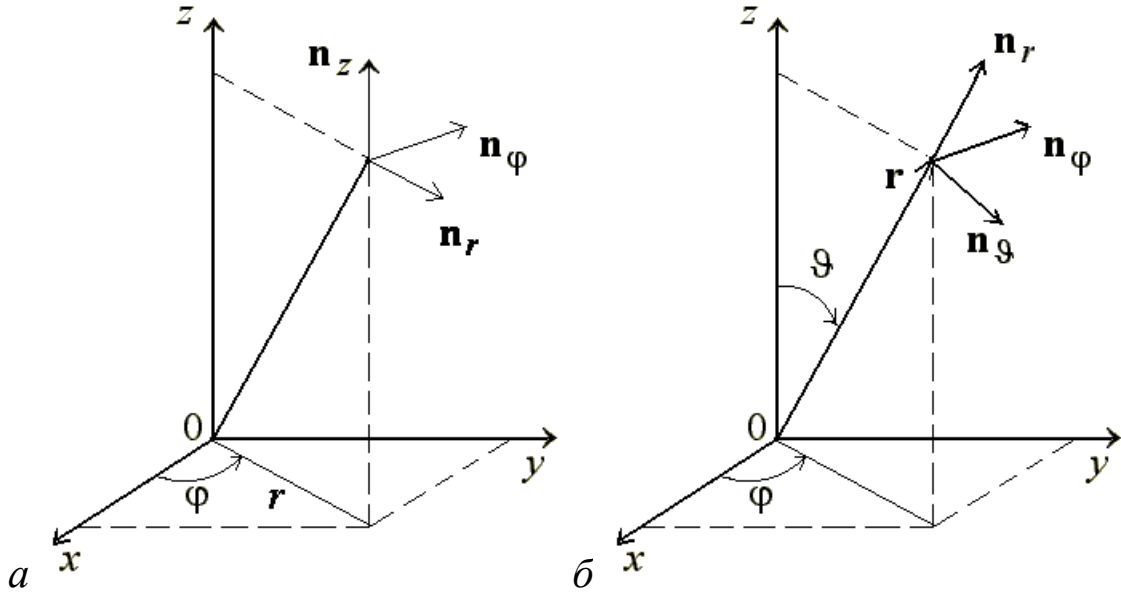


Рис. 3.2. Цилиндрическая система координат (а), сферическая система координат (б).

В сферической системе координат r, θ, φ (см. рис. 3.2) уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) + f_r = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}] + f_\theta = 0, \\
& \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) + f_\varphi = 0.
\end{aligned}$$

1.3. Уравнения движения при вращательном движении

Получим уравнения движения элементарного параллелепипеда при вращении его вокруг осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 . Рассмотрим вначале вращение параллелепипеда вокруг оси Ox_1 (рис. 3.3). За положительное направление примем вращение против часовой стрелки.

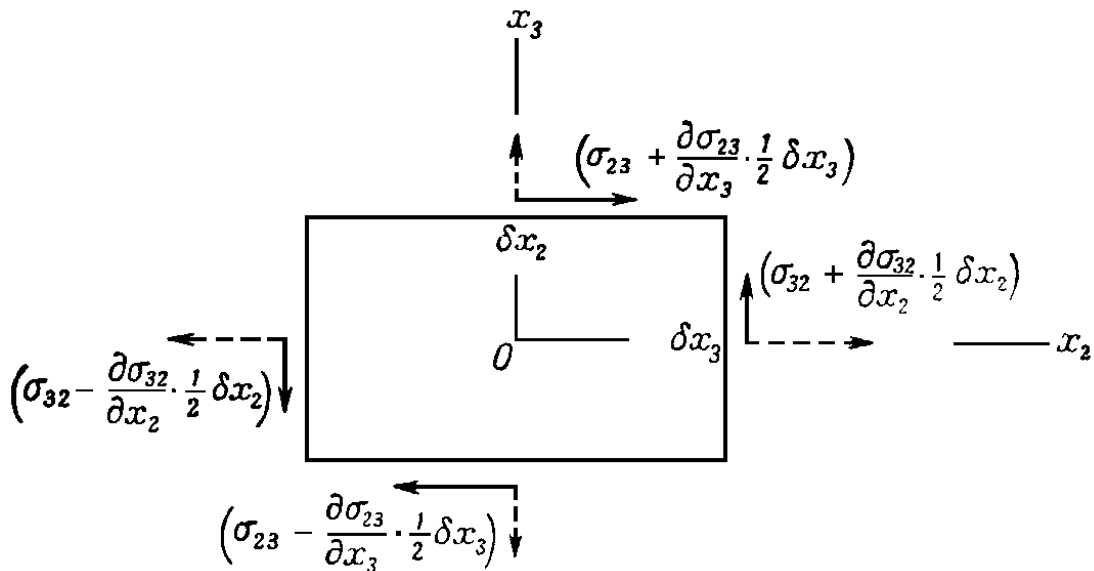


Рис. 3.3. Силы, создающие вращающий момент вокруг оси Ox_1 .

Запишем момент сил, созданный компонентами напряжения сдвига, действующими на две грани, перпендикулярные оси Ox_2 :

$$\left(\sigma_{32} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} \frac{1}{2} \delta x_2 \right) \delta x_1 \delta x_3 \frac{1}{2} \delta x_2 +$$

$$+ \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} \frac{1}{2} \delta x_2 \right) \delta x_1 \delta x_3 \frac{1}{2} \delta x_2 = \sigma_{32} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3.$$

Теперь запишем момент сил, созданный компонентами напряжения сдвига, действующими на две грани, перпендикулярные оси Ox_3

$$- \left(\sigma_{23} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \frac{1}{2} \delta x_3 \right) \delta x_1 \delta x_2 \frac{1}{2} \delta x_3 -$$

$$- \left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \frac{1}{2} \delta x_3 \right) \delta x_1 \delta x_2 \frac{1}{2} \delta x_3 = -\sigma_{23} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3.$$

С учетом данных моментов сил, уравнение вращательного движения упругого тела вокруг оси Ox_1 имеет вид

$$(\sigma_{32} - \sigma_{23}) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + M_1 \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = I_1 \ddot{\theta}_1,$$

где I_1 – момент инерции параллелепипеда относительно оси Ox_1 ; $\ddot{\theta}_1$ – угловое ускорение относительно оси Ox_1 ; M_1 – объемный момент. Момент инерции $I_1 \sim (\delta x)^5$. Поэтому при $\delta x_i \rightarrow 0$, записанное выше уравнение примет вид

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} + M_1 = 0. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом можно получить уравнения для случаев вращения параллелепипеда вокруг осей Ox_2 и Ox_3 соответственно:

$$\sigma_{13} - \sigma_{31} + M_2 = 0, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{21} - \sigma_{12} + M_3 = 0. \quad (3.10)$$

Распределенный объемный момент сил пропорционален объему и вызывается силами дальнего действия. Момент возникает в анизотропном кристалле, находящемся в электрическом или магнитном полях.

В отсутствии электрических и магнитных полей объемные моменты не возникают, и мы получаем вновь, что

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad (3.11)$$

т. е. тензор напряжения есть симметричный тензор.

§ 2. Термодинамика деформирования

2.1. Работа внешних сил

Определим работу, произведенную за время dt внешними силами, действующими на упругое тело. Пусть за время dt произойдет смещение точек тела на расстояние

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt.$$

Тогда работа объемных (массовых) сил f_i в некотором объеме тела будет определяться интегралом

$$A_V = \int_V f_i \delta u_i dV, \quad (3.12)$$

Далее учтем работу приложенных к телу поверхностных сил

$$A_S = \oint_S (\sigma_{ik} \delta u_i) dS_k. \quad (3.13)$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского, преобразуем поверхностный интеграл (3.13) в объемный

$$\begin{aligned} \oint_S (\sigma_{ik} \delta u_i) dS_k &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) dV = \\ &= \int_V \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV + \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV. \end{aligned}$$

Во втором интеграле учтем, что вследствие симметрии тензора σ_{ik} , подынтегральное выражение можно преобразовать к виду

$$\sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik}.$$

Таким образом, суммарная работа внешних объемных и поверхностных сил за время dt равна

$$\begin{aligned} \int_V \delta A dV &= \int_V f_i \delta u_i dV + \int_V \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV + \int_V \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV = \\ &= \int_V \delta u_i \left(f_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) dV + \int_V \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где δA – суммарная работа, отнесенная к единице объема.

Согласно уравнениям движения (3.6)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + f_i = \rho \ddot{u}_i,$$

преобразуем (3.14) к виду

$$\int_V \delta A dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV. \quad (3.15)$$

Кинетическая энергия тела на единицу объема равна

$$w = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2.$$

Изменение кинетической энергии тела за время dt определяется выражением

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial t} dt = \rho \ddot{u}_i \delta u_i.$$

С учетом этого перепишем равенство (3.15)

$$\int_V \delta A dV = \int_V \delta w dV + \int_V \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV.$$

Отсюда следует, что

$$\delta A = \delta w + \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) есть закон сохранения механической энергии.

2.2. Законы термодинамики и уравнения состояния

Согласно первому закону термодинамики, закону сохранения энергии, изменение внутренней энергии тела de и кинетической энергии δw равно количеству подведенного к телу тепла δq и произведенной внешними силами работы δA :

$$de + \delta w = \delta q + \delta A. \quad (3.17)$$

Здесь термодинамические величины de и δq , как и работа δA , относятся к единице объема недеформированного тела.

Для обратимых процессов согласно второму закону термодинамики

$$\delta q = Tds, \quad (3.18)$$

где T – абсолютная температура; s – энтропия единицы объема тела. Подставим выражения (3.16) и (3.18) в (3.17), получим

$$de = Tds + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}. \quad (3.19)$$

Внутренняя энергия и энтропия являются функциями состояния тела. Следовательно, de и ds являются полными дифференциалами.

При равномерном всестороннем сжатии тела тензор напряжений равен

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}.$$

В этом случае

$$\sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} = -p\delta_{ik} d\varepsilon_{ik} = -pd\varepsilon_{ii}.$$

Закон сохранения энергии (3.19) в случае всестороннего сжатия примет вид

$$de = Tds - pd\varepsilon_{ii}.$$

Дифференциал внутренней энергии определяется выражением

$$de = \frac{\partial e}{\partial s} ds + \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} d\varepsilon_{ik}. \quad (3.20)$$

Сравнивая уравнения (3.19) и (3.20) получим уравнения состояния (термодинамические соотношения) для определения температуры и напряжения деформированного тела

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_{\varepsilon_{ik}}, \quad \sigma_{ik} = \left(\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_s. \quad (3.21)$$

Рассмотрим изменение свободной энергии на единицу объема тела f при деформации

$$f = e - sT.$$

После дифференцирования выражения для f , имеем

$$df = de - sdT - Tds. \quad (3.22)$$

Далее, подставляя в (3.22) выражение для de (3.19), получим

$$df = -sdT + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}. \quad (3.23)$$

С другой стороны дифференциал свободной энергии равен

$$df = \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}} d\varepsilon_{ik}. \quad (3.24)$$

Сравнивая уравнения (3.23) и (3.24) получим уравнения состояния для определения энтропии и напряжения деформированного тела

$$s = - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ik}}, \quad \sigma_{ik} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T. \quad (3.25)$$

Если процесс деформации является адиабатический, то $\delta q = 0$ и $s = \text{const}$. В этом случае для определения σ_{ik} удобнее пользоваться уравнением состояния (3.21). В случае изотермического процесса, когда $T = \text{const}$, более удобным будет уравнение состояния (3.25).

§ 3. Обобщенный закон Гука при изотермическом процессе

3.1. Закон Гука для анизотропных тел

Между тензором напряжений и тензором деформаций имеется взаимосвязь, которая выражается обобщенным законом Гука. Установим ее, полагая деформации малыми, а процесс изотермическим.

Разложим свободную энергию в ряд по ε_{ik} до членов второго порядка малости в окрестности недеформированного состояния

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_0 \varepsilon_{ik} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} \right)_0 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}, \quad (3.26)$$

где f_0 – свободная энергия недеформированного тела. Первая производная, согласно (3.25)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_0 = (\sigma_{ik})_0 = 0,$$

так как в отсутствие деформации напряжение равно нулю. Для второй производной введем обозначение

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} \right)_0 = C_{iklm}. \quad (3.27)$$

Таким образом, выражение для свободной энергии при изотермической деформации принимает вид

$$f = f_0 + \frac{1}{2} C_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}. \quad (3.28)$$

Далее подставим выражение для свободной энергии деформируемого тела (3.28) во вторую формулу (3.25), мы и получим обобщенный закон Гука для изотермической деформации

$$\sigma_{ik} = \sum_{l,m=1}^3 C_{iklm} \varepsilon_{lm} \equiv C_{iklm} \varepsilon_{lm}. \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3.29)$$

Таким образом, упругие свойства тела определяются тензором четвертого ранга C_{iklm} . Его называют тензором модулей упругости, или постоянных упругой жесткости. Справедливо и обратное соотношение

$$\varepsilon_{ik} = \sum_{l,m=1}^3 S_{iklm} \sigma_{lm} \equiv S_{iklm} \sigma_{lm}. \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3.30)$$

которое также называется законом Гука. Тензор S_{iklm} – также тензор четвертого ранга. Величины S_{iklm} называются постоянными упругости, или упругой податливости.

В общем случае тензор четвертого ранга имеет $3^4 = 81$ независимую компоненту. Однако в силу симметрии тензоров деформаций и напряжений, а также симметрии выражения (3.27) число независимых компонент тензора упругости сокращается до 21. И в самом деле, в силу симметричности тензоров $\sigma_{ik}, \varepsilon_{lm}$ получим, что

$$C_{iklm} = C_{kilm} = C_{ikml},$$

что снижает число независимых компонент в матрице до 36. В силу симметрии выражения (3.23) имеем

$$C_{iklm} = C_{lmik},$$

т. е. в матрице будут независимыми диагональные элементы и элементы верхней треугольной матрицы: $6+5+4+3+2+1=21$. Таким образом, анизотропное тело в общем случае может иметь 21 независимую компоненту тензора упругости и соответственно 21 постоянных модулей упругости.

При рассмотрении ряда вопросов бывает удобным перейти от трехмерного тензора четвертого ранга к шестимерной матрице, элементы которой зависят от двух индексов. Данный переход производят путем замены пары индексов, принимающих значения 1, 2, 3 (с учетом их симметрии), одним индексом, принимающим значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 по следующей схеме:

$$\begin{aligned} (11) &\leftrightarrow 1, & (22) &\leftrightarrow 2, & (33) &\leftrightarrow 3 \\ (23) &= (32) \leftrightarrow 4, & (31) &= (13) \leftrightarrow 5, & (12) &= (21) \leftrightarrow 6. \end{aligned} \quad (3.31)$$

При этом переходе имеем

$$C_{ijkl} = C_{mn}, \quad S_{ijkl} = S_{mn}.$$

Причем в силу симметрии при $n \neq m$

$$C_{nm} = C_{mn}, S_{nm} = S_{mn}.$$

Запишем для наглядности матрицы C_{mn} и S_{mn} :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix}.$$

С учетом данных упрощений распишем обобщенный закон Гука (3.29), т.е. выразим напряжения через модули упругости и деформации

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + 2(C_{14}\varepsilon_{23} + C_{15}\varepsilon_{31} + C_{16}\varepsilon_{12}), \\ \sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} + 2(C_{24}\varepsilon_{23} + C_{25}\varepsilon_{31} + C_{26}\varepsilon_{12}), \\ \sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + 2(C_{34}\varepsilon_{23} + C_{35}\varepsilon_{31} + C_{36}\varepsilon_{12}), \\ \sigma_{23} &= C_{41}\varepsilon_{11} + C_{42}\varepsilon_{22} + C_{43}\varepsilon_{33} + 2(C_{44}\varepsilon_{23} + C_{45}\varepsilon_{31} + C_{46}\varepsilon_{12}), \\ \sigma_{31} &= C_{51}\varepsilon_{11} + C_{52}\varepsilon_{22} + C_{53}\varepsilon_{33} + 2(C_{54}\varepsilon_{23} + C_{55}\varepsilon_{31} + C_{56}\varepsilon_{12}), \\ \sigma_{12} &= C_{61}\varepsilon_{11} + C_{62}\varepsilon_{22} + C_{63}\varepsilon_{33} + 2(C_{64}\varepsilon_{23} + C_{65}\varepsilon_{31} + C_{66}\varepsilon_{12}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Теперь наоборот, запишем уравнения для деформаций через постоянные упругости напряжения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33} + S_{14}\sigma_{23} + S_{15}\sigma_{31} + S_{16}\sigma_{12}, \\ \varepsilon_{22} &= S_{21}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22} + S_{23}\sigma_{33} + S_{24}\sigma_{23} + S_{25}\sigma_{31} + S_{26}\sigma_{12}, \\ \varepsilon_{33} &= S_{31}\sigma_{11} + S_{32}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33} + S_{34}\sigma_{23} + S_{35}\sigma_{31} + S_{36}\sigma_{12}, \\ 2\varepsilon_{23} &= S_{41}\sigma_{11} + S_{42}\sigma_{22} + S_{43}\sigma_{33} + S_{44}\sigma_{23} + S_{45}\sigma_{31} + S_{46}\sigma_{12}, \\ 2\varepsilon_{31} &= S_{51}\sigma_{11} + S_{52}\sigma_{22} + S_{53}\sigma_{33} + S_{54}\sigma_{23} + S_{55}\sigma_{31} + S_{56}\sigma_{12}, \\ 2\varepsilon_{12} &= S_{61}\sigma_{11} + S_{62}\sigma_{22} + S_{63}\sigma_{33} + S_{64}\sigma_{23} + S_{65}\sigma_{31} + S_{66}\sigma_{12}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Появление множителя 2 в системах уравнений (3.32) и (3.33) обусловлено тем, что тензор деформаций ε_{ik} является симметричным тензором. Запишем размерность величин S_{ij} и C_{ij} :

$$S_{ij} = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{Н}} \right] = \left[\frac{\text{м}^3}{\text{Дж}} \right], \quad C_{ij} = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right].$$

Получим взаимосвязь между S_{ij} и C_{ij} . Для этого в тензорах деформаций и тензорах напряжений, согласно (3.31), заменим пары индексов одним индексом. Исходя из этих обозначений, получим

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты ε_4 , ε_5 и ε_6 определяют изменение углов между соответствующими гранями параллелепипеда.

С учетом данной замены перепишем закон Гука (3.29):

$$\sigma_p = \sum_{q=1}^6 C_{pq} \varepsilon_q = \sum_{q=1}^6 \sum_{r=1}^6 C_{pq} S_{qr} \sigma_r, \quad p=1, \dots, 6$$

где учли, что

$$\varepsilon_q = \sum_{r=1}^6 S_{qr} \sigma_r.$$

Отсюда следует, что сумма

$$\sum_{q=1}^6 C_{pq} S_{qr} = \delta_{pr}. \quad (3.34)$$

Поэтому S_{pq} есть матрица, обратная матрице C_{pq} , и наоборот.

Компоненты модулей упругости C_{ij} и податливости S_{ij} будут разными в зависимости от того, каким является термодинамический процесс – изотермический или адиабатический. В связи с этим вводят изотермические и адиабатические упругие постоянные.

Если анизотропное тело обладает определенной симметрией, то появляются дополнительные соотношения между модулями упругости и в результате число независимых модулей будет еще меньше. Рассмотрим в качестве примера монокристалл кубической формы.

Направим оси по ребрам элементарного куба. Это дает

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}. \quad (3.35)$$

Куб имеет также четыре поворотные оси симметрии третьего порядка вдоль пространственных диагоналей. В связи с чем

$$C_{2323} = C_{3131} = C_{1212} = C_{44} = C_{55} = C_{66}, \quad (3.36)$$

$$C_{1122} = C_{2233} = C_{3311} = C_{12} = C_{23} = C_{13}. \quad (3.37)$$

Так как вращательные компоненты сил не могут привести к растяжению куба, получим

$$\begin{aligned} C_{41} = C_{51} = C_{61} &= 0, \\ C_{42} = C_{52} = C_{62} &= 0, \\ C_{43} = C_{53} = C_{63} &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Кроме того, силы действующие, например, вдоль оси x_2 (x_1, x_3) на площадку, перпендикулярную оси x_3 (x_2, x_1) не могут менять угол между осями x_3 и x_1 (x_1 и x_2, x_2 и x_3). Отсюда

$$C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0. \quad (3.39)$$

Таким образом, для монокристаллов с кубической решеткой остается только три независимых модуля упругости и столько же естественно постоянных упругой податливости. Матрица модулей упругостей для кубического кристалла принимает вид:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Определим взаимосвязь между постоянным S_{pq} и C_{pq} для кубического монокристалла. Подставляя компоненты матрицы (3.40) в (3.34), получим

$$\begin{aligned} S_{11}C_{11} + S_{12}C_{12} + S_{12}C_{12} &= 1, \\ S_{11}C_{12} + S_{12}C_{11} + S_{12}C_{12} &= 0, \\ S_{44}C_{44} &= 1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Из решения данной системы уравнений имеем

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}, \\ S_{12} &= -\frac{C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}, \\ S_{44} &= \frac{1}{C_{44}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Для монокристалла с гексагональной кристаллической решеткой, обладающей более низкой симметрией, можно показать, что число независимых модулей упругости увеличивается до пяти:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}.$$

3.2. Закона Гука для изотропных тел

3.2.1. Вывод закона Гука для изотропных тел

У изотропного тела симметрия еще выше: тензор упругости вообще не зависит от выбора направлений осей координат. Изотропными тензорами четвертого ранга являются выражения

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}.$$

Следовательно, обобщенный изотропный тензор четвертого ранга можно получить путем их комбинаций. Запишем выражение для тензора модулей в общем виде

$$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (3.43)$$

где a, b, c – константы. Для закона Гука, вследствие симметрии тензора деформации ε_{ik} , имеем

$$\sigma_{ij} = a\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + b\varepsilon_{ij} + c\varepsilon_{ij} = a\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + (b + c)\varepsilon_{ij}. \quad (3.44)$$

Как видно, в случае изотропного тела появляются только две независимые упругие постоянные. Эти упругие постоянные называются модулями Ламэ λ и μ . Итак, закон Гука для изотропного тела имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (3.45)$$

Запишем тензор модулей упругостей

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (3.46)$$

Матрица компонент тензора модулей упругостей изотропного тела равна

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Тензор напряжений (3.45) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + K \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (3.48)$$

где

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (3.49)$$

Первое слагаемое в (3.48) связано с деформацией сдвига, а второе слагаемое, пропорциональное ε_{kk} , связано с изменением объема. Поэтому модуль μ называется модулем сдвига, а K – модулем объемного сжатия.

Выразим компоненты тензора деформаций через компоненты тензора напряжений. Для этого выражение (3.45) умножим на δ_{ij} . В результате получим

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \delta_{ij}. \quad (3.50)$$

Далее учтем, что

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{ii}, \quad \delta_{ij} \delta_{ij} = 3.$$

В итоге выражение (3.50) примет вид

$$\sigma_{ii} = 2\mu \varepsilon_{ii} + 3\lambda \varepsilon_{kk} = 3 \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{kk}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3K}. \quad (3.51)$$

Далее подставим (3.51) в (3.45), получим что

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3K} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

Отсюда следует, что тензор деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{6\mu K} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (3.52)$$

Выражение (3.52) для ε_{ij} можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (3.53)$$

Полученное выражение называют законом Гука.

3.2.2. Деформация всестороннего равномерного сжатия

Рассмотрим деформацию всестороннего равномерного сжатия. Из выражения (3.53) видно, что относительное изменение объема при деформации определяется только диагональными элементами тензора напряжений. Следовательно

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{kk}. \quad (3.54)$$

В случае всестороннего равномерного сжатия напряжение

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik},$$

где p – давление. Отсюда следует, что

$$\sigma_{ii} = -3p.$$

Подставим данное выражение для напряжения в (3.54), получим, что относительное изменение объема равно

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}. \quad (3.55)$$

Таким образом, всестороннее равномерное сжатие приводит только к изменению объема тела. При этом все деформации сдвига равны нулю.

Вследствие малости деформаций величины ε_{ii} и давление p малы. Это позволяет выражение (3.55) записать в дифференциальной форме

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

Величину K^{-1} , обратную модулю объемного сжатия, называют коэффициентом всестороннего сжатия.

3.2.3. Взаимосвязь между коэффициентами Ламэ, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона

Определим взаимосвязь между коэффициентами Ламэ и такими техническими единицами как модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Для этого рассмотрим деформацию прямоугольного параллелепипеда. Пусть один конец параллелепипеда закреплен, а к другому приложена сила \mathbf{F} , направленная вдоль оси x_2 (рис. 3.4).

Напряжение, действующие вдоль оси x_2 равно

$$\sigma_{22} = \frac{F}{S},$$

где S – площадь грани, перпендикулярной оси x_2 . Остальные компоненты напряжения σ_{ik} равны нулю:

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{33} = 0, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0, \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0.$$

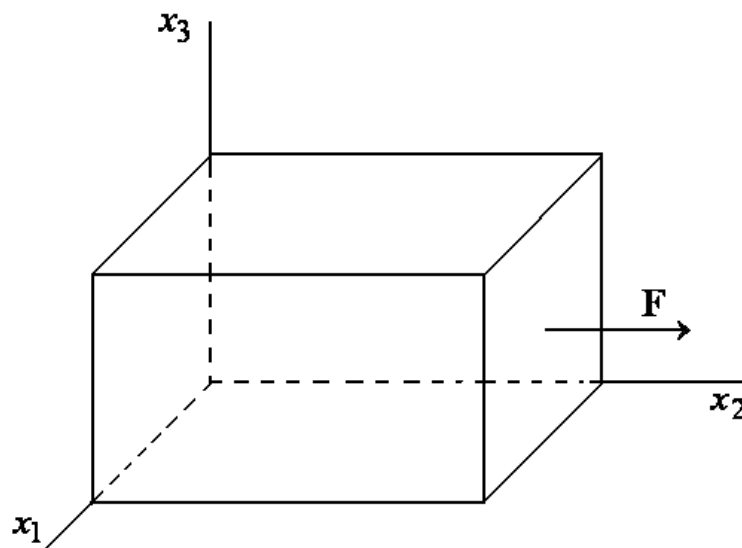


Рис. 3.4. Растяжение параллелепипеда.

Подставим данные значения компонент напряжений в закон Гука (3.50), получим

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) \sigma_{22}, \quad (3.56)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K} \right) \sigma_{22}. \quad (3.57)$$

Из выражения (3.56) видно, что растяжение параллелепипеда внешней силой приводит к его поперечному сжатию. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению равно

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + 2\mu} \quad (3.58)$$

и называется это, как вы знаете, коэффициентом Пуассона, введенным нами в первой главе.

Запишем формулу (3.57) в виде

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \sigma_{22}$$

и сравнивая с законом Гука (1.2) получим, что модуль Юнга равен

$$E = \frac{9\mu K}{\mu + 3K}. \quad (3.59)$$

Обычно в справочниках имеются таблицы модулей Юнга и коэффициентов Пуассона. Величины E и ν очень легко определяются из эксперимента по растяжению стержней. Выразим модуль всестороннего сжатия, модуль сдвига и коэффициент Ламэ через технические единицы

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (3.60)$$

3.2.4. Уравнение Ламэ

Получим уравнения движения изотропной среды в перемещениях. Для этого воспользуемся уравнением движения упругой среды (3.7):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i \quad (3.61)$$

и законом Гука (3.45):

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

Перепишем закон Гука через перемещения

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Далее возьмем производную по x_i от левой и правой частей данного выражения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$$

и подставим в (3.61). В итоге получим уравнение движение в перемещениях, или так называемое уравнение Ламэ:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \Delta u_j + \rho g_j, \quad (3.62)$$

где Δ – оператор Лапласа, т.е.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Уравнение Ламэ (3.62) образует систему трех дифференциальных уравнений для определения трех компонент перемещений $u_j(x, t)$. Уравнение Ламэ в векторной форме имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.63)$$

При решении ряда задач бывает удобным использовать иную форму записи уравнения (3.63), которая получается при использовании векторного тождества

$$\Delta \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}. \quad (3.64)$$

Подставим (3.64) в (3.63), получим

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.65)$$

Если вторые производные от вектора смещений равны нулю, то уравнения (3.63), (3.65) переходят в уравнения равновесия

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (3.66)$$

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (3.67)$$

Вычисляя перемещения, можно определить деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

и далее из закона Гука напряжения в объеме упругого тела.

3.3. Энергия деформированного упругого тела

Согласно выражению (3.16), в результате работы произведенной внешними объемными и поверхностными силами происходит изменение кинетической энергии и деформация упругого тела:

$$\delta A = \delta w + \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik}. \quad (3.68)$$

Введем обозначение второго слагаемого в данном выражении

$$\delta U = \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik}. \quad (3.69)$$

С учетом (3.69), перепишем выражение (3.19)

$$\delta U = de - Tds. \quad (3.70)$$

При адиабатическом процессе

$$ds = 0$$

и уравнение (3.70) принимает вид

$$\delta U = de. \quad (3.71)$$

В случае изотермического процесса дифференциал

$$dT = 0,$$

уравнение (3.23) также изменится

$$\delta U = df. \quad (3.72)$$

Как видно из (3.70) и (3.71) величина δU , как при адиабатическом, так и при изотермическом процессах, ведет себя как полный дифференциал. Следовательно, можно записать

$$dU = \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} d\varepsilon_{ik}, \quad (3.73)$$

откуда следует, что

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}}. \quad (3.74)$$

Функция U представляет собой плотность потенциальной энергии упругого деформированного тела.

В соответствии с обобщенным законом Гука (3.29) напряжение σ_{ik} является линейной функцией деформации ε_{ik} . Следовательно, функция U является квадратичной функцией компонент тензора деформаций ε_{ik} . Согласно теореме Эйлера для однородных функций

$$\varepsilon_{ik} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} = 2U.$$

Отсюда с учетом (3.74), получим выражение для плотности потенциальной энергии упругого тела

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}. \quad (3.75)$$

Используя обобщенный закон Гука (3.29), выражение для плотности потенциальной энергии можно записать

$$U = \frac{1}{2} C_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}. \quad (3.76)$$

или в сокращенной форме

$$U = \frac{1}{2} C_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_k.$$

Запишем выражение для плотности потенциальной энергии для кубического кристалла

$$U = \frac{1}{2} [C_{1111}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + 2C_{1122}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) + 4C_{1212}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)]. \quad (3.77)$$

В сокращенной форме выражение (3.77) запишется в виде

$$U = \frac{1}{2} [C_{11}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + 2C_{12}(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) + 4C_{66}(\varepsilon_6^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_4^2)].$$

Выше мы рассмотрели обобщенный закон Гука для изотермического процесса. Естественно модули упругости будут разными в зависимости от того, при каком процессе, адиабатическом или изотермическом, происходит деформация упругого тела.

§ 4. Упругие волны

4.1. Неизотермическая деформация

Процесс распространения упругих волн является адиабатическим процессом. Покажем на примере изотропного тела,

что модули Ламэ, определенные при адиабатическом процессе, отличаются от модулей Ламе определенных из изотермического процесса.

Разложим свободную энергию в ряд по ε_{ik} и температуре до членов второго порядка малости в окрестности недеформированного состояния

$$\begin{aligned} f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_0 \varepsilon_{ik} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} \right)_0 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ik} \partial T} \right)_0 \varepsilon_{ik} (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_0 (T - T_0)^2. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Введем обозначения новых, по сравнению с (3.26), констант:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_0 = -s_0, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ik} \partial T} \right)_0 = D_{ik}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_0 = C. \quad (3.79)$$

С учетом данных и введенных выше обозначений выражение для свободной энергии примет вид

$$\begin{aligned} f = f_0 - s_0(T - T_0) + \frac{1}{2} C_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} + D_{ik} \varepsilon_{ik} (T - T_0) + \\ + \frac{1}{2} C (T - T_0)^2. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Определим тензор напряжений и энтропию упругого тела. Для этого воспользуемся уравнениями (3.23) и (3.24). В результате получим, что

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}} = C_{iklm} \varepsilon_{lm} + D_{ik} (T - T_0), \quad (3.81)$$

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = s_0 - D_{ik} \varepsilon_{ik} - C(T - T_0). \quad (3.82)$$

Для изотропного тела тензор модулей упругостей, согласно (3.46), равен

$$C_{iklm} = \lambda \delta_{ik} \delta_{lm} + 2\mu \delta_{il} \delta_{km}. \quad (3.83)$$

Константа

$$D_{ik} = -\alpha(3\lambda + 2\mu)\delta_{ik}. \quad (3.84)$$

Здесь α – коэффициент линейного расширения. Подставим далее выражения (3.83) и (3.84) в (3.81) и (3.82). В итоге получим

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)\delta_{ik},$$

$$s = s_0 - \alpha(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} - C(T - T_0).$$

Перепишем данные выражения с учетом того, что

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = K.$$

В результате получим

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} - 3\alpha K(T - T_0)\delta_{ik}, \quad (3.85)$$

$$s = s_0 - 3\alpha K \varepsilon_{kk} - C(T - T_0). \quad (3.86)$$

Для адиабатического процесса энтропия не меняется, т.е.

$$s = s_0.$$

Тогда из (3.86) получим, что

$$T - T_0 = \frac{3\alpha K \varepsilon_{kk}}{C}. \quad (3.87)$$

Подставим (3.87) в (3.85), получим, что для адиабатического процесса

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} - \frac{9\alpha^2 K^2 \varepsilon_{kk}}{C} \delta_{ik}$$

или

$$\sigma_{ik} = \left(\lambda - \frac{9\alpha^2 K^2}{C} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \quad (3.88)$$

Отсюда адиабатический модуль упругости будет равен

$$\lambda_a = \lambda - \frac{9\alpha^2 K^2}{C}.$$

Модуль упругости при адиабатическом процессе не изменяется

$$\mu_a = \mu.$$

Определим физический смысл константы C . Константа

$$C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_0 = - \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_0.$$

С другой стороны теплоемкость единицы объема вещества равна

$$c_v = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_0.$$

Сравнивая два последних выражения, получим, что

$$C = - \frac{c_v}{T_0}.$$

Отсюда адиабатический модуль упругости будет равен

$$\lambda_a = \lambda + \frac{9\alpha^2 K^2 T_0}{c_v}. \quad (3.89)$$

Пользуясь формулой (3.58), (3.59) и (3.89), можно получить соотношения между адиабатическими и изотермическими модулями Юнга и коэффициентом Пуассона.

4.2. Упругие волны в изотропной среде

Упругие волны малой амплитуды являются звуковыми волнами. Деформация в каждом элементе объема среды совершается адиабатически. Рассмотрим смещение изотропной упругой среды в неограниченном пространстве в отсутствии объемных сил. В линейной теории упругости перемещения полагаются малыми. Поэтому будем исходить из уравнения Ламэ

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda_a + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.90)$$

Перейдем в уравнении Ламэ от постоянных λ_a и μ к другим постоянным c_1 и c_2 по формулам

$$c_1^2 = \frac{\lambda_a + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (3.91)$$

физический смысл которых выясним ниже. Выражая λ_a и μ через новые постоянные c_1 и c_2 , и подставляя далее в уравнение (3.90), получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} + c_2^2 \Delta \mathbf{u}. \quad (3.92)$$

Преобразованное уравнение Ламэ сведем к системе двух уравнений, из которых одно описывает распространение продольной упругой волны со скоростью c_1 , а другое – распространение поперечной упругой волны со скоростью c_2 . Для этого, согласно теореме Гельмгольца, представим вектор перемещения \mathbf{u} в виде суммы двух векторов – потенциального (\mathbf{u}_1) и соленоидального (\mathbf{u}_2):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (3.93)$$

где

$$\mathbf{u}_1 = \text{grad } \Phi, \quad \mathbf{u}_2 = \text{rot } \Psi.$$

Здесь Φ – скалярный потенциал, а Ψ – векторный потенциал. Для смещений \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 выполняются соотношения

$$\text{rot } \mathbf{u}_1 = \text{rot grad } \Phi = 0, \quad (3.94)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_2 = \text{div rot } \Psi = 0. \quad (3.95)$$

Подставим выражение (3.93) в (3.92) и учитывая равенства (3.94) и (3.95), а также то, что лапласиан от вектора смещения

$$\Delta \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u}_1 - \text{rot rot } \mathbf{u}_2,$$

в итоге получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = c_1^2 \text{grad div } \mathbf{u}_1 - c_2^2 \text{rot rot } \mathbf{u}_2. \quad (3.96)$$

Исключим из уравнения (3.96) вектор \mathbf{u}_2 . Для этого применим к левой и правой частям уравнения (3.96) операцию div . Учитывая, что согласно (3.95) $\text{div } \mathbf{u}_2 = 0$, и то, что

$$\text{div grad} \equiv \Delta, \quad \text{div rot} \equiv 0,$$

получим

$$\text{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0.$$

При этом

$$\text{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0,$$

так как \mathbf{u}_1 – потенциальный вектор. Если div и rot некоторого вектора равны нулю, то и сам вектор тождественно равен нулю. Следовательно

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3.97)$$

то есть вектор \mathbf{u}_1 подчиняется волновому уравнению (3.97). Уравнение (3.97) описывает волны, распространяющиеся со скоростью c_1 . Эти волны являются волнами сжатия и растяжения, так как $\text{div } \mathbf{u}_1 \neq 0$. Скорость распространения волн сжатия и растяжения

$$c_1 = \left(\frac{\lambda_a + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Теперь из уравнения (3.96) исключим вектор \mathbf{u}_1 . Для этого применим к левой и правой частям уравнения (3.96) операцию rot . Далее учтем, что согласно (3.94) $\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0$, и то, что

$$\text{rot grad} \equiv 0,$$

получим

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} + c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 \right) = 0. \quad (3.98)$$

Как известно, для соленоидального вектора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 = -\Delta \mathbf{u}_2.$$

С учетом этого уравнение (3.98) примет вид

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 \right) = 0.$$

Согласно (3.95), для соленоидального поля

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 \right) = 0.$$

Как уже отмечалось, если rot и div от вектора равны нулю, то и сам вектор равен нулю. Таким образом

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 = 0, \quad (3.99)$$

то есть также получили волновое уравнение. Уравнение (3.99) описывает волны, распространяющиеся со скоростью c_2 . Эти волны являются волнами сдвига, так как $\operatorname{rot} \mathbf{u}_2 \neq 0$. Скорость распространения волн сдвига

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Определим характер волн. Представим решение волновых уравнений (3.97) и (3.99) в виде плоских монохроматических волн смещения

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)], \quad (3.100)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2 \exp[i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)], \quad (3.101)$$

где \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 – волновые векторы. Подставим решение (3.100) в волновое уравнение (3.97) и условие (3.94), получим

$$\frac{\omega}{k_1} = c_1, \quad [\mathbf{k}_1 \mathbf{A}_1] = 0. \quad (3.102)$$

Согласно (3.102) векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{A}_1 параллельны. Следовательно, волны сжатия и растяжения являются продольными волнами.

Теперь подставим решение (3.101) в волновое уравнение (3.99) и условие (3.95), получим

$$\frac{\omega}{k_2} = c_2, \quad \mathbf{k}_2 \mathbf{A}_2 = 0. \quad (3.103)$$

Согласно (3.103) векторы \mathbf{k}_2 и \mathbf{A}_2 перпендикулярны. Следовательно, волны сдвига являются поперечными волнами.

Скорость распространения продольных волн c_1 всегда больше скорости распространения поперечных волн c_2 :

$$c_1^2 = \frac{\lambda_a + 2\mu}{\rho} = \left(2 + \frac{\lambda_a}{\mu}\right) c_2^2.$$

В сейсмологии продольную волну, приходящей первой, называют первичной, а поперечную, приходящую второй – вторичной. Измеряя промежуток времени прихода сигнала от первичной и вторичной волн, можно определить расстояние, где произошло землетрясение или взрыв. А если имеется две сейсмостанции, то можно определить и координату места взрыва или землетрясения.

4.3. Упругие волны в кристалле

Распространение упругих волн в анизотропной среде, т. е. в кристалле, отличается от распространения волн в изотропной среде. Законы распространения упругих волн в кристаллах вытекают из общих уравнений движения упруго деформированной среды, полученных в § 1. Запишем уравнение (3.6) в пренебрежении объемными силами

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (3.104)$$

Далее в (3.104) учтем, что

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= C_{iklm} \varepsilon_{lm}, \\ \varepsilon_{lm} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right). \end{aligned}$$

В итоге выражение (3.104) примет вид

$$\rho \ddot{u}_i = C_{iklm} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} C_{iklm} \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} \right). \quad (3.105)$$

Изменяя в выражении

$$C_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m}$$

обозначения немых индексов l на m и m на l , получим

$$C_{ikml} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Вследствие симметрии тензора C_{ikml} по второй паре индексов оба слагаемых в (3.105) в скобках будут равны между собой. В результате уравнения движения принимают вид

$$\rho \ddot{u}_i = C_{ijlm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l}. \quad (3.106)$$

Уравнения движения (3.106) являются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка и описывают колебательные процессы в упругой среде, т. е. распространение упругих волн в кристалле. Коэффициенты C_{ijlm} в (3.106) являются адиабатическими упругими модулями.

Решение уравнения (3.106) имеет вид плоской волны:

$$u_i = u_{0i} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (3.107)$$

где \mathbf{k} – волновой вектор упругой волны; ω – круговая частота. Подставим решение (3.107) в (3.106), получим

$$\rho\omega^2 u_i = C_{ijlm} k_j k_l u_m. \quad (3.108)$$

Далее учтем, что смещение

$$u_i = u_m \delta_{im}.$$

С учетом данного выражения для u_i уравнение (3.108) преобразуется к виду

$$(C_{ijlm} k_j k_l - \rho\omega^2 \delta_{im}) u_m = 0. \quad (3.109)$$

Уравнение (3.109) называется уравнением Кристоффеля.

Обозначим сумму по j и l :

$$C_{ijlm} k_j k_l = L_{im}$$

и учитывая, что

$$L_{im} = L_{mi},$$

преобразуем (3.109) к виду

$$(L_{im} - \rho\omega^2 \delta_{im}) u_m = 0. \quad (3.110)$$

Выражение (3.110) является системой трех однородных уравнений первой степени относительно неизвестных u_1 , u_2 и u_3 :

$$\begin{aligned} (L_{11} - \rho\omega^2) u_1 + L_{12} u_2 + L_{13} u_3 &= 0, \\ L_{12} u_1 + (L_{22} - \rho\omega^2) u_2 + L_{23} u_3 &= 0, \\ L_{31} u_1 + L_{23} u_2 + (L_{33} - \rho\omega^2) u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Так как компоненты смещений u_1 , u_2 и u_3 независимы, то нетривиальному решению системы (3.111) отвечает равенство нулю определителя коэффициентов уравнений

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \rho\omega^2 & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} - \rho\omega^2 & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} - \rho\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.112)$$

Явные выражения для коэффициентов L_{im} в 6-компонентной записи имеют вид

$$L_{11} = C_{11}k_1^2 + C_{66}k_2^2 + C_{55}k_3^2 + 2(C_{16}k_1k_2 + C_{15}k_1k_3 + C_{56}k_2k_3),$$

$$L_{22} = C_{66}k_1^2 + C_{22}k_2^2 + C_{44}k_3^2 + 2(C_{26}k_1k_2 + C_{46}k_1k_3 + C_{24}k_2k_3),$$

$$L_{33} = C_{55}k_1^2 + C_{44}k_2^2 + C_{33}k_3^2 + 2(C_{45}k_1k_2 + C_{35}k_1k_3 + C_{34}k_2k_3),$$

$$L_{12} = C_{16}k_1^2 + C_{26}k_2^2 + C_{46}k_3^2 + (C_{12} + C_{66})k_1k_2 + \\ + (C_{14} + C_{56})k_1k_3 + (C_{46} + C_{25})k_2k_3,$$

$$L_{13} = C_{15}k_1^2 + C_{46}k_2^2 + C_{35}k_3^2 + (C_{14} + C_{56})k_1k_2 + \\ + (C_{13} + C_{55})k_1k_3 + (C_{36} + C_{45})k_2k_3,$$

$$L_{23} = C_{56}k_1^2 + C_{24}k_2^2 + C_{34}k_3^2 + (C_{46} + C_{25})k_1k_2 + \\ + (C_{36} + C_{45})k_1k_3 + (C_{23} + C_{44})k_2k_3.$$

Уравнение (3.112) является уравнением третьей степени относительно ω^2 и определяет зависимость частоты упругих волн от волнового вектора и называется дисперсионным уравнением. Для каждого заданного значения волнового вектора \mathbf{k} имеется в общем случае три положительных значения частоты: ω_1 , ω_2 , ω_3 . Данным частотам соответствуют три независимых упругих волны с фазовыми скоростями

$$v_i = \frac{\omega_i}{k}, \quad i = 1, 2, 3$$

Подставляя поочередно найденные значения частот колебаний в уравнение (3.111) определим компоненты векторов смещений u_1 , u_2 и u_3 для каждой из трех упругих волн. Направления

поляризации (направления вектора смещения \mathbf{u}) трех волн с одним и тем же волновым вектором \mathbf{k} взаимно перпендикулярны.

Скорость распространения волны (групповая скорость) равна

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (3.113)$$

Упругие волны в кристаллах, вследствие анизотропии не являются ни чисто продольными, ни чисто поперечными волнами. Направление распространения волны в общем случае не совпадает с направлением вектора \mathbf{k} .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бреховских, Л. М. Введение в механику сплошных сред / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
2. Бондарь, В.Д. Основы теории упругости / В.Д. Бондарь, – Новосибирск: НГУ, 2004. – 260 с.
3. Кац, А.М. Теория упругости / А. М. Кац. – Санкт-Петербург: Лань, 2002. – 208 с.
4. Кацнельсон, А.А. Введение в физику твердого тела / А.А. Кацнельсон. – М.: МГУ, 1984. – 296 с.
5. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1978. – 792 с.
6. Ландау, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
7. Лотов, К. В. Физика сплошных сред / К. В. Лотов. – Москва – Ижевск, 2002. – 144 с.
8. Най, Дж. Физические свойства кристаллов / Дж. Най. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 388 с.
9. Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М.: Издательство Московского университета, 1978. – 576 с.
10. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 1 Механика / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1985. – 388 с.
11. Федоров, Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
12. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Т. 7. Физика сплошных сред / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1977. – 288 с.
13. Хан, Х. Теория упругости / Х. Хан. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
14. Черняк, В. Г. Механика сплошных сред / В. Г. Черняк, П. Е. Суетин. – М.: Физматлит, 2006. – 352 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	4
Глава 1. Виды деформаций упругих твердых тел.....	5
§ 1. Закон Гука.....	5
§ 2. Деформация прямоугольного параллелепипеда.....	8
§ 3. Деформация сдвига.....	11
§ 4. Задача о бруске с закрепленными боковыми границами.....	14
§ 5. Кручение стержня.....	16
§ 6. Деформация изгиба.....	18
6.1. Изгиб балки.....	18
6.2. Деформация консольной балки.....	21
6.3. Продольный прогиб.....	22
§ 7. Энергия упругой деформации.....	25
7.1. Деформация растяжения.....	25
7.2. Деформация сдвига.....	27
7.3. Деформация кручения.....	27
§ 8. Волны в стержнях.....	28
8.1. Продольные волны.....	28
8.2. Волны кручения.....	30
8.3. Волны изгиба в стержнях.....	33
Глава 2. Тензоры деформаций, поворота и напряжений.....	37
§ 1. Тензор деформаций.....	37
1.1. Вектор смещения.....	37
1.2. Физический смысл компонент тензора деформации.....	39
1.3. Условие сплошности.....	43
1.4. Эллипсоид деформации.....	47
1.5. Компоненты тензора деформации в цилиндрической и сферической системах координат.....	47
§ 2. Тензор поворота.....	48
§ 3. Тензор напряжений.....	50

3.1. Понятие напряжения.....	50
3.2. Условие равновесия при однородном напряжении.....	52
Глава 3. Основные уравнения теории упругости.....	59
§ 1. Уравнения движения и условия равновесия.....	59
1.1. Неоднородное напряжение.....	59
1.2. Условия равновесия в цилиндрической и сферической системах координат.....	62
1.3. Уравнения движения при вращательном движении.....	64
§ 2. Термодинамика деформирования.....	66
2.1. Работа внешних сил.....	66
2.2. Законы термодинамики и уравнения состояния.....	68
§ 3. Обобщенный закон Гука при изотермическом процессе...	69
3.1. Закон Гука для анизотропных тел.....	69
3.2. Закона Гука для изотропных тел.....	76
3.2.1. Вывод закона Гука для изотропных тел.....	76
3.2.2. Деформация всестороннего равномерного сжатия.....	78
3.2.3. Взаимосвязь между коэффициентами Ламэ, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона.....	79
3.2.4. Уравнение Ламэ.....	81
3.3. Энергия деформированного упругого тела.....	82
§ 4. Упругие волны.....	84
4.1. Неизотермическая деформация.....	84
4.2. Упругие волны в изотропной среде.....	87
4.3. Упругие волны в кристалле.....	91
Библиографический список.....	96
Оглавление.....	97

Ханефт
Александр Вилливич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Учебное пособие

Редактор

Подписано в печать 2.03.2009 г. Формат 60х84 1/16. Бумага
офсетная № 1. Печать офсетная.

Печ. л. 7. Уч.-изд. л. 6.2. Тираж 100 экз. Заказ №_____.

ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».
650043, Кемерово, ул. Красная, 6.