Глава 1. Общие принципы механики.

Оглавление

§1. Основные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Теорети́ческая меха́ника** - наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел.

По Ньютону, « … механика есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное».

Прежде чем перейти к разговору об основной задаче механики, давайте сформулируем ряд определений.

Одним из основных понятий механики является понятие материальной точки. Вместо термина материальная точка мы будем часто говорить о "частицах".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Материальной точкой** понимается тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения.

Естественно, возможность такого пренебрежения зависит от конкретных условий той или иной задачи. Например, планеты можно считать материальными точками, рассматривая их движение вокруг Солнца.

Мы привыкли к тому, что положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором $\vec{R}$, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x, y, z. При этом скоростью называется первая производная по времени:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \dot{\vec{R}},$$

а ускорением материальной точки называется вторая производная по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{R}}.$$

Напоминаю, что обозначение дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$ эквивалентно обозначению точкой над буквой, то есть

$$\frac{d}{dt} \equiv {}^{\bullet}.$$

Для определения положения системы из N независимых материальных точек в пространстве надо задать N радиус-векторов, т.е. $3N$ координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Числом степеней свободы** (будем обозначать буквой $\boldsymbol{s}$) механической системы называют число независимых величин, задание которых необходимо задать для однозначного определения положения этой системы в пространстве.

Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат, которые принято называть обобщенными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Любые s величин q_1, q_2, …, q_s описывающие положение механической системы (с s степенями свободы), называют ее **обобщенными координатами**, а производные $\dot{q}_s$ ее **обобщенными скоростями**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Законом движения** зависимость обобщенных координат описывающих положение механической системы от времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, называются **уравнениями движения**.

Теперь у нас есть вся информация, что бы сформулировать основную задачу механики.

$\boxed{\text{ВАЖНО!}}$ *Основная задача механики заключается в определении закона движения механической системы.*

§2. Принцип наименьшего действия

$\boxed{\text{ВАЖНО! ИЗ ОПЫТА[1]!}}$ *Как показывает опыт, одновременное задание всех координат и скоростей полностью определяет, состояние механической системы и позволяет в принципе предсказать дальнейшее ее движение. С математической точки зрения это значит, что заданием всех координат* q *и скоростей* $\dot{q}_s$ *в некоторый момент времени однозначно определяется также и значение ускорений* $\ddot{q}_s$ *в этот момент.*

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым принципом наименьшего действия (или принципом Гамильтона).

$\boxed{\text{ВАЖНЕЙШИЙ ПРИНЦИП ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ!}}$ **Принцип Гамильтона** заключается в том, что каждая механическая система характеризуется функцией

$$L\left(q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_s,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \dot{q}_s,\, t\right), \tag{2.1}$$

зависящей от обобщенных координат, обобщенных скоростей и быть может времени и которая удовлетворяет следующему условию:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2.2}$$

имел наименьшее (или более обобщенно - экстремальное) значение[2].

$\boxed{\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ}}$ Функция (2.1) называется **функцией Лагранжа**, а интеграл (2.2) – **действием**.

[1] Здесь и далее к фразам типа “из опыта” нужно относиться с долей иронии и поправкой на время, когда этот опыт был приобретен.

[2] Вольная трактовка принципа Гамильтона: природа устроена так, что при переходе от одного состояния к другому действие минимально (вообще говоря экстремально).

§3. Уравнения Лагранжа

Исходя из принципа наименьшего действия, получим уравнения движения механической системы. Для этого нам необходимо минимизировать действие *S*, то есть интеграл (2.2).

Для упрощения, но не теряя общности, предположим, что система обладает всего одной степенью свободы, так что должна быть определена всего одна функция $q(t)$.

Пусть $q = q(t)$ есть как раз та функция, для которой *S* имеет минимум. Это значит, что *S* возрастает при замене $q(t)$ на любую функцию вида

$$q(t) + \delta q(t), \qquad (3.1)$$

где $\delta q(t)$ - функция, малая во всем интервале времени от t_1 до t_2 (ее называют вариацией функции $q(t)$); поскольку при $t = t_1$ и $t = t_2$ все сравниваемые функции (3.1) должны принимать одни и те же значения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, то должно быть выполнено следующее условие:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \qquad (3.2)$$

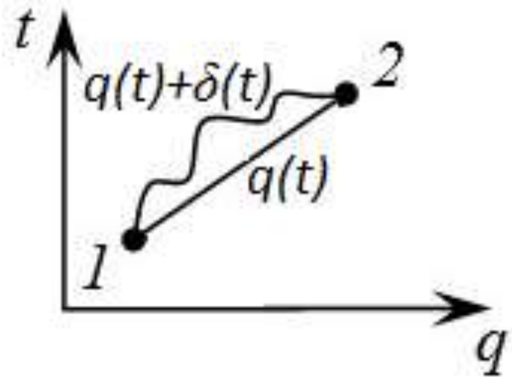

Рисунок 3.1.

Условием “экстремальности” действия S является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt = 0 \tag{3.3}$$

.

Разложим эту разность по степеням δq и $\delta\dot q$ (в подынтегральном выражении). Имеем:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)dt \cong$$
$$\cong \int_{t_1}^{t_2}\left[L(q,\dot q,t)+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta\dot q\right]dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta\dot q\right]dt = 0$$

Замечая, что $\delta\dot q = \frac{d}{dt}\delta q$, проинтегрируем второе слагаемое под интегралом последнего равенства по частям[3]:

$$\delta S \cong \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta\dot q\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{G}\underbrace{\frac{d}{dt}\delta q}_{\frac{dF}{dt}}\right]dt =$$
$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{G}\underbrace{\delta q}_{F}\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q-\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{\frac{dG}{dt}}\underbrace{\delta q}_{F}\right]dt =$$
$$= \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]\delta q dt = 0$$

В силу условий (3.2) первое слагаемое в последнем выражении обращается в нуль:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\underbrace{\delta q(t_2)}_{=0} - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\underbrace{\delta q(t_1)}_{=0} = 0\,.$$

В результате:

---

[3] $d(FG) = GdF + FdG \Rightarrow GdF = d(FG) - FdG \Rightarrow \int GdF = FG - \int FdG$ или

$$\int_{t_1}^{t_2} G\frac{dF}{dt}dt = FG\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dG}{dt}dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q dt=0.$$

Этот интеграл должен обращаться в нуль для любых функций δq. Это возможно только в том случае, если выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю, то есть:

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0. \quad (3.4)$$

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться s различных функций $q_i(t)$. Очевидно, что тогда мы получаем s уравнений аналогичных уравнению (3.4):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0,\ \text{где } i=(1,2,\ldots,s)}. \quad (3.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Полученные уравнения движения (3.4) называются **уравнениями Лагранжа**.

Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения (3.5) устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т.е. представляют собой уравнения движения системы. С математической точки зрения уравнения (3.5) составляют систему s уравнений второго порядка для s неизвестных функций $q_i(t)$. Общее решение такой системы содержит $2s$ произвольных постоянных.

ВАЖНО! *Для их определения и тем самым полного определения движения механической системы необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени, например знание начальных значений всех координат и скоростей.*

§4. Свойства функции Лагранжа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ **Замкнутой** называется механическая система, не взаимодействующая ни с какими посторонними телами.

Пусть механическая система состоит из двух частей A и B, каждая из которых, будучи замкнутой, имела бы в качестве функции Лагранжа соответственно функции L_A и L_B. Тогда в пределе, при разведении частей настолько далеко, чтобы взаимодействием между ними можно было пренебречь, Лагранжева функция всей системы стремится к пределу

$$\lim L = L_A + L_B. \tag{4.1}$$

Формула 4.1 говорит об аддитивности функции Лагранжа.

ВАЖНО! *Свойство аддитивности функции Лагранжа выражает собой тот факт, что уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.*

ВАЖНО! *Функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени.*

Покажем это. Рассмотрим две функции $L'(q,\dot{q},t)$ и $L(q,\dot{q},t)$, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(q,t)$:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t). \tag{4.2}$$

Покажем, что уравнения движения механических систем, которые описываются этими функциями Лагранжа, полностью эквивалентны.

$$\frac{\partial L'}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial\left[L\left(q,\dot{q},t\right)+\frac{d}{dt}f\left(q,t\right)\right]}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\left[L\left(q,\dot{q},t\right)+\frac{d}{dt}f\left(q,t\right)\right]}{\partial \dot{q}}=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial}{\partial q}\frac{d}{dt}f\left(q,t\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}f\left(q,t\right)=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\right]-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\right]=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial t}\right]-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial t}\right]=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{\partial f}{\partial t}}_{\equiv 0}=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q}-\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q}-\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial t}=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

то есть уравнения движения совпадают. Именно это и требовалось показать.

Вообще говоря, можно было бы не делать все эти выкладки, а просто записать действие S':

$$S'=\int_{t_1}^{t_2}L'(q,\dot{q},t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{df}{dt}\,dt=$$
$$=S+f(q^{(2)},t_2)-f(q^{(1)},t_1),$$

откуда видно, что S' отличается от S слагаемым, которое исчезнет при варьировании.

§5. Инерциальные системы отсчета

Для изучения механических явлений необходимо иметь систему отсчета. В различных системах отсчета законы движения имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики выглядели бы наиболее просто.

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то, тем не менее, его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны. То же самое относится в общем случае и ко времени, которое будет неоднородным, т.е. его различные моменты неэквивалентными. Усложнение, которое вносили бы такие свойства пространства и времени в описание механических явлений, очевидно. Как, например, свободное (т.е. не подвергающееся внешним воздействиям) тело не могло бы покоиться: если скорость тела в некоторый момент времени и равна нулю, то уже в следующий момент тело начало бы двигаться в некотором направлении.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Пространство называется **<u>однородным</u>**, если параллельный перенос системы не изменяет ее механической свойств.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ Пространство называется **<u>изотропным</u>**, если поворот системы на произвольный угол не изменяет ее механических свойств.

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ **<u>Однородность времени</u>** - это равнозначность всех моментов времени

Равнозначность моментов времени заключающаяся в том, что замена момента времени t_1 моментом времени t_2 без изменения значений координат и скоростей тел не изменяет механических свойств системы.

ВАЖНО! ИЗ ОПЫТА! *Оказывается, что всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время однородным. Именно в этой системе отсчета законы механики наиболее простые.*

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ **<u>Инерциальной</u>** называется система отсчёта, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время — однородным.[4]

[4] Часто можно встретить альтернативное определение: Инерциальная система отсчёта это система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно или покоятся. Вообще такое определение является следствием однородности и изотропии пространства. Это более подробно будет рассматриваться в §6.

$\boxed{\text{ВАЖНО!}}$ *Законы Ньютона, а также все остальные аксиомы динамики в классической механике формулируются по отношению к инерциальным системам отсчёта.*

§6. Закон инерции

Рассмотрим свободно движущуюся материальную точку в инерциальной системе отсчета. Попытаемся сделать некоторые заключения о виде функции Лагранжа этой точки. Для простоты и наглядности будем использовать систему декартовых координат.

Однородность пространства и времени означает, что эта функция не может содержать явным образом ни радиус-вектора $\vec{R}$ точки, ни времени t, т.е. L является функцией лишь скорости $\vec{V}$.

В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора $\vec{V}$, поэтому она является функцией лишь от его абсолютной величины, т.е. от квадрата $\vec{V}^2 = V^2$:

$$L = L\left(V^2\right). \tag{6.1}$$

Ввиду независимости функции Лагранжа от $\vec{R}$ имеем $\partial L / \partial \vec{R} = \vec{0}$, и потому уравнения Лагранжа принимают вид[5]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \vec{0},$$

откуда $\partial L / \partial \vec{V} = const$. Но поскольку (как мы только что установили) $\partial L / \partial \vec{V}$ является функцией только квадрата скорости, то отсюда, очевидно, следует, что и $\vec{V} = \overrightarrow{const}$, т.к. $\partial L\left(V^2\right) / \partial \vec{V} = \partial L / \partial \vec{V}\, 2\vec{V} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \partial L / \partial \vec{V} = const$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в инерциальной системе отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью (включая состояние покоя). Это утверждение составляет содержание так называемого

[5] Под производной скалярной величины по вектору подразумевается вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора.

закона инерции.

ЗАКОН! **Закон инерции** - это утверждение о том, что в инерциальной системе отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью.

ЗАМЕЧАНИЕ Важно отметить, что идеи этого и предыдущего параграфов составляют *первый законом Ньютона*, который в современной физике принято формулировать следующим образом. Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

§7. Принцип относительности Галилея

Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета мы введем другую систему, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то законы свободного движения по отношению к этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной скоростью.

Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики. Это утверждение составляет содержание так называемого принципа относительности Галилея, важнейшего принципа механики.

ВАЖНЕЙШИЙ ПРИНЦИП ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ!

Принцип относительности Галилея – это утверждение о том, что существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета, в которых одинаковы все законы механики.

Везде в дальнейшем, где обратное не оговорено особо, мы будем рассматривать только инерциальные системы отсчета.

Полная механическая эквивалентность всего бесчисленного множества таких систем показывает в то же время, что не существует никакой одной «абсолютной» системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам.

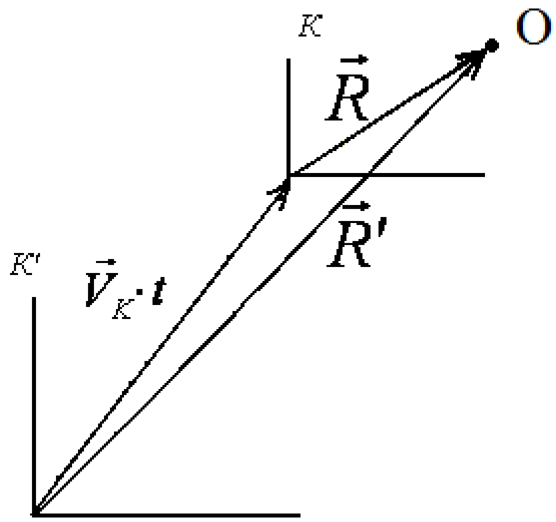

Рис. 7.1.

Координаты $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ одной и той же точки в двух различных системах отсчета *K* и *K'*, из которых первая движется относительно второй со скоростью $\vec{V}_K$ (см. рис. 7.1), связаны друг с другом соотношением

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}' - \vec{V}_K \cdot t}. \tag{7.1}$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах:

$$\boxed{t = t'}. \tag{7.2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ Предположение об абсолютности времени лежит в самой основе представлений классической механики.

$\boxed{\text{ОПРЕДЕЛЕНИЕ}}$ Формулы (7.1) и (7.2) составляют **преобразование Галилея**.

Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений движения механики по отношению к этому преобразованию.

§8. Функция Лагранжа свободной материальной точки. Масса.

Переходя к определению вида функции Лагранжа, рассмотрим сначала простейший случай свободного движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета.

Как мы уже видели в §6, функция Лагранжа в этом случае может зависеть лишь от квадрата вектора скорости. Для выяснения вида этой зависимости воспользуемся принципом относительности Галилея. Если инерциальная система отсчета *К* движется относительно инерциальной системы отсчета *К′* с бесконечно малой скоростью е, то $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\varepsilon}$. Необходимо подобрать такой вид функции Лагранжа, чтобы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, материальная точка, которая двигалась с постоянной скоростью или покоилась, сохраняла состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. При этом, функция Лагранжа как в новой, так и в старой системах координат, должна зависеть от квадрата скорости с точностью до полной производной по времени от функции, зависящей от координат и времени:

$$L = L\left(V'^2\right) = L\left(V^2 + 2\left\langle \vec{V}, \vec{\varepsilon} \right\rangle + \varepsilon^2\right) \cong L\left(V^2 + 2V\varepsilon\right) \approx L\left(V^2\right) + \frac{\partial L}{\partial\left(V^2\right)} 2\left\langle \vec{V}, \vec{\varepsilon} \right\rangle$$

В этих выкладках мы провели разложение в ряд и пренебрегли бесконечно малыми высших порядков по степеням ε. Угловыми скобками обозначается скалярное произведение. Второй член последнего выражения будет полной производной по времени только в том случае, если он зависит от скорости $\vec{V}$ линейно:

$$\frac{\partial L}{\partial\left(V^2\right)} 2\left\langle \vec{V}, \vec{\varepsilon} \right\rangle = \frac{\partial L}{\partial\left(V^2\right)} 2\left\langle \frac{d\vec{R}}{dt}, \vec{\varepsilon} \right\rangle = \frac{d}{dt}\left[2\frac{\partial L}{\partial\left(V^2\right)} \left\langle \vec{R}, \vec{\varepsilon} \right\rangle \right].$$

Поэтому ${\partial L}/{\partial\left(V^2\right)}$ от скорости не зависит, а функция Лагранжа в рассматриваемом случае прямо пропорциональна квадрату скорости:

$$L = \frac{m}{2} V^2, \tag{8.1}$$

где m — постоянная.

Из того что функция Лагранжа такого вида удовлетворяет принципу относительности Галилея в случае бесконечно малого преобразования скорости, следует, что и функция Лагранжа удовлетворяет этому принципу и в случае конечной скорости $\vec{V}_K$ системы отсчета K относительно K'. Покажем это. Так как $\vec{V}_K = \overrightarrow{const} \neq \vec{f}(t)$, имеем:

$$\begin{aligned} L' = L\left(V'^2\right) &= \frac{m}{2} V'^2 = \frac{m}{2}\left(V^2 + 2\left\langle \vec{V}, \vec{V}_K \right\rangle + \vec{V}_K^2\right) = \\ &= \underbrace{\frac{m}{2} V^2}_{L} + 2\frac{m}{2}\left\langle \vec{V}, \vec{V}_K \right\rangle + \frac{m}{2}\vec{V}_K^2 = \\ &= L + \frac{d}{dt}\left[2\frac{m}{2}\left\langle \vec{R}, \vec{V}_K \right\rangle + \frac{m}{2}\vec{V}_K^2 t\right] \end{aligned}$$

Второй член является полной производной и может быть опущен. Это означает, что L и L' эквивалентны, что и требовалось показать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величину m в (8.1) называют **массой**.

В силу свойства аддитивности, функция Лагранжа системы невзаимодействующих N материальных точек представляет собой сумму функций Лагранжа каждой из этих точек, то есть:

$$\boxed{L = \sum_i \frac{m_i}{2} V_i^2}. \tag{8.2}$$

Полезно заметить, что

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}.$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги dl в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

и, следовательно,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

в цилиндрических

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

и

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2);$$

в сферических

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

и

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2).$$

§9. Функция Лагранжа ЗАМКНУТОЙ системы взаимодействующих материальных точек

Рассмотрим теперь замкнутую систему из N материальных точек, взаимодействующих только друг с другом.

ВАЖНО! ИЗ ОПЫТА! *Оказывается, что взаимодействие между материальными точками может быть описано прибавлением к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (8.2) определенной (зависящей от характера взаимодействия) функции координат.*

Обозначив эту функцию через -U, напишем

$$\boxed{L = \sum_n \frac{m_n}{2} V_n^2 - U\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, ..., \vec{R}_N\right)}, \tag{9.1}$$

где $\vec{R}_n$ - радиус-вектор n-й точки). Это есть общий вид функции Лагранжа замкнутой системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Сумму $T = \sum_n \frac{m_i}{2} V_n^2$ называют **кинетической энергией**, а функцию U — **потенциальной энергией** механической системы.

ВАЖНО! *Потенциальная энергия есть величина, определяемая лишь с точностью до прибавления к ней произвольной постоянной; такое прибавление не изменило бы уравнений движения. Наиболее естественный и обычно принятый способ выбора (калибровки) этой постоянной заключается в том, чтобы потенциальная энергия стремилась к нулю при увеличении расстояний между частицами.*

Тот факт, что потенциальная энергия зависит только от расположения всех материальных точек в один и тот же момент времени, означает, что изменение положения одной из них мгновенно отражается на всех остальных; можно сказать, что взаимодействия «распространяются» мгновенно.

Неизбежность такого характера взаимодействия в классической механике тесно связана с основными предпосылками последней — абсолютностью времени и принципом относительности Галилея. Если бы взаимодействие распространялось не мгновенно, т.е. с конечной скоростью, то эта скорость была бы различна в разных (движущихся друг относительно друга) системах отсчета, так как абсолютность времени автоматически означает применимость обычного правила сложения скоростей ко всем явлениям. Но тогда законы движения взаимодействующих тел были бы различны в разных (инерциальных) системах отсчета, что противоречило бы принципу относительности.

Мы говорили только об однородности времени. Вид функции Лагранжа (8.3) показывает, что время не только однородно, но и ***изотропно***, т.е. его свойства одинаковы по обоим направлениям. В самом деле, замена t на $-t$ оставляет функцию Лагранжа, а следовательно, и уравнения движения неизменными. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т.е. такое, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы.

§10. Функция Лагранжа НЕЗАМКНУТОЙ механической системы

До сих пор мы говорили только о замкнутых системах. Рассмотрим теперь незамкнутую систему A, взаимодействующую с другой системой B, совершающей заданное движение, то есть для системы B известен закон движения. В таком случае говорят, что система A движется в заданном внешнем поле (создаваемом системой B). Поскольку уравнения движения получаются из принципа наименьшего действия путем независимого варьирования каждой из координат (т.е. как бы считая остальные известными), мы можем для нахождения функции Лагранжа L_A системы A воспользоваться лагранжевой функцией L всей системы $A + B$, заменив в ней координаты q_B заданными функциями времени.

Предполагая систему $A + B$ замкнутой, будем иметь

$$L = T_A\left(q_A, \dot{q}_A\right) + \underbrace{T_B\left(q_B, \dot{q}_B\right)}_{T_B(t)} - U\left(q_A, q_B\right)$$

где первые два члена представляют собой кинетические энергии систем A и B, а третий член — их совместную потенциальную энергию. Подставив вместо q_B заданные функции времени и опустив член $T_B\left(q_B, \dot{q}_B\right)$, зависящий только от времени (и поэтому являющийся полной производной от некоторой другой функции времени), получим

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа обычного типа с тем лишь отличием, что теперь потенциальная энергия может зависеть от времени явно.

§11. Уравнения Ньютона

Рассмотрим замкнутую систему из N материальных точек. Зная функцию Лагранжа, мы можем составить уравнения движения для каждой точки этой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_n} - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_n} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}_n}. \tag{11.1}$$

Подставив сюда (9.1), получим

$$\boxed{m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}_n} \Leftrightarrow \vec{F}_n = m_n \vec{a}}. \tag{11.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнения движения, записанные в форме (11.2), называются **уравнениями Ньютона**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Вектор $\vec{F}_n = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{R}_n}$, стоящий в правой части уравнений (11.2), называется **силой**, действующей на n-ю точку

Сила $\vec{F}_n$, также как и потенциальная энергия U зависит от координат всех частиц, но не от их скоростей. Уравнения (11.2) показывают поэтому, что и векторы ускорения частиц являются функциями только от координат.

ЗАМЕЧАНИЕ Соотношения (2.1) представляют собой *второй закон Ньютона*, который в современной физике принято формулировать так. В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.

§12. Функция Лагранжа в обобщенных координатах

Если для описания движения используются не декартовы координаты точек, а произвольные обобщенные координаты q_i, то для получения лагранжевой функции надо произвести соответствующее преобразование

$$x_i = f_i(q_1, q_2, ..., q_s),\ \dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

и т.д. Подставляя эти выражения в функцию

$$L = \frac{1}{2} \sum_n m_n \left(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2\right) - U\ ,$$

получим искомую функцию Лагранжа, которая будет иметь вид

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\,\dot{q}_k - U(q) = T(q,\dot{q}) - U(q)}, \tag{12.1}$$

где a_{ik} — функции только от координат. Кинетическая энергия в обобщенных координатах по-прежнему является ***квадратичной*** функцией скоростей, но может зависеть также и от координат.