



SORBONNE UNIVERSITÉ

RAPPORT

---

## Projet Maillage

---

*Groupe :*

Emilie BIEGAS

Vincent FU

Zitong YANG

Alix ZHENG

**Encadrant : Bertrand THIERRY**

10 mai 2020

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Qu'est ce qu'un maillage ?</b>	<b>4</b>
1.1 Définition . . . . .	4
1.2 Types de maillage . . . . .	4
<b>2 Comment générer un maillage conforme ?</b>	<b>6</b>
2.1 Premier algorithme : maillage conforme et structuré . . . . .	6
2.1.1 Maillage d'un carré unitaire . . . . .	6
2.1.2 Maillage d'un rectangle . . . . .	7
2.1.3 Exemples de maillages obtenus . . . . .	8
2.2 Second algorithme : maillage d'un nuage de points . . . . .	10
2.2.1 Le critère de Delaunay . . . . .	10
2.2.2 Propriétés importantes . . . . .	11
2.2.3 Quelques démonstrations des propriétés . . . . .	11
2.2.4 Principe de l'algorithme choisi . . . . .	16
2.2.5 Exemple de maillage obtenu . . . . .	17
2.2.6 Étude de la complexité . . . . .	18
2.2.7 Existence et Unicité d'un tel maillage . . . . .	19
2.3 Troisième algorithme : maillage d'un nuage de points . . . . .	20
2.3.1 Principe de l'algorithme choisi . . . . .	20
2.3.2 Lemme et démonstration . . . . .	24
2.3.3 Exemple de maillage obtenu . . . . .	25
2.3.4 Étude de la complexité . . . . .	26
2.4 Quatrième algorithme : maillage d'un polygone convexe . . . . .	27
2.4.1 Principe de l'algorithme choisi . . . . .	27
2.4.2 Exemples de maillages obtenus . . . . .	28
2.4.3 Étude de la complexité . . . . .	30
2.5 Maillage conforme d'un polygone non convexe . . . . .	31
2.5.1 Méthode 1 . . . . .	31
2.5.2 Méthode 2 . . . . .	33
<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

# INTRODUCTION

Dans le cadre de l'UE 3M101, nous avons choisi le projet *Maillage*.

Un maillage sert à discrétiser un domaine en simplexe. Ce projet consiste à trouver un maillage triangulaire d'un espace 2D.

Le maillage est présent dans différents domaines, il permet notamment d'aider à la résolution numérique des équations différentielles partielles.

Nous allons ainsi définir ce qu'est un maillage, puis vous présenter trois types de maillages : le maillage d'un rectangle, d'un nuage de points puis d'un polygone convexe. Enfin, nous ferons une ouverture vers un dernier type de maillage.

# 1 Qu'est ce qu'un maillage ?

Un maillage est une partition finie d'un domaine en éléments simples comme des polygones en 2D ou des polyèdres en 3D.

## 1.1 Définition

**Définition** : Maillage triangulaire ou Triangulation en 2D

Soient  $\Omega$  un domaine polygonal et  $\partial\Omega$  la frontière de ce polygone.  
Soit  $h$  le diamètre maximal d'un triangle.

Un maillage triangulaire de  $\Omega$  est un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de triangles  $K$  vérifiant :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K}$
- Pour  $K, K' \in \mathcal{T}_h$ ,

$$K \cap K' = \begin{cases} \emptyset \\ \text{une arête complète en commun entre } K \text{ et } K' \\ \text{un sommet en commun entre } K \text{ et } K' \end{cases}$$

## 1.2 Types de maillage

Il existe de nombreuses formes géométriques. De la même manière, on imagine facilement différentes manières de mailler une surface, bien que, dans le cadre de ce projet, nous n'utiliserons que des triangles. Nous allons donc ici présenter deux types de maillage (en utilisant dans notre cas des triangles).

### 1. Maillage structuré

Un maillage structuré est un maillage régulier, c'est à dire que les triangles sont placés de façon structurée et sont de taille régulière.

Il est possible de générer un maillage structuré dans un domaine simple comme dans une grille rectangulaire.

## 2. Maillage conforme

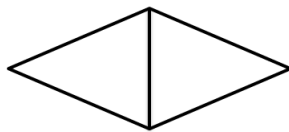
**Définition** : Maillage triangulaire conforme

Soient  $\Omega$  un domaine polygonal et  $\partial\Omega$  la frontière de ce polygone.  
Soit  $h$  le diamètre maximal d'un triangle.

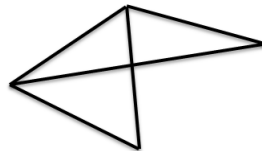
Un maillage triangulaire conforme de  $\Omega$  est un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de triangles  $K$  vérifiant :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K}$
- Tout triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  n'est pas d'intérieur vide et  $K \subseteq \overline{K}$
- Pour  $K, K' \in \mathcal{T}_h$ ,  $K \cap K'$  est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit à la totalité d'une arête en commun
- Toute arête d'un triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  est soit une arête complète d'un autre triangle  $K' \in \mathcal{T}_h$ , soit à une partie de  $\partial\Omega$

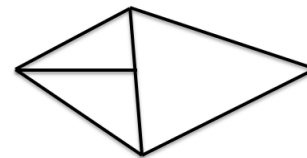
Voici des exemples de triangulations correctes et incorrectes :



correcte



incorrecte



incorrecte

## 2 Comment générer un maillage conforme ?

Nous cherchons à générer un maillage conforme. Nous avons cherché à mailler une grille rectangulaire et un nuage de points quelconques.

### 2.1 Premier algorithme : maillage conforme et structuré

#### 2.1.1 Maillage d'un carré unitaire

Nous allons tout d'abord effectuer le maillage d'un carré  $\Omega$  unitaire à l'aide d'un maillage régulier. Le domaine  $\Omega$  est tout d'abord décomposé en sous-carrés répartis de manière égale. Ces sous-carrés seront eux-même divisés en triangles (en traçant un segment entre deux sommets opposés dans chaque petit carré) pour obtenir un maillage conforme et régulier. Ainsi, nous obtenons les maillages suivants pour différentes tailles de carrés :

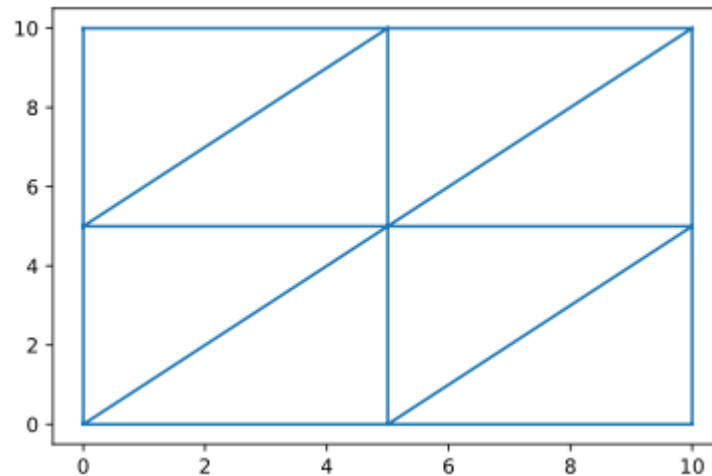


FIGURE 1 – Maillage d'un carré de côté 10 subdivisé en carrés de côtés 5

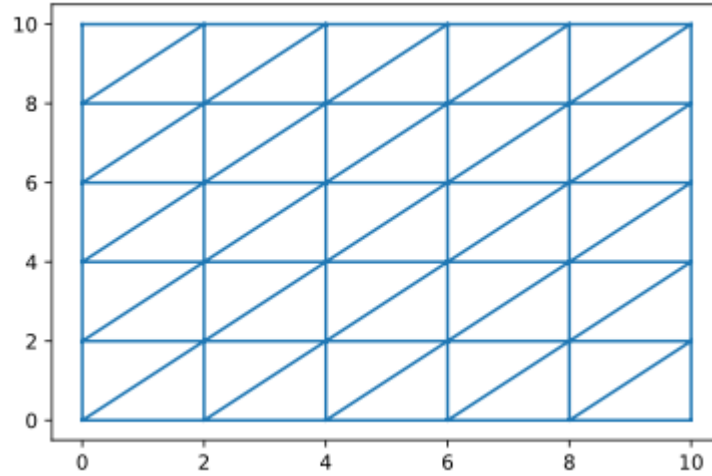


FIGURE 2 – Maillage d'un carré de côté 10 subdivisé en carrés de côtés 2

### 2.1.2 Maillage d'un rectangle

Nous allons à présent nous intéresser au maillage d'un rectangle : étant donné la largeur  $L_x$  et la longueur  $L_y$  du rectangle ainsi que la longueur maximale d'un côté du triangle du maillage en abscisse  $h_x$  et en ordonnée  $h_y$ , nous devons construire un maillage du rectangle en question et l'afficher.

Nous allons tout d'abord mailler le rectangle de côté  $n_x h_x$  sur  $n_y h_y$  où  $n_x$  est le plus grand entier tel que  $n_x h_x$  est inférieur à  $L_x$ . De même,  $n_y$  est le plus grand entier tel que  $n_y h_y < L_y$ . Ce dernier est en fait un sous-rectangle de celui étudié. Il va être plus facile à mailler étant donné que la longueur de ses côtés divise la longueur maximale des côtes des triangles.

Pour ce faire, nous allons tout d'abord numéroté les sommets de ce rectangle en espaçant chaque point de  $h_x$  en abscisse et de  $h_y$  en ordonnée. Nous allons ensuite, de la même manière qu'avec un carré unitaire, créer des triangles en coupant chaque petit rectangle (composés de deux point consécutifs en abscisse et des deux juste en dessous) en deux.

Il ne reste plus qu'à s'occuper des extrémités, c'est à dire de la dernière colonne (qui va créer des rectangles ayant une largeur inférieure à  $h_x$ ), de la dernière ligne (qui va créer des rectangles ayant une longueur inférieure à  $h_y$ )

et du dernier point (qui va créer un rectangle de largeur  $i$  et de longueur  $j$  avec  $i < h_x$  et  $j < h_y$ ).

### 2.1.3 Exemples de maillages obtenus

Ainsi, nous obtenons les maillages suivants pour différentes tailles de rectangles (en mettant en avant certaines parties de l'algorithme) :

Mise en avant de la dernière ligne :

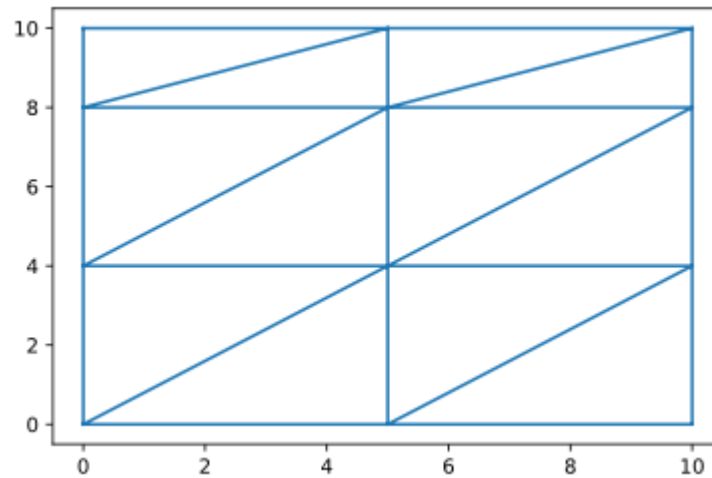


FIGURE 3 – Maillage d'un rectangle :  $L_x = 10$ ,  $L_y = 10$ ,  $h_x = 5$  et  $h_y = 4$



Mise en avant de la dernière colonne :

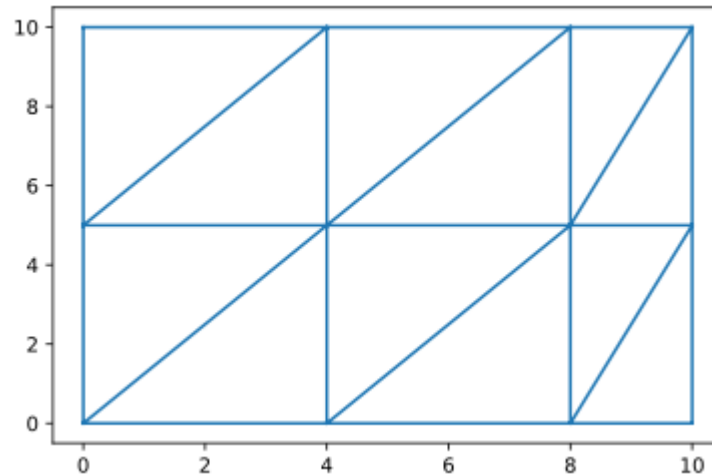


FIGURE 4 – Maillage d'un rectangle :  $L_x = 10$ ,  $L_y = 10$ ,  $h_x = 4$  et  $h_y = 5$

Maillage plus général :

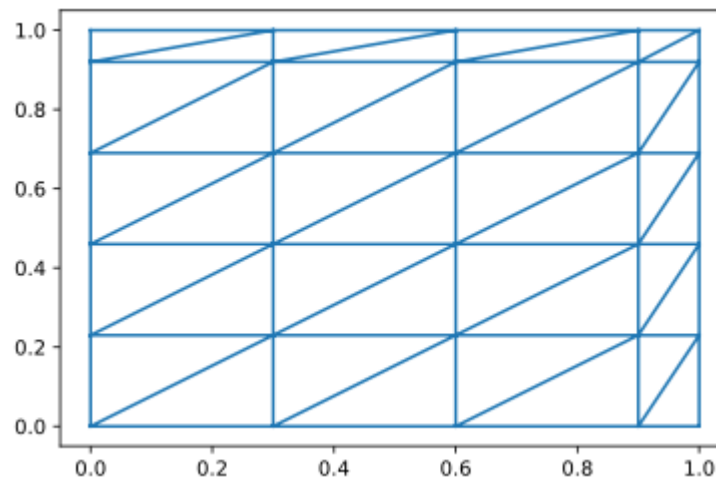


FIGURE 5 – Maillage d'un rectangle :  $L_x = 1$ ,  $L_y = 1$ ,  $h_x = 0.3$  et  $h_y = 0.23$

Ce dernier est un maillage sur un rectangle plus général (pas de régularités particulières sur la longueur des côtés). Nous croiserons donc surtout ce genre de cas lors du maillage d'un rectangle (en utilisant notre algorithme par exemple).

## 2.2 Second algorithme : maillage d'un nuage de points

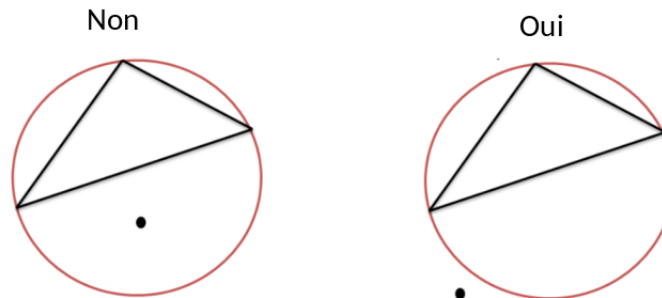
Pour commencer, on note que les algorithmes permettant de mailler un nuage de points se basent sur le critère de Delaunay afin que les triangles du maillage soient les plus réguliers possibles. Nous voulons en effet mailler le domaine avec des triangles les plus équilatéraux possibles (et par conséquent, pas trop "aplatis").

### 2.2.1 Le critère de Delaunay

**Critère de Delaunay :**

Une triangulation sera dite de Delaunay si tout cercle circonscrit à un triangle ne contient aucun sommet en son intérieur.

Triangle de Delaunay :



Le critère de Delaunay permet de garder une certaine régularité au niveau des angles des triangles et de la taille des triangles, évitant ainsi des triangles "allongés". Il permet de générer un maillage conforme.

### 2.2.2 Propriétés importantes

**Propriété 1 :** Un quadrilatère est inscriptible si et seulement si, deux angles opposés sont égaux ou supplémentaires.

**Propriété 2 :** La somme des angles d'un quadrilatère est de  $360^\circ$ .

**Propriété 3 :** Deux triangles adjacents sont de Delaunay si et seulement si la somme des angles opposés au segment qu'ils ont en commun est inférieure à  $180^\circ$ .

**Propriété 4 :** Si le cercle circonscrit à chacun des triangles du maillage est vide (ne contient aucun point) alors tout le maillage vérifie le critère de Delaunay.

**Propriété 5 :** Les intérieurs des triangles de Delaunay sont deux à deux dis-joints.

**Propriété 6 :** Soit  $T$  une triangulation. Si le critère de Delaunay est vérifié pour chaque configuration de deux éléments adjacents de  $T$  alors le critère est vrai partout et  $T$  est une triangulation de Delaunay.

Nous allons alors démontrer certaines de ces propriétés. Nous admettrons pour l'instant le reste de celles-ci.

### 2.2.3 Quelques démonstrations des propriétés

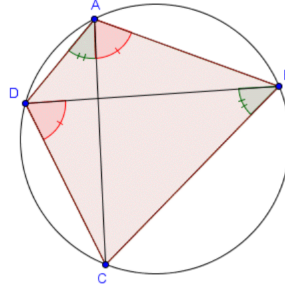
#### 1. Démonstration de la propriété 1 :

(-) Montrons tout d'abord une propriété triviale, que nous appellerons égalités d'angles inscrits :

Soit  $ABCD$  un quadrilatère cyclique. Nous avons  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ .

Cette propriété est triviale puisque, le quadrilatère  $ABCD$  étant inscriptible, les deux angles cités sont des angles inscrits interceptant l'arc  $AD$ .

Nous avons ainsi, grâce à cette propriété, les égalités illustrées ci-dessous :



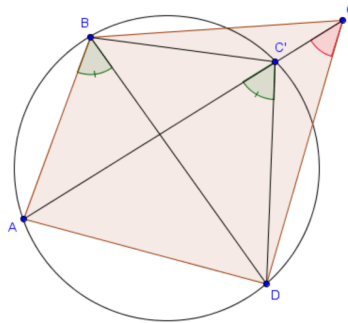
( $\Rightarrow$ ) Montrons que les angles opposés d'un quadrilatère inscrit sont supplémentaires. Autrement dit, montrons que si ABCD est inscrit, alors  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ .

En considérant les angles du triangle BCD, on a  $\widehat{BCD} = 180 - \widehat{DBC} - \widehat{BDC}$  puisque la somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat, soit  $180$  degrés.

Or, nous savons que  $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$  et  $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$  (égalités d'angles inscrits), d'où  $\widehat{BCD} = 180 - \widehat{DAC} - \widehat{BAC} = 180 - \widehat{DAB}$  comme voulu.

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement, montrons que si deux angles opposés sont supplémentaires alors le quadrilatère (non croisé) est inscrit. On peut alors montrer la contraposée, c'est à dire que dans un quadrilatère non cyclique (et non croisé), les angles opposés ne sont jamais supplémentaires.

Considérons dès lors ABCD un quadrilatère non cyclique (et non croisé) et montrons que  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} \neq 180^\circ$ . Le cercle  $\Delta$  circonscrit au triangle ABD ne passe donc pas par C. On note alors C' l'intersection de AC avec  $\Delta$ , et on a  $C' \neq C$ , comme illustré ci-contre :



Or, le quadrilatère  $ABC'D$  est cyclique et nous savons donc qu'on a  $\widehat{DAB} + \widehat{BC'D} = 180^\circ$ . Mais comme  $C$  est du même côté que  $C'$  (car le quadrilatère n'est pas croisé), on a forcément  $\widehat{BC'D} \neq \widehat{BCD}$  et donc  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} \neq \widehat{DAB} + \widehat{BC'D} = 180^\circ$ .

On a donc que dans un quadrilatère non cyclique (et non croisé), les angles opposés ne sont jamais supplémentaires.

Nous remarquons que l'hypothèse (le quadrilatère doit être non croisé), peut être supprimée en utilisant des angles orientés.

Notons également que dans un quadrilatère quelconque, la somme des angles est de 360 degrés. En effet, la somme de tous les angles est de deux fois  $180 = 360$  degrés. Par conséquent, étant donné qu'un quadrilatère est inscriptible si et seulement si deux angles opposés se complètent à 180 degrés, alors nécessairement les deux autres angles vérifient également cette propriété.

## 2. Démonstration de la propriété 3 :

( $\Leftarrow$ ) Montrons que si la somme des angles opposés au segment que deux triangles ont en commun est inférieure à  $180^\circ$ , alors ces deux triangles sont de Delaunay.

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan. D'après la propriété 4,  $D$  appartient au cercle circonscrit du triangle  $ABC$  si  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ .

Ainsi, si la somme des angles opposés est inférieure à  $180^\circ$ , alors  $D$  est à l'extérieur du cercle circonscrit à  $ABC$ .

C'est pourquoi si la somme des angles opposés au segment que deux triangles ont en commun est inférieure à  $180^\circ$ , alors ces deux triangles sont de Delaunay.

( $\Rightarrow$ ) Montrons que deux triangles adjacents sont de Delaunay si la somme des angles opposés au segment qu'ils ont en commun est inférieure à  $180^\circ$ .

Soient  $ABCD$  un quadrilatère convexe.

Sans perte de généralité supposons que  $ABD$  et  $ACB$  soient deux triangles de Delaunay adjacents, ayant  $DB$  comme segment en commun.

Puisque ABD est de Delaunay, son cercle circonscrit ne contient aucun point.

Donc le point C est à l'extérieur du cercle circonscrit à ABD.

D'après la propriété 1, on a donc  $\widehat{BCD} + \widehat{ABD} < 180^\circ$ , comme voulu.

### 3. Démonstration de la propriété 6 :

Soit la propriété  $\mathcal{P}_n$  : "Si le critère de Delaunay est vérifié pour chaque configuration de deux triangles adjacents de  $T_n$  (triangulation comportant  $n$  triangles) alors  $T_n$  est une triangulation de Delaunay."

Montrons par récurrence forte que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ .

Cas de base :

Pour  $n = 2$ ,  $\mathcal{P}_2$  est vérifiée. On l'a déjà démontré puisqu'il s'agit du cas du quadrilatère.

Récurrence :

Supposons que  $\mathcal{P}_k$  soit vraie pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , avec  $n > 1$ .

Montrons que la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

On suppose donc que le critère de Delaunay est vérifié pour chaque configuration de deux triangles adjacents de  $T_{n+1}$  et on veut montrer que  $T_{n+1}$  est une triangulation de Delaunay ;

En notant  $T_{n+1}$  la triangulation composée de  $T_n$  (qui est la triangulation à  $n$  triangles) et d'un triangle supplémentaire appelé  $t$ , soit contenant  $(n + 1)$  triangles.

Comme  $\mathcal{P}_n$  est vraie,  $T_n$  est une triangulation de Delaunay à  $n$  triangles.

Tous les triangles adjacents à  $t$  doivent respecter le critère de Delaunay puisque par hypothèse de  $\mathcal{P}_{n+1}$ , le critère de Delaunay est vérifié pour chaque configuration de deux triangles adjacents de  $T_{n+1}$ .

De plus, comme ces triangles sont dans  $T_n$ , le critère de Delaunay est aussi vérifié pour chaque configuration de deux d'entre eux. Donc  $T_n \cup t = T_{n+1}$  est une triangulation de Delaunay et l'hérédité est vérifiée.

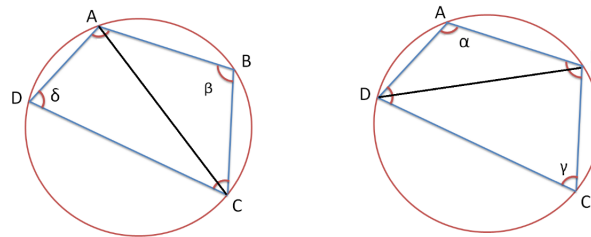
On a donc établi la propriété  $\mathcal{P}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  et la propriété 6 est démontrée.

## Démonstration de l'existence et unicité pour un quadrilatère convexe :

### 1. Existence de deux triangles de Delaunay pour un quadrilatère :

Soient A, B, C, D quatre points du plan, formant un quadrilatère convexe ABCD.

Nous obtenons quatre triangles différents selon la diagonale prise de ABCD. En effet, nous obtenons soit les triangles ABC et ADC ayant AC pour segment en commun, soit DAB et BCD ayant BD pour segment en commun. Comme illustré ci-contre :



Il y a alors deux cas possibles, soit nous considérons les triangles ABC et ADC, soit nous considérons les triangles DAB et BCD.

Si nous avons  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} > 180^\circ$ , alors, d'après la propriété 3, les triangles ABC et ADC ne respectent pas le critère de Delaunay. De plus, dans ce cas et d'après la propriété 2, nous savons que  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} < 180^\circ$ . Ainsi, les triangles DAB et BCD sont de Delaunay d'après la propriété 3.

Inversement, si  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} < 180^\circ$ , alors  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} > 180^\circ$ . Ce sont alors les triangles ABC et ADC qui sont de Delaunay.

Si  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ , alors  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ , et tous les triangles vérifient le critère de Delaunay. Les deux configurations sont alors acceptables pour former une triangulation de Delaunay.

Ainsi, nous avons démontré l'existence de deux triangles de Delaunay dans un quadrilatère, en basculant la diagonale AC en BD.

2. Unicité :

Si  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ , alors  $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ . Il n'y a alors pas unicité des triangles de Delaunay car les quatre triangles formés en basculant la diagonale vérifient la propriété 3. Les deux configurations vérifient alors le critère de Delaunay.

Il faudra alors choisir une de ces deux configurations lorsque nous générerons une triangulation de Delaunay.

**2.2.4 Principe de l'algorithme choisi**

Pour générer un maillage à partir d'un nuage de points, nous avons choisi d'implémenter un algorithme. Ce dernier consiste à énumérer tous les triangles possibles et vérifier pour chaque triangle si le critère de Delaunay est valide.

Pour cela, nous avons implémenté plusieurs fonctions pour :

1. Énumérer tous les triangles possibles (c'est à dire toutes les combinaisons de trois points du nuage)
2. Trouver le centre du cercle circonscrit d'un triangle à partir de trois points (les sommets du triangle) :
  - trouver la médiatrice à partir de deux points
  - trouver le centre du cercle
3. Vérifier pour chaque triangle le critère de Delaunay

Nous allons maintenant expliquer la procédure pour trouver le centre du cercle circonscrit d'un triangle.

Propriété :

Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points. Soit  $D$  la médiatrice de  $p_1$  et  $p_2$ . Alors pour tout point  $a$ ,  $a$  appartient à  $D$  si et seulement si  $d(a, p_1) = d(a, p_2)$  où  $d(a, b)$  mesure la distance entre les deux points  $a$  et  $b$ .

Ainsi, un point  $a = (x, y) \in D \Leftrightarrow d(a, p_1) = d(a, p_2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_{p_1})^2 + (y - y_{p_1})^2} = \sqrt{(x - x_{p_2})^2 + (y - y_{p_2})^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_{p_2} - x_{p_1})x + 2(y_{p_2} - y_{p_1})y + (x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2 - x_{p_2}^2 - y_{p_2}^2) = 0$$



Pour trouver la médiatrice d'un segment à partir de deux points, il suffit donc de calculer les coefficients en rouge.

Le centre du cercle circonscrit est ensuite donné par l'intersection de deux médiatrices du triangle.

### 2.2.5 Exemple de maillage obtenu

Nous générons d'abord un nuage de points, puis nous cherchons à le mailler. Voici un exemple de triangulation de Delaunay à partir d'un nuage de points.

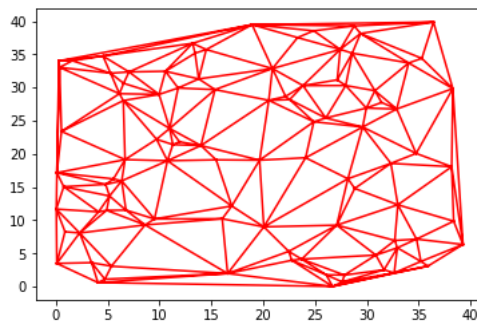


FIGURE 6 – Maillage pour 100 points espacés de 0.5 minimum dans une grille  $40 \times 40$

Cependant, il se pourrait que des triangles non sélectionnés apparaissent via les arêtes de ses voisins. Ces triangles, si ils n'ont pas été gardés dans la liste de triangles affichés, ne vérifient donc pas le critère de Delaunay. Ceci serait problématique étant donné que, dans ce cas, le maillage ne vérifierait pas le critère.

Ce type d'affichage ne correspond donc pas tout à fait à ce que l'on cherche puisque rien ne nous prouve visuellement que ce maillage vérifie le critère de Delaunay.

Pour vérifier que les triangles de l'image sont bien tous sélectionnés, nous avons alors coloriés les triangles donnés par l'algorithme, c'est à dire eux qui vérifient le critère :

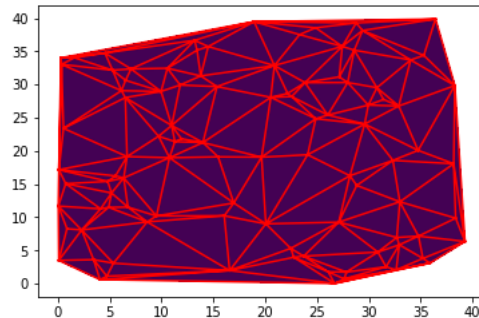


FIGURE 7 – Maillage pour 100 points espacés de 0.5 minimum dans une grille  $40 \times 40$

Nous sommes alors certains, en un coup d’œil, que cette triangulation est de Delaunay.

### 2.2.6 Étude de la complexité

Le principe de l’algorithme est donc d’énumérer tous les triangles, puis, pour chacun d’eux, de vérifier si le critère de Delaunay est valide.

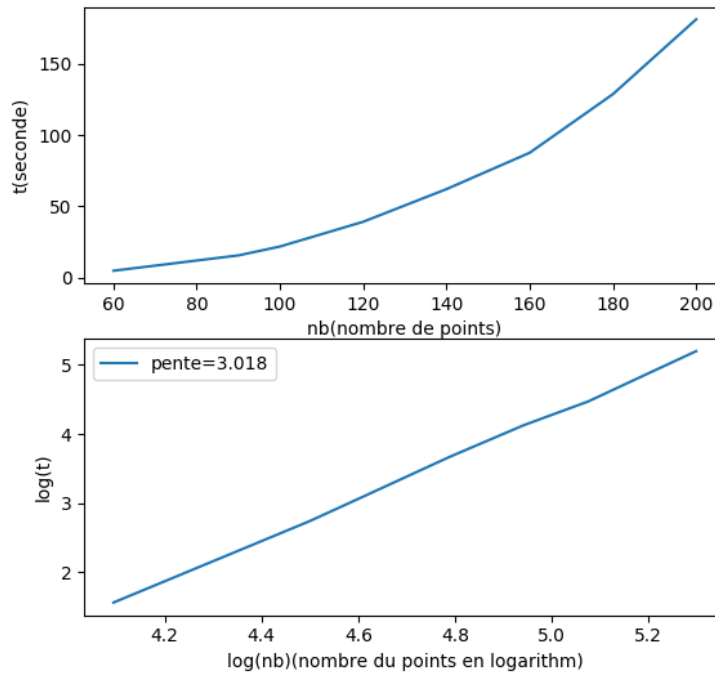
Le nombre de triangles possibles est le nombre de combinaisons de trois points du domaine, c’est à dire  $(C_n^3)$ , donc la génération de triangles est en  $O(C_n^3)$ .

Le nombre de vérifications pour un triangle est de  $n$  car il y a  $n$  points au départ donc en  $O(n)$ .

Ainsi, la complexité de l’algorithme pour générer le maillage est en  $O(n^4)$ .

La complexité de l’algorithme n’est pas bonne car nous énumérons tous les triangles possibles. Le nombre de triangles à traiter est donc grande.

### Courbe du temps d'exécution :



### 2.2.7 Existence et Unicité d'un tel maillage

Tout d'abord, intéressons nous à quelques cas particuliers : il n'existe pas de triangulation de Delaunay pour un ensemble de points alignés. Dans ce cas, le maillage n'est pas défini. De plus, l'unicité d'un triangle de Delaunay n'est pas vérifié lorsque quatre points forment un rectangle.

L'algorithme implémenté respecte le critère de Delaunay, du moment qu'il ne génère pas de points formant des rectangles. Comme le nuage de points est fini, il est toujours possible de générer des triangles. Par construction de l'algorithme, le programme génère bien une triangulation de Delaunay : chaque triangle vérifie le critère de Delaunay. D'après les propriétés énoncées, nous obtenons par conséquent une triangulation de Delaunay.

Nous admettrons l'existence et l'unicité d'une triangulation de Delaunay par la suite.

## 2.3 Troisième algorithme : maillage d'un nuage de points

### 2.3.1 Principe de l'algorithme choisi

Nous avons implémenté un autre algorithme pour mailler un nuage de point, cet algorithme devrait être plus performant que l'algorithme naïf.

Idée générale :

1. Créer un triangle aléatoire formant le maillage courant.
2. Choisir un point qui n'est pas un sommet d'un triangle déjà créé.
3. Vérifier si ce point est dans le cercle circonscrit du triangle créé :
  - I. Si le point est dans le cercle circonscrit d'un triangle, supprimer ce triangle et de plus, vérifier si ce point est dans le triangle :
    - i. S'il est dans le triangle, construire trois nouveaux triangles avec pour sommet commun ce point-ci.
    - ii. Sinon, construire deux nouveaux triangles tels que le point est une des extrémités du segment en commun des deux triangles.
    - iii. Si pendant le maillage courant, les points (I.i) et (I.ii) sont vérifiés, vérifier si les côtés des triangles de (I.ii) intersectent les triangles de (I.i). Si c'est le cas, supprimer le triangle intersecté de (I.i).

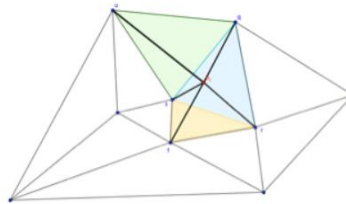


FIGURE 8 – Exemple du cas (iii)

- II. Si le point n'est pas dans le cercle circonscrit, construire l'enveloppe convexe du maillage courant. Construire également les nouveaux triangles qui ont pour sommet ce point et les points deux à deux voisins dans l'enveloppe vérifiant le critère de Delaunay.
4. Enregistrer le maillage courant et recommencer tous les étapes à partir du point (2.).

### Explication de certains points de l'algorithme :

★ L'algorithme de Graham permet d'obtenir l'enveloppe convexe de la triangulation avec une complexité en  $O(n \log(n))$ ,  $n$  étant le nombre de points dans l'enveloppe.

#### Algorithme de Graham

*Entrées : Liste des points de la triangulation courante*

1. Calcul du point pivot : le point de plus petite ordonnée (si ce dernier n'est pas le seul, on choisit parmi eux le point de plus petite abscisse)
2. Triage des points : trier la liste des points selon l'angle croissant que chacun d'eux fait avec l'axe des abscisse relativement au pivot.
3. Parcourir la liste triée : pour chaque point, on vérifie s'il est « un tournant à gauche » ou « un tournant à droite » par rapport au point précédent dans l'enveloppe convexe en construction. Selon ces cas, il sera alors ou non dans l'enveloppe convexe.

*Sorties : Liste des points formant l'enveloppe convexe*

★ Détecter un tournant à gauche et un tournant à droite permet de trouver l'enveloppe convexe. Soient  $p_i$ ,  $p_{i-1}$  et  $p_{i-2}$  des points dont l'indice correspond à l'ordre de parcours.

— un tournant à droite d'un segment est un point qui est au dessus de ce segment.

Pour le détecter, il suffit que  $\overrightarrow{p_{i-1}p_i} \cdot \overrightarrow{p_{i-2}p_i} < 0$ .

Par exemple, le point 9 est un tournant à droite par rapport au segment reliant les points 7 et 8 sur la figure ci-contre :

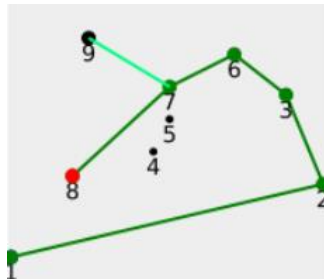


FIGURE 9 – Exemple de tournant à droite

- un tournant à gauche d'un segment est un point qui est en dessous de ce segment.

Pour le détecter, il suffit que  $\overrightarrow{p_{i-1}p_i} \cdot \overrightarrow{p_{i-2}p_i} > 0$ .

Par exemple, le point 8 est un tournant à gauche par rapport au segment reliant les points 7 et 6 sur la figure ci-contre :

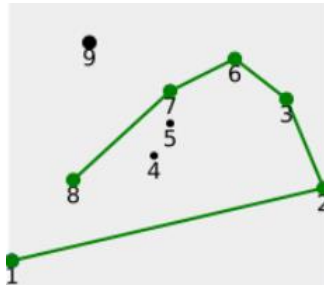


FIGURE 10 – Exemple de tournant à gauche

★ Lorsqu'un tournant à droite est obtenu, il faut supprimer le point précédent et parcourir les points de l'enveloppe jusqu'à trouver un tournant à gauche.

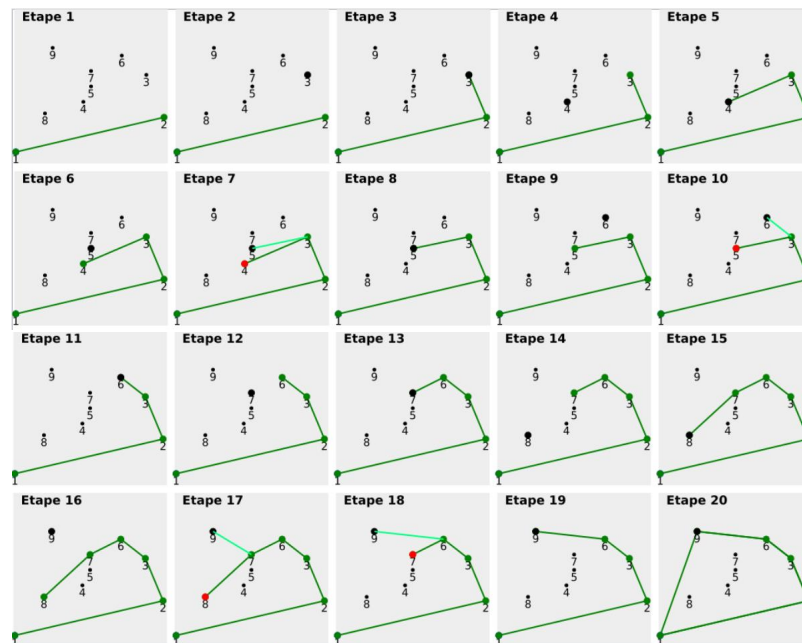


FIGURE 11 – Exemple d'exécution

★ Comment déterminer si un point est dans l'enveloppe convexe ? :

- i. Si le nombre d'intersection entre la demi-droite ouverte à droite et le polygone est impair, alors le point est dans l'enveloppe.
- ii. Si le nombre d'intersection entre la demi-droite ouverte à droite et le polygone est pair, alors le point n'est pas dans l'enveloppe.

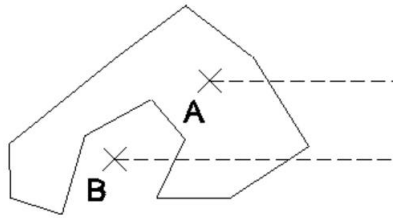


FIGURE 12 – Exemple des possibilités (i) et (ii)

- iii. Si l'intersection est un sommet, il faut refaire la même opération pour la demi-droite ouverte à gauche.

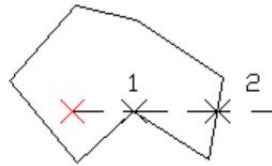


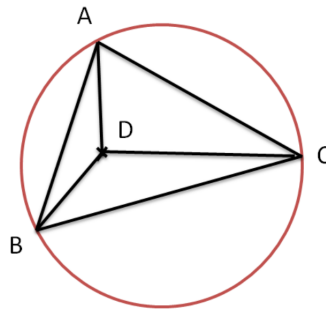
FIGURE 13 – Exemple de possibilité (iii)

**Cette méthode est très utile pour générer des points dans un polygone afin de le mailler.**

### 2.3.2 Lemme et démonstration

Lemme :

Soit  $D$  un point à l'intérieur d'un triangle  $ABC$  anciennement de Delaunay (quand ce nouveau point n'était pas encore là bien sûr). Alors, on peut couper ce triangle pour former trois triangles de Delaunay, comme illustré ci-dessous :



Nous nous plaçons ici dans le cadre d'un plan contenant seulement quatre points. Ainsi, un triangle vérifie le critère de Delaunay si le quatrième point n'est pas à l'intérieur de son cercle circonscrit. Nous l'appelons alors triangle de Delaunay.

Démonstration :

Soit  $ABC$  un triangle de Delaunay. Soit  $D$  un point que l'on place à l'intérieur de ce triangle. Nous obtenons donc trois triangles :  $ADC$ ,  $ABD$  et  $CBD$ .

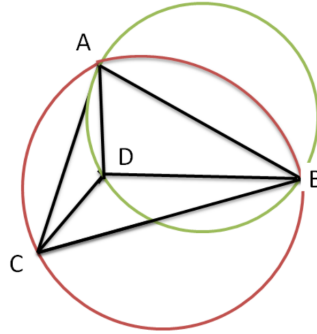
Montrons par l'absurde que les trois triangles ainsi formés sont de Delaunay.

Rappelons qu'un triangle est de Delaunay si il n'y a aucun point à l'intérieur de son cercle circonscrit.

Supposons par l'absurde et sans perte de généralité que  $ABD$  ne soit pas un triangle de Delaunay (on aurait pu raisonner exactement de la même façon en prenant  $ADC$  ou encore  $CBD$ ). Alors, par définition, il existe un point à l'intérieur de son cercle circonscrit, qui est forcément  $C$  puisqu'on ne considère que ces quatre points. Donc le point  $D$  est à l'extérieur du triangle  $ABC$ . Or,  $D$  est supposé être à l'intérieur du triangle  $ABC$ , donc cela est absurde. La propriété est donc vraie.



ABD est donc de Delaunay (de même pour ADC et CBD) et son cercle circonscrit ne contient aucun autre point comme on peut le voir ci-contre :



### 2.3.3 Exemple de maillage obtenu

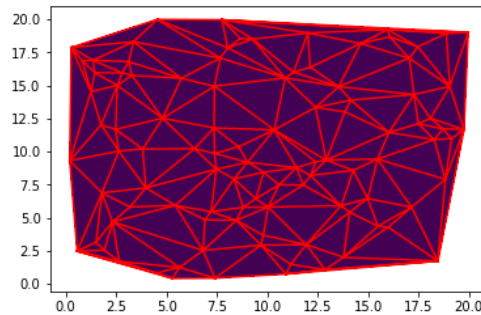


FIGURE 14 – Maillage obtenu avec la version incrémentale

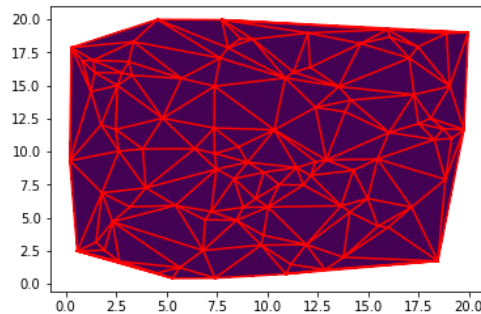
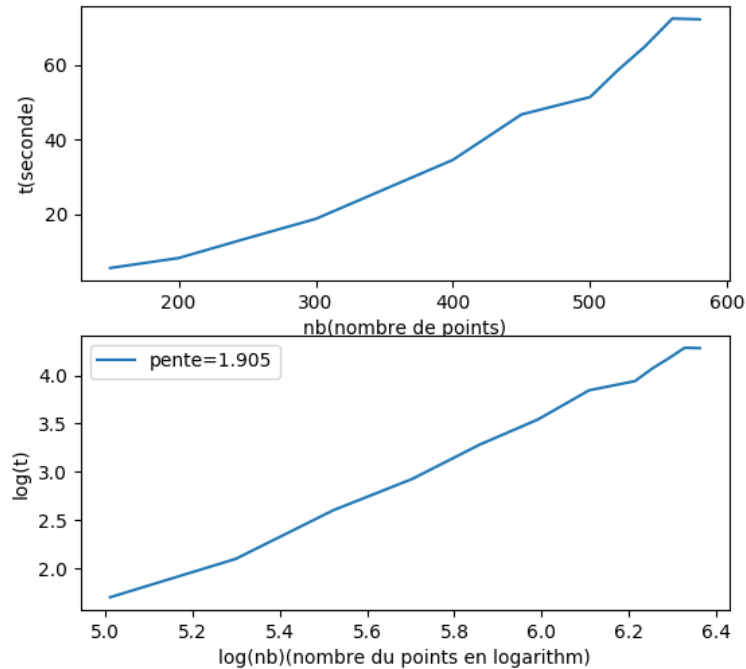


FIGURE 15 – Maillage obtenu avec la version naïve

Nous observons bien que le maillage obtenu avec l'algorithme incrémental et celui de la version naïve sont identiques.

### 2.3.4 Étude de la complexité

— Courbe du temps d'exécution :



Nous observons une complexité expérimentale de  $O(n^{1.905})$ .

La complexité calculée étant en  $O(n^2)$ .

En effet, l'algorithme parcourt la liste des points. Pour chaque point, nous calculons l'enveloppe convexe courante avec l'algorithme de Graham, puis nous construisons les triangles.

Le nombre de triangles est borné par le nombre de points contenus dans l'enveloppe courante.

Nous en déduisons le nombre d'opérations en  $O(\sum_{i=0}^n i \log(i) + i)$ .

Soit une complexité en  $O(n^2)$

L'algorithme incrémental est bien plus performant que celui de la version naïve.

## 2.4 Quatrième algorithme : maillage d'un polygone convexe

### 2.4.1 Principe de l'algorithme choisi

Nous cherchons à mailler un polygone convexe dans un premier temps. À partir d'un polygone convexe, nous générons un nuage de points et discrétisons le contour du polygone. Puis en appliquant l'algorithme incrémental, nous obtenons un maillage conforme.

Idee générale :

1. Générer un polygone convexe
2. Créer des points à l'intérieur et sur les segments du polygone
  - Méthode 1 :
    - i. générer un nuage de points
  - Méthode 2 :
    - i. créer une grille
    - ii. appliquer le premier algorithme
    - iii. enlever les triangles qui n'appartiennent pas au polygone
3. Mailler le polygone convexe à l'aide de l'algorithme incrémental

Explication de certains points de l'algorithme :

★ Pour créer le polygone :

1. choisir le nombre de sommets
2. en partant de trois points, ajouter les points au fur et à mesure à l'aide de l'algorithme de Graham.

Pour ajouter les points dans le polygone convexe, il suffit d'appeler la fonction *est\_dans\_enveloppe*. Cette fonction permet de vérifier si un point est dans l'enveloppe convexe.

★ Une fois que nous avons obtenu le polygone à mailler, il suffit d'appliquer l'algorithme incrémental.

### 2.4.2 Exemples de maillages obtenus

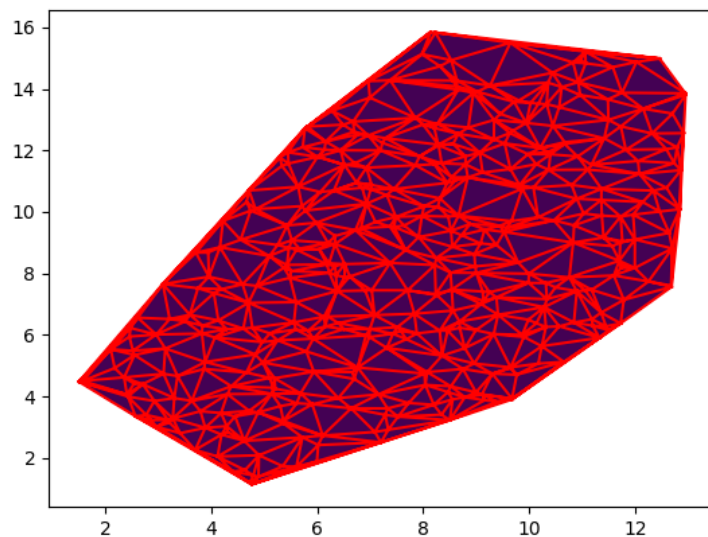


FIGURE 16 – En utilisant la méthode 1

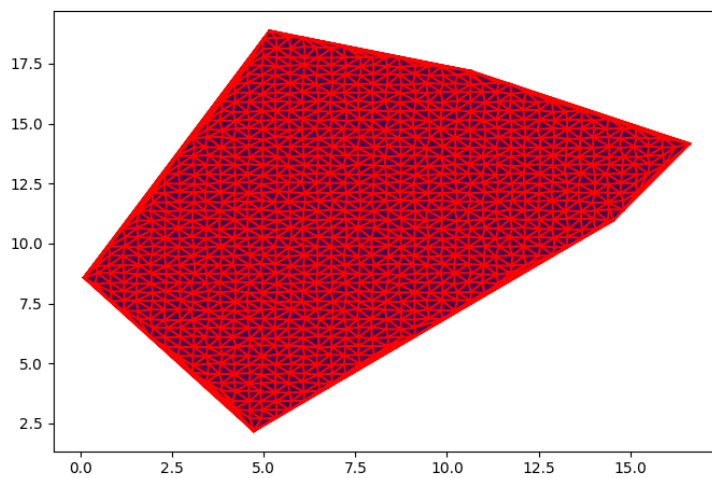
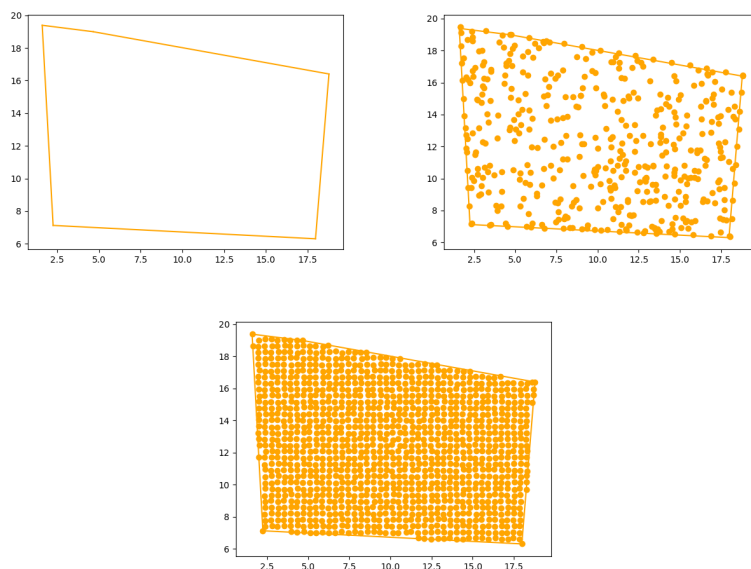
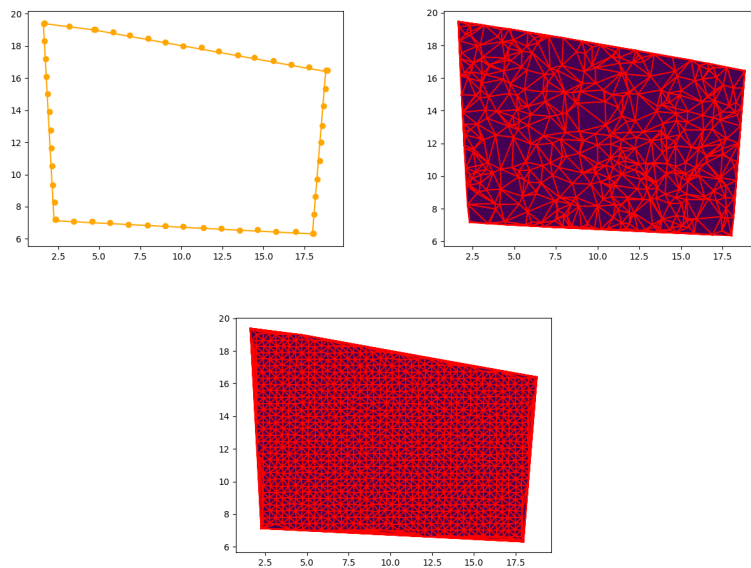


FIGURE 17 – En utilisant la méthode 2

Les étapes pour obtenir le maillage avec la méthode 1 :

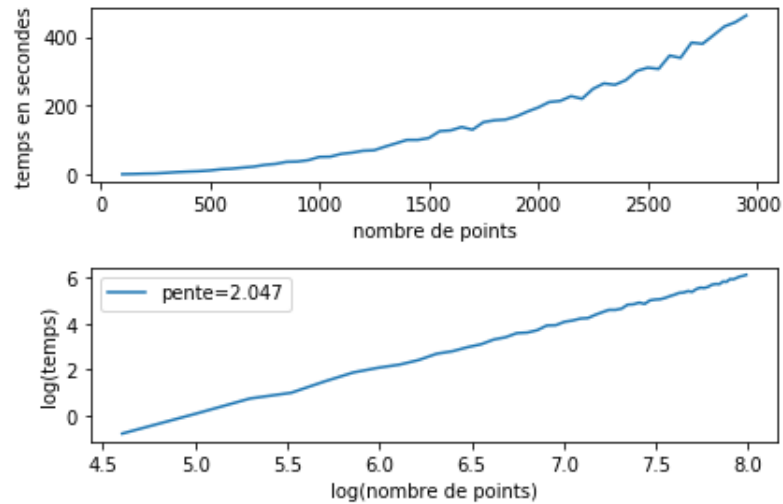


Les étapes pour obtenir le maillage avec la méthode 2 :



### 2.4.3 Étude de la complexité

— Courbe du temps d'exécution :



Nous observons une complexité expérimentale de  $O(n^{2.047})$ .

La complexité calculée étant en  $O(n^2)$ .

En effet, pour obtenir le polygone convexe, nous utilisons l'algorithme de Graham de complexité  $O(n \log(n)) \approx O(n^2)$ .

Enfin, nous souhaitons traiter le cas d'un maillage de polygone non convexe.

## 2.5 Maillage conforme d'un polygone non convexe

Pour mailler un polygone non convexe, nous avons eu deux idées. Nous allons ainsi présenter ces deux méthodes.

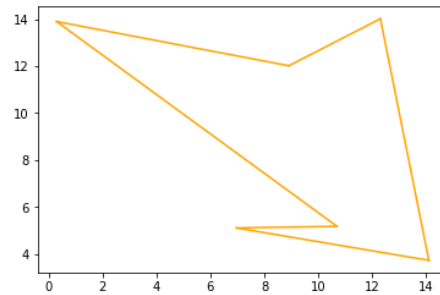


FIGURE 18 – Exemple d'un polygone non convexe

### 2.5.1 Méthode 1

Nous construisons les sous-enveloppes convexes extérieures au polygone. Ces sous-enveloppes convexes sont construites à l'aide de l'algorithme de Graham. En effet, il suffit, lors du parcours des points et lorsque nous arrivons à un tournant à droite, de sauvegarder les points qui ont permis de calculer les tournants à droite et tous les points précédents qui sont censés être supprimés. Ces sauvegardes de points forment alors une sous-enveloppe convexe extérieure.

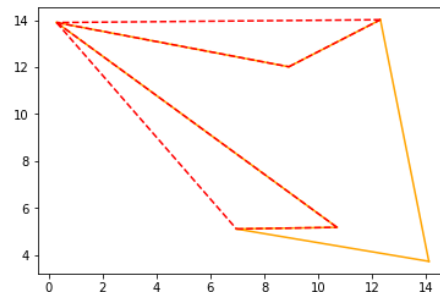


FIGURE 19 – Transformation du polygone non convexe en polygone convexe

Ensuite, nous maillons le polygone en le considérant comme convexe. Pour ce faire, on crée un nuage de points dans ce polygone convexe puis on ajoute les points issus de la discrétisation des segments du polygone non convexe.

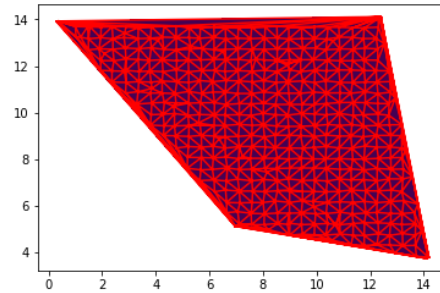


FIGURE 20 – Maillage du polygone considéré comme convexe

Enfin, nous supprimons les triangles qui sont dans les sous-enveloppes convexes extérieures à l'aide de la vérification avec l'intersection de demi-droite.

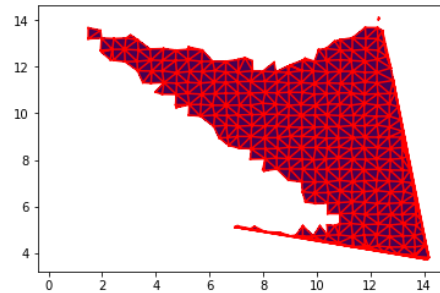


FIGURE 21 – Maillage obtenu après la suppression des triangles n'appartenant pas au polygone

Or, comme nous avons ajouté un artefact (c'est à dire : une valeur aléatoire dans l'intervalle  $[0,0.1]$  aux coordonnées des points sur le contour du polygone) dans les points de discrétisation afin d'avoir unicité de triangulation, la vérification avec l'intersection de demi-droite est faussée.

Nous observons effectivement sur la *figure 21* que le polygone n'est pas complet, le contour du polygone n'est pas maillé. Certains triangles qui devraient être conservés sont retirés et vice versa.

Pour que cela fonctionne mieux, il faudrait que le bord du polygone non convexe considéré soit uniquement constitué de cotés de certains triangles



du maillage. Il faudrait alors mailler en forçant la conservation de ces arêtes présentes sur la frontière. Reste alors à trouver un moyen de mettre en place cette méthode.

Un des principaux problèmes est donc de supprimer les triangles qui sont conservés alors qu'il ne devraient pas l'être et de conserver ceux qui ont été enlevés alors qu'ils n'auraient pas dû l'être. En effet, ces triangles sont trop proches de la frontière pour que l'algorithme puisse déterminer clairement de la conservation de ceux-ci.

Pour remédier à cela, nous pourrions envisager de mettre un label sur les triangles à conserver aux frontières ou alors de mettre une tolérance pour le critère de conservation d'un triangle.

Une autre idée serait de procéder comme précédemment en gardant tous les triangles ayant au moins un sommet dans le polygone non convexe puis de couper chaque triangle coupant la frontière. Pour le faire, il faudrait, pour chacun des triangles en question, créer un point à l'intersection entre la frontière et l'arête du triangle puis créer un petit triangle ayant pour côté un morceau de la frontière à la place de l'ancien triangle en remplaçant le(s) sommet(s) en dehors du polygone par le(s) point(s) tout juste créé(s).

### 2.5.2 Méthode 2

Nous construisons les sous-enveloppes convexes intérieurs du polygone. Ces sous-enveloppes convexes sont construites à l'aide de l'algorithme de Graham.

En effet, il suffit, lors du parcours des points, de sauvegarder les points formant un tournant à gauche. Lorsque nous nous trouvons à un tournant à droite, il suffit alors d'enregistrer la sous-enveloppe.

Si nous avons déjà une sous-enveloppe enregistrée, il faut alors vérifier que la sous-enveloppe suivante est la dernière.

Si ce n'est pas la dernière, il faut créer la sous-enveloppe avec le point pivot de l'algorithme de Graham, le point tournant à droite précédent et le point tournant à droite courant puis on réitère tout le procédé lors du parcours des points.

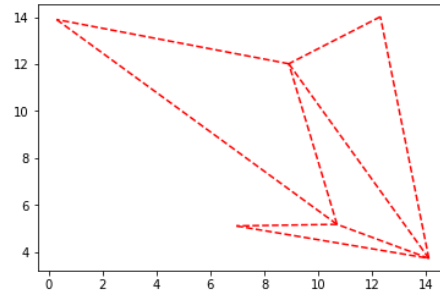


FIGURE 22 – Les sous enveloppes convexes intérieures

Nous maillons ensuite chaque sous-enveloppe avec l'algorithme incrémental.

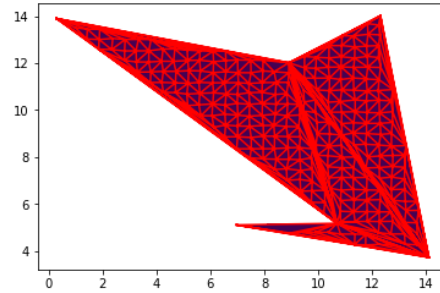


FIGURE 23 – Maillage obtenu

Cependant, plusieurs problèmes se posent sur les frontières des sous enveloppes convexes. En effet, la triangulation obtenue n'est pas de Delaunay. Cela est dû au problème de fusion des enveloppes convexes maillées.

Nous pouvons remarquer que les triangles situés au bord des enveloppes ne sont pas forcément de Delaunay.

Ainsi, nous pouvons évoquer plusieurs solutions.

Tout d'abord, nous pourrions garder uniquement les points du maillage puis remailler ensuite grâce à l'algorithme incrémental. Cela risque néanmoins de créer des triangles à l'extérieur du polygone : dans ce cas, il faudrait pouvoir les enlever. Cela demande donc de pouvoir les détecter pour ensuite les détruire. Pour les détecter, nous pourrions utiliser le critère suivant : si le milieu d'un segment du triangle n'est pas dans le polygone à mailler, on le supprime. Malheureusement, nous avons déjà testé cette méthode et elle ne supprime pas tous les triangles que nous souhaitons, ce qui nous amène de nouveau au problème de départ. Cette méthode reste donc en suspens.

## CONCLUSION

Nous avons ainsi tout d'abord implémenté deux aspects différents de génération d'un maillage triangulaire conforme (maillage d'un rectangle puis d'un nuage de points) et étudié l'existence et l'unicité d'un maillage de Delaunay.

Par la suite, nous avons cherché à démontrer l'existence d'une triangulation de Delaunay pour quatre points du plan. Nous avons aussi démontré des propriétés que nous avons utilisé pour mailler.

Nous avons étudié un autre algorithme basé sur le basculement des arêtes diagonales d'un quadrilatère afin de mailler un nuage de points. Nous avons ainsi pu comparer ces algorithmes, notamment au niveau de la complexité.

Puis, nous avons cherché à mailler un polygone convexe, avec deux méthodes différentes et en utilisant les algorithmes précédemment mis en place.

Enfin, nous avons essayé de mailler un polygone non convexe. Nous n'avons pas réussi à trouver un maillage conforme de Delaunay mais avons évoqué plusieurs idées pouvant mener au maillage d'un tel polygone.

Nous pourrions enfin nous poser une question concernant le maillage de polygone non convexe : est ce que le maillage est acceptable si le triangle d'une enveloppe convexe n'est pas de Delaunay avec une autre enveloppe convexe, c'est à dire si le cercle circonscrit d'un triangle d'une enveloppe convexe contient un point provenant d'une autre enveloppe convexe ?

## BIBLIOGRAPHIE

Quelques liens utilisés pour guider nos recherches :

<http://annabellecollin.perso.math.cnrs.fr/Mesh/ProjetGenerationMaillageDelaunay.pdf>

<https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/old/IST/NoteCours-v1.pdf>

<https://ibisc.univ-evry.fr/~serena/ledoux1.pdf>

<https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/DEA/OLD/NoteDeCours.pdf>

[http://math.uni.lu/eml/projects/reports/Bachelor\\_Thesis\\_Palmirotta.pdf](http://math.uni.lu/eml/projects/reports/Bachelor_Thesis_Palmirotta.pdf)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle\\_circonscrit\\_à\\_un\\_triangle](https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_circonscrit_à_un_triangle)