Maillage - Présentation de la séance 4

Sorbonne Université

Groupe 2 : Vincent Fu, Émilie Biegas, Zitong Yang, Alix Zheng

24 mars 2020

Sommaire

Propriétés

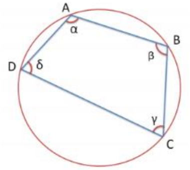
Proposition 1

Un quadrilatère est inscriptible si et seulement si deux angles opposés sont égaux ou supplémentaires.

Proposition 2

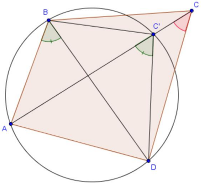
La somme des angles d'un quadrilatère est égale à $360°$.

Démonstration de la proposition 1



En considérant les angles du triangles BCD, $\widehat{BCD} = 180°$ - $\widehat{DBC}$ - $\widehat{BDC}$ car la somme des angles d'un triangles vaut 180°.
Or, comme ABCD est inscriptible, $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$.
On en déduit alors $\widehat{BCD} + \widehat{DAB} = 180°$.

Démonstration de la proposition 1



Réciproquement par contraposée, si ABCD est non inscriptible, le cercle circonscrit de ABD ne passe pas par C. Soit C' l'intersection de AC avec le cercle circonscrit. Comme ABC'D est inscriptible, $\widehat{DAB} + \widehat{BC'D} = 180°$. Or C étant sur la droite AC' avec AC' < AC, $\widehat{BCD}$ ne peut être supplémentaire à $\widehat{DAB}$.

Triangle de Delaunay

Proposition 3

Deux triangles adjacents sont de Delaunay si et seulement si la somme des angles opposés à la droite adjacente est inférieure ou égale à 180°.

Démonstration de la proposition 3

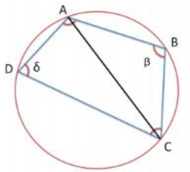
Démontrons la réciproque pour le cas où la somme des angles opposés à la droite adjacente est égale à $180°$.
Si la somme des angles opposés sont supplémentaires, alors leurs sommets forment un quadrilatère inscriptible et donc nécessairement les triangles adjacents sont de Delaunay.

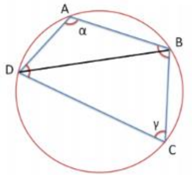
Existance des triangles de Delaunay pour un quadrilatère quelconque

Soient A, B, C, D quatre points du plan, formant un quadrilatère convexe ABCD.
Deux cas possibles pour construire deux triangles ayant un côté adjacent :

Cas 1 : le triangle ABC et le triangle ADC avec pour côté adjacent AD

Cas 2 : le triangle ABD et le triangle BCD avec pour côté adjacent BC





Existance des triangles de Delaunay pour un quadrilatère quelconque

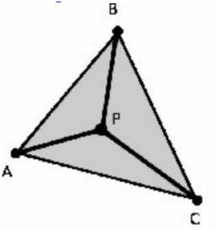
Sur les figures précédentes, on remarque que les deux cas de figure correspondent à une triangulation de Delaunay, on en déduit qu'il n'y a pas unicité pour un quadrilatére inscriptible.
De ce fait, pour le cas d'un quadrilatère non inscriptible, seul un cas parmi les deux est une triangulation de Delaunay.

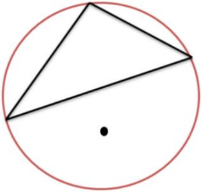
En effet, si $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} > 180$, alors d'après la proposition 3, les triangles ABC et ADC ne forment pas une triangulation de Delaunay. Et dans ce cas, d'après la proposition 2, $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} < 180^\circ$. On en déduit que le cas 2 est alors une triangulation de Delaunay. Le raisonnement pour l'autre cas est analogue à celui-ci.

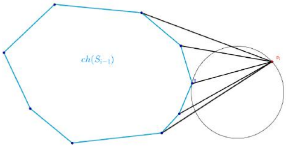
Sommaire

Principe

Lors des constructions des triangles de Delaunay, il y a trois configurations à étudier :

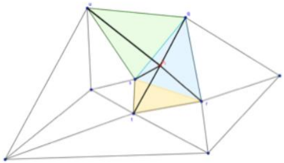






Principe

Lorsque la configuration 1 et la configuration 2 interviennent en même temps, il faut éliminer des triangles de Delaunay de la configuration 1 :



Algorithme de Graham

Pour la configuration 3, il est nécessaire d'obtenir l'enveloppe convexe de la triangulation courante, nous utilisons donc l'algorithme de Graham :

Pourquoi l'algorithme de Graham ?
$\rightarrow$ Simple et surtout :

Proposition

La complexité algorithmique de l'algorithme de Graham est en $O(nlog(n))$ avec n le nombre de points contenus dans l'enveloppe convexe.

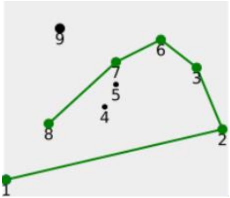
Algorithme de Graham

Entrées : Liste des points de la triangulation courante

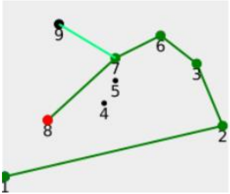
1. Calcul du point pivot : le point de plus petite ordonnée (si ce dernier n'est pas le seul, on choisit parmi eux le point de plus petite abscisse)
2. Triage des points : on trie la liste des points selon l'angle croissant que chacun d'eux fait avec l'axe des abscisse relativement au pivot.
3. On parcours la liste triée : pour chaque point, on vérifie s'il est un « un tournant à gauche » ou « un tournant à droite » par rapport au point précédent dans l'enveloppe convexe en construction. Selon ces cas, il sera alors ou non dans l'enveloppe convexe.

Sorties : Liste des points formant l'enveloppe convexe

« tournant à gauche » ou « à droite »



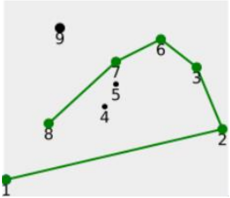
« tournant à gauche »



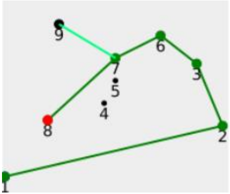
« tournant à droite »

1. Si c'est « un tournant à gauche », on l'ajoute dans l'enveloppe courante.
2. Si c'est « un tournant à droite », on l'ajoute dans l'enveloppe courante et on supprime tous les points précédents qui forment « un tournant à gauche » par rapport au point ajouté.

Comment reconnaître le type de « tournant » ?



« tournant à gauche »

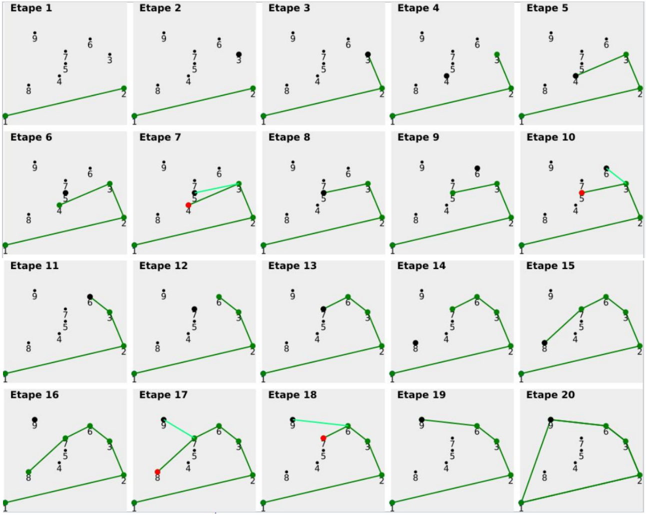


« tournant à droite »

« tournant à gauche » : $\overrightarrow{p_{i-1}p_i} \cdot \overrightarrow{p_{i-2}p_i} > 0$

« tournant à droite » : $\overrightarrow{p_{i-1}p_i} \cdot \overrightarrow{p_{i-2}p_i} < 0$

Exemple d'exécution



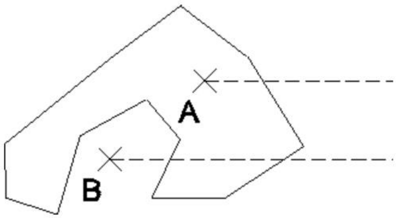
Comment savoir dans quelles configurations on est ?

En vérifiant dans l'ordre suivant, on est capable de construire notre triangulation :
Pour la configuration 3, il s'agit de vérifier qu'un point est à l'exterieur de l'enveloppe convexe de la triangulation courante. Les nouveaux triangles ont pour sommets ce dernier et 2 points contiguës de l'enveloppe et doivent vérifier la condition de Delaunay.

Pour la configuration 1, il s'agit de vérifier qu'un point est à l'intérieur d'un triangle (en l'occurrence dans l'enveloppe convexe d'un triangle). On obtient 3 nouveaux triangles de Delaunay.

Pour la configuration 2, il s'agit de vérifier qu'un point est dans le cercle circonscrit d'un triangle. On obtient 2 nouveaux triangles de Delaunay.

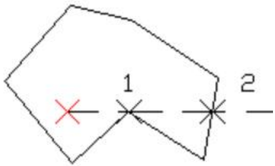
Comment savoir si un point est dans un enveloppe ?



Si le nombre d'instersection entre la demi-droite ouverte à droite avec le polygône est impair, alors le point est dans l'enveloppe.

Si le nombre d'instersection entre la demi-droite ouverte à droite avec le polygône est pair, alors le point n'est pas dans l'enveloppe.

Comment savoir si un point est dans un enveloppe ?



Attention, si l'intersection est un sommet, cette dernière n'est pas comptabilisée et si le nombre d'instersection vaut 0, il faut refaire la même opération pour la demi-droite ouverte à gauche en comptabilisant cette fois-ci les sommets également.

Algorithme de maillage

Maillage par incrémentation de points

Entrées : Liste de points du nuage

1. Construire un triangle, leurs sommets sont considérés alors comme fermés.
2. Construire l'enveloppe convexe des points de la triangulation courante.
3. Choisir un point ouvert et étudier les configurations dont ce dernier est issu.
4. Construire les triangles vérifiant la condition de Delaunay selon les differentes configurations.
5. Mettre le point étudié à l'état fermé et répéter les étapes depuis la 2 jusqu'à que les points soient tous fermés.

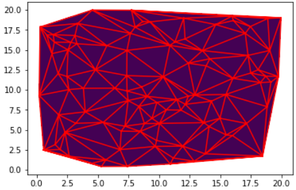
Sortie : Triangulation de Delaunay des points

Algorithme de maillage

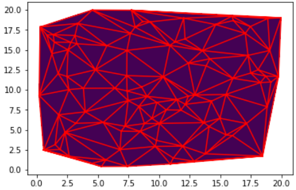
Attention, pour l'étape 4, ne pas oublier d'éliminer les triangles de la configuration 1 qui croisent avec les triangles de la configuration 2 lorsque ces 2 configurations apparaissent (voir le slide 2 de la partie Principe).

Exemple de résultats

Voici les résultats pour 100 points :



algorithme naïf



algorithme par incrémentation

Sommaire

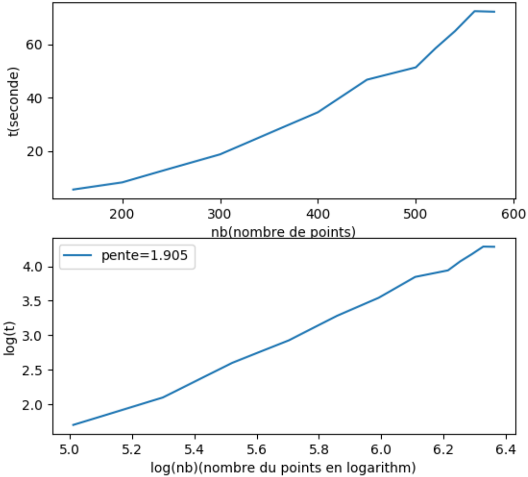
Complexite algorithmique

L'algorithme parcourt la liste des points : pour chaque point, on calcule l'enveloppe convexe courante par l'algorithme de Graham, puis on construit les triangles.
Le nombre de triangles est bornée par le nombre de points contenus dans l'enveloppe courante.
On en déduit approximativement le nombre d'opérations :

$$\sum_{i=0}^{n} ilog(i) + i$$

Soit une complexité en : $O(\sum_{i=0}^{n} ilog(i))$

Courbe de temps d'exécution



Conclusion

L'algorithme de maillage par incrémentation de points est plus efficace que l'algorithme naïf pour mailler un nuage de points.

$\rightarrow$ *Quid* maillage d'un polygône à partir sa frontière ?