UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

PROBLEMARIO DE MATEMÁTICAS I

COORDINACIÓN GENERAL ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
2015

INDICE

UNIDAD TEMATICA 1: Derivación de funciones de una variable

UNIDAD TEMATICA 2: Cálculo diferencial para funciones de varias variables

Capítulo 4. Funciones de varias variables

Introducción

Actualmente en la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) se está utilizando el modelo educativo por competencias. Este modelo establece las competencias que el estudiante debe desarrollar para obtener una formación integral.

Dichas competencias van dirigidas al desempeño de los estudiantes en cuanto al desarrollo de habilidades, destrezas, conocimientos y valores que conlleven al logro de aprendizaje significativo que se reflejen en su vida social, personal y laboral.

El Manual de Matemáticas I basado en competencias, pretende promover el aprendizaje autónomo para la construcción de competencias y el impulso de nuevos esquemas de pensamiento que faciliten el aprender a aprender.

El presente manual contiene teoría, ejemplos, ejercicios propuestos con soluciones y actividades relacionadas con el Cálculo Diferencial, así como las competencias particulares a desarrollar en la Unidad de Aprendizaje de Matemáticas I.

En la elaboración de este manual, se consideraron los tres tipos de estrategias de enseñanza-aprendizaje propuestos por Frida Díaz-Barriga, que son:

- **Estrategias pre-instruccionales** que por lo general preparan y alertan al estudiante, en relación con qué y cómo va a aprender; esencialmente trata de incidir en la activación o en la generación de conocimientos y experiencias previas pertinentes. En esta etapa se involucran actividades de conocimiento previo o de diagnóstico.

- **Estrategias co-instruccionales,** que apoyan a los contenidos curriculares durante el proceso mismo de enseñanza-aprendizaje. En esta etapa se involucran actividades de desarrollo, este tipo de actividades se llevan a cabo mediante la práctica guiada, es decir, relación maestro-estudiante y por lo regular se llevan a cabo en el aula.

- **Estrategias post-instruccionales,** que se presentan al término de cada tema o unidad y permiten al estudiante formar una visión sintética, integradora y valorar su propio aprendizaje. En esta etapa se involucran las actividades integradoras, que por lo regular implican la aplicación de los conocimientos adquiridos a situaciones reales o de la vida cotidiana.

Se propone que al evaluar las actividades se consideren las siguientes formas de evaluación:
Heteroevaluación: Es la evaluación hecha solamente por el docente.
Coevaluación: Es la evaluación hecha entre los estudiantes del grupo.
Autoevaluación: Es la evaluación hecha por el propio estudiante.

Agradecemos la colaboración de los docentes del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica en la retroalimentación del contenido de este manual.

Estamos seguros que este manual contribuirá en la formación integral de un estudiante analítico, crítico, reflexivo y creativo.

UNIDAD TEMATICA 1: Derivación de funciones de una variable

Competencia particular 1:

Analizar funciones mediante el cálculo de límites, para determinar su continuidad, y en caso contrario, establecer el tipo de discontinuidad que presenta y comprobar resultados mediante un software de graficación.

Aplicar el concepto de derivada como razón de cambio e interpretarlo geométricamente mediante el cálculo de límites y/o el uso de las reglas básicas para resolver problemas de optimización.

Elemento de competencia 1:

Interpretar los límites de una función utilizando los Teoremas y comprobar dicho valor gráficamente, con ayuda de software, para definir el concepto de derivada.

Elemento de competencia 2:

Analizar la continuidad de una función en un punto y/o en un intervalo mediante límites para identificar el tipo de discontinuidad en caso de que se presente.

Elemento de competencia 3:

Aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio e interpretarlo geométricamente a través de límites y/o el uso de sus reglas para diferentes tipos de funciones de manera explícita e implícita.

Elemento de competencia 4:

Aplicar los criterios de la derivada mediante el cálculo de los números críticos y los posibles puntos de inflexión para trazar la gráfica de diferentes funciones en el campo de los números reales, así como su aplicación en problemas de optimización.

UNIDAD TEMÁTICA 2: Cálculo diferencial para funciones de varias variables.

Competencia particular 2:

Analizar funciones de varias variables mediante el cálculo del límite para determinar su continuidad e interpretarlo geométricamente.

Aplicar las reglas de derivación en funciones de varias variables mediante el concepto de derivada parcial para resolver problemas de ingeniería.

Elemento de competencia 5:

Analizar funciones de varias variables determinando su dominio, su rango y su gráfica con ayuda de software para calcular límites y establecer su continuidad.

Elemento de competencia 6:

Aplicar el concepto de derivada parcial en funciones de varias variables a través del diferencial total, de la regla de la cadena y la determinación de los extremos relativos en la solución de problemas de ingeniería.

Capítulo 1. Límites y continuidad de funciones

1.1 Definición de límite

Conocimiento previo: Simplificación de funciones racionales mediante procedimientos algebraicos.

Actividad No. 1	**Conocimiento previo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Recordar conceptos algebraicos que permitan simplificar las expresiones dadas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la solución correcta de los ejercicios.		
Tiempo estimado para la actividad: 20 minutos.		

Instrucciones: Simplifique las siguientes fracciones, se puede aplicar: factorización, productos notables, racionalización, etc.

1) $\frac{2x-4}{2-x}$

2) $\frac{x+3}{x^2-9}$

3) $\frac{x^3-8}{x-2}$

4) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

5) $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

6) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

El límite es un concepto fundamental del cálculo, se puede determinar de manera analítica mediante la aplicación de Teoremas y en algunas ocasiones a través de un análisis gráfico del comportamiento de la función o de forma numérica mediante la elaboración de tablas de valores.

Definición informal de límite: Un límite es el valor "L" al cual se aproxima la función $f(x)$cuando *"x"* se acerca a *"c"* por ambos lados. Se expresa como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Se lee como el límite cuando *"x"* tiende a *"c"* de $f(x)$ es igual a *"L".*

Cálculo de límites desde el punto de vista gráfico.

Para determinar el valor del límite es necesario trazar la gráfica de la función y analizar su comportamiento para valores cercanos a "c", para que este límite exista, la función debe acercarse a un mismo valor "L" tanto por el lado derecho como por el lado izquierdo de "c".

Ejemplos:

Figura 1. En esta gráfica podemos observar que para valores cercanos a la derecha de $x = 1$ la gráfica tiende a 3 y para valores cercanos a la izquierda de $x = 1$ la gráfica también tiende a 3, por lo tanto:

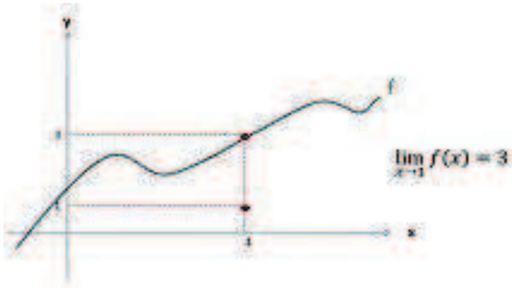


Figura 2. En esta gráfica podemos observar que para valores cercanos a la derecha de $x = 1$ la gráfica tiende a 5 y para valores cercanos a la izquierda de $x = 1$ la gráfica tiende a 3, por lo tanto:

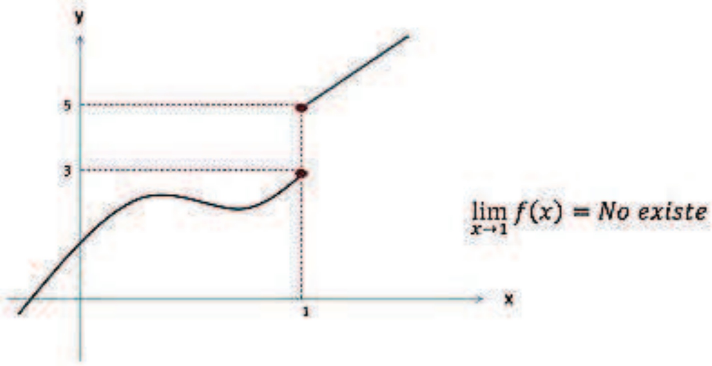
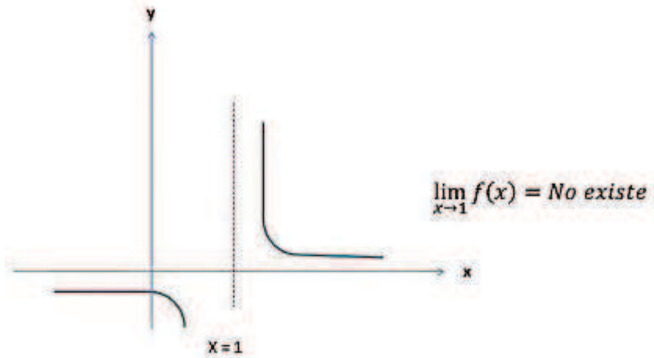
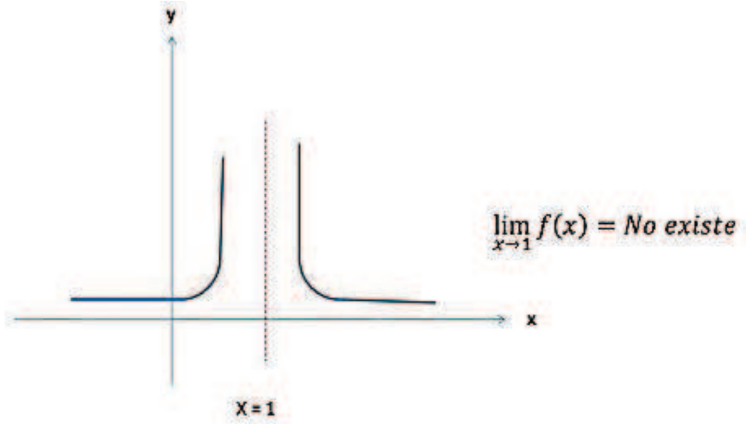


Figura 3. En esta gráfica podemos observar que para valores cercanos a la derecha de $x = 1$ la gráfica tiende a $+\infty$ y para valores cercanos a la izquierda de $x = 1$ la gráfica tiende a $-\infty$, por lo tanto:



Nota: Este límite NO EXISTE por el simple hecho de que la función tiende a infinito por uno, en cualesquiera de sus lados.

Figura 4. En esta gráfica podemos observar que para valores cercanos a la derecha de $x = 1$ la gráfica tiende a $+\infty$ y para valores cercanos a la izquierda de $x = 1$ la gráfica también tiende a $+\infty$, por lo tanto:



Cálculo de límites desde el punto de vista numérico:

Para calcular el límite mediante este método es necesario generar una tabla (Tabulación) con valores muy cercanos al límite dado, por ambos lados, de manera que se pueda establecer la tendencia de $f(x)$ para dichos valores.

Ejemplo:

Calcular: $\mathbf{lim}_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

Solución:

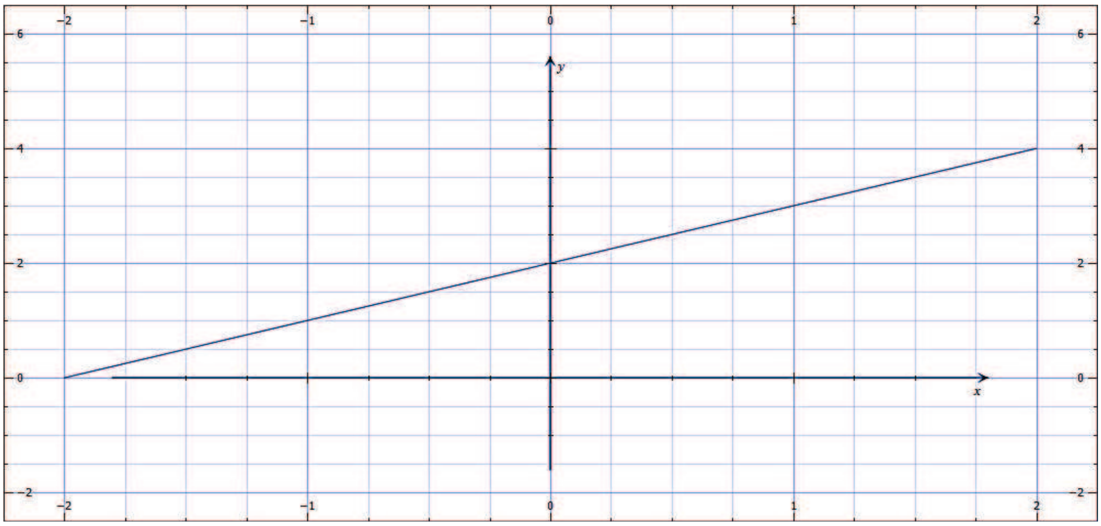
Generando una tabla de valores para valores muy cercanos a $x = 2$ por ambos lados, obtenemos:

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999	?	4.001	4.01	4.1

A partir de esta tabulación, se puede observar que cuando *"x"* se aproxima a 2 por el lado izquierdo, *f(x)* se aproxima a 4 y cuando *"x"* se aproxima a 2 por el lado derecho, *f(x)* también se aproxima a 4, por lo tanto, podemos determinar que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Se puede comprobar mediante su gráfica:



Cálculo de límites desde el punto de vista analítico:

Los límites se pueden calcular de manera analítica, mediante la aplicación de los siguientes teoremas.

Teoremas de límites

Considerando que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c no depende del valor de f en $x = c$, pero se puede dar el caso de que el límite sea $f(c)$.En este caso, se puede evaluar el límite de manera directa.

Teorema A
Si $b\ y\ c$ son números reales y n un entero positivo, entonces:

1. $\lim_{x \to c} b = b$ 2. $\lim_{x \to c} x = c$ 3. $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

Ejemplos:

$\mathbf{\lim_{x \to 5} 6 = 6}$; $\mathbf{\lim_{x \to 2} x = 2}$; $\mathbf{\lim_{x \to 4} x^2 = 16}$

Teorema B
Propiedades de los límites.
Si $b\ y\ c$ son números reales y n un número entero positivo, entonces $f\ y\ g$ son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x \to c}[bf(x)] = bL$

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to5} \mathbf{3x} = 3(5) = 15$

2. Suma o diferencia: $\lim\limits_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to1} \mathbf{4x^2 + 2x + 5} = \lim\limits_{x\to1} 4x^2 + \lim\limits_{x\to1} 2x + \lim\limits_{x\to1} 5 = 4(1)^2 + 2(1) + 5 = 4 + 2 + 5 = 11$

3. Producto: $\lim\limits_{x \to c}[f(x)g(x)] = LK$

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to2} \mathbf{(3x + 5)(x - 4)} = \lim\limits_{x\to2}(3x + 5) \cdot \lim\limits_{x\to2}(x - 4)$

4. Cociente: $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K},$ siempre que $K \neq 0$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to3} \frac{\mathbf{2x + 6}}{\mathbf{x + 1}} = \frac{\lim\limits_{x\to3} 2x + 6}{\lim\limits_{x\to3} x + 1} = \frac{2(3) + 6}{3 + 1} = \frac{6 + 6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

5. Potencia: $\lim\limits_{x \to c}[f(x)^n] = L^n$

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to-4} \mathbf{(x + 3)^2} = (-4 + 3)^2 = (-1)^2 = 1$

Teorema C
Si p es una función polinómica y c un número real, entonces:

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to2} \mathbf{(x^3 + 5x + 7)} = (2)^3 + 5(2) + 7 = 8 + 10 + 7 = 25$

Teorema D

Si r es una función racional dada por $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

En este tipo de funciones, si al sustituir el valor de "c" dado resulta:

a) $\frac{0}{0}$ significa que la función se puede redefinir, de tal manera que el límite SÍ EXISTA.

   Se puede decir que si el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c no se puede evaluar por sustitución directa, hay que tratar de encontrar una función $g(x)$ que coincida con $f(x)$ para toda x distinto a $x = c$.

   Concluyendo de manera analítica que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

Nota: Puede que aún redefinida la función el límite no exista, por ejemplo: $\mathbf{lim}_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \mathbf{lim}_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \boldsymbol{No\ existe}.$

Ejemplo: $\mathbf{lim}_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x+1}} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

La sustitución directa lleva a la forma $\frac{0}{0}$ a la que se llama forma indeterminada, porque no es posible determinar el límite.
Debiendo buscar una función que coincida con la función original salvo en x=1.

Reescribiendo la función, en este caso se factoriza el numerador, pudiendo cancelar el factor común $(x + 1)$ y sustituir el límite.

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} x+1 = -1-1 = -2$$

Por lo tanto se concluye que $\mathbf{lim}_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = -2$

Ejemplo: $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

Una vez más, el límite resulta de forma indeterminada por lo que se tiene que reescribir la función.

En este caso se utilizará la técnica de racionalización, que puede aplicar para el numerador como en el denominador.

Para este problema se racionalizará el numerador, multiplicando por su conjugado.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)}{x-3} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

Multiplicando

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1})^2-(2)^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

Eliminando el factor común en numerador y denominador y sustituyendo nos queda:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{3+1}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{2+2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Un caso más en el que se puede resultar la forma indeterminada es el siguiente. En el que se puede tener una fracción compuesta.

Ejemplo: $\lim_{x\to 4} \frac{\frac{x}{x+1}-\frac{4}{5}}{x-4}$

Sustituyendo directamente.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\frac{x}{x+1}-\frac{4}{5}}{x-4} = \frac{\frac{4}{4+1}-\frac{4}{5}}{4-4} = \frac{\frac{4}{5}-\frac{4}{5}}{0} = \frac{0}{0}$$

Por lo que de la misma manera, se reescribe la función de tal manera que el límite sí exista.

Primero se resuelve la fracción del numerador.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\frac{5x-4(x+1)}{5(x+1)}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{5x-4x-4}{5x+5}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{x-4}{5x+5}}{x-4}$$

Ahora se utiliza la ley de emparedado (extremos por extremos y medios por medios). Quedando:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(5x+5)(x-4)}$$

De donde se elimina el factor común y se sustituye directamente:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{5x+5}=\frac{1}{5(4)+5}=\frac{1}{20+5}=\frac{1}{25}$$

Entonces se concluye que:

$$\mathbf{\lim_{x\to 4}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{4}{5}}{x-4}=\frac{1}{25}}$$

b) $\frac{0}{a}$ significa que el límite es cero ($L=0$), en donde a es una constante diferente de cero.

Ejemplo: $\mathbf{\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x+3}}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x+3}=\frac{2(2)-4}{2+3}=\frac{4-4}{5}=\frac{0}{5}=\mathbf{0}$$

En este caso se dice que el límite es cero. ($L=0$)

c) $\frac{a}{0}$ significa que el límite NO EXISTE y que se presenta una asíntota vertical en $x=c$. En donde a es una constante diferente de cero.

Ejemplo: $\mathbf{\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{1-x}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{1-x}=\frac{1+5}{1-1}=\frac{6}{0}$$

En este otro caso se dice que el límite NO EXISTE y que se presenta una asíntota vertical en $x=1$.

Teorema E
Si n es un entero positivo, el siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c>0$ si n es par:

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$$

Ejemplo: $\mathbf{lim}_{x\to 16}\sqrt{\boldsymbol{x}}$

$$\lim_{x\to 16}\sqrt{x}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$$

Ejemplo: $\mathbf{lim}_{x\to -8}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$

$$\lim_{x\to -8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-8}=\mathbf{-2}$$

Ejercicio 1.1

1) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+5)$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-16}$

4) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$

6) $\lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}}{x-5}$

7) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$

10) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4x-12}$

11) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{3}{4}}{x-3}$

12) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$

13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+3}-5}{x-2}$

14) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^4-16}{h}$

15) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-2(x+h)+1-(x^2-2x+1)}{h}$

Solución al ejercicio 1.1

1)	1	2)	-7	3)	$\frac{1}{8}$	4)	27
5)	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	6)	$-\frac{1}{36}$	7)	$2x$	8)	$\frac{\sqrt{5}}{10}$
9)	48	10)	$-\frac{1}{8}$	11)	$\frac{1}{16}$	12)	$-\frac{1}{4}$
13)	No existe	14)	32	15)	$2x-2$		

1.2 Límites laterales

Existe un tipo diferente de límite llamado límite lateral, el cual es útil para determinar la continuidad de una función, ya sea en un punto, en un intervalo abierto o cerrado.

Los límites laterales se expresan como:

a) $\lim_{x \to c^+} f(x)$

Lo anterior se lee como: límite de $f(x)$ cuando "x" tiende a "c" por la derecha y significa a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando "x" se aproxima a "c" por valores mayores a "c".

b) $\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{c}^-} \mathrm{f(x)}$

Lo anterior se lee como: límite de $f(x)$ cuando "x" tiende a "c" por la izquierda y significa a qué valor se aproxima $f(x)$ cuando "x" se aproxima a "c" por valores menores a "c".

Teorema

Si $f(x)$ es una función y "c" y "L" son números reales, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$.

Prácticamente, los límites laterales se utilizan para calcular límites de funciones que contienen radicales o cuando son definidas por intervalos.

Para que exista un límite lateral, ya sea por la derecha o por la izquierda, la función debe estar definida en "c" y para todos los valores cercanos a "c", según sea la condición establecida del límite.

Ejemplo: Calcular los límites dados:

1) $\lim_{x \to -3^-} \sqrt{x+3}$

Solución:

Como el dominio de la función está dado para $x \geq -3$, se tiene que no existen valores de x menores que $-3(por\ la\ izquierda\ de -3)$ y por lo tanto:

$$\lim_{x \to -3^-} \sqrt{x+3} = NO\ EXISTE$$

2) $\lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2}$

Solución:

Como el dominio de la función está dado para $-3 \le x \le 3$, se tiene que *"x"* puede tomar valores mayores (cercanos) a -3 $(por\ la\ derecha\ de -3)$, por lo que el límite SI EXISTE y está dado por:

$$\lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-9} = \mathbf{0}$$

3) $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)$

Solución:

Como el dominio de la función está dado por todos los números reales excepto $x=-2\ y\ x=2$, se tiene que *"x"* puede tomar valores mayores que 2 pero al aproximarnos a este valor por el lado derecho la función se aproxima a $+\infty$, por lo tanto el límite NO EXISTE.

x	2.1	2.01	2.001	2
$f(x)$	2.43	24.93	249.93	?

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4}\right) = \frac{1}{2^2-4} = \frac{1}{0} = NO\ EXISTE$$

4) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **donde** $f(x) = \begin{cases} 2x - x^3, & x<0 \\ 2x^2-2, & x \ge 0 \end{cases}$

Solución:

A este tipo de funciones se les llama funciones definidas por intervalos y para calcular el límite bilateral de una función de este tipo se utilizan los límites laterales, de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0^-} (2x - x^3) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to 0^+} (2x^2-2) = -2$$

Como los límites laterales son diferentes, entonces el límite bilateral NO EXISTE.

5) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

Solución:

Como al evaluar el límite para $x = 1$ en la función dada resulta $\frac{0}{0}$, entonces, puede ser que este límite sí exista, sin embargo, al evaluar los límites laterales se demuestra lo contrario.

Recordando que:

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1), & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \qquad y \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

Como los límites laterales son diferentes, entonces:

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1} = NO\ EXISTE$$

Ejercicio 1.2

I. Calcular el límite, si es que existe.

1) $\lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{x^2-16}$

4) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$; $donde\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2}; x \leq 3 \\ \frac{9-2x}{3}; x > 3 \end{cases}$

2) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$

5) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; $donde\ \ f(x) = \begin{cases} x+2; x < 1 \\ 1-x; x \geq 1 \end{cases}$

3) $\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

Soluciones al ejercicio 1.2

1) $\frac{1}{8}$

2) -1

3) No existe

4) 3

5) 0

1.3 Continuidad de funciones

Conocimiento previo: Análisis del comportamiento gráfico de funciones a partir de su dominio.

Actividad No. 2	**Conocimiento previo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Análisis del comportamiento gráfico de funciones a partir de su dominio.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los gráficos y el dominio correcto de diferentes tipos de funciones.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Instrucciones: Determina el dominio de las siguientes funciones, expresándolo en intervalos y comprueba mediante su gráfica correspondiente.

1) $f(x) = \sqrt{x-1}$

2) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

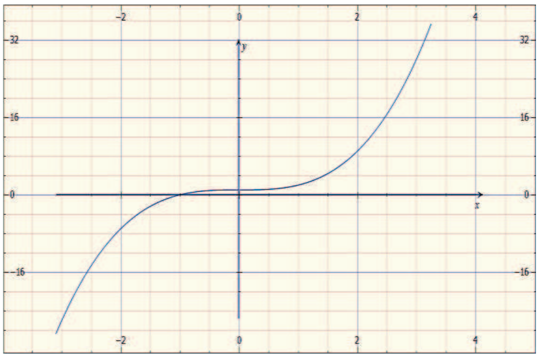
3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

4) $f(x) = \begin{cases} -2x-3, & x > 1 \\ x^2-1, & x \leq 1 \end{cases}$

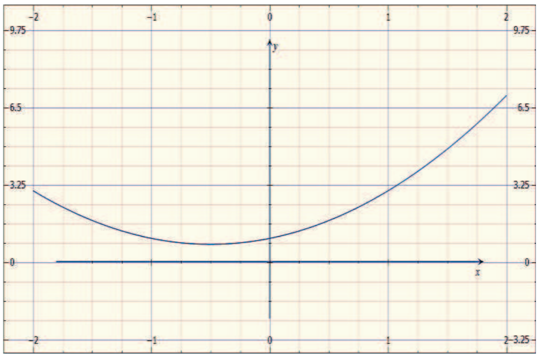
5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ x^3-1, & x < 1 \end{cases}$

De manera coloquial, se puede decir que una función es continua en un intervalo cuando su gráfica puede ser trazada sin interrupciones, ya sea en todo su dominio, en algún o en algunos intervalos.

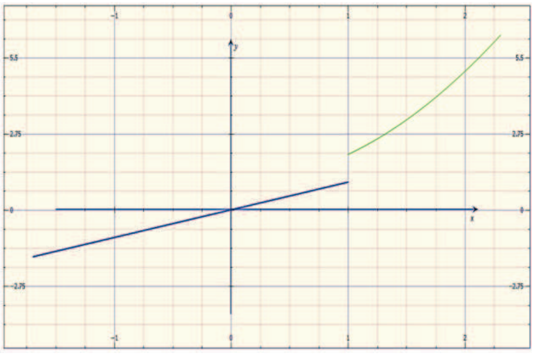
Observemos las siguientes figuras:



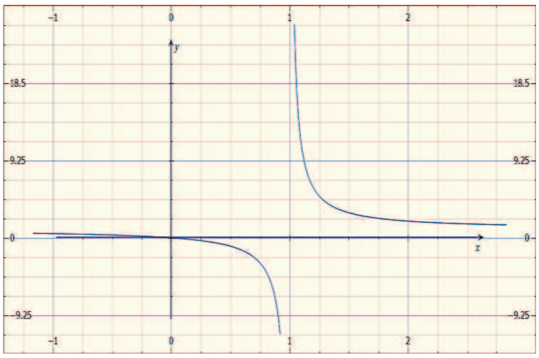
$Figura\ 1a. f(x) = x^3 + 1$



$Figura\ 1b. f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$



$Figura\ 1c. f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$



$Figura\ 1d. f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

Figura 1a: Se observa que la gráfica no sufre interrupciones, por lo tanto, la función $f(x)$ es **continua** en todo su dominio.

Figura 1b: Se observa que la gráfica no sufre interrupciones, por lo tanto, la función $f(x)$ es **continua** en todo su dominio.

Figura 1c: Se observa que la gráfica sufre una interrupción en $x = 1$ (salto), por lo tanto, **no es continua** en todo su dominio, pero en los intervalos $(-\infty, 1)\ y\ [1, \infty)$ sí presenta continuidad. Se dice que es **discontinua** en $x = 1$.

Figura 1d: Se observa que la gráfica sufre una interrupción en x = 1 (asíntota vertical), por lo tanto, **no es continua** en todo su dominio, pero en los intervalos $(-\infty, 1) y\ (1, \infty)$ sí presenta continuidad. Se dice que es **discontinua** en x = 1.

Nota: Analice la notación de los intervalos, con respecto a la función y a su gráfica.

Podemos notar que en el punto donde la gráfica sufre una interrupción, se presenta una discontinuidad que puede ser de dos tipos: **evitable o removible e inevitable o no removible.** Es evitable o removible si la función se puede hacer continua definiendo o redefiniendo apropiadamente $f(c)$, o bien, cuando el límite de la función en ése punto sí EXISTE, como se presenta en la figura 1b) y es inevitable o no removible cuando el límite de la función en ese punto NO EXISTE, como se presenta en la figura 1c) y 1d).

La continuidad se puede determinar en:

A) Un punto ($x = a$)

Una función es continua en un punto "a" si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $F(a)$ está definida
- $\lim_{x \to a} f(x)$ Existe
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo1. Determinar si las funciones dadas son continuas en el punto indicado, si son discontinuas, especificar el tipo de discontinuidad que presentan.

a) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3x+3}}$ **en** $\boldsymbol{x = 2}$

Solución:

Tomando en cuenta la primer condición de continuidad en un punto, se debe calcular $f(2)$ en $f(x) = \sqrt{3x+3}$ y resulta:

$f(2) = \sqrt{3(2)+3} = 3$, por lo tanto la función sí está definida en $x = 2$

Ahora se evalúa el límite en el punto dado para ver si existe, ya que es la segunda condición de continuidad en un punto y resulta que:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{3x+3} = \sqrt{3(2)+3} = \sqrt{9} = 3 \text{ (Sí existe)}$$

Demostrando que se cumpla la tercer condición de continuidad en un punto, podemos decir que la función **sí es continua en** $\boldsymbol{x = 2}$, ya que $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}}$ **en** $\boldsymbol{x = 3}$

Tomando en cuenta la primera condición de continuidad en un punto se debe calcular $f(3)$ en $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}}$ y resulta:

$f(3) = \frac{6}{0}$, por lo tanto, la función no está definida en $x = 3$

Como no se cumple la primera condición de continuidad en un punto, entonces la función **no es continua en** $\boldsymbol{x = 3.}$

Para determinar el tipo de discontinuidad que se presenta, se calcula el límite cuando "x" tiende a 3 y resulta que:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x^2-9}} = \frac{6}{0} \quad \text{NO EXISTE}$$

Se presenta una **discontinuidad inevitable o no removible en $\boldsymbol{x = 3}$** porque el límite no existe.

c) $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^3+1}, & x < 1 \\ \boldsymbol{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$ **en** $\boldsymbol{x = 1}$

Solución:

Tomando en cuenta la primera condición de continuidad en un punto, se debe calcular $f(1)$ en $f(x) = x + 1$ y resulta:

$f(1) = 1 + 1 = 2$, por lo tanto la función sí está definida en $x = 1$

Ahora se evalúa el límite en el punto dado para ver si existe, ya que es la segunda condición de continuidad en un punto.

Utilizando los límites laterales, resulta que:

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-}(x^3+1) = 2$$

Por lo tanto: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ (Sí existe)

Demostrando que se cumpla la tercera condición de continuidad en un punto, podemos decir que la función **sí es continua en $\boldsymbol{x = 1}$**, ya que $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$

d) $\boldsymbol{f\,(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^3+1}, & \boldsymbol{x} < 1 \\ \boldsymbol{3}, & \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{x+1}, & \boldsymbol{x} > 1 \end{cases}$ **en** $\boldsymbol{x = 1}$

Solución:

Tomando en cuenta la primera condición de continuidad en un punto, se debe calcular $f(1)$ en $f(x) = 3$ y resulta:

$f(1) = 3$, por lo tanto, la función sí está definida en $x = 1$

Ahora se evalúa el límite en el punto dado para ver si existe, ya que es la segunda condición de continuidad en un punto.

Utilizando los límites laterales, resulta que:

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-}(x^3+1)=2$$

Por lo tanto: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ (Sí existe)

Demostrando que se cumpla la tercera condición de continuidad en un punto, podemos decir que la función **no es continua en $x = 1$**, ya que $f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$. Se presenta una **discontinuidad evitable o removible** en $x = 1$.

e) $\boldsymbol{f(x) = f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x<1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}}$ **en** $\boldsymbol{x = 1}$

Solución:

Tomando en cuenta la primera condición de continuidad en un punto, se debe calcular $f(1)$ en $f(x)$, pero resulta que la función no está definida para este valor, por lo tanto, no se cumple con esta primera condición y podemos decir que **la función no es continua en $x = 1$.** Para determinar el tipo de discontinuidad que se presenta, debemos calcular el límite de la función cuando "x" tiende a 1, y resulta que éste sí existe y vale 2, por lo tanto, se presenta una **discontinuidad evitable o removible.**

B) En un intervalo abierto (a , b)

Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo.

Ejemplo 2: Determina si las funciones dadas son continuas en el intervalo indicado.

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-2}}$; $\boldsymbol{en\ el\ intervalo\ (2, 10)}$

Solución:

El dominio de *f* está dado por todos los números reales, excepto $x = 2$ y como este valor no está incluido dentro del intervalo dado, entonces, $f(x)$ **sí es continua** en el intervalo indicado.

Nota: $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable o no removible en $x = 2$.

b) $\boldsymbol{g(x) = Cos\ x}$; $\boldsymbol{en\ el\ intervalo\ (0, \pi)}$

Solución:

Como se sabe que la función $\boldsymbol{Cos\ x}$ es continua en todo su dominio, entonces, $g(x)$ **sí es continua** en el intervalo indicado.

c) $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{x}}$; $\boldsymbol{en\ el\ intervalo\ (-2, 2)}$

Solución:

El dominio de h está dado por todos los números reales, excepto $x = 0$ y como este valor sí está incluido dentro del intervalo dado, entonces, $h(x)$ **no es continua en el intervalo indicado.**

Nota: $h(x)$ presenta una discontinuidad inevitable o no removible en $x = 0$.

C) En un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a, b}]$

Una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y cuando:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Ejemplo 3: Determina si las función dada es continua en el intervalo indicado.

a) $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x-3}; \quad en \quad el \quad intervalo\ [3, 7]}$

Solución:

El dominio de g está dado por todos los números reales, tales que $x \geq 3$ y como el intervalo dado está dentro del dominio, entonces, $f(x)$ **sí es continua en el intervalo indicado.**
Demostración:

La función $g(x)$ es continua en el intervalo abierto (3,7) porque está dentro del dominio.

Calculando los límites laterales para $a = 3$ y $b = 7$, *resulta:*

$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = g(3) = 0 \quad \text{Y} \quad \lim_{x \to 7^-} \sqrt{x-3} = g(7) = 2$$

Entonces la función $g(x)$ **sí es continua** en el intervalo indicado.

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}}$; $\boldsymbol{en\ el\ intervalo\ [0, 5]}$

Solución:

El dominio de f está dado por todos los números reales, excepto $x = 2$ y como este valor sí está incluido en el intervalo dado, entonces, $f(x)$ **no es continua en el intervalo indicado.**

Nota: $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable o removible en $x = 2$.

Ejercicio 1.3

I. Analizar la continuidad de cada función en el punto indicado. En caso de no ser continua, identificar el tipo de discontinuidad que se presenta.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 4; \qquad en\ x = 1$

2) $f(x) = \frac{1}{x-3}\ ; \qquad en\ x = 3$

3) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}\ \ en\ x = -2$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}\ \ en\ x = -1$

5) $f(x) = \begin{cases} -2x+3; x \geq 1 \\ x^2; x < 1 \end{cases}\ en\ x = 1$

II. Analizar la continuidad en el intervalo indicado. En caso de no ser continua, identificar el tipo de discontinuidad que se presenta.

6) $f(x) = Sec\ x\ en\ el\ intervalo\ (0, \frac{\pi}{2})$

7) $f(x) = \sqrt{9-x^2}\ en\ el\ intervalo[-3,3]$

8) $f(x) = \frac{x}{x-3}\ en\ el\ intervalo\ (0,5)$

9) $f(x) =\ Cot\ x\ en\ el\ intervalo\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

10) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}\ en\ el\ intervalo\ (-1,1)$

Soluciones al ejercicio I.3

1) Sí es continua en $x = 1$

2) No es continua en $x = 3$, discontinuidad inevitable.

3) No es continua en $x = -2$, discontinuidad evitable.

4) Sí es continua en $x = -1$

5) Sí es continua en $x = 1$

6) Sí es continua.

7) $f(x)$ sí es continua.

8) No es continua, discontinuidad inevitable en $x = 3$

9) No es continua, discontinuidad inevitable en $x = 0$

10) Sí es continua.

<table>
<tr><td>Actividad No. 3</td><td>Desarrollo</td><td>Individual – extra aula</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propósito: Reafirmar el concepto de límite y de continuidad de funciones.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tiempo estimado para la actividad: 1 hora</td></tr>
</table>

Instrucciones: Utiliza un software de graficación para trazar la gráfica de cada una de las funciones involucradas en esta actividad para comprobar o analizar los resultados obtenidos**.**

I. Calcular los límites, si es que existen.

1) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$

2) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x^2+x}\right)$

3) $\lim_{x\to -1} \left(\frac{x+1}{x^2+x}\right)$

II. Determinar la continuidad de las siguientes funciones, ya sea en los puntos indicados o en los intervalos indicados. De no ser continua, identifica el tipo de discontinuidad que se presenta.

4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ **a) en *x = 0*** **b) en $x = -1$**

5) $g(x) = \sqrt{x-2}$ **a) en $(0,6)$** **b) en (2,6)** **c) en [2,6]**

1.4 Límites al infinito

Ahora se analizarán límites de funciones cuando "x" se aproxima a más infinito $(+\infty)$ ó a menos infinito $(-\infty)$. Se expresan como:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

Lo anterior se lee como límite de *f* de *x* cuando *x* tiende a más infinito y significa a qué valor se aproxima "*f*" cuando "*x*" crece infinitamente.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Lo anterior se lee como límite de *f* de *x* cuando *x* tiende a menos infinito y significa a qué valor se aproxima "f" cuando "x" decrece infinitamente.

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, significa que la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en la recta $y = L$.

La gráfica de una función $f(x)$ puede tener hasta 2 asíntotas horizontales, una recta hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Teorema:

Si "n" es un número racional real, positivo y "k" es un número real, entonces

$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$, además si x^n se define cuando *x* es menor que 0 entonces

$\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0.$

Ejemplo: Calcular los límites dados.

1. $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^3} + 6}$

Solución:

Aplicando las propiedades de los límites se tiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^3} + 6 = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^3} + \lim_{x \to +\infty} 6 = 0 + 6 = 6$$

2. $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1}}$

Solución:

Se divide el numerador y el denominador entre "*x*"

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\lim_{x \to \infty} 1}{\lim_{x \to \infty} 1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim_{x \to \infty} 1}{\lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\mathbf{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2-3x}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{2-3x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{|x|}-\frac{3x}{|x|}}$ $\quad Como\ |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}; entonces:$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{x}-\frac{3x}{x}} = \frac{\sqrt{9}}{-3} = \frac{3}{-3} = \mathbf{-1}$$

Ejercicio 1.4

Calcular los siguientes límites, si es que existen y dar su interpretación geométrica.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4}{3x^2+x+2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{x^2+4}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3x^3+4x^2-5x+2}{6x^2-2x+3}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-4}{\sqrt{4x^4-5x^2+1}}\right)$

Soluciones al ejercicio 1.4

1) $\frac{1}{3}$. La gráfica de la función tiene una asíntota horizontal en la recta $y = \frac{1}{3}$
2) 0. La gráfica de la función tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$
3) -1. La gráfica de la función tiene una asíntota horizontal en la recta $y = -1$.
4) No existe, por lo tanto, la gráfica de la función no tiene asíntotas horizontales.
5) 1. La gráfica de la función tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 1$.

Actividad No. 4	Integradora 1	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar el concepto de límite y de continuidad de funciones en diferentes situaciones planteadas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Instrucciones:

I. Responde con tus palabras a los siguientes cuestionamientos. En caso de ser necesario justifica la respuesta.

1) Explica el concepto de límite de una función.
2) ¿Bajo qué condición se presenta una asíntota vertical?
3) ¿Bajo qué condiciones se presenta una asíntota horizontal?
4) ¿Qué es una discontinuidad?

5) Si $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7x+12}$

   a) ¿Para qué valor de “x” se presenta una discontinuidad evitable o removible?
   b) ¿Para qué valor de “x” se presenta una discontinuidad inevitable o no removible?

II. Calcula los siguientes límites, si es que existen y argumenta el procedimiento:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{3-x}-2}{3-\sqrt{8-x}} \qquad\qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

III. PROBLEMA RAZONADO

1. El tipo de interés anual $I(t)$ en %, ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo t en años, que está dispuesto a mantener la inversión a través de la siguiente expresión:

$$I(t) = \frac{90t}{t^2+9}$$

   a) Estudia la continuidad de la función $I(t)$.
   b) Si la función es siempre decreciente a partir de los 3 años y la inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.
   c) ¿El interés será negativo en algún momento?
   d) Realiza un esbozo de la gráfica de la función.

Capítulo 2. La derivada

2.1 Definición de la derivada

Por medio de la definición de límite que se dio en el Capítulo 1 se encontrará la derivada de una función, así como también se determinarán métodos y reglas que se utilizan para derivar funciones y a la vez aplicarlas en la comprensión de conceptos como velocidad, aceleración y la razón de cambio de dos o más variables.

El primer problema que estaban trabajando los investigadores matemáticos en el siglo XVII para el desarrollo del cálculo era el problema de la recta tangente el cual consiste en hallar la ecuación de una recta tangente a la curva de una función $f(x)$ en un punto $P(x, f(x))$.

Recordando que la secante a una curva es la recta que intersecta en dos puntos a ella, mientras que la tangente es aquella recta que intersecta en uno y sólo un punto a la curva de $f(x)$, y sabiendo que para obtener la pendiente de una recta se necesitan conocer dos puntos de ella se encontró que para el caso de la recta tangente solamente se conocía un punto. De lo anterior se resolvió éste problema de la siguiente forma:

Se traza una recta secante a la curva de $f(x)$ que intersecta en los puntos $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ en donde Δx es el cambio o incremento en x. VER FIGURA 2.1 a).

La pendiente de dicha recta se obtiene mediante la fórmula

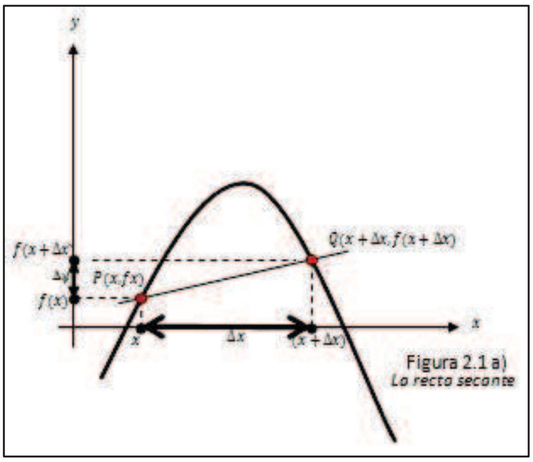


Figura 2.1 a)
La recta secante

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Sustituyendo las coordenadas de los puntos P y Q de la recta secante se tiene que el valor de la pendiente es:

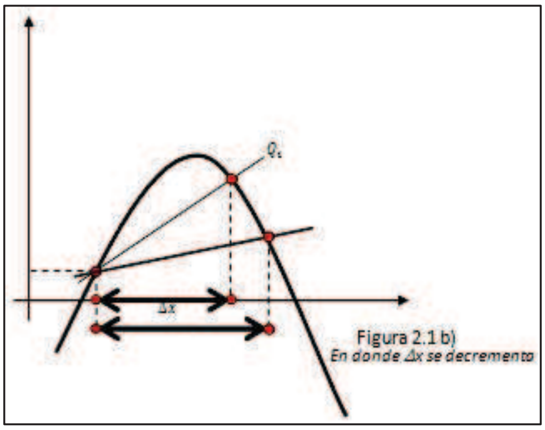
$$m_{sec} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - (x)}$$

Y, simplificando, queda:

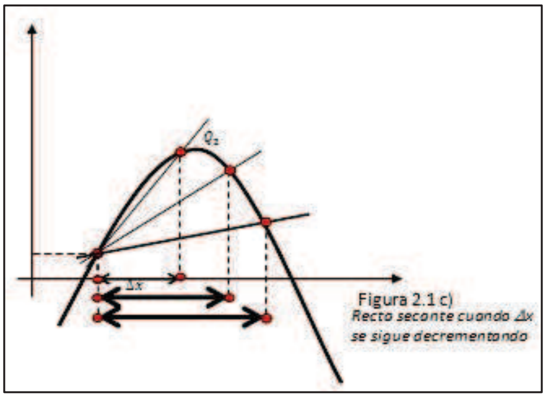
$$m_{sec} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

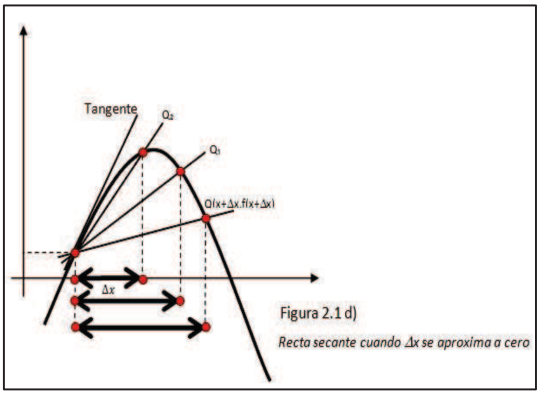
$$\Delta x \neq 0$$

En la figura 2.1 b) se observa que si deja el punto P fijo y Δx decrece, el punto Q se va aproximando al punto P y llamamos Q_1 a la nueva posición de Q; con esto se tiene que la nueva secante comprende un arco más pequeño que la primera secante. VER FIGURA 2.1b)



Continuando que el valor de Δx sigue decreciendo el punto Q_1 cambia de posición obteniendo nueva Q por consiguiente ahora es Q_2 VER FIGURA 2.1 c).
De tal manera que si Δx se aproxima a 0 el punto Q se va aproximar a P de tal manera que la recta secante se aproxima a ser una recta tangente a la curva. VER FIGURA 2.1 d)





Utilizando el concepto de límites podemos definir que la pendiente de la recta tangente de la curva de $f(x)$ en un punto cualquiera $P(x, f(x))$ es el límite de la pendiente de la recta secante cuando el incremento en x tiende a cero. Lo anterior se denota por:

$$\mathrm{m_{tan}} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

Donde, sustituyendo $\mathrm{m_{sec}}$

$$\mathrm{m_{tan}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Con lo anterior se define que la ecuación de la recta tangente de una curva $f(x)$ que pasa por el punto $P(c, f(c))$ y tiene pendiente $m(c)$ está dada por:

$$y - f(c) = m(c)(x - c)$$

Lo anterior no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical a la curva de $f(x)$ ya que el límite no existe teniendo la curva de $f(x)$ una asíntota vertical en $x = c$. El límite anterior es uno de los conceptos fundamentales del cálculo y se llama derivada de la función $f(x)$

Definición de derivada: Dada una función $f(x)$, su derivada es aquella función denotada por $f'(x)$ tal que su valor de función en cualquier valor x en su dominio de f está dado por:

$$f'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si este límite existe.

La derivada $f'(\mathrm{x})$ es una nueva función de tal manera que al evaluarla en un punto particular de la curva de $f(x)$ se obtendrá un valor que representa la pendiente de la recta tangente de $f(x)$ en ese punto. Por lo anterior se puede definir que la derivada de una función $f(x)$ en un punto cualquiera $P(x, f(x))$ representa geométricamente la pendiente de una recta tangente a la curva de dicha función f en ese punto P.

Considerando la definición de derivada, en una función para un tiempo t, $f(t)$ se aplica como la ecuación del movimiento de una partícula $v(t) = f'(t)$. Evaluada para un tiempo $t = 0$ representará la velocidad en t_0.

La derivada de una función también se puede denotar por:

$$D_x\, f(x) \;;\; D_x\, y \;;\; y' \;; f'(\mathrm{x}) \;;\; \frac{dy}{dx} \;; \frac{df(x)}{dx}$$

Ejemplos:

1) **Encontrar por definición $f'(x)$, para $f(x) = 2x$.**

Solución:

La derivada por definición es:

$$f'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo tanto para $f(x) = 2x$ se evalúa con $(x + \Delta x)$ y se obtiene que:

$$f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)$$

Lo anterior se sustituye en la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$$

Resolviendo este límite se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2}$$

2) Encontrar por definición $f'(x)$, para $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

Solución:

La derivada por definición es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo tanto para $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ se evalúa con $(x + \Delta x)$ y se obtiene que:

$$f(x+\Delta x) = 4(x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) + 3$$

Lo anterior se sustituye en la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) + 3 - (4x^2 - 5x + 3)}{\Delta x}$$

Resolviendo este límite se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5(\Delta x) + 3 - (4x^2 - 5x + 3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x(\Delta x) + 4\,(\Delta x)^2 - 5x - 5(\Delta x) + 3 - 4x^2 + 5x - 3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x(\Delta x) + 4\,(\Delta x)^2 - 5(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4(\Delta x) - 5)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [8x + 4(\Delta x) - 5]$$

$$f'(x) = 8x + 4(0) - 5$$

$$f'(x) = 8x - 5$$

3) Derive $f(x) = \sqrt{x-1}$ por definición

Solución:

La derivada por definición es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo tanto para $f(x) = \sqrt{x-1}$ se evalúa con $(x+\Delta x)$ y se obtiene que:

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{(x+\Delta x)-1}$$

Lo anterior se sustituye en la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1} - \sqrt{x-1}}{\Delta x}$$

Resolviendo este límite (multiplicando por el conjugado) se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1} - \sqrt{x-1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1}}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x+\Delta x)-1-(x-1)}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1})}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x+\Delta x-1-x+1}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1})}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1})}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+0)-1} + \sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}$$

4) Utilizando la definición de derivada hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Solución:

Recordando que la derivada de una función representa geométricamente la pendiente de una recta tangente en un punto de su gráfica se tiene:

$$f'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo tanto para $f(x) = \frac{1}{x+1}$ se evalúa con $(x+\Delta x)$ y se obtiene que:

$$f(x+\Delta x) = \frac{1}{(x+\Delta x)+1}$$

Lo anterior se sustituye en la definición de derivada

$$f'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)+1} - \frac{1}{x+1}}{\Delta x}$$

Resolviendo este límite (restando las fracciones y simplificando) se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x+1}{[(x+\Delta x)+1][x+1]} - \frac{(x+\Delta x)+1}{[(x+\Delta x)+1][x+1]}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+1)-[(x+\Delta x)+1]}{[(x+\Delta x)+1][x+1]}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x+1-x-\Delta x-1}{[(x+\Delta x)+1][x+1]}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{[(x+\Delta x)+1][x+1]}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x[(x+\Delta x)+1][x+1]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{[(x+\Delta x)+1][x+1]}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{[(x+0)+1][x+1]} = \frac{-1}{(x+1)(x+1)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}}}$$

Para $x = 1$ la pendiente de la recta tangente está dada por:

$$m = f'(1)\frac{-1}{(1+1)^2} = \frac{-1}{(2)^2} = -\frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor de la pendiente y las coordenadas del punto dado de la recta tangente en la ecuación, punto pendiente de la recta se tiene:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,(x - 1)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,x + \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}\,x + \frac{3}{4}}$$

Ejercicio 2.1

I. Calcular las derivadas de las siguientes funciones por medio de la definición.

1) $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

3) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

4) $h(x) = \frac{-3x+7}{5x+11}$

5) $y(x) = x^4$

Soluciones al Ejercicio 2.1

1) $f'(x) = 8x - 3$

2) $f'(x) = \frac{-2x}{x^4+2x^2+1}$

3) $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

4) $h'(x) = \frac{-68}{25x^2+110x+121}$

5) $y'(x) = 4x^3$

2.2 Reglas básicas para derivar

Las reglas básicas para derivar permiten calcular las derivadas sin el uso de límites.

Estas reglas se enuncian en la siguiente tabla, considerando que las funciones f y g son continuas derivables, c es una constante real y n es un número real.

Regla	Fórmula	Otras formas
Función constante	$\frac{d(c)}{dx} = 0$	Si $y = c$ $y' = 0$
Función identidad	$\frac{d(x)}{dx} = 1$	Si $y = x$ $y' = 1$
Potencias	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	Si $y = x^n$ $y' = nx^{n-1}$
Constante por una función	$\frac{d}{dx}[c\, f(x)] = c\,\frac{d}{dx}[f(x)]$	Si $y = cf(x)$ $y' = cf'(x)$
Suma y/o diferencia de funciones	$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$	Si $y = u \pm v$ $y' = u' \pm v'$
Producto	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$	Si $y = uv$ $y' = uv' + vu'$
Cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\ g(x) \neq 0 = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$	Si $y = \frac{u}{v}$ $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Ejemplo: Deriva y simplifica la siguientes funciones.

1) $y = \sqrt{3}$

Solución:

$y' = \frac{d}{dx}(\sqrt{3})$ $\qquad$ *Regla de función constante.*

$$\boxed{\boldsymbol{y' = 0}}$$

2) $y = 7x$

Solución:

$\frac{dy}{dx} = 7\frac{d}{dx}(\mathrm{x})$ $\qquad$ $Regla\ de\ constante\ por\ una\ función.$

$\frac{dy}{dx} = 7\,(1)$ $\qquad$ $Regla\ de\ función\ identidad.$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 7}}$$

3) $y = x^3$

Solución:

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3)$ $\qquad$ $Regla\ de\ potencia$

$\frac{dy}{dx} = 3(x)^{3-1}$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 3x^2}}$$

4) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

Solución:

Simplificando $f(x)$ resulta:

$f(x) = x\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = x^{\frac{4}{3}}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3}\right)$ *Regla de potencia*

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}}}$$

5) $\boldsymbol{g(x) = \sqrt[3]{x^2}}$

Solución:

Reexpresando $g(x)$

$$g(x) = x^{2/3}$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right)$$

$g'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$ *Regla de potencia.*

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}}$$

6) $\boldsymbol{h(t) = \frac{1}{t^4}}$

Solución:

Reexpresando $h(t)$

$$h(t) = t^{-4}$$

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(t^{-4})$$

$h'(t) = -4t^{-4-1}$ *Regla de potencia.*

$$h'(t) = -4t^{-5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{h'(t) = \frac{-4}{t^5}}}$$

7) $\boldsymbol{f(x) = 4x^3}$

Solución:

$f'(x) = 4\frac{d}{dx}[x^3]$ *Regla de una constante por una función.*

$f'(x) = 4[3x^{3-1}]$ *Regla de potencia.*

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = 12x^2}}$$

Nota: Existe una regla $y = cx^n$ y $y' = cnx^{n-1}$

8) $\boldsymbol{y = 8\sqrt{x}}$

Solución:

Reexpresando y

$y = 8x^{1/2}$ *Regla de constante por una función.*

$y' = 8\frac{d}{dx}\left[x^{1/2}\right]$ *Regla de constante por una función.*

$y' = 8\left(\frac{1}{2}x^{1/2-1}\right)$ *Regla de potencia.*

$y' = 4x^{-1/2}$ *Simplificando.*

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{4}{x^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{x}}}}$$

9) $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 7x + 2}$

Solución:

$f'(x) = \frac{d}{dx}[3x^2] - \frac{d}{dx}[7x] + \frac{d}{dx}[2]$ *Regla de suma y/o diferencia de funciones.*

$f'(x) = 3\frac{d}{dx}[x^2] - 7\frac{d}{dx}[x] + 0$ *Reglas de constante por una función y de función constante.*

$f'(x) = 3(2x^{2-1}) - 7(1)$ *Reglas de potencia y de función identidad.*

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = 6x - 7}}$$

10) $\boldsymbol{g(x) = (5x^2 - 3x + 2)(6\ - 3x)}$

Solución:

Regla del Producto.

$$g'(x) = (5x^2 - 3x + 2)\frac{d}{dx}[6 - 3x] + (6 - 3x)\frac{d}{dx}[5x^2 - 3x + 2]$$

Regla Suma y/o diferencia de funciones.

$$g'(x) = (5x^2 - 3x + 2)\left[\frac{d}{dx}(6) - \frac{d}{dx}(3x)\right]\ +\ (6 - 3x)\left[\frac{d}{dx}(5x^2) - \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(2)\right]$$

Reglas de Función constante y constante por una función.

$$g'(x) = (5x^2 - 3x + 2)\left[0 - 3\frac{d}{dx}(x)\right] + (6 - 3x)\left[5\frac{d}{dx}(x^2) - 3\frac{d}{dx}(x) + 0\right]$$

Reglas de Función identidad y Potencias.

$$g'(x) = (5x^2 - 3x + 2)(-3) + (6 - 3x)[5(2x) - 3(1)]$$

Simplificando.

$$g'(x) = (5x^2 - 3x + 2)(-3) + (6 - 3x)[10x - 3]$$
$$g'(x) = -15x^2 + 9x - 6 + 60x - 18 - 30x^2 + 9x$$

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = -45^2 + 78x - 24}}$$

11) $\boldsymbol{y = \frac{5x-3}{3-2x}}$

Solución:

Regla del Cociente

$$y'\ = \frac{(3 - 2x)\frac{d}{dx}(5x - 3) - (5x - 3)\frac{d}{dx}(3 - 2x)}{(3 - 2x)^2}$$

Regla Suma y/o Diferencia de funciones

$$y'\ = \frac{(3 - 2x)\left[\frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(3)\right] - (5x - 3)\left[\frac{d}{dx}(3) - \frac{d}{dx}(2x)\right]}{(3 - 2x)^2}$$

Regla Constante por una función y Función constante

$$y' = \frac{(3-2x)\left[5\frac{d}{dx}(x) - (0)\right] - (5x-3)\left[(0) - 2\,\frac{d}{dx}(x)\right]}{(3-2x)^2}$$

Usando regla Función identidad

$$y' = \frac{(3-2x)[5(1)] - (5x-3)[-2(1)]}{(3-2x)^2}$$

Simplificando

$$y' = \frac{(3-2x)(5) - (5x-3)(-2)}{(3-2x)^2}$$

$$y' = \frac{15 - 10x + 10x - 6}{(3-2x)^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{9}{(3-2x)^2}}}$$

12) $\boldsymbol{f(x) = \frac{(2x+3)(3x-1)}{(5x+2)}}$

Solución:

Regla del Cociente

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\frac{d}{dx}[(2x+3)(3x-1)] - (2x+3)(3x-1)\frac{d}{dx}[5x+2]}{(5x+2)^2}$$

Reglas del Producto y Suma y/o diferencia de funciones

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\left[(2x+3)\frac{d}{dx}(3x-1) + (3x-1)\frac{d}{dx}(2x+3)\right] - (2x+3)(3x-1)\left[\frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2)\right]}{(5x+2)^2}$$

Reglas Suma y/o diferencia de funciones, constante por una función y Función Constante

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\left[(2x+3)\left[\frac{d}{dx}(3x) - \frac{d}{dx}(1)\right] + (3x-1)\left[\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3)\right]\right] - (2x+3)(3x-1)\left[5\frac{d}{dx}(x) + 0\right]}{(5x+2)^2}$$

Regla Constante por una función, Función Constante y Función identidad

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\left[(2x+3)\left[3\frac{d}{dx}(x) - 0\right] + (3x-1)\left[2\frac{d}{dx}(x) + 0\right]\right] - (2x+3)(3x-1)[5(1)]}{(5x+2)^2}$$

Regla Función identidad

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\big[(2x+3)[3(1)] + (3x-1)[2(1)]\big] - (2x+3)(3x-1)[5]}{(5x+2)^2}$$

Simplificando

$$f'(x) = \frac{(5x+2)[(2x+3)(3) + (3x-1)\ (2)] - 5(6x^2 - 2x + 9x - 3)}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x+2)[6x + 9 + 6x - 2] - 30x^2 - 35x + 15}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x+2)(12x+7) - 30x^2 - 35x + 15}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{60x^2 + 35x + 24x + 14 - 30x^2 - 35x + 15}{(5x+2)^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{30x^2+24x+29}{(5x+2)^2}}}$$

Nota: En el problema anterior se puede simplificar la derivada de la función si primero se multiplican los binomios contenidos en el numerador.

$$f(x) = \frac{(2x+3)(3x-1)}{(5x+2)}$$

Multiplicando (simplificando el numerador)

$$f(x) = \frac{6x^2 - 2x + 9x - 3}{(5x+2)} = \frac{6x^2 + 7x - 3}{5x+2}$$

Regla del cociente

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\frac{d}{dx}[6x^2 + 7x - 3] - (6x^2 + 7x - 3)\frac{d}{dx}[5x+2]}{(5x+2)^2}$$

Regla de Suma y/o diferencia de funciones

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\left[\frac{d}{dx}(6x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(3)\right] - (6x^2 + 7x - 3)\left[\frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2)\right]}{(5x+2)^2}$$

Reglas de Constante por una función y Función constante

$$f'(x) = \frac{(5x+2)\left[6\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - 0\right] - (6x^2+7x-3)\left[5\frac{d}{dx}(x) + 0\right]}{(5x+2)^2}$$

Reglas de Potencias y Función identidad

$$f'(x) = \frac{(5x+2)[6\,(2x) + 7(1)] - (6x^2+7x-3)[5(1)]}{(5x+2)^2}$$

Simplificando

$$f'(x) = \frac{(5x+2)(12x+7) - 5(6x^2+7x-3)}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{60x^2 + 35x + 24x + 14 - 30x^2 - 35x + 15}{(5x+2)^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{30x^2+24x+29}{(5x+2)^2}}}$$

EJEMPLO: Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \qquad en\ el\ punto\ (-1, 10)}$

Solución:

Como la derivada representa geométricamente la pendiente de la recta tangente, resulta que:

$$f'(x) = m = 6x - 2\ y\ evaluando\ en\ x = -1\ queda\ \boldsymbol{m = -8}$$

Desarrollando la forma punto – pendiente de la ecuación de la recta y sustituyendo los valores correspondientes a la pendiente y al punto, resulta:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 10 = -8\,(\,x + 1\,)$$

$$y - 10 = -8x - 8$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -8x + 2}}$$

2) $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{x-3}{2x-1}}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{en \ \ x = 3}$

Solución:

En este caso primero se definen las coordenadas del punto de tangencia, sustituyendo el valor de "x" dado en la función dada y resulta que dicho punto es: $P\ (3{,}0)$.

Derivando la función y sustituyendo, resulta que la pendiente es:

$$g'(x) = \frac{5}{(2x-1)^2}$$

$$m = g'(3) = \frac{5}{[2(3)-1]^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{5}(\,x - 3\,)$$

$$5y = x - 3$$

$$\boxed{\boldsymbol{x - 5y - 3 = 0}}$$

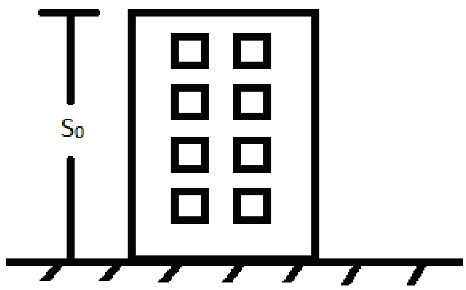
Aplicación

La función de posición para objetos en caída libre está dada por:

$$s(t) = -16t^2 + v_o t + s_0$$

En donde $v_o$es la velocidad inicial en $pies/s$ y s_0 es la posición inicial en $pies$

Ejemplo:



Se deja caer un balón desde lo alto de un edificio que tiene una altura de 1200 pies.

a) Determinar la función que describe la posición.

A partir de la función de posición para objetos en caída libre y considerando

$$s_0 = 1200 \qquad\qquad v_0 = 0$$

$$s(t) = -16t^2 + 1200$$

b) Si la velocidad está dada por el cambio de posición con respecto al tiempo, es decir, $\frac{ds}{dt}$. Determinar la función de velocidad.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t) = -32t \ \ pies/s$$

c) Calcular la velocidad de balón a los 2 segundos.

$$v(2) = -32(2) = -64 \ \ pies/s$$

d) Determinar su velocidad al caer al suelo.

Para determinar esta velocidad se debe calcular el tiempo que tardar en caer, considerando $s(t) = 0$

$$-16t^2 + 1200 = 0$$
$$t = \sqrt{\frac{1200}{16}} = 8.66s$$

Por lo tanto, la velocidad al caer al suelo es:

$$v(t) = -32(t)$$
$$v(8.66) = -32(8.66)$$
$$\boxed{\boldsymbol{v(8.66) = 277.13\, pies/s}}$$

Ejercicio 2.2

I. Derive y simplifique las siguientes funciones utilizando sólo las reglas básicas de derivación.

1) $f(x) = \pi$

2) $y = x + 3$

3) $y = \sqrt[5]{x^4}$

4) $g(x) = \frac{4}{x}$

5) $f(t) = t^2 - 3t + 2$

6) $h(x) = 2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}$

7) $y = (3x - 2)(4 - x)$

8) $f(x) = (2x - 3)^2$

9) $y = \frac{5x-2}{\sqrt{x}}$

10) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

II. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

11) $\boldsymbol{y = x^2 - 3x + 1}$ en $x = 1$
12) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x-1}}$ en el punto $(0, -3)$
13) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x} + 2}$ en el punto $P[-8, f(-8)]$

III. Problemas de aplicación

14) Se lanza hacia abajo un objeto, desde una altura de 200 pies, con una velocidad inicial de $-20\ pies/s$ a) ¿Cuál es su velocidad a los 2 segundos? b) ¿Cuál es su velocidad después de descender 120 pies? Considerar que $s(t) = -16t^2 + v_o t + s_0$

15) El área de un círculo es $A = \pi r^2$. Si el ritmo de cambio del área con respecto al radio está dado por: dA/dr, calcular este ritmo cuando *r = 2 cm.*

Solución al ejercicio 2.2

1) $f'(x) = 0$
2) $y' = 1$
3) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$
4) $g'(x) = \frac{-4}{x^2}$
5) $f'(t) = 2t - 3$
6) $h'(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{8}{x^3}$
7) $y' = -6x + 14$
8) $f'(x) = 8x - 12$
9) $y' = \frac{5x+2}{2x^{3/2}}$
10) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$
11) $x + y = 0$
12) $3x + y + 3 = 0$
13) $x - 12y + 8 = 0$
14) a) $-84 pies/s$; b) $-89.9\ pies/s$
15) $\frac{dA}{dr} = 4\pi \approx 12.56\ cm$

Actividad No. 5	Desarrollo	Individual – extra aula
Propósito: Derivar funciones mediante el uso de las reglas básicas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Instrucciones:

I. **Deriva las siguientes funciones:**

a) Utilizando primero las reglas básicas para derivar y después simplificando.
b) Simplificando primero (algebraicamente) y después aplicando las reglas correspondientes.

1) $y = 4x\sqrt{x}$ 2) $y = \frac{9x^2-1}{3x-1}$

II. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

3) $f(x) = 3x - 2 \quad en\ el\ punto\ P\ (2,3)$

4) $g(x) = \dfrac{2x-3}{x-2} \quad en\ x = 2$

2.3 Regla de la cadena

La regla de la cadena se aplica para derivar funciones compuestas, es decir, cuando $y = f(g(x))$, en donde ***"y"*** es una función derivable de $g(x)$ y "$\boldsymbol{g(x)}$" es una función derivable de *"x".*

Esta regla se enuncia como:

$Si\ y = f(u) \ \ y \ \ u = g(x)$, entonces la derivada de *"y"* con respecto a *"x"* está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \quad o \quad bien \quad \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) * g'(x)$$

Para aplicar esta regla se sugiere hacer un cambio de variable con el fin de reexpresar la función en términos de *"u"*, en donde *"u"* puede ser una función polinomial o trascendental, un argumento en caso de funciones logarítmicas y trigonométricas, un exponente en funciones exponenciales, etc.

La siguiente tabla muestra cambios de variables en diferentes tipos de funciones.

$\boldsymbol{y = f(g(x))}$	$\boldsymbol{u = g(x)}$	$\boldsymbol{y = f(u)}$
$y = (3x-2)^4$	$u = 3x - 2$	$y = u^4$
$y = Sen(3x)$	$u = 3x$	$y = Sen\, u$
$y = ln(x^2+3)$	$u = x^2 + 3$	$y = Ln\, u$
$y = e^{(1-x)}$	$u = 1 - x$	$y = e^u$
$y = Tan^3(5x)$	$u = Tan(5x)$	$y = u^3$

Ejemplo:

$\boldsymbol{Encuentre\ \frac{dy}{dx}\ para\ la\ función\ dada, aplicando\ la\ regla\ de\ la\ cadena.}$

$\boldsymbol{y = (2x+3)^4}$

Solución:

Haciendo $u = 2x + 3, encontramos\ que\ \frac{du}{dx} = 2$

Reexpresando la función en términos de *"u"*, resulta que:

$y = u^4$; podemos determinar que $\frac{dy}{du} = 4u^3$

Aplicando la regla de la cadena y sustituyendo, queda:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = (4u^3)(2) = 8u^3 = \boldsymbol{8(2x+3)^3}$$

Un caso particular de la regla de la cadena es la **Regla general de las potencias**, la cual establece que:

$Si\ y = [u(x)]^n, donde$ u $es\ una\ función\ derivable\ de$ x $y\ n\ es\ un\ número\ racional,$ $entonces$:

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad o\ su\ equivalente \qquad \frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

Si aplicamos esta regla al ejemplo anterior, resulta que:

Considerando: $u = 2x + 3; u' = 2$ y $n = 4$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{4}^{n}\overbrace{(2x+3)}^{u}{}^{\overbrace{4-1}^{n-1}}\overbrace{(2)}^{u'} = \boxed{\mathbf{8(2x+3)^3}}$$

En los siguientes ejemplos aplicaremos la regla general de las potencias para derivar las funciones dadas.

Ejemplo:

Derivar y simplificar las siguientes funciones:

1) $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 + 4}}$

Solución:

$y = (x^2 + 4)^{1/2}$ — $Reexpresando\ la\ función.$

$u = x^2 + 4\ ; u' = 2x\ ; n = 1/2$ — $Interpretando\ la\ función.$

$y' = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}-1}(2x)$ — $Regla\ general\ de\ las\ potencias.$

$y' = x(x^2 + 4)^{-1/2}$ — $Simplificando.$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}}$$

2) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{(2x-1)^4}}$

Solución:

$f(x) = 3(2x-1)^{-4}$	*Reexpresando la función.*
$u = 2x - 1\,; u' = 2\,; n = -4$	*Interpretando la función.*
$f'(x) = 3Dx[(2x-1)^{-4}]$	*Regla de constante por una función.*
$f'(x) = 3[-4(2x-1)^{-4-1}(2)]$	*Regla general de las potencias.*
$f'(x) = -24(2x-1)^{-5}$	*Simplificando.*

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{-24}{(2x-1)^5}}}$$

3) $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{1+\sqrt{4-x}}}$

Solución:

$g(x) = \left(1+\sqrt{4-x}\right)^{1/2}$	*Reexpresando la función.*
$u = 1 + (4-x)^{1/2}$	
$u' = Dx[1] + Dx\left[(4-x)^{1/2}\right]$	*Regla de suma de funciones.*

Para encontrar $Dx\left[(4-x)^{1/2}\right]$ se debe hacer un nuevo cambio de variable, de manera que:

$z = 4 - x\,;\ dz = -1\,; n = 1/2$	
$u' = 0 + \frac{1}{2}(4-x)^{\frac{1}{2}-1}(-1)$	*Regla general de las potencias.*
$u' = -\frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$	*Simplificando.*
$u = 1 + \sqrt{4-x}\,; u' = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}\,; n = \frac{1}{2}$	*Interpretando la función.*
$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4-1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}\right)$	*Regla general de las potencias.*
$g'(x) = \frac{-(1+\sqrt{4-x})^{-1/2}}{4\sqrt{4-x}} = \frac{-1}{4\sqrt{4-x}\left(1+\sqrt{4-x}\right)^{1/2}}$	*Simplificando.*

$$\boxed{g'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{4-x}\sqrt{1+\sqrt{4-x}}}}$$

4) $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{4-x}}$

Solución:

$g(x) = \left[1+\sqrt{4-x}\right]^{1/2}$ *Reescribiendo la función.*

$g'(x) = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{4-x}\right]^{\frac{1}{2}-1} D_x\left[1+\sqrt{4-x}\right]$ *Regla general de potencias.*

$g'(x) = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{4-x}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(4-x)^{\frac{1}{2}-1}(-1)\right]$ *Simplificando y regla de potencias*

$g'(x) = \frac{-1}{4}\left[1+\sqrt{4-x}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[(4-x)^{\frac{-1}{2}}\right]$ *Simplificando*

$$\boxed{g'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{4-x}\sqrt{1+\sqrt{4-x}}}}$$

5) $y = (3x-2)^4(3-4x)^3$

Solución:

Aplicando la Regla del producto

$$y' = (3x-2)^4\, D_x[(3-4x)^3] + (3-4x)^3\, D_x[(3x-2)^4]$$

Aplicando la Regla general de las potencias

$$y' = (3x-2)^4(3)(3-4x)^2(-4) + (3-4x)^3(4)(3x-2)^3(3)$$

Multiplicando monomios

$$y' = -12(3x-2)^4(3-4x)^2 + 12(3x-4)^3(3-2x)^3$$

Factorizando como factor común

$$y' = 12(3x-2)^3(3-4x)^2[-(3x-2)+(3-4x)]$$

Simplificando

$$y' = 12(3x-2)^3(3-4x)^2(-3x+2+3-4x)$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = 12(3x-2)^3(3-4x)^2(-7x+5)}}$$

6) $\boldsymbol{f(x) = \frac{5x-6}{\sqrt{2x-1}}}$

Solución:

$$f(x) = \frac{5x-6}{(2x-1)^{1/2}}$$

Aplicando la Regla del cociente

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}} D_x[5x-6] - (5x-6)D_x\left[(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

Aplicando la Regla general de las potencias

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}(5) - (5x-6)\left[\left(\frac{1}{2}\right)(2x-1)^{\frac{1}{2}-1}(2)\right]}{(2x-1)}$$

Simplificando

$$f'(x) = \frac{5(2x-1)^{1/2} - (5x-6)(2x-1)^{-1/2}}{(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{5(2x-1)^{1/2} - \frac{(5x-6)}{(2x-1)^{1/2}}}{(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{5(2x-1)-(5x-6)}{(2x-1)^{1/2}}}{(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{10x - 5 - 5x + 6}{(2x-1)^{3/2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{5x+1}{(2x-1)^{3/2}}}}$$

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{6}{\sqrt{2x+3}} \; en\; el\; punto\; P\;(3, f(3))}$$

Solución:

Evaluando $f(3) = \frac{6}{\sqrt{2(3)+3}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$, por lo tanto, el punto de tangencia es P (3,2)

Como $f'(x)$ representa geométricamente a la pendiente de la recta tangente (m), entonces $f'(3)$ = m y resulta:

$$f(x) = 6(2x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 6\, D\left[(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$f'(x) = 6\left[\frac{-1}{2}(2x+3)^{\frac{-1}{2}-1}(2)\right]$$

$$f'(x) = -6(2x+3)^{\frac{-3}{2}} = \frac{-6}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(3) = m = \frac{-6}{(9)^{3/2}} = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$$

La ecuación de la recta tangente está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-2}{9}(x-3)$$

$$9y - 18 = -2x + 6$$

$$\boxed{\boldsymbol{2x + 9y - 24 = 0}}$$

Aplicación

Ejemplo:

Según un estudio en 1999 sobre el pez gato americano, el peso medio "w" (en kg) a la edad de "t" años se puede aproximar por la función:

$$\boldsymbol{w(t) = (0.14 + 0.115\, t - 0.002t^2 + 0.000023t^3)^{3.4}}$$

Si la tasa de cambio del peso está dada por dw/dt . Calcular esta tasa de cambio para $t = 5$ *años.*

Solución:

Aplicando la regla general de potencias para encontrar dw/dt, queda:

$$\frac{dw}{dt} = 3.4(0.14 + 0.115t - 0.002t^2 + 0.000023t^3)^{3.4-1} D_t[0.14 + 0.115t - 0.002t^2 + 0.000023t^3]$$

$$\frac{dw}{dt} = 3.4(0.14 + 0.115t - 0.002t^2 + 0.000023t^3)^{2.4} D_t[0.115 - 0.004t + 0.000069t^2]$$

Evaluando para $t = 5$ *años*, resulta:

$$\boldsymbol{\frac{dw}{dt} = 0.1248\ \frac{Kg}{año}}$$

Ejercicio 2.3

I. **Encontrar la derivada de las siguientes funciones y simplificar:**

1) $f(x) = \sqrt{4x - 3}$

2) $y = (x^2 - 4x + 3)^5$

3) $g(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{3-2x}}$

4) $h(t) = \frac{-4}{(5-3t)^2}$

5) $y = (x^2 + 1)^2\sqrt{x^2 + 1}$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{4}{x^2+1}}$

7) $g(x) = (3x + 1)^3(4x - 3)^{-2}$

8) $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{4 - x^2}$

9) $f(x) = \left(\frac{6x^2+5x-4}{4x^2-1}\right)^3$

10) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+6}}{(3x-2)^3}$

II. **Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.**

11) $f(x) = \sqrt{3x+1} \qquad en \qquad x = 1$

12) $g(x) = (2x-1)^2 \quad en\ el\ punto \quad P(0,1)$

III. **Problema razonado**

13) Efecto Doppler**:** La frecuencia F de la sirena de una ambulancia oída por un observador en reposo, está dada por:

$$F(v) = \frac{132\,400}{331 + v}$$

cuando ésta se aleja a una velocidad de $40\ m/s$.

Si el ritmo de cambio de la frecuencia está dado por $F'(v)$, calcular $F'(40)$.

Solución al ejercicio 2.3

1) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$ 2) $y' = 10(x-2)(x^2-4x+3)^4$ 3) $g'(x) = \frac{4}{(3-2x)^{4/3}}$

4) $h'(t) = \frac{-24}{(5-3t)^3}$ 5) $y' = 5x(x^2+1)^{3/2}$ 6) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^{3/2}}$

7) $g'(x) = \frac{(3x+1)^2(12x-35)}{(4x-3)^3}$ 8) $y' = \frac{-3x^3+8x}{2\sqrt{4-x^2}}$ 9) $f'(x) = \frac{-15(3x+4)^2}{(2x+1)^4}$

10) $g'(x) = \frac{-2(3x^2-14x+25)}{(3x-2)^4\sqrt{x^2-4x+6}}$ 11) $3x - 4y + 5 = 0$ 12) $4x + y - 1 = 0$

13) $F'(40) = -0.962\ ciclos/s$

Actividad No. 6	Desarrollo	Individual – en el aula
Propósito: Aplicar regla de la cadena en la solución de problemas		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos		

Instrucciones: Aplica la regla de la cadena para resolver el modelo matemático dado.

Según el modelo atmosférico estándar en los Estados Unidos para su uso en el diseño de aviones y cohetes, la temperatura atmosférica "T" (en grados Celsius), la presión "P" (en pascales) y la altitud "h" (en metros) están relacionadas por el modelo:

$T = 15.04 - 0.000649\, h$ $\qquad$ $P = 101.29 + \left(\frac{T+273.1}{288.08}\right)^{5.256}$

En la tropósfera $h \leq 11\ 000\ metros$

a) Calcular $\frac{dP}{dh}$ en función de "h"
b) Calcular $\frac{dP}{dh}$ para *h* = 5000 metros
c) Calcular $\frac{dP}{dh}$ para *h* = 12 000 metros

2.4 Derivada de funciones trascendentales

Actividad No. 7	Conocimiento Previo	Individual – extra aula
Propósito: Evaluación de funciones.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos		

Instrucciones: Evaluar las siguientes funciones.

1. $f(x) = -x^2$ en $x = -2$
2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $x = 8$
3. $f(x) = 3 + ln\, x$ en $x = e$
4. $f(x) = e^{ln\, x}$ en $x = 2$
5. $f(x) = lnx^3$ en $x = e$
6. $f(x) = Sen\, x$ en $x = \frac{\pi}{2}$
7. $f(x) = Sec\, x$ en $x = \pi$
8. $f(x) = Arc\ cos\ (x)$ en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
9. $f(x) = Cosh\, x$ en $x = 1$
10. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ en $x = 0$

Actividad No. 8	Conocimiento previo	Individual – extra aula
Propósito: Recordar las propiedades de los logaritmos y las identidades trigonométricas		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

I. Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar el argumento en las funciones dadas.

1. $y = ln\,(3x+2)(x-1)$
2. $y = ln\,x^2$
3. $y = ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$
4. $y = e^{ln\,x}$

II. Demuestre cada una de las siguientes expresiones, utilizando las identidades trigonométricas.

1. $Tan\,x\,Sen\,x + Cos\,x = Sec\,x$
2. $\frac{Csc\,\theta}{Cot\,\theta + Tan\,\theta} = Cos\,\theta$
3. $Sec\,x - \frac{Cos\,x}{1+Sen\,x} = Tan\,x$
4. $\frac{Cos\,\varphi}{1-Sen^2\varphi} = Sec\,\varphi$
5. $\frac{1+Sec\,u}{Sen\,u + Tan\,u} = Csc\,u$

2.4.1 Funciones logarítmicas

Una función logarítmica se puede expresar de las dos siguientes maneras:

$$f(x) = \ln x \qquad \text{ó} \qquad f(x) = \log_a x$$

Se puede decir que por definición, $y = \log_a x$ si y solo sí $a^y = x$.

El logaritmo neperiano o natural es el logaritmo en base e y se denota $\ln x$

La función logaritmo base 10 se llama función logarítmica común o decimal y se denota como $y = \log_{10} x$.

Definición de la función logarítmica de base a.

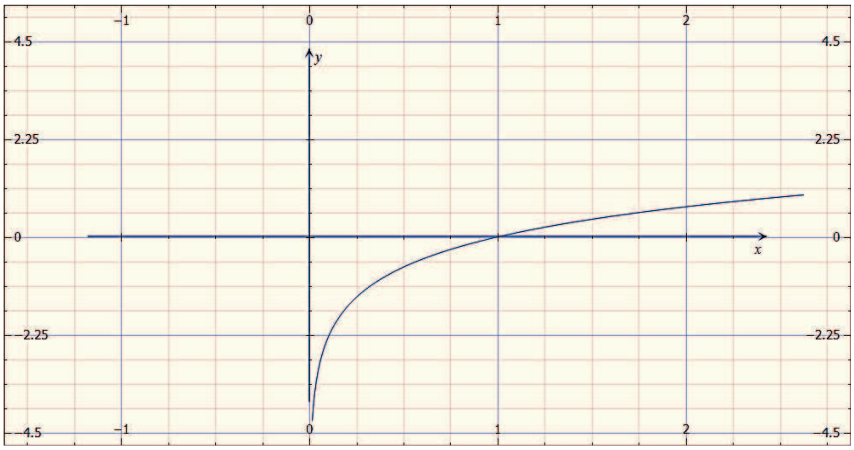
Si a es un número real positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real positivo, entonces la función logarítmica base a se denota $\log_a x$ y se define como:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

Algunas propiedades de la función logaritmo natural

- El dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.
- La función es continua, creciente inyectiva.
- La gráfica es cóncava hacia abajo.

En la siguiente gráfica se puede observar que $ln\, x$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$.



En la gráfica de $y = \log x$, se puede observar que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es positivo para $x > 1$ y negativo para $0 < x < 1$.

Propiedades de los Logaritmos

Si a y b son números positivos y n es un número racional, se cumplen las siguientes propiedades.

$1. \ln\ (1) = 0$

$2. \ln(ab) = \ln a + \ln b$

$3. \ln(a^n) = n\ \ln a$

$4. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Estas propiedades son válidas también para las funciones logarítmicas de base a, y se pueden utilizar para derivar una función logarítmica de una manera más sencilla, evitando utilizar las reglas básicas como regla del producto, cociente y cadena.

Las funciones logarítmicas pueden ser:

a) Naturales: De la forma $\ln u$, en donde "u" es una función derivable de x ó $u = g(x)$.

b) Generales: De la forma $\log_a u$ en donde "u" es una función derivable de x ó $u = g(x)$.

Las derivadas de funciones logarítmicas se determinan con la definición de derivada y se generalizan con la regla de la cadena.

Función logaritmo natural	Función logaritmo base a
$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$ $para\ \ u\ > 0, u = g(x)$	$\boldsymbol{\frac{d}{dx}Log_a u = \frac{1}{(\ln a)\ u}\ \frac{du}{dx}}$ $para\ \ u\ > 0, u = g(x)$

Derivada de la función logaritmo natural.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad para\ x > 0$$

Ejemplos:

Deriva y simplifica las siguientes funciones

1) $\boldsymbol{f(x) = \ln(3x^2 - 8x + 6)}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{(3x^2 - 8x + 6)} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 8x + 6)$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x - 8}{(3x^2 - 8x + 6)}}$$

2) $\boldsymbol{f(x) = \log_2 \sqrt{x^2 - 3}}$

Solución:

$f(x) = \log_2(x^2 - 3)^{1/2}$ $\qquad$ *Aplicando propiedad de logaritmos*

$f(x) = \frac{1}{2}[\log_2(x^2 - 3)]$

$$f' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 - 3)\ ln2} \frac{d}{dx} \cdot (x^2 - 3) = \frac{2x}{2(x^2 - 3)ln2} \qquad Derivando$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x}{ln2(x^2 - 3)}} \qquad Simplificando$$

3) $f(x) = 3x \ln x - \ln \sqrt{x}$.

Solución:

$f(x) = 3x \ln x - \frac{1}{2} \ln x$; Luego derivamos.

$$f'(x) = 3xD_x(\ln x) + \ln xD_x(3x) - \frac{1}{2}D_x(\ln x)$$

$$f'(x) = 3x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(3) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 3 + 3\ln x - \frac{1}{2x}$$

4) $\boldsymbol{y = ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos, resulta:

$$y = 2\ ln(x - 2) - \frac{1}{2} ln(x^2 + 1)$$

Derivando, queda:

$$y' = 2\left(\frac{1}{x - 2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{2}{x - 2} - \frac{x}{x^2 + 1}}$$

Aplicación

La escala técnica de amenaza de impacto de Palermo "P" se usa para cuantificar el riesgo asociado al impacto de un asteroide contra la Tierra:

$$P = \log_{10}\left(\frac{pE^{0.8}}{0.03T}\right)$$

Dónde:

P es la probabilidad del impacto

T es el número de años hasta el impacto

E es la energía de impacto (en megatones de TNT).

El riesgo es mayor que el de un suceso aleatorio de igual magnitud cuando $P > 0$.

a) Calcular $\frac{dP}{dT}$, suponiendo que $p = 2\ x\ 10^{-5}$ y $E = 2$ megatones.

Aplicando las propiedades de los logaritmos, resulta:

$P = \log_{10} pE^{0.8} - \log_{10}(0.03T)$

$P = \log_{10} pE^{0.8} - \log_{10} 0.03 - \log_{10} T$

Derivando con respecto a "T"

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dT} = \frac{-1}{T\ ln10}}$$

Ejercicio 2.4.1

I. Derivar y simplificar las siguientes funciones, utilizando las propiedades de los logaritmos donde sea posible.

1) $y = \ln(9x^2 - 8)$

2) $y = \ln[(x+1)(2x+9)]$

3) $y = x\ lnx$

6) $y = \ln\sqrt[3]{6x+9}$

7) $y = (\ln x)^2$

8) $y = \ln\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$

4) $y = \log_2 \frac{x^2}{x-1}$

9) $y = \ln\left[\frac{3x(5x-1)}{(2x-2)^3}\right]$

5) $y = \frac{\ln x}{x}$

II. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

10) $y = \ln x \quad en\ el\ punto \quad (1,0)$

Soluciones del Ejercicio 2.4.1

1) $y' = \frac{18x}{9x^2-8}$

2) $y' = \frac{4x+11}{(x+1)(2x+9)}$

3) $y' = \ln x + 1$

4) $y' = \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x-2}{x(x-1)}\right]$

5) $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$

6) $y' = \frac{2}{6x+9}$

7) $y' = \frac{2\ln x}{x}$

8) $y' = \frac{-2}{4x^2-1}$

9) $y' = \frac{1}{x} + \frac{5}{5x-1} - \frac{3}{x-1}$

10) $x - y - 1 = 0$

2.4.2 Funciones exponenciales

Una función exponencial es aquella formada por una constante elevada a una variable, se expresan en la forma $f(x) = a^x$, en donde, "a" es una constante $(a > 0\ y\ a \neq 1)$.
Estas funciones presentan las siguientes propiedades:

- El dominio de $f(x) = a^x$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.
- Son positivas para todo "x". $(a^x > 0)$.
- La función $f(x) = a^x$ es continua y creciente si $a > 1$, como lo muestra la **figura 1**) para $f(x) = 3^x$.
- La función es decreciente si $0 < a < 1$, como lo muestra la **figura 2**) para $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
- El $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ y el $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

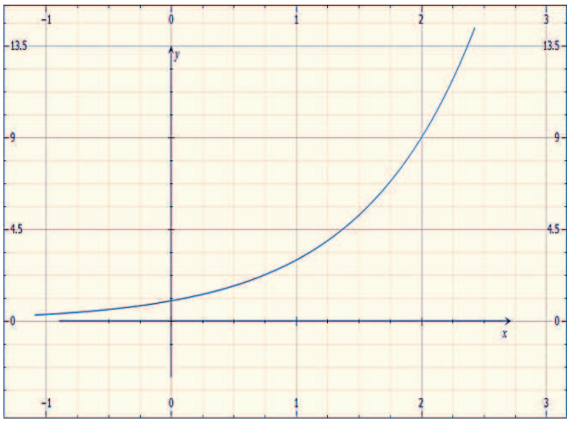


Figura 1) $f(x) = 3^x$

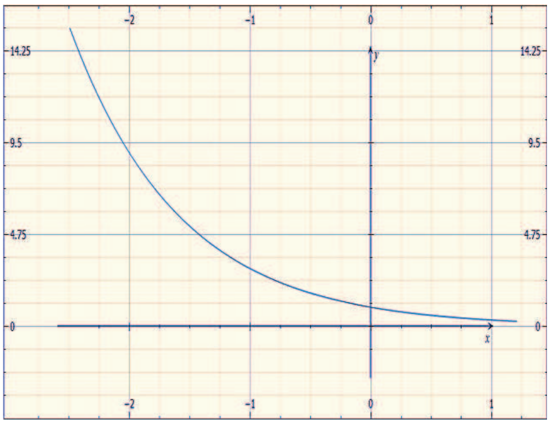


Figura 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Las funciones exponenciales pueden ser:

a) **Generales:** De la forma a^u, en donde, $a > 0 \; y \; a \neq 1$ (constante) y "u" es una función derivable de "x" o $u = g(x)$.

b) **Naturales:** De la forma e^u, en donde, e es la constante de Euler ($e \approx 2.718$) y "u" es una función derivable de "x" o $u = g(x)$.
Propiedad: $\boldsymbol{e^{\ln u} = u}$

Las derivadas de estas funciones se determinan a partir de la definición de la derivada y se generalizan por regla de la cadena.

Función exponencial natural	Función exponencial general
$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{d}{dx}(u)}$	$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{d}{dx}(u)}$

Ejemplos:

Deriva y simplifica las siguientes funciones.

1. $\boldsymbol{f(x) = e^{\sqrt{x}}}$

Solución:

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$$

2. $\boldsymbol{f(x) = 4e^{2x} + 3^{5x}}$

Solución:

Derivando cada uno de los términos, aplicando las reglas correspondientes, resulta:

$$f'(x) = 4\left[e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)\right] + 3^{5x}\,ln3\frac{d}{dx}\,(5x)$$

$$f'(x) = 4e^{2x}\,(2) + 3^{5x}\,ln3\,(5)$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 8e^{2x} + 5\left(3^{5x}\right)ln3}$$

3. $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{x^2}}$

Solución:

$f'(x) = \frac{x^2\frac{d}{dx}(e^x) - e^x\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$ *Aplicando la regla del cociente.*

$f'(x) = \frac{x^2e^x(1) - e^x(2x)}{x^4}$ *Aplicando la regla de* e^u *y de potencia.*

$f'(x) = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}$ *Sacando factor común.*

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}}$ *Simplificando.*

4. $\boldsymbol{f(x) = (3 + 2^{3x})^3}$

Solución:

$f'(x) = 3(3 + 2^{3x})^{3-1}\,\frac{d}{dx}\,(3 + 2^{3x})$ *Aplicando regla general de potencia.*

$f'(x) = 3(3 + 2^{2x})^2\;\;2^{3x}\,ln2\,(3)$ *Aplicando la regla de* a^u

$\boldsymbol{f'(x) = 9(2^{3x})\, ln2\, (3 + 2^{3x})^2}$

5. $\boldsymbol{f(x) = e^{5x}\, 5^{3x}}$

Solución:

$f'(x) = e^{5x} \frac{d}{dx}(5^{3x}) + 5^{3x} \frac{d}{dx}(e^{5x})$ $\quad$ $Aplicando\ la\ regla\ del\ producto.$

$f'(x) = e^{5x}\, 5^{3x}\, ln5\, (3) + e^{5x}\, 5^{3x}\, (5)$ $\quad$ $Aplicando\ las\ reglas\ de\ las\ funciones\ exp.$

$\boldsymbol{f'(x) = e^{5x}\, 5^{3x}[3\, ln5 + 5]}$ $\quad$ $Sacando\ factor\ común.$

6. $\boldsymbol{y = e^{ln\,3x}}$

Solución:

Aplicando propiedad de $e^{ln\,u} = u$

$y = 3x$

$\boldsymbol{y' = 3}$

7. $\boldsymbol{f(t) = ln\, e^{2t}}$

Solución:

Aplicando propiedad de logaritmos y como $ln\, e = 1$

$f(t) = 2t\, lne = 2t$

$\boldsymbol{f'(t) = 2}$

8. $\boldsymbol{h(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x}$

Solución:

Simplificando primero, sacando factor común (e^x)

$h(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

Derivando por regla del producto

$$h'(x) = e^x \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2)\frac{d}{dx}(e^x)$$

$h'(x) = e^x(2x - 2) + (x^2 - 2x + 2)e^x(1)$ $\quad$ $Sacando\ factor\ común\ e^x$

$h'(x) = e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 2)$ $\quad$ $Sumando\ términos\ semejantes$

$\boldsymbol{h'(x) = x^2e^x}$

Aplicación

9. Tasa de disminución.

Según un modelo simplificado, el poder adquisitivo de un dólar en el año $2000 + t$ está dado por $p(t) = 0.68(1.04) - t$. Calcular la tasa prevista de disminución del poder adquisitivo (en centavos por año) para el año 2020.

Solución:

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = tasa\ del\ poder\ adquisitivo$$

$$t = 20\ años$$

$$P'(t) = 0.68(1.04)^{-t}\ ln(1.04)(-1)$$

$$P'(20) = \frac{-0.68\ ln\ (1.04)}{(1.04)^{20}} = -0.01217$$

$$\boldsymbol{P'(20) = 1.22\ centavos\ por\ año}$$

Nota: El signo negativo se debe a la disminución del poder adquisitivo.

Ejercicio 2.4.2

I. Derivar y simplificar las siguientes funciones

1) $f(x) = e^{(3x^2+4)}$

2) $g(x) = 3^{\pi x}$

3) $y = x^2 e^{2x}$

4) $h(x) = \dfrac{2^{3x}}{x}$

5) $f(t) = \dfrac{1}{(e^{2t} - 3)^3}$

6) $f(x) = \dfrac{2^x}{e^x}$

7) $g(x) = ln\ (e^{3x} - 2)$

8) $h(x) = e^{2\ lnx}$

9) $y = e^{e^x}$

10) $f(x) = (4^{2x} - 3)^4$

Aplicación

11) El valor (V) de una motocicleta a "t" años de su adquisición está dado por: $V(t) = 18\,000e^{-0.5t}$ para $(0 \leq t \leq 10)$. Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V con respecto a $t(dV/dt)$ cuando $t = 1\ año$.

Solución al ejercicio 2.4.2

1) $f'(x) = 6x\ e^{(3x^2+4)}$

2) $g'(x) = \pi\ ln3\ (3^{\pi x})$

3) $y' = 2xe^{2x}(x+1)$

4) $h'(x) = 2^{3x}\left[\frac{3x\ ln2 - 1}{x^2}\right]$

5) $f'(t) = \frac{-6e^{2t}}{(e^{2t}-3)^4}$

6) $f'(x) = \left(\frac{2}{e}\right)^x (ln2 - 1)$

7) $g'(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}-2}$

8) $h'(x) = 2x$

9) $y' = e^{e^x+x}$

10) $f'(t) = 8\ ln4(4^{2x})(4^{2x}-3)^3$

11) $\frac{dV}{dT} = -5\,458.77$

2.4.3 Funciones trigonométricas

En la siguiente tabla se muestran las reglas básicas para derivar las 6 funciones trigonométricas, en donde su argumento siempre se expresa como *"x"*.

Además, la tabla contiene las reglas generales para derivar dichas funciones, en donde se considera un cambio de variable en el argumento $(u = g(x))$, donde "u" es una función derivable de "x", de manera que al aplicar la regla de la cadena se puedan generar estas reglas.

Es decir, al derivar $y = sen\,(3x-1)$, podemos considerar que si $u = 3x - 1$, entonces $du/dx = 3$ y la función toma la forma de $y = sen\,u$ y aplicando la regla de la cadena y sustituyendo, resulta que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \cos u\ (3) = \mathbf{3\cos(3x-1)}$$

Regla básica	Regla general
$D_x[sen\ x] = \cos x$	$D_x[sen\ u] = \cos u\ D_x u$
$D_x[cos\ x] = -\text{sen}\ x$	$D_x[\cos u] = -sen\ u\ D_x u$
$D_x[tan\ x] = sec^2\ x$	$D_x[\tan u] = sec^2 u\ D_x u$
$D_x[cot\ x] = -csc^2\ x$	$D_x[\cot u] = -csc^2 u\ D_x u$
$D_x[sec\ x] = \sec x \tan x$	$D_x[\sec u] = \sec u \tan u\ D_x u$
$D_x[csc\ x] = -\csc x\ \cot\ x$	$D_x[\csc u] = -\csc u \cot u\ D_x u$

Hay más de una forma para derivar funciones que contienen funciones trigonométricas y todas conllevan al mismo resultado. Por lo anterior, es recomendable utilizar las identidades trigonométricas, ya sea para simplificar antes o después de derivar la función.

Ejemplo: Derivar y simplificar las siguientes funciones

1) $\boldsymbol{f(x) = Cos\ (3x - 2)}$

Solución:

$f'(x) = -Sen\ (3x - 2)\ D_x\ (3x - 2)$ $\qquad$ *Regla general para el coseno.*

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = -3\ Sen\ (3x - 2)}}$$

2) $\boldsymbol{g(x) = Tan\ \sqrt{4x + 1}}$

Solución:

$g'(x) = \ sec^2\sqrt{4x + 1}\ \ D_x\left[\sqrt{4x + 1}\right]$ $\qquad$ *Regla general para la tangente.*

$g'(x) = \ sec^2\sqrt{4x + 1}\left[\frac{1}{2}(4x + 1)^{-1/2}\ (4)\right]$ $\qquad$ *Regla general de potencias.*

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = \frac{2sec^2\sqrt{4x + 1}}{\sqrt{4x + 1}}}}$$

3) $\boldsymbol{y = Csc^3(3 - x^2)}$

Solución:

$y = [Csc\ (3 - x^2)]^3$ *Reexpresando la función.*

$y' = 3[Csc(3 - x^2)]^2\ D_x\ [Csc\ (3 - x^2)]$ *Regla general de potencias.*

$y' = 3Csc^2(3 - x^2)[-Csc(3 - x^2)Cot(3 - x^2)]\ D_x(3 - x^2)$ *Regla general para la cosecante.*

$y' = 3Csc^2(3 - x^2)[-Csc(3 - x^2)\ \ Cot(3 - x^2)(-2x)]$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = 6xCsc^3(3 - x^2)\ Cot(3 - x^2)}}$$

4) $\boldsymbol{h(x) = \sqrt{3x}\, Sen\sqrt{3x}}$

Solución:

$h'(x) = \sqrt{3x}\ D_x\left[Sen\ \sqrt{3x}\right] + Sen\sqrt{3x}\ D_x\left[\sqrt{3x}\right]$ *Regla del producto.*

$h'(x) = \sqrt{3x}\ \ Cos\sqrt{3x}\ D_x\ \left[\sqrt{3x}\right] + Sen\sqrt{3x}\left[\frac{1}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}(3)\right]$ *Regla general para el seno y regla general de potencias.*

$h'(x) = \sqrt{3x}\ Cos\sqrt{3x}\left[\frac{1}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}(3)\right] + \frac{3\ Sen\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}}$ *Regla general de potencias y simplificando.*

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x) = \frac{3}{2}Cos\sqrt{3x} + \frac{3\ Sen\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}}}}$$

5) $\boldsymbol{y = \frac{e^{2x}}{Cot\ e^{2x} - 1}}$

Solución:

$y' = \frac{(Cot\ e^{2x}-1)D_x[e^{2x}] - e^{2x}\ D_x[Cot\ e^{2x}-1]}{[Cot\ e^{2x}-1]^2}$ *Regla del cociente.*

$$y' = \frac{(Cot\ e^{2x}-1)2e^{2x}-e^{2x}[-Csc^2 e^{2x}\ D_x(e^{2x})]}{(Cot\ e^{2x}-1)^2}$$ *Regla de e^u y regla general de la cotangente.*

$$y' = \frac{(Cot\ e^{2x}-1)2e^{2x}-e^{2x}[-Csc^2 e^{2x}\ (e^{2x})(2)]}{(Cot\ e^{2x}-1)^2}$$ *Regla de e^u*

$$y' = \frac{2e^{2x}(Cot\ e^{2x}-1)+2e^{4x}Csc^2 e^{2x}}{(Cot\ e^{2x}-1)^2}$$ *Factor común $(2e^{2x})$*

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{2e^{2x}[Cot\ e^{2x}-1+e^{2x}Csc^2 e^{2x}]}{(Cot\ e^{2x}-1)^2}}}$$

6) $f(x) = \ln Cos\ 5x$

Solución:

$f'(x) = \frac{1}{Cos\ 5x}\ D_x[Cos\ 5x]$ *Regla del $\ln u$*

$f'(x) = \frac{1}{Cos\ 5x}(-Sen\ 5x)5$ *Regla general del coseno.*

$f'(x) = \frac{-5\ Sen\ 5x}{Cos\ 5x}$ *Identidad trigonométrica $Tan\ 5x = \frac{Sen\ 5x}{Cos\ 5x}$*

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = -Tan\ 5x}}$$

7) $y = Sen^2 2^x + Cos^2 2x$

Solución:

$y = 1$ *Identidad trigonométrica $Sen^2u + Cos^2u = 1$*

$$\boxed{\boldsymbol{y' = 0}}$$

$8)\ \boldsymbol{g(x) = \frac{4}{Cos\ x^2} = 4\left(\frac{1}{Cos\ x^2}\right)}$

Solución:

$g(x) = 4\ sec\ x^2$ — $Identidad\ inversa: Sec\ u = \frac{1}{Cos\ u}$

$g'(x) = 4\ D_x[sec\ x^2]$ — $Regla\ de\ constante\ por\ función.$

$g'(x) = 4\ sec\ x^2\ tan\ \ x^2\ D_x\ [x^2]$ — $Regla\ general\ de\ la\ Secante.$

$g'(x) = 4\ sec\ x^2\ tan\ x^2(2x)$

$\boldsymbol{g'(x) = 8x\ sec\ x^2\ tan\ x^2}$

Otra forma de resolverlo:

$\boldsymbol{g(x) = \frac{4}{Cos\ x^2} = 4(Cos\ x^2)^{-1}}$ — $Reexpresando\ la\ función.$

$g'(x) = 4\ D_x[(\boldsymbol{Cos\ x^2})^{-1}]$ — $Regla\ de\ constante\ por\ función$

$g'(x) = 4(-1)(Cos\ x^2)^{-2}D_x(Cos\ x^2)$ — $Regla\ general\ de\ las\ potencias$

$g'(x) = \frac{-4(-Senx^2)(2x)}{Cos^2x^2}$ — $Regla\ general\ del\ coseno.$

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = \frac{8x\ Sen\ x^2}{Cos^2x^2}}}$$

Nota: Se puede observar que los resultados son diferentes, más sin embargo, si se aplican identidades trigonométricas, se puede demostrar que son iguales.

$9)\ \boldsymbol{h(x) = 6\ sen\ 2x\ cos\ 2x}$

Solución:

$h(x) = 3[2\ sen\ 2x\ cos\ 2x]$ — $Reexpresando\ la\ función.$

$h(x) = 3\ sen\ 4x$ $\quad$ *Identidad ángulo doble: sen 2u = 2senu cos u*

$h'(x) = 3\ D_x\ [sen\ 4x]$ $\quad$ *Regla de constante por función.*

$h'(x) = 3 \cos 4x\ (4)$ $\quad$ *Regla general del coseno.*

$$\boxed{h'(x) = 12 \cos 4x}$$

10) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

Solución:

$y = \tan 3x$ $\quad$ $en\ el\ punto\ \ P\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$

$y' = m = sec^2(3x)(3)$

$y' = m = 3\ sec^2(3x)$

$Para\ x = \frac{\pi}{4}$

$$y' = m = 3\left[\sec\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]^2$$

$y' = m = 3[\sec 135]^2$

$$y' = \mathbf{m} = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{1}\right)^2 = \mathbf{6}$$

Ecuación de la recta tangente

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

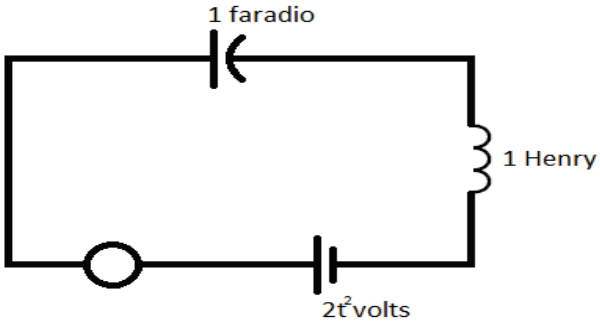
$$y + 1 = 6x - \frac{3}{2}\pi$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 6x - \frac{3}{2}\pi - 1}}$$

Aplicación

11) Circuito eléctrico simple:

El diagrama de la figura muestra un circuito eléctrico simple. Si la capacitancia es de 1 Faradio, la inductancia es de 1 Henry y el voltaje está dado por $2t^2$ volts en el tiempo t, entonces un modelo de la carga total $Q(t)$ del circuito en el tiempo t es: $Q(t) = 2\,Sen\,t + 2t^2$ en coulomb. Si la corriente "i"en amperes está definida como dQ/dt, calcular la corriente para $t\ =\ 1$ segundo.



Solución:

Como $i = \frac{dQ}{dt} = Q'(t)\ \ para\ t = 1\ ampere, resulta\ que$:

$i = Q'(1) = 2\,Cos\,t + 4t = 2\,Cos\,(1) + 4(1)$

$\boxed{\boldsymbol{i = 5.08\ amperes}}$

Ejercicio 2.4.3

I.- Deriva y simplifica las siguientes funciones.

1) $f(x) = Tan\,x^2$

2) $g(x) = Csc\,(lnx)$

3) $y = ln\,Sen\,3x$

4) $h\,(x) = Cos\,e^{-2x}$

6) $f(x) = e^{3x}\,Cos\,2x$

7) $y = \frac{tanx-1}{Secx}$

8) $g(x) = Cot^3\left(\frac{x}{2}\right)$

9) $h(x) = \frac{Cosx}{1-Sen^2\,x}$

5) $y = 4\,Sec\,\sqrt{2x-1}$ 10) $f(x) = Secx - \frac{Cosx}{1+Senx}$

II.- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado, valor indicado de "x".

11) $f(x) = 2x + Cos\,x$ $\quad en\ el\ punto\ (0,1)$

12) $y = Secx$ $\quad en\ \ x = \pi/_3$

III.- Aplicación.

13) Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple.

La ecuación del movimiento está dada por:

$x(t) = 2\,Cos\,t + 3\,Sen\,t,\ \ t \geq 0,$ Donde "x" se mide en centímetros y "t" en segundos (Considera la dirección positiva hacia abajo).

a) Calcula la velocidad en el tiempo "t".
b) Calcule la velocidad en $t = \pi$ s.
c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?

Solución al ejercicio 2.4.3

1) $f\ (x) = 2x\,Sec^2 x^2$

2) $g'(x) = -\frac{Csc\,(Lnx)\,Cot(lnx)}{x}$

3) $y' = 3\,Cot\,3x$

4) $h'(x) = 2e^{-2x}\,Sen\,e^{-2x}$

5) $y' = \frac{4\,Sec\sqrt{2x-1}\ \ Tan\,\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}$

6) $f'(x) = \ e^{3x}(3Cos\,2x - 2\,Sen\,2x)$

7) $y' = \frac{1+tan\,x}{Sec\,x}$

9) $h'(x) = Sec\,x\,Tan\,x$

10) $f'(x) = Sec^2\,x$

11) $y = 2x + 1$

12) $y = 2\sqrt{3}\,x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\pi + 2$

13) a) $V = -2\,Sen\,t + 3\,Cos\,t\ \ ^{cm}/_{s}$

b) $V(\pi) = \ -3\ \ ^{cm}/_{s}$

c) $t = 146.31\ s$ $\qquad t = 2.55rad$

8) $g'(x) = -\frac{3}{2}Cot^2\left(\frac{x}{2}\right)Csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$

2.4.4 Funciones trigonométricas inversas

Conocimiento previo: Gráficas, dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas.

Actividad No. 9	Conocimiento previo	Individual – extra aula
Propósito: Determinar el dominio y el rango de las funciones trigonométricas inversas		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Instrucciones:

I. Investigar el dominio y el rango de las siguientes funciones:

1) $y = sen^{-1}(x)$ 2) $y = cos^{-1}(x)$ 3) $y = tan^{-1}(x)$
4) $y = cot^{-1}(x)$ 5) $y = sec^{-1}(x)$ 6) $y = csc^{-1}(x)$

II. Graficar las funciones anteriores para comprobar sus dominios y rangos.

Las funciones inversas tienen las propiedades:

1) $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ y 2) $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$

Cuando se aplican estas relaciones a las funciones trigonométricas inversas, debe considerarse que este tipo de funciones tienen inversas sólo en dominios restringidos. Para valores de "x" fuera de esos dominios, las 2 propiedades mencionadas no son válidas. Por ejemplo, $arc\ sen(sen\ \pi) es\ 0, no\ \pi$.

Propiedades de las funciones trigonométricas inversas

Si $-1 \le x \le 1$ y $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, entonces:

$sen(arc\ senx) = x$ y $arc\ sen\ (sen\ y) = y$

Si $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, entonces:

$\tan(arc\ tanx) = x$ y $arc\tan\ (\tan y) = y$

Si $|x| \ge 1$ y $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2} < y \le \pi$, entonces:

$\sec(arc \sec x) = x \qquad y \qquad arc \sec(\sec y) = y$

En la siguiente tabla se muestran las fórmulas para derivar las funciones trigonométricas inversas. Estas fórmulas se deducen por derivación implícita que se verá en el tema 2.6 y se generalizan por medio de la regla de la cadena.

Si “u” es una función derivable de x.	
$\frac{d}{dx}[arc\ sen\ u] = \frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{d}{dx}[arc \cos u] = \frac{-D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
$\frac{d}{dx}[arc \tan u] = \frac{D_x u}{1+u^2}$	$\frac{d}{dx}[arc \cot u] = \frac{-D_x u}{1+u^2}$
$\frac{d}{dx}[arc \sec u] = \frac{D_x u}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$\frac{d}{dx}[arc \csc u] = \frac{-D_x u}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$

$$\boldsymbol{Nota: arcSen\ u = Sen^{-1} u}$$

Ejemplos: Derivar y simplificar las siguientes funciones:

1) $\boldsymbol{y = arc\ cot\sqrt{x}}$

Solución:

Si $u = \sqrt{x}$; $D_x u = \frac{1}{2}\ x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aplicando la fórmula correspondiente y simplificando queda:

$$y' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}}$$

2) $\boldsymbol{y = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right)}$

Solución:

Si $u = \frac{x}{2}$, $D_x u = \frac{1}{2}$

Aplicando la fórmula correspondiente y simplificando

$$y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$

3) $\boldsymbol{y = x^2\, arc\sec x^2}$

Solución:

$y' = x^2\, D_x\,[arc\sec x^2] + \, arc\sec x^2 \;\; D_x(x^2)$ **Regla del producto**

Si $u = x^2\, ; D_x u = 2x$

Aplicando la fórmula de $arc\ sec\ u$ **y regla de potencia como** $\boldsymbol{|x^2| = x^2}$

$$y' = x^2\left(\frac{2x}{x^2\sqrt{x^{4-1}}}\right) + arc\sec\ x^2\,(2x)$$

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4\ -1}} + \ 2x\, arc\sec\ x^2 \ = \boxed{\boldsymbol{2x}\left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}\ -\mathbf{1}}} + \ \boldsymbol{arc\sec x^2}\right]}$$

4) $\mathbf{y} = \dfrac{\boldsymbol{arc\csc(2x)}}{\boldsymbol{x}}$

Solución:

$$y' = \frac{x\, D_x\,[arc\csc(2x)] - arcCsc\,(2x) D_x\,[x]}{x^2}$$ *Regla del cociente*

$$y' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{4\,x^2-1}} - arc\csc\ (2x)}{x^2}$$

$$y' = \frac{x\left(\frac{-2}{|2x|\sqrt{4x^2-1}}\right) - \text{arc}\csc\ (2x)}{x^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = \frac{\left(\frac{-x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\right) - \textbf{arc}\csc\ (\mathbf{2}\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$$

5) $\boldsymbol{y = arc\cos(sen\ x)}$

Solución:

Si $u = sen\ x; D_x u = \cos x$

$Aplicando\ la\ identidad\ cos^2x + \ sen^2x = 1$

$$y' = \frac{-\cos x}{\sqrt{1 - \ sen^2x}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{\ cos^2x}} = -1$$

6) $\boldsymbol{y = \ln(x^2 \ + 4) - \frac{1}{2}\, arc \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{x^2+4}\ D_x(x^2 \ + 4) - \frac{1}{2}\left[\frac{D_x\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$y' = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+x^2}{4}}\right]$$

$$y' = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2\ (4+x^2)}\right] \quad = \quad \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{2x-1}{x^2+4}}}$$

7) $\boldsymbol{y = arc \cos x + x\sqrt{1 - x^2}}$

Solución:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + x\ D_x\left[(1 - \ x^2)^{1/2}\right] + \sqrt{1 - \ x^2}\ D_x\,[x]$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \ x\left(\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-1/2}\,(-2x) + \sqrt{1-x^2}\ (1)$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

$$\boxed{y' = \frac{-1-x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

8) $\boldsymbol{y = \sec\ (arc\sec x)}$

Solución:

Aplicando la propiedad de $sec(arc\sec x) = x$, resulta:
$y = x$
$y' = 1$

Ejercicio 2.4.4 Deriva y simplifica las siguientes funciones

1. $y = csc^{-1}\ (5x)$
2. $f(x) = arc\sec\ x^2$
3. $g(x) = cos^{-1}\ \left(\frac{x}{3}\right)$
4. $h(x) = arc\sec(e^{3x})$
5. $y = x^2\ tan^{-1}\ (2x)$
6. $f(x) = arc\tan(x) +\ arc\cot(x)$
7. $y = arc\ sen\ (\cos x)$
8. $y = 2x\ arc\ sen\ (2x) + \sqrt{1 - 4x^2}$
9. $y = 2x\ tan^{-1}\ (x) - \ln(1 + x^2)$
10. $y = sen\ (\text{arc}\ sen\ x)$

Solución al ejercicio 2.4.4

1. - $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{25x^2\ -1}}$

2.- $f'(x) = \frac{2}{x\ \sqrt{x^4\ -1}}$

3.- $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$

4.- $h'(x) = \frac{3}{\sqrt{e^{6x}-1}}$

5.- $y^{'} = 2x\ \left[\frac{x}{\sqrt{+4x^2}} +\ tan^{-1}\ (2x)\right]$

6.- $f'(x) = 0$

7.- $y' = -1$

8.- $y' = 2arc\ sen\ (2x)$

9.- $y^{'} = 2\ tan^{-1}(x)$

10.- $y^{'} = 1$

2.4.5 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas son una clase especial de funciones exponenciales, en muchos aspectos son semejantes a las funciones trigonométricas y están relacionadas con la hipérbola de igual forma que las funciones trigonométricas con el círculo.

Definición de las funciones hiperbólicas

$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad \tanh x = \frac{senh\, x}{\cosh x}$

$\coth x = \frac{1}{\tanh x}\ x \neq 0$ $\qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ $\qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{senh\, x}\ x \neq 0$

Nota: $senh\, x$ se lee como "*seno hiperbólico de x*"

Las funciones hiperbólicas satisfacen varias identidades, que son semejantes a las conocidas identidades trigonométricas. A continuación se muestran algunas identidades hiperbólicas:

Identidades hiperbólicas

$cosh^2x - senh^2x = 1$ $\qquad senh^2x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$

$tanh^2x + sech^2x = 1$ $\qquad cosh^2x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$

$coth^2x - csch^2x = 1$ $\qquad senh\,(2x) = 2\, senh\, x \cosh x$

$\cosh(2x) = cosh^2x + senh^2x$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan a partir de su definición, es decir, considerando la derivada de la función exponencial y se generalizan por medio de la regla de la cadena. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(senh\, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

La siguiente tabla muestra las derivadas generales de las funciones hiperbólicas:

Sea *"u"* una función derivable de *"x"*	
$\frac{d}{dx}(senh\, u) = \cosh u\; D_x u$	$\frac{d}{dx}(coth\, u) = -\, csch^2\, u\;\; D_x u$
$\frac{d}{dx}(cosh\, u) = \operatorname{senh} u\;\; D_x u$	$\frac{d}{dx}(sech\, u) = -\operatorname{sech} u \tanh u\;\; D_x u$
$\frac{d}{dx}(tanh\, u) = sech^2\, u\; D_x u$	$\frac{d}{dx}(csch\, u) = -\operatorname{csch} u \coth u\;\; D_x u$

Ejemplos: Derivar y simplificar las siguientes funciones

1) $\boldsymbol{f(x) = coth\,(4x)}$ $\qquad$ $Regla\ general\ de\ Coth\ u$

Solución:

$f'(x) = -Csch^2\, 4x\; Dx(4x)$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = -4\; Csch^2\; 4x}}$$

2) $\boldsymbol{g(x) = \; x^2\; tanh\;\; (3x)}$

Solución:

$g'(x) = x^2\; D_x\; [Tanh\; 3x] + Tanh\; 3x\; D_x[x^2]$ $\qquad$ $Regla\ del\ producto$

$g'(x) = x^2\; Sech^2\; 3xD_x\; [3x] + Tanh\; 3x\; (2x)$ $\qquad$ $Regla\ general\ Tanh\ u$

$g'(x) = x^2\; Sech^2\; 3x(3) + 2x\; Tanh\; 3x$

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = 3x^2\; Sech^2\; 3x + 2x\; Tanh\; 3x}}$$

3) $\boldsymbol{y = \frac{1 - senh\, x}{1 + senh\, x}}$

Solución:

$$y' = \frac{(1 + senh\,x)D_x[1 - senhx] - (1 - senhx)D_x[1 + senhx]}{(1 + senhx)^2}$$

$$y' = \frac{(1 + senhx)(-coshx) - (1 - senhx)(coshx)}{(1 + senhx)^2} \qquad Regla\ general\ de\ senh\,u$$

$$y' = \frac{-coshx - senhxcoshx - coshx + senhxcoshx}{(1 + senhx)^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{-2coshx}{(1 + senhx)^2}}}$$

4) $\boldsymbol{h(x) = ln\,(cosh\,2x)}$

Solución:

$$h'(x) = \frac{1}{cosh2x}D_x\,[\cosh 2x] \qquad Regla\ del\ \ln u$$

$$h'(x) = \frac{2\,senh\ \ 2x}{\cosh 2x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x) = 2\,tanh\,2x}} \qquad Identidad\ hiperbólica.$$

5) $\boldsymbol{h(x) = sech^3\,2x}$

$$h(x) = (sech\,2x)^3 \qquad Reexpresando\ la\ funcion.$$

$$h'(x) = 3(sech\,2x)^2 D_x\,[\operatorname{sech} 2x] \qquad Regla\ general\ de\ las\ potencias.$$

$$h'(x) = 3(sech\,2x)^2(-\operatorname{sech} 2x \tanh 2x)(2) \qquad Regla\ general\ de\ \operatorname{sech} u$$

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x) = -6\,sech^3\,2x \tanh 2x}}$$

6) $\boldsymbol{y = e^{csch\,x}}$

$$y' = e^{csch\,x}D_x[csch\,x] \qquad Regla\ de\ e^u$$

$y' = e^{csch\,x}\,(-cschx\ cothx)$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = -e^{csch\,x}\,(csch\,x\ coth\,x)}}$$

7) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

$\boldsymbol{y = senh\,(1 - x^2) \qquad en\ (1, 0)}$

$Como\ y' = m$, entonces:

$y' = m = cosh\,(1 - x^2)(-2x)$

$m = -2(1)cosh(0)$

$m = -2(1) = -2$

$\boldsymbol{La\ ecuación\ de\ la\ recta\ tangente\ es}$:

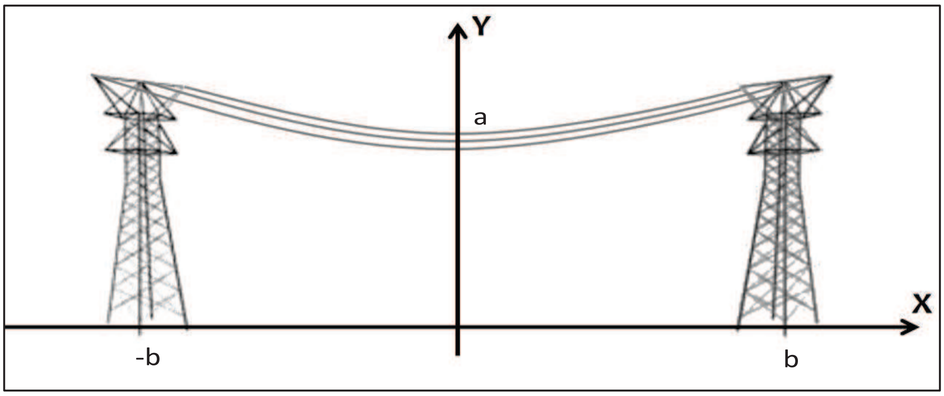
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -2(x - 1)$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -2x + 2}}$$

Aplicación.

La aplicación más conocida es el empleo del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Se puede demostrar que si se suspende un cable pesado y flexible, como el de una línea telefónica o de una línea de transmisión, entre dos puntos a la misma altura, adoptará la forma de una curva cuya ecuación en $y = a\ Cosh\ (^{x}/_{a})$ y ésta curva se llama catenaria, en donde "*a*" es la altura en el punto más bajo de la curva y "*2b*" es la distancia entre los dos postes, como se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo:

La ecuación dada representa un modelo de cables de alta tensión suspendidos entre dos torres.

a) Calcular la altura del cable en los puntos de sujeción y en el punto medio entre las torres.
b) Encontrar la pendiente del modelo en el punto donde el cable está sujeto a la torre derecha.

La ecuación es: $\boldsymbol{y = 15 + 20cosh\left(\frac{x}{20}\right) \qquad -20 \leq x \leq 20}$

Solución:

Para calcular la altura en los puntos de sujeción, se considera *x = 20 y* sustituyendo en la ecuación dada, resulta:

$$\boldsymbol{y = 15 + 20cosh\left(\frac{20}{20}\right) = 15 + 20cosh\,(1) = 45.86}$$

Para calcular la altura en el punto medio entre los postes, se considera *x = 0* y sustituyendo, resulta:

$$\boldsymbol{y = 15 + 20cosh\left(\frac{0}{20}\right) = 15 + 20cosh\,(0) = 35}$$

Para encontrar la pendiente en el punto donde el cable está sujeto a la torre de la derecha, se evalúa la pendiente en *x = 20* y queda:

$$\boldsymbol{m = y'(20) = 20\,senh\left(\frac{20}{20}\right)\left(\frac{1}{20}\right) = senh\,(1) = 1.17}$$

Ejercicio 2.4.5

I- Determinar la derivada de cada función y simplificar

1) $f(x) = \operatorname{csch}(3x^2)$

2) $g(x) = senh(2x) + \cosh(5x)$

3) $y = x^2 sech^3(x^2)$

4) $f(x) = \frac{1-senh\ (3x)}{\cosh(3x)}$

5) $y = tanh^4\ (\sqrt{x^2+1})$

6) $y = e^x coth(e^x)$

7) $g(x) = ln(senh\ 3x)$

8) $y = tan^{-1}(senhx)$

9) $f(x) = \frac{senh(x^2)}{\cosh(x^2)}$

10) $f(x) = 2senh\ \sqrt{x}\ cosh\sqrt{x}$

II- Resolver los siguientes problemas

11) En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la recta tangente tiene pendiente 1.

12) Para un modelo de cables de alta tensión suspendidos entre dos torres: $y = 10 + 15Cosh\left(\frac{x}{15}\right)\ para\ -15 \le x \le 15$, en donde: “x” es la longitud del cable y “y” es la altura con respecto al suelo.

a) Calcular la altura del cable en los puntos de sujeción y en el punto medio entre las torres.

b) Encontrar la pendiente del modelo en el punto donde el cable está sujeto a la torre de la derecha.

Solución al ejercicio 2.4.5

1) $f'(x) = -6\text{x}\operatorname{csch}(3x^2)\coth(3x^2)$

2) $g'(x) = 2\cosh(2x) + 5senh(5x)$

3) $y' = -2xsech^3x^2[3x^2tanhx^2 - 1]$

4) $f'(x) = \frac{-3(1+\text{senh3x})}{cosh^2(3x)}$

5) $y' = \frac{4\text{xtanh}^3\sqrt{x^2+1}\ sech^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

6) $f'(x) = e^x\lfloor\coth(e^x) - e^x csch^2(e^x\rfloor$

7) $g'(x) = 3\coth(3x)$

8) $y' = sech\ x$

9) $f'(x) = 2\text{x}\ \text{sech}^2x^2$

10) $f'(x) = \frac{\text{Cosh}\ (2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

11) P (0.88, 1.41)

12) a) y=33.15; y=25 12b) $m = 1.17$

2.4.6 Funciones hiperbólicas inversas

Las funciones hiperbólicas inversas se pueden expresar en términos de funciones logarítmicas debido a que las funciones hiperbólicas son un caso particular de la función exponencial. Se expresan como:

Función	Dominio de la función
$Senh^{-1}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$Senh^{-1}\, x\ (-\infty, \infty)$
$Cosh^{-1}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$Cosh^{-1}\, x\ [1, \infty]$
$Tanh^{-1}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$Tanh^{-1}\, x(-1,1)$
$Coth^{-1}\, x = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$Coth^{-1}\, x(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$Sech^{-1}\, x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$	$Sech^{-1}\, x\ (0,1]$
$Csch^{-1}\, x = ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x \rvert}\right)$	$Csch^{-1}\, x\ (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Nota: Es importante que los dominios de estas funciones deben ser los intervalos dados para que sí tengan inversas.

Al igual que las funciones trigonométricas inversas, este tipo de funciones se pueden derivar por derivación implícita y sus fórmulas se generalizan por regla de la cadena.

La siguiente tabla muestra las fórmulas para derivar funciones hiperbólicas inversas.

Sea “u” una función derivable de “x”.

$\frac{d}{dx}[Senh^{-1}\, u] = \frac{D_x u}{\sqrt{u^2+1}}$	$\frac{d}{dx}[Coth^{-1}\, u] = \frac{D_x u}{1-u^2}$
$\frac{d}{dx}[Cosh^{-1}\, u] = \frac{D_x u}{\sqrt{u^2-1}}$	$\frac{d}{dx}[Sech^{-1}] = \frac{-D_x u}{u\sqrt{1-u^2}}$
$\frac{d}{dx}[Tanh^{-1}\, u] = \frac{D_x u}{1-u^2}$	$\frac{d}{dx}[Csch^{-1}] = \frac{-D_x u}{\lvert u \rvert\sqrt{1+u^2}}$

Nota: Se puede observar que la derivada de $Tanh^{-1}u$ y $Coth^{-1}\, u$ son iguales, pero la diferencia está en sus dominios.

Ejemplo: Deriva y simplifica cada una de las siguientes funciones.

$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{f(x) = csch^{-1}\sqrt{x}}$

$Si\ u = \sqrt{x}\ ; D_x u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{|\sqrt{x}|\sqrt{1+(\sqrt{x^2})}} = \boxed{\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2x\sqrt{1+x}}}}$ $\quad$ *Aplicando la regla general* $csch^{-1}u$

$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{g(x) = coth^{-1}(\cos x)}$

$Si\ u = \cos x\ ; D_x u = -sen\ x$

$g'(x) = \dfrac{-sen\ x}{1-(\cos x)^2}$ $\quad$ *Aplicando la regla general de* $coth^{-1}u$

$g'(x) = \dfrac{-sen\ x}{sen^2\ x}$ $\quad$ *Identidad trigonometrica (hiperbolica)*

$g'(x) = \frac{-1}{sen\ x} = \boxed{\mathbf{-\csc x}}$ $\quad$ *Identidad inversa*

$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{h(x) = x\ senh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{4+x^2}}$

Usando regla del producto para derivar el primer término y la regla general de las potencias en el segundo.

$$h'(x) = xD_x\left[senh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + senh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) D_x[x] - \frac{1}{2}(4+x^2)^{\frac{1}{2}-1}D_x\left[4+x^2\right]$$

$$h'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}} + senh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$h'(x) = \frac{x}{2\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)} + senh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \boxed{\boldsymbol{senh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$\mathbf{4)}\ \boldsymbol{y = sech^{-1}\, e^{3x}}$

$Si\ u = e^{3x}\ ; u' = 3e^{3x} \quad Regla\ general\ de\ sech^{-1}\, u$

$$y' = \frac{-D_x u}{|u|\sqrt{1-u^2}}$$

$$y' = \frac{-3e^{3x}}{e^{3x}\sqrt{1-(e^{3x})^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{-3}{\sqrt{1-e^{6x}}}}}$$

Aplicación

Ley de sumas de velocidades de Einstein

La tangente hiperbólica inversa tiene importancia en la teoría especial de la relatividad, desarrollada por Albert Einstein en 1905. Una consecuencia de esta teoría es que ningún objeto puede desplazarse a una velocidad mayor que la luz, $c \approx 3x10^8 \frac{m}{s}$. Einstein se dio cuenta que esto contradice una ley formulada por Galileo 250 años antes, que establece que las velocidades se suman. Imagine un tren que se desplaza a velocidad $u = 50\, m/s$ y un hombre que camina por el pasillo a velocidad $v = 2\, m/s$. Según Galileo, la velocidad relativa del hombre respecto al suelo es $u + v = 52\, m/s$. Esta afirmación concuerda con la experiencia diaria. Pero imagine ahora un (irrealista) cohete viajando hacia el exterior desde la Tierra a $2x10^8 m/s$ y suponga que el cohete lanza un misil con velocidad $v = 1.5x10^8\, m/s$ (respecto al cohete). Si la ley de Galileo fuera cierta, de la velocidad del misil respecto al cohete, entonces:

$$tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = tanh^{-1}\left(\frac{u}{c}\right) + tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$$

Ejemplo:

Un cohete viaja al exterior desde la Tierra a $2x10^8 m/s$. Se lanza un misil a velocidad $1.5x10^8\ m/s$ (respecto al cohete) desde la Tierra. Aplique la ley de suma de velocidades de Einstein para hallar la velocidad w del misil respecto a la Tierra.

Solución

Suponemos
$u = 2x10^8\ m/s$
$v = 1.5x10^8\ m/s$
Encontrar el valor de w

$$tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = tanh^{-1}\left(\frac{u}{c}\right) + tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$$

$$tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = tanh^{-1}\left(\frac{2x10^8}{3x10^8}\right) + tanh^{-1}\left(\frac{1.5x10^8}{3x10^8}\right)$$

$$tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = tanh^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + tanh^{-1}\left(\frac{1.5}{3}\right)$$

$$tanh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) = 0.804 + 0.549 \approx 1.354$$

Aplicando $tanh$ en ambos lados

$$\frac{w}{c} = tanh(1.345)$$

$$\frac{w}{c} = 0.875$$

$$w = 0.875\ c$$

$$\boxed{\boldsymbol{w = 2.625x10^8\ m/s}}$$

Este valor respeta la velocidad límite de Einstein de $2x10^8\ m/s$.

Ejercicio 2.4.6

I. Derivar y simplificar cada una de las siguientes funciones

1) $y = cosh^{-1}(x^2)$

2) $f(x) = tanh^{-1}(lnx)$

3) $g(x) = (csch^{-1} 2x)^3$

4) $y = sech^{-1}(e^{3x})$

5) $f(x) = x\ senh^{-1} - \sqrt{x^2+1}$

II. Ley de suma de velocidades de Einstein

6) Un avión que se desplaza a $300\ m/s$ lanza un misil a velocidad de $200\ m/s$. Calcule la velocidad del misil "w" respecto la tierra en (m/s) mediante la ley de Einstein.

Solución al ejercicio 2.4.6

1) $\boldsymbol{y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^4-1}}}$

2) $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{x\,(1-ln^2x)}}$

3) $\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{-3(csch^{-1}\,2x)^2}{|x|\,\sqrt{1+4x^2}}}$

4) $\boldsymbol{y' = \dfrac{-3}{\sqrt{1-e^{6x}}}}$

5) $\boldsymbol{f'(x) = senh^{-1}\,x}$

6) $\boldsymbol{w = 499.99\ m/s}$

Actividad No. 10	**Desarrollo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Aplicar el concepto de derivada.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Instrucciones: Determinar si la afirmación es verdadera o falsa.

Si es verdadera argumente su respuesta y Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.

1. $Si\ f'(x) = g'(x), entonces\ f(x) = g(x)$
2. $Si\ f(x) = g(x) + c, entonces\ f(x) = g(x) + C$
3. $Si\ y = \pi^3, entonces\ \frac{dy}{dx} = 3\pi^2$
4. $Si\ y = \frac{x}{\pi}, entonces\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi}$
5. $Si\ g(x) = 3\ f(x), entonces\ g'(x) = 3f'(x)$
6. $Si\ f(x) = \frac{1}{x^n}, entonces\ f'(x) = \frac{1}{n\ x^{n-1}}$
7. $Si\ y = f(x)g(x), entonces\ \frac{dy}{dx} = f'(x)g'(x)$
8. $Si\ f'(c)\ y\ g'(c)\ son\ cero\ y\ h(x) = f(x)g(x), entonces\ h'(c) = 0$
9. $Si\ y = (1-x)^{\frac{1}{2}}, entonces\ y' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$
10. $Si\ f(x) = sen^{\,2}(2x), entonces\ f'(x) = 2(sen\ 2x)\cos 2x\ sen\ 4x$
11. *Si y es una función derivable de u y u es una función derivable de v, v es una función derivable de x, entonces* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$
12. $\ln(x + 25) = lnx + ln25$
13. $Si\ y = ln\pi, entonces\ y' = \frac{1}{\pi}$
14. $Si\ y = e^{ln2}, entonces\ y' = 0$
15. $Si\ y = e^{3x}, entonces\ y'' = e^{9x^2}$
16. $\frac{d}{dx}[\mathrm{ArcTan}(Tanx)] = 1\ para\ todo\ x en\ su\ dominio$
17. $ArcSen\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
18. $Senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
19. $Senh^2\ x - Cosh^2\ x = 1$
20. $Si\ f(x) = Tanh^{-1}x\ \ y\ g(x) = Coth^{-1}x, entonces\ f'(x) = g'(x)$

2.5 Derivación implícita

La función $y = f(x)$ que se ha visto hasta ahora se dice que es una función explícita de x ya que la variable "y" está expresada en función de x. Por ejemplo $y = 2x - 1$, la función "y" está expresada en función de la variable independiente x por lo que $y = f(x) = 2x - 1$ o simplemente $f(x) = 2x - 1$.

Ésta misma función también puede expresarse como una ecuación de la forma $2x - y = 1$ pues al despejar y se obtiene $-y = 1 - 2x$ o bien $y = 2x - 1$. En éste caso, $2x - y = 1$, se dice que y es una función implícita de x, o que la función f está definida implícitamente por dicha ecuación.

Sea y una función derivable de x. Para encontrar la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de una función y derivable en x expresada implícitamente, es decir, en forma de una ecuación donde la variable y no es fácil de despejar se utiliza el método llamado Derivación Implícita que consiste en los siguientes pasos:

1) Se derivan ambos miembros de la ecuación con respecto a x.
2) Agrupar los términos con y' del lado izquiero de la ecuación y todos los demás del lado derecho.
3) Factorizar y' (como factor común) del lado izquierdo de la ecuación.
4) Despejar y' de la ecuación obteniéndose así la derivada de y.

Ejemplo:
Sea y una función derivable de x, tal que $\frac{dy}{dx} = y'$: Derivar con respecto a "x"

1) $3y\frac{d}{dx} = 3y'$

2) $y^2\frac{d}{dx} = 2yy'$

3) $3y^4\frac{d}{dx} = 3(4y^3y') = 12\,y^3y'$

4) $x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = xy' + y(1) = xy' + y$

5) $d\sqrt{y}\,dx = d\,y^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}y^{-1/2}y' = \frac{y'\,y^{-1/2}}{2} = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$

6) $\frac{d\frac{1}{y}}{dx} = \frac{dy^{-1}}{dx} = -1y^{-2}y' = \frac{-y'}{y^2}$

7) $\frac{d\frac{x}{y}}{dx} = \frac{y\frac{dx}{dx} - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = y - \frac{xy'}{y^2}$

8) $(xy)^3\frac{d}{dx} = (x^3y^3)\frac{d}{dx} = x^3y^3\frac{d}{dx} + y^3x^3\frac{d}{dx} = x^3(3y^2y') + y^3(3x^2) = 3x^3y^2y' + 3x^2y^3$

9) $\frac{d\sqrt{xy}}{dx} = \frac{d(xy)^{1/2}}{dx} = \frac{dx^{1/2}y^{1/2}}{dx} = x^{1/2}\frac{dy^{1/2}}{dx} + y^{1/2}\frac{dx^{1/2}}{dx} = x^{1/2}\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}y'\right) + y^{1/2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) =$
$x^{1/2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{y^{1/2}}y'\right) + y^{1/2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}\right) = \frac{x^{1/2}y'}{2y^{1/2}} + \frac{y^{1/2}}{2x^{1/2}} = \frac{\sqrt{x}y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,y' + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$

Ejemplo con ecuación implícita:

1) $x^2 + y^2 = 4$

Primero se derivan los dos lados de la ecuación

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}4$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2yy' = 0$$

A partir de aquí se despeja la derivada

$$2yy' = -2x$$
$$y' = \frac{-2x}{2y}$$
$$\boldsymbol{y' = \frac{-x}{y}}$$

Ejemplo 1

Hallar dy/dx por derivación implícita de la ecuación $\boldsymbol{x^4 + ylnx = 4y^3 - 5}$.

Solución:

Se derivan ambos miembros de la ecuación

$$\frac{d}{dx}(x^4 + ylnx) = \frac{d}{dx}(4y^3 - 5)$$

$$\frac{d(x^4)}{dx} + \frac{d(ylnx)}{dx} = \frac{d(4y^3)}{dx} - \frac{d(5)}{dx}$$

$$4x^3 + \left(y\frac{d(lnx)}{dx} + lnx\frac{dy}{dx}\right) = 12y^2\frac{dy}{dx} - 0$$

$$4x^3 + y\left(\frac{1}{x}\right) + \left(lnx\frac{dy}{dx}\right) = 12y^2\frac{dy}{dx}$$

Agrupar los términos donde aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la igualdad y pasar el resto de los términos a la derecha.

$$\frac{lnx\,dy}{dx} - 12y^2\frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{y}{x}$$

Factorizar dy/dx

$$\frac{dy}{dx}(\ln x - 12y^2) = 4x^3 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}(\ln x - 12y^2) = \frac{-4x^4 - y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x^4-y}{\frac{x}{\frac{\ln x-12y^2}{1}}} \qquad Despejando\ dy/dx$$

Se simplifica tomando en cuenta que dy/dx también se puede expresar como $y´$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x^4-y}{\frac{x}{\frac{\ln x-12y^2}{1}}}$$

Se multiplican extremos por extremos y medios por medios para su simplificación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x^4-y}{x(lnx-12y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1(4x^4+y)}{x(lnx-12y^2)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^4+y}{x(lnx-12y^2)}}}$$

Ejemplo 2

$\boldsymbol{sen\ y\ =\ x}$

Solución:

Ésta ecuación se utiliza para demostrar que si derivamos implícitamente, la solución coincide con la regla de derivación del $sen^{-1}x$

$sen\ y\ =\ x \qquad Por\ derivacion\ implicita$

Derivamos ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{d\ (sen\ y)}{dx}=\frac{d\ (x)}{dx}$$

$cos\ y\ (y’)\ =\ 1$

$$y’\ =\frac{1}{cos\ y} \qquad Despejamos\ y'$$

Considerando la identidad trigonométrica $sen^2\ y\ +\ cos^2\ y\ =\ 1$, despejando $cos\ y\ =\ \sqrt{1-sen^{\,2}y}$, y sustituyendo $sen\ y\ =\ x$ (la ecuación dada), se tiene que.

$$y’\ =\frac{1}{\sqrt{1-sen^{\,2}y}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por derivación explícita.

$sen\, y = x$

$y = sen^{-1}x \quad Despejamos\ y$

Derivamos ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sen^{-1}x)$$

Según la regla de la derivada de $sen^{-1}x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{Regla de la derivada de } sen^{-1}\text{x}$$

Comparando lo anterior con la regla de derivación del $sen^{-1}x$, se tiene que:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}(sen^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

Ejemplo 3

Encontrar $\boldsymbol{y'}$ por derivación implícita de la ecuación $\boldsymbol{y^3 - xtan\, y = 1}$

Solución:

Se derivan ambos miembros de la ecuación

$$\frac{d}{dx}(y^3 - x\tan y) = \frac{d}{dx}(1) \quad Derivando\ ambos\ miembros\ de\ la\ ecuacion$$

$$\frac{d(y^3)}{dx} - \frac{d(xtany)}{dx} = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d(y^3)}{dx} - \left(\frac{x\, dtan\, y}{dx} + \frac{tan\, y\, dx}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$3y^2y' - (xy'sec^2y + \tan y\,(1)) = 0$$

$$3y^2y' - xy'sec^2y - \tan y\ = 0$$

Agrupar los términos donde aparezca y' en el lado izquierdo de la igualdad y pasar el resto de los términos a la derecha.

$3y^2y' - xy'sec^2y = \tan y$

$y'\,(3y^2 - xsec^2y) = \tan y \quad Se\ factoriza\ y'$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{\tan y}{3y^2 - xsec^2\,y} \quad \textbf{Se despeja } y'}}$$

Ejemplo 4

$\boldsymbol{3y^2 - x^3 + e^{xy^2} = 2}$

Solución:

Se derivan ambos miembros de la igualdad

$$\frac{d}{dx}(3y^2 - x^3 + e^{xy^2}) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$\frac{d}{dx}(3y^2) - \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(e^{xy^2}) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$6yy' - 3x^2 + e^{xy^2}\frac{d}{dx}(xy^2) = 0$$

$$6yy' - 3x^2 + e^{xy^2}\left(x\frac{dy^2}{dx} + y^2\frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$6yy' - 3x^2 + e^{xy^2}\big(x(2yy') + y^2(1)\big) = 0$$

$$6yy' - 3x^2 + e^{xy^2}(2xyy' + y^2) = 0$$

$$6yy' - 3x^2 + 2xyy'e^{xy^2} + y^2e^{xy^2} = 0$$

Agrupar los términos donde aparezca y' en el lado izquierdo de la igualdad y pasar el resto de los términos a la derecha

$$6yy' + 2xyy'e^{xy^2} = 3x^2 - y^2e^{xy^2}$$

$$y'\left(6y + 2xye^{xy^2}\right) = 3x^2 - y^2e^{xy^2} \text{ Se factoriza } y'$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{3x^2 - y^2e^{xy^2}}{6y + 2xye^{xy^2}}}}$$

Ejemplo 5

$(\boldsymbol{e^x + e^y})^2 = \boldsymbol{x^2 + y^2}$

Solución:

Este ejemplo puede realizarse de dos formas: utilizando regla de la cadena o bien utilizando el teorema del binomio.

Por la regla de la cadena.

$$\frac{d(e^x + e^y)^2}{dx} = \frac{d(x^2 + y^2)}{dx}$$

Se derivan ambos miembros de la igualdad usando la regla de la cadena

$$2(e^x + e^y)\,\frac{d(e^x + e^y)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dy}$$

$$2(e^x + e^y)(e^x + y'e^y) = 2x + 2yy'$$

Se simplifica la ecuación dividiendo ambos miembros entre 2 y efectuando la multiplicación.

$$(e^x + e^y)(e^x + y'e^y) = x + yy'$$

$$e^{2x} + y'e^{(x+y)} + e^{(x+y)} + y'e^{2y} = x + yy'$$

Agrupar los términos donde aparezca y' en el lado izquierdo de la igualdad y pasar el resto de los términos a la derecha

$$y'e^{(x+y)} + y'e^{2y} - yy' = x - e^{2x} - e^{(x+y)}$$

$$y'\left(e^{(x+y)} + e^{2y} - y\right) = x - e^{2x} - e^{(x+y)} \quad factorizando\ y'$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{x - e^{2x} - e^{(x+y)}}{(e^{(x+y)} + e^{2y} - y)}}}$$

Por el teorema del binomio.

$$(e^x + e^y)^2 = x^2 + y^2$$

Antes de derivar ambos lados de la igualdad, desarrollamos el binomio que se tiene a la izquierda de la misma.

$$e^{2x} + 2e^xe^y + e^{2y} = x^2 + y^2$$

$$\frac{d(\, e^{2x} + \, 2e^x e^y + \, e^{2y})}{dx} = \frac{d(x^2 + y^2)}{dx}$$

Aplicamos la regla de los exponentes $a^n \, * \, a^m \, = \, a^{n+m}$ en el término $2e^x e^y$

$$\frac{d(e^{2x}) + \, d(2e^{x+y}) + \, d(e^{2y})}{dx} = \frac{d(x^2) + d(y^2)}{dx}$$

$2e^{2x} + 2e^{x+y}(1 + y') + 2e^{2y}(y') = \, 2x + 2yy' \;\; Derivando$

$2e^{2x} + 2e^{x+y} + 2y'e^{x+y} + 2y'e^{2y} = \, 2x + 2yy'$

Para simplificar la ecuación se dividen entre dos todos los términos.

$e^{2x} + e^{x+y} + y'e^{x+y} + y'e^{2y} = \, x + yy'$

Agrupar los términos donde aparezca y' en el lado izquierdo de la igualdad y pasar el resto de los términos a la derecha.

$y'e^{x+y} + y'e^{2y} - yy' = x - e^{2x} - e^{x+y}$

$y'(e^{x+y} + e^{2y} - y) = x - e^{2x} - e^{x+y} \; Factorizando \; y'$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{x - e^{2x} - e^{x+y}}{e^{x+y} + e^{2y} - y}}}$$

Ejemplo 6

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 4y^2 = 8$ en el punto P (2,1)

Solución:

Se deriva implícitamente ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$2x + 8yy' = 0$$

Se agrupan los términos que contienen y' a la izquierda de la igualdad, y los restantes se pasan a la derecha de la misma.

$$8yy' = -2x$$

Se despeja y' y se simplifica.

$$y' = -\frac{2x}{8y}$$

$$y' = -\frac{x}{4y}$$

Se sustituye las coordenadas (2,1) del punto P en y' para obtener la pendiente de la recta tangente.

$$y' = -\frac{2}{4(1)} = -\frac{2}{4}$$

$$y' = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$m = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo $m = -\frac{1}{2}$ y el punto P (2,1) dado en la ecuación punto pendiente de la recta se tiene.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + 1$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 2}$$

Siendo esta ultima la ecuación de la recta tangente en la forma $y = mx + b$ en donde b es la ordenada en el origen.

Ejercicio 2.5

Encontrar dy/dx por derivación implícita de cada una de las ecuaciones siguientes

1) $3x^3 - 2xy^2 + 7y = 2$

2) $y^2sec^2x + \ln(tanx) = e^{xy} + 1$

4) $ye^x + xe^y = 2$

5) $tan(x + y) = ln\,(x + y)$

3) $y^2 + x^2 + 2^{xy} = 0$

6) $4x^2y^3 + 2x^3y^4 + 3x^4y^2 = 234$

Soluciones al ejercicio 2.5

1) $y' = \dfrac{2y^2 - 9x^2}{7 - 4xy}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{xy} - 2y^2 sec^2 x tanx - secxcscx}{2ysec^2 x - xe^{xy}}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + 2^{xy}\, yln2}{2y + 2^{xy}\, xln2}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}$

5) $\dfrac{dy}{dx} = -1$

6) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4y^2 + 3xy^3 + 6x^2y}{6xy + 4x^2y^2 + 3x^3}$

2.6 Derivación logarítmica

Hasta ahora, se han presentado fórmulas para derivar funciones, en donde la base es variable y el exponente es constante (x^n, u^n), así como funciones en donde la base es constante y el exponente es variable (e^x, a^u), sin embargo, hay funciones en donde tanto la base como el exponente son variables. Este tipo de funciones se recomienda derivar mediante una técnica llamada **derivación logarítmica.** Esta técnica suele facilitar el cálculo de la derivada de esta función aprovechando las propiedades de los logaritmos.

Cuando la función contiene productos y/o cocientes con diferentes factores, también se puede usar este proceso de derivación para facilitar el cálculo de su derivada.

Procedimiento:

Si $y = f(x)$

1) Aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación

2) Aplicar propiedades de logaritmos al lado derecho de la ecuación.

3) Derivar implícitamente y simplificar.

4) Sustituir “y” en el resultado.

Ejemplo: Derivar y simplificar las siguientes funciones mediante la derivación logarítmica.

1) $\boldsymbol{y = (x^2 + 1)^x}$

Paso 1. Aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación

$\ln y = \ln(\boldsymbol{x^2+1})^x$

Paso 2. Aplicar propiedades de logaritmos al lado derecho de la ecuación.

$\ln y = \mathrm{x} \ln(x^2+1)$

Paso 3. Derivar implícitamente y simplificar.

$$\left(\frac{1}{y}\right) y' = x\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \ln(x^2+1)\,(1)$$

$$y' = y\left[\frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1)\right]$$

Paso 4. Sustituir "y" en el resultado.

$$\boldsymbol{y' = (x^2+1)^x\left[\frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1)\right]}$$

$$\boldsymbol{y' = (x^2+1)^x\left[\frac{2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2+1}\right]}$$

$$\boldsymbol{y' = (x^2+1)^{x-1}\left[2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1)\right]}$$

2) $\boldsymbol{y = x^{\cos x}}$

Paso 1. Aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación

$$\ln y = \ln x^{\cos x}$$

Paso 2. Aplicar propiedades de logaritmos al lado derecho de la ecuación.

$$\ln y = \cos x \ln x$$

Paso 3. Derivar implícitamente y simplificar.

$$\left(\frac{1}{y}\right) y' = \cos x \left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\,(-sen\ x)$$

$$y' = \frac{\cos x}{x} - sen\ x\ lnx$$

$y' = y\ \left[\frac{\cos x}{x} - sen\ x\ lnx\right]$

Paso 4. Sustituir "y" en el resultado.

$$\boldsymbol{y' = x^{\cos x}\ \left[\frac{\cos x}{x} - sen\ x\ lnx\right]}$$

$$\boldsymbol{y' = x^{\cos x}\ \left[\frac{\cos x - x\ sen\ x\ \ln x}{x}\right]}$$

$$\boldsymbol{y' = x^{\cos x - 1}\ [cos\ x - x\ sen\ x\ \ln x]}$$

3) $\boldsymbol{y = e^{2x}x^x}$

Paso 1. Aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación

$\ln y = \ln \boldsymbol{e^{2x}x^x}$

Paso 2. Aplicar propiedades de logaritmos al lado derecho de la ecuación.

$\ln y = \ln(e^{2x}) + ln(x^x)$ $\qquad\qquad$ $\ln e = 1$

$\ln y = 2x + x \ln x$

Paso 3. Derivar implícitamente y simplificar.

$$\left(\frac{1}{y}\right) y' = 2 + x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\ (1)$$

$$y' = y\ [3 + \ln x]$$

Paso 4. Sustituir "y" en el resultado.

$$\boldsymbol{y' = e^{2x}x^x\ [3 + \ln x]}$$

4) $\boldsymbol{f(x) = \frac{5x-6}{\sqrt{2x-1}}}$

Ejemplo 6 del tema 2.3 "Regla de la cadena"

Haciendo *y = f(x)*, se expresa como:

$$\boldsymbol{y = \frac{5x - 6}{\sqrt{2x - 1}}}$$

Paso 1. Aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación

$$\ln y = \ln \frac{5x-6}{\sqrt{2x-1}}$$

Paso 2. Aplicar propiedades de logaritmos al lado derecho de la ecuación.

$$\ln y = \ln(5x-6) - ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

$$\ln y = \ln(5x-6) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$$

Paso 3. Derivar implícitamente y simplificar.

$$\left(\frac{1}{y}\right)y' = \frac{5}{5x-6} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$

$$y' = y\left[\frac{5}{5x-6} - \frac{1}{2x-1}\right]$$

$$y' = y\left[\frac{5(2x-1)-(5x-6)}{(5x-6)(2x-1)}\right]$$

$$y' = y\left[\frac{10x-5-5x-6}{(5x-6)(2x-1)}\right]$$

$$y' = y\left[\frac{5x+1}{(5x-6)(2x-1)}\right]$$

Paso 4. Sustituir "y" en el resultado.

$$y' = \frac{5x-6}{\sqrt{2x-1}}\left[\frac{5x+1}{(5x-6)(2x-1)}\right]$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{5x+1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}}$$

Ejercicio 2.6

I. Deriva y simplifica cada una de las siguientes funciones mediante la derivación logarítmica.

1) $\boldsymbol{y = (4x-1)^{2x}}$

2) $\boldsymbol{y = \left(\sqrt{x}\right)^{4x}}$

5) $\boldsymbol{y = (senh\, 2x)^{3x}}$

6) $\boldsymbol{y = x^{Tan\, x}}$

3) $y = (x^x)^x$ 7) $y = x^3 x^x$

4) $y = (\ln x)^x$ 8) $y = (arc\ tan\ x)^x$

II. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

9) $y = (cos\ x)^x\ en\ P(0,1)$ 10) $y = x^x\ en\ P(1,1)$

Soluciones al ejercicio 2.6

1) $y' = 2(4x-1)^{2x-1}[4x + (4x-1)\ln(4x-1)]$

2) $y' = 2(x)^{2x}[1 + \ln x]$

3) $y' = x^{x^2+1}(1 + \ln x^2)$

4) $y' = (\ln x)^{x-1}[1 + \ln x(\ln \ln x)]$

5) $y' = 3(senh\ 2x)^{3x}[2x\ coth\ 2x + \ln senh\ 2x]$

6) $y' = x^{Tan\,x-1}[tan\ x + x \ln x\ sec^2 x]$

7) $y' = x^{2+x}(3 + x + x\ \ln x)$

8) $y' = (arc\ tan\ x)^x \left[\dfrac{x}{(x^2+1)arc\ tan\ x} + \ln arc\ tan\ x\right]$

9) $y = 1$

10) $y = x$

2.7 Derivadas de orden superior

Notaciones para la derivada de orden superior.

Primera derivada	*Segunda derivada*	*Tercera derivada*	Cuarta derivada	n derivada
y'	y''	y'''	y''''	$y^{(n)}$
$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f''''(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$
$D_x y$	$D_x^2 y$	$D_x^3 y$	$D_x^4 y$	$D_x^n y$

Tomando como base las notaciones anteriores, se presenta una función y la manera en la cual se obtienen las derivadas de orden superior.

Función	*Primera derivada*	*Segunda derivada*	*Tercera derivada*
$y = f(x)$	$y' = \dfrac{df(x)}{dx}$	$y'' = \dfrac{df'(x)}{dx}$	$y''' = \dfrac{df''(x)}{dx}$

Nota: La notación $\frac{d^n y}{dx^n}$ para derivadas de orden superior no debe considerarse como un cociente.

Ejemplo: Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ encontrar las primeras tres derivadas de $f(x)$.

Solución:

Como $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 4$$
$$f''(x) = 12x - 6$$
$$f'''(x) = 12$$

Ejemplo: Hallar y'' por derivación implícita en la ecuación $y^3 + 3y - 2x^3 = 3x + 1$

Solución:

Se deriva ambos miembros de la ecuación.

$$y^3\frac{d}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 2\frac{dx^3}{dx} = 3\frac{dx}{dx} + 1\frac{d}{dx}$$

$$3y^2y' + 3y' = 6x^2 + 3$$

Se agrupan los términos que contiene y' del lado izquierdo de la igualdad, y se factoriza y'

$$y'(3y^2 + 3) = 6x^2 + 3$$

$$y' = \frac{6x^2 + 3}{3y^2 + 3}$$

Se despeja y' y se simplifica

$$y' = \frac{3(2x^2 + 1)}{3(y^2 + 3)}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 1}{y^2 + 1}$$

Se deriva la función y' obtenida en el paso anterior.

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{2x^2+1}{y^2+1}\right)}{dx}$$

$$y'' = \frac{(y^2+1)\frac{d(2x^2+1)}{dx} - (2x^2+1)\left(\frac{d(y^2+1)}{dx}\right)}{(y^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(y^2+1)4x - (2x^2+1)2yy'}{(y^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x(y^2+1) - 2yy'(2x^2+1)}{(y^2+1)^2}$$

Se sustituye el valor de y' y se simplifica.

$$y'' = \frac{4x(y^2+1) - 2y\left(\frac{2x^2+1}{y^2+1}\right)(2x^2+1)}{(y^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x(y^2+1) - \frac{2y(2x^2+1)^2}{y^2+1}}{(y^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{4x(y^2+1)^2}{y^2+1} - \frac{2y(2x^2+1)^2}{y^2+1}}{(y^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{4x(y^2+1)^2 - 2y(2x^2+1)^2}{y^2+1}}{\frac{(y^2+1)^2}{1}}$$

$$\boldsymbol{y'' = \frac{4x(y^2+1)^2 - 2y(2x^2+1)^2}{(y^2+1)^3}}$$

Aplicación

La función de posición de una partícula en el espacio está dada por $s(t) = 1 + t + 6t^2 - t^3$ determinar la velocidad de dicha partícula cuando su aceleración es cero.

Solución
Al derivar una función de posición y aplicando los conceptos de la física, velocidad y aceleración, se obtiene una función de velocidad, derivando esta última se conoce la función de aceleración. En otras palabras la función aceleración es la segunda derivada de la función posición dada, por lo que se calcula la segunda derivada de la función dada.

$$s(t) = 1 + t + 6t^2 - t^3$$

Primera $\qquad v(t) = s'(t) = 1 + 12t - 3t^2$

Segunda derivada $\quad a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$

Como en este caso se pide la velocidad de la partícula cuando la aceleración es igual a cero, por lo tanto, se iguala a cero la función aceleración $a(t)$ despejando el tiempo *t* de esta última y sustituyendo *t* en la función velocidad $v(t)$

$$a(t) = 12 - 6t$$
$$0 = 12 - 6t$$
$$t = 2$$
$$v(t) = 1 + 12t - 3t^2$$
$$v(2) = 1 + 12(2) - 3(2)^2$$
$$v(2) = 1 + 24 - 12$$
$$v(2) = 13$$

Ejercicios 2.7

I. Encuentra la segunda derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^4 + 8x^2 + 5x - 4$
2. $f(x) = (x^3 - 2)^{4/3}$
3. $g(t) = \sqrt{3t^2 + 5}$
4. $f(x) = \sqrt{4 - senx}$
5. $f(x) = cos(sen2x)$
6. $h(t) = -5tane^{-2t}$

II. Encuentra la tercera derivada de las siguientes funciones:

7. $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$
8. $f(x) = (x^2 + 1)^3$

9. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 12x - 6$

10. $f(x) = 2Cos^2x + 4Sen^2x$

Solución al ejercicio 2.7

1. $f''(x) = 36x^2 + 16$

2. $f''(x) = \frac{4x(3x^3-4)}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$

3. $g''(t) = \frac{3(3t^2-3t+5)}{(3t^2+5)^{3/2}}$

4. $f''(x) = \frac{8sen2x-2sen^2 2x-cos^2 2x}{\sqrt[2]{(4-sen2x)^3}}$

5. $f''(x) = [4sen(sen2x)(sen2x) - 4cos^2 2x\ cos(sen2x)$

6. $h''(t) = -20e^{-2t}sec^2e^{-2t}[2e^{-2t}\tan(e^{-2t}) + 1]$

7. $f'''(x) = \frac{-48}{(2x-1)^4}$

8. $f'''(x) = 24x(5x^2 + 3)$

9. $f'''(x) = 60x^2 - 12$

10. $f'''(x) = -16(senxcosx)$

Actividad No. 11	**Integradora 2**	**Individual – extra aula**
Propósito: Aplicación de las derivadas de orden superior.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga los procedimientos correctos.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora.		

Instrucciones: Determine si la función "y" dada es o no solución de la ecuación diferencial dada.

Una ecuación diferencial (ED) es aquélla que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Procedimiento:

1) Derivar la función "y" el número de veces indicado en la ED
2) Sustituir dichas derivadas en la ED y simplificar.
3) Si la ED se reduce a una identidad, entonces la función "y" sí es solución.

Función		Ecuación Diferencial
1	$y = 3cosx + senx$	$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
2	$y = 2x^3 - 6x + 10$	$-y''' - xy'' - 2y' = -24x^2$
3	$y = xe^x$	$y'' - 2y' + y = 0$
4	$y = 2\ln x + 3$	$xy'' + y' = 0$
5	$y = 8x^5 + 3x^2 + c$ En donde C es una constante	$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = [320x^2 + 2x]y$

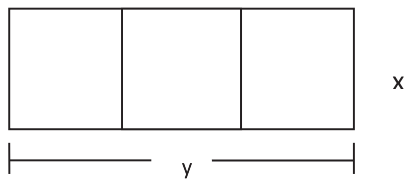
Capítulo 3. Aplicaciones de la derivada.

Actividad No. 12	**Conocimiento previo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Determinación de funciones a partir de un planteamiento dado.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga los procedimientos correctos.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

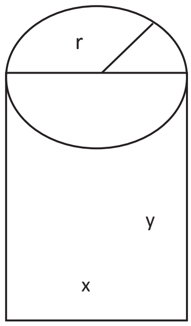
Instrucciones: Determinar la función en una sola variable que cumpla con las condiciones dadas.

1. Si la suma de un número y dos veces otro número es 24. Encuentra las funciones que exprese el producto de dichos números.

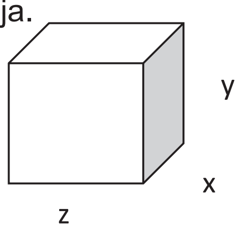
2. Un granjero tiene 24 metros de cerca para encerrar un área rectangular y dividirlo en 3 corrales colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. Determinar la función que exprese el área de los 3 corrales.



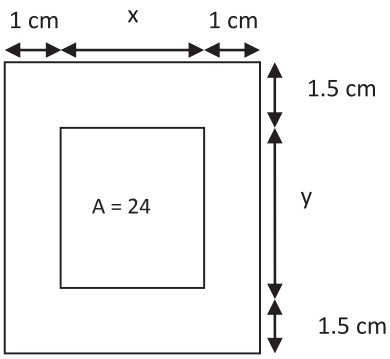
3. Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura. Encuentra una función que determine el área de la ventana si su perímetro es de 10 m.



4. Si se cuenta con 1000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta. Determina la función que exprese el volumen de la caja.



5. Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión, los márgenes de la página superior deben ser de 1.5 cm y los márgenes de la izquierda y derecha son de 1 cm. Determinar la función que representa el área de la página.



6. Se desea construir un recipiente cilíndrico con tapa y una capacidad de 600 litros. Determina la función que exprese la cantidad de material para construirlo. (1 litro = 1 dm^3).

7. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado cortando cuadritos iguales de cada esquina. Determinar la función que exprese el volumen de la caja.

8. La suma de tres números positivos es 30, el primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 60. Determina la función que exprese el producto de los tres números.

9. Dos puntos A y B se encuentran alineados en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta $400 tender un kilómetro de tubería en la playa y $500 en el mar. Determina la función del costo al trazar la tubería desde A hasta C (No necesariamente debe pasar por B).

10. Dos barcos salen al mismo tiempo, uno de un muelle con dirección Sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al Oeste a 10 km/h. Determina la función que exprese la distancia a la que se encuentran estos dos barcos.

3.1 Derivada como razón de cambio

La derivada como razón de cambio determina el ritmo de cambio de una variable respecto a otra, como ya se ha visto en ejemplos anteriores a la velocidad que se define como el cambio de posición con respecto al tiempo, más sin embargo, esta razón de cambio tiene utilidad en una amplia variedad de situaciones, que van desde aplicaciones en la vida cotidiana hasta en problemas de ingeniería.

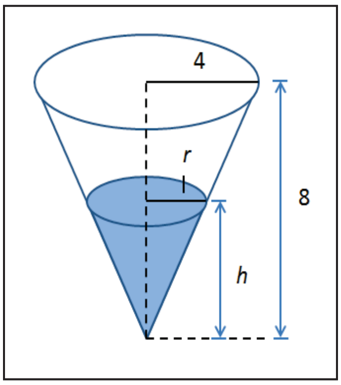
Para encontrar los ritmos o velocidades de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando con respecto al tiempo, es necesario derivar implícitamente, especificando que se está derivando con respecto al tiempo, aunque el tiempo es una variable que no interviene en la función.

Se sugiere considerar el siguiente procedimiento para resolver problemas relacionados con la derivada como razón de cambio:

1er. Paso: Asignar variables y plantear el problema.
2do. Paso: Hallar una ecuación que relacione las variables y derivar.
3er. Paso: Usar los datos para encontrar la derivada desconocida.

Ejemplos:

1. Llenado de un depósito cónico.



Se introduce agua en un depósito cónico de 8 metros de altura y 4 metros de radio a un ritmo de $5\ m^3/min$. ¿Con qué ritmo asciende el nivel del agua cuando el nivel es de 3 metros?

Solución:

1er. Paso: Asignar variables y plantear el problema.

h = altura del cono = 8m
r = radio del cono = 4m
dV/dt = cambio del volumen de agua con respecto al tiempo = $5\ m^3/min$
dh/dt = cambio del nivel de agua con respecto al tiempo =? cuando $h\ =\ 3m$

2do. Paso: Hallar una ecuación que relacione las variables y derivar.

La ecuación que relaciona a las variables y los datos dados es el volumen del cono, que está dado por:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h$$

Para expresar "r" en términos del nivel de agua dado, se hace una semejanza de triángulos y resulta que:
$\frac{r}{h} = \frac{4}{8}$ de manera que $r = 0.5h$ y sustituyendo en la fórmula de volumen, queda:

$$V = 0.26\ h^3$$

Derivando implícitamente con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = 0.26\ (3h^2)\frac{dh}{dt} = 0.78\ h^2\,\frac{dh}{dt}$$

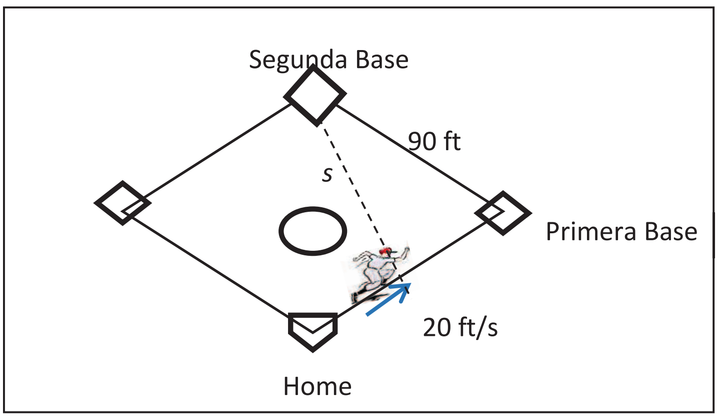
3er. Paso: Usar los datos para encontrar la derivada desconocida.

Despejando $\boldsymbol{\frac{dh}{dt}}$ y sustituyendo los valores conocidos, resulta:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{0.78h^2} = \frac{5}{(0.78)(9)} \approx \mathbf{0.707}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{min}}$$

2. Béisbol

Un jugador de béisbol corre desde el home hacia la primera base a $20\ ft/s$. ¿Con qué rapidez está variando la distancia del jugador a la segunda base, cuando se encuentra a medio camino de la primera base? (ver figura).



Solución:

1er. Paso: Asignar variables y plantear el problema.

x = Distancia del corredor a la primera base (variable)
$\frac{dx}{dt}$ = Velocidad del corredor hacia la primera base = $20\ ft/seg$
s = Distancia del corredor a la segunda base (variable)
$s = 100.62\ ft$, cuando $x = 45\ ft$ y despejando de: $s^2 = (90)2 + (45)2$
$\frac{ds}{dt}$ = ? Cuando $x = 45\ ft$

2do. Paso: Hallar una ecuación que relacione las variables y derivar.

Como se forma un triángulo rectángulo con la primera base, la segunda base y la posición del corredor, la ecuación que relaciona las variables es el Teorema de Pitágoras y resulta:

$$s^2 = x^2 + (90)^2$$

Derivando implícitamente con respecto a "t":

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

Despejando

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt}$$

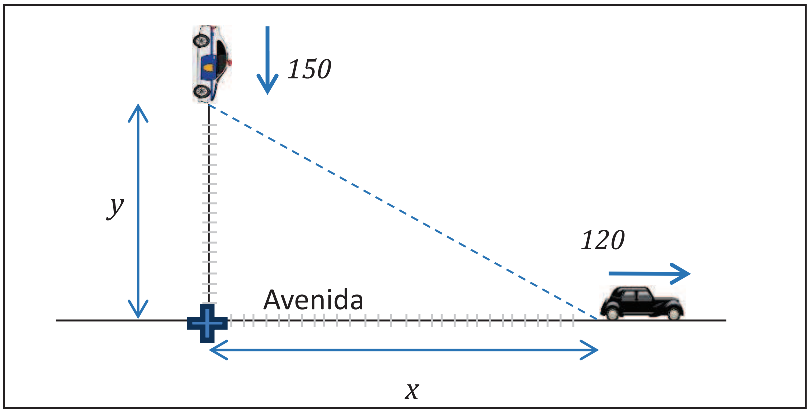
3er. Paso: Usar los datos para encontrar la derivada desconocida.

$$\boldsymbol{\frac{ds}{dt}} = \frac{45}{100.62}(20) = \mathbf{8.94\ \boldsymbol{ft/s}}$$

3. Policías y ladrones

Una patrulla de policía viaja en dirección sur hacia una avenida a $150\ km/hr$ y persigue a un ladrón que viaja en un automóvil en dirección Este y se está alejando de dicha intersección sobre la avenida a $120\ km/hr$ (Figura). En el instante $t = 0$ la patrulla se encuentra $20\ km$ al Norte de la avenida, y el automóvil está a $30\,km$ de la intersección. Calcular el ritmo de cambio de la distancia más corta entre ambos vehículos:

a) En el instante $t = 0$
b) 5 Minutos después



Solución:

1er. Paso: Asignar variables y plantear el problema.

$$\frac{dy}{dt} = Velocidad\ de\ la\ patrulla\ acercandose\ a\ la\ intersección = -150\ {}^{km}/_{hr}$$

$$\frac{dx}{dt} = Velocidad\ del\ automóvil = 120\frac{km}{hr}$$

$$x = Distancia\ de\ la\ intersección\ al\ automóvil$$

$$y = Distancia\ de\ la\ intersección\ a\ la\ patrulla\ cuando$$

$$z = Distancia\ entre\ los\ vehículos\ (cuando\ t = 0)\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30^2 + 20^2}$$
$$= 36.055\ km$$

$$\frac{dz}{dt} = Ritmo\ de\ cambio\ de\ la\ distancia\ entre\ los\ vehículos\ =?$$

a) Cuando $t = 0$
b) Cuando $t = 5$ minutos después

2do. Paso: Hallar una ecuación que relacione las variables y derivar.

Por Teorema de Pitágoras, ya que se forma un triángulo rectángulo entre los carros y la intersección de las calles.

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$2z\,\frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}$$

$$z\,\frac{dz}{dt} = x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}$$

3er. Paso: Usar los datos para encontrar la derivada desconocida.

a) $Cuando\ t = 0; x = 30\ km; y = 20\ km; z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36.055$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}}{z} = \frac{30(120) + 20(-150)}{36.055}$$

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dt} = 16.64\,\frac{km}{hr}}$$

b) Cuando $t = 5$ minutos después

Considerando que los vehículos se desplazan a velocidad constante, entonces se deben calcular las distancias que se recorrerían en “x” y en “y” en $t = 5\ min$, o bien, en $t = 5/60\ hr$ $(t = 0.0833\ hr)$

Si las velocidades de patrulla y del carro son constantes

$$v_x = \frac{x}{t}$$

$$x = v_x t$$

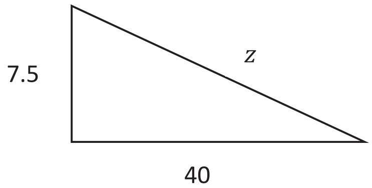
$$x = (120)(0.833) = 10\ Km$$

$$v_y = \frac{y}{t}$$

$$y = v_y t$$

$y = (-150)(.0833) = 12.5\ Km$

Se forma un nuevo triángulo rectángulo



En donde se calcula por $z = \sqrt{(40)^2 + (7.5)^2} = 40.697$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}$$

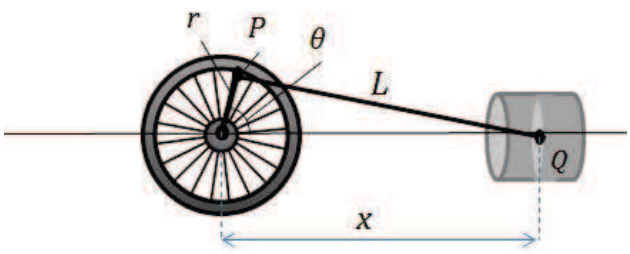
$$\boldsymbol{\frac{dz}{dt}} = \frac{(40)(120) + (7.5)(-150)}{40.697} = \boldsymbol{90.3\ km/h}$$

4. Pistón en Movimiento

Cuando la rueda de la figura de 10 cm de radio está girando, la varilla de longitud L de 30 cm unida al punto P impulsa un pistón hacia adelante y atrás en línea recta. Sea "x" la distancia del origen al punto Q donde acaba la varilla y considerando que:

$$L^2 = (x - r\cos\theta)^2 + r^2 sen^2\theta$$

Calcular la velocidad del pistón cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ y suponiendo que la rueda gira a $4\ rev/min$.



Solución:

1er. Paso: Asignar variables y plantear el problema.

$r = Radio\ de\ la\ rueda\ (constante) = 10\ cm$

$L = longitud\ de\ la\ varilla\ (constante) = 30\ cm$

$x = distancia\ del\ origen\ al\ punto\ Q\ es\ variable$

$$\frac{dx}{dt} = Velocidad\ del\ pistón\ =?\ \ cuando\ \theta = {}^{\pi}/_{2}$$

$\frac{d\theta}{dt} = ritmo\ de\ cambio\ de\ la\ rueda = 4\frac{rev}{min} = 25.13\frac{rad}{min}$

Considerando que $1\ rev = 6.28\ \ rad/min$

2do. Paso: Hallar una ecuación que relacione las variables y derivar.

Partiendo de la ecuación dada:

$L^2 = (x - rcos\ \theta)^2 + r^2 sen^2\ \theta$

Derivando implícitamente con respecto al tiempo, resulta:

$$2(x - rcos\ \theta)\left(\frac{dx}{dt} + rsen\ \theta\ \frac{d\theta}{dt}\right) + 2r^2\ sen\theta\ cos\theta\ \frac{d\theta}{dt} = 0$$

3er. Paso: Usar los datos para encontrar la derivada desconocida.

$Como\ \theta =\ {}^{\pi}/_{2}\, entonces, cos\ {}^{\pi}/_{2} = 0\ y\ sen\ {}^{\pi}/_{2} = 1$

La ecuación se reduce a:

$$2x\left(\frac{dx}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -r\frac{d\theta}{dt}$$

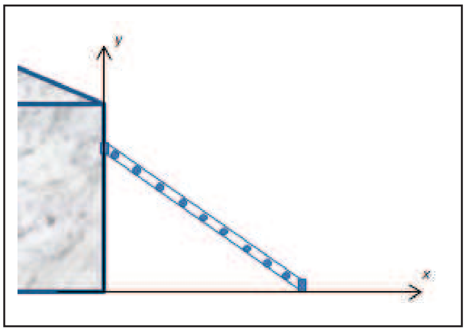
Si $r = 10\quad y\quad \frac{d\theta}{dt} = 25.13\ \frac{rad}{min}$, entonces:

$$\frac{dx}{dt} = -10(25.13)$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -251.13\frac{cm}{min}}$$

Ejercicio 3.1

1. Deslizamiento de una escalera.

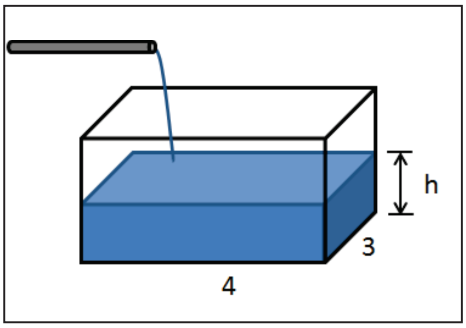


Una escalera de 4 metros de longitud está apoyada sobre la pared de una barda. Inicialmente el pie de la escalera está a un metro de la pared y se desliza apartándose de la pared a un ritmo de 0.5 m/s a velocidad constante. Hallar la velocidad del extremo superior de la escalera cuando se separa un metro más de la pared.

Solución: $\frac{dy}{dt} = \ -\mathbf{0.2886}\ \boldsymbol{m/s}$

Nota: El signo negativo se interpreta porque la escalera se está deslizando hacia abajo sobre el eje "y".

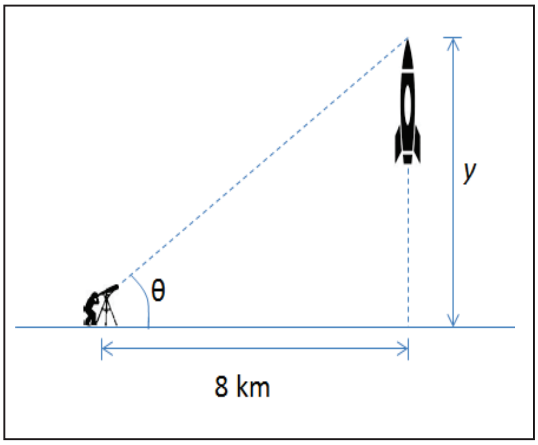
2. Llenado de una cisterna rectangular.



En una cisterna entra agua a un ritmo de $0.5\ m^3/min$. ¿Con qué rapidez asciende el nivel del agua si la base de la cisterna es un rectángulo de 3 x 4 metros?

Solución: $\frac{dh}{dt} = \mathbf{0.042}\ \boldsymbol{m/min}$

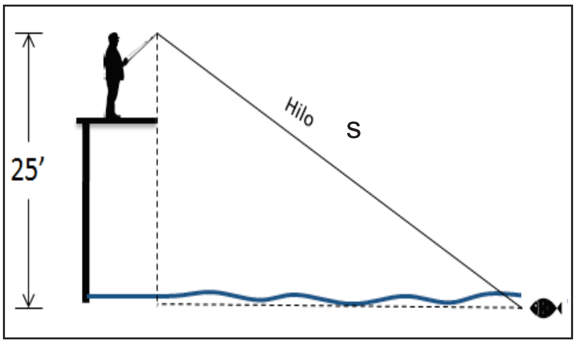
3. Seguimiento de un cohete



Una persona observa un cohete con un telescopio para determinar su velocidad. El cohete asciende verticalmente desde su plataforma de lanzamiento situada a una distancia de 8 km. En un instante dado, el ángulo de elevación (entre el telescopio y el suelo) es de $\pi/3$ y está variando a razón de $0.7\ rad/min$. ¿Cuál es la velocidad del cohete en ese momento?

Solución: $\frac{dh}{dt} = 22.4\ \frac{km}{min}$

4. **Pez en el agua**

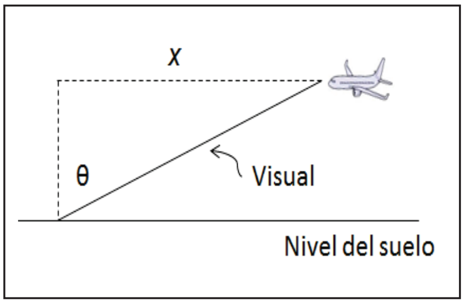


Un pescador tiene un pez al final del hilo de su caña, y lo rebobina a una velocidad de 2 pies por segundo desde un puente a 25 pies de altura sobre el agua. ¿A qué velocidad se mueve el pez por el agua (supuesto siempre en su superficie) cuando el hilo mide 40pies? **Solución:** $\frac{dx}{dt} = -2.56\ \frac{pies}{seg}$

Nota: El signo negativo indica que la distancia se está recortando, o bien, que el pez se está acercando al muelle.

5. Observando un avión

Una persona está observando desde el suelo, con un telescopio, un avión que se aproxima a una velocidad de 8 km por minuto y a una altura de 6 km. ¿A qué ritmo está variando el ángulo del telescopio (Figura) cuando la distancia horizontal del avión al observador es de 20 km? ¿Y cuando el avión pasa por la vertical de la persona?



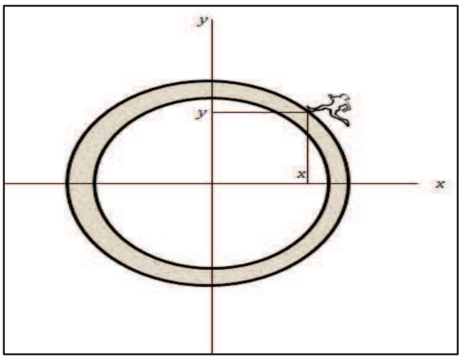
Solución:

$$a)\ \frac{d\theta}{dt} = -0.11 \frac{rad}{min} = -6.3°/min$$

$$b)\ \frac{d\theta}{dt} = -1.33\ \frac{rad}{min} = -76.2°/\text{min}$$

6. **Atletismo**

Un atleta se ejercita corriendo por una pista circular de 40 m de radio. Con un sistema de coordenadas con origen en el centro de la pista, su coordenada "x" está cambiando a razón de -1.5 m/s



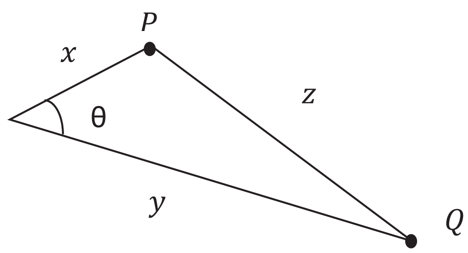
cuando $x = 30$ en el primer cuadrante. Hallar dy/dt en ese preciso instante.

Solución: $\frac{dy}{dt} = \mathbf{1.7}\ \frac{m}{s}$

7. Triángulo obtusángulo

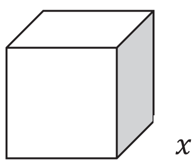
En el triángulo mostrado en la figura, el lado "x" está aumentando a razón de $2\ cm/s$, el lado "y" está aumentando a razón de $3\ cm/s$ y el ángulo θ disminuye, de tal manera que el área total del triángulo es constante e igual a $4cm^2$

a) ¿Con qué ritmo disminuye el ángulo θ cuando $x = 4\ cm$ y $y = 4\ cm$?
b) ¿Con qué rapidez cambia la distancia "z" entre P y Q cuando $x = 4\ cm$ y $y = 4\ cm$?



Solución: a) $\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{0.72}\ \boldsymbol{rad/s}$ **b)** $\frac{dz}{dt} = -\mathbf{1.48}\ \boldsymbol{cm/seg}$

8. Volumen de un cubo



Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de $2\ cm/s$. ¿A qué ritmo está aumentando el volumen cuando todas las aristas miden 1 cm?

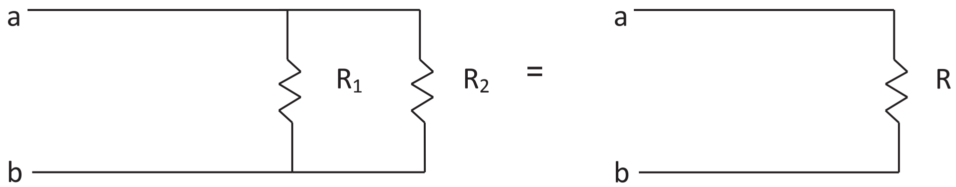
Solución: $\frac{dv}{dt} = \mathbf{6}\ \boldsymbol{cm^3/s}$

9. Electricidad

La resistencia eléctrica equivalente (R) con R_1 y R_2 conectadas en paralelo, está dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Donde R, R_1 y R_2 se miden en ohms, R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1.5 y 2 ohms por segundo, respectivamente ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 40\,\Omega$ y $R_2 = 50\,\Omega$?



Solución: $\frac{dR}{dt} = 0.86\ {}^{\Omega}/_{s}$

3.2 Criterio de primera derivada, funciones crecientes y decrecientes.

En este capítulo se verá cómo se aplica la derivada para determinar el comportamiento de una función $y = f(x)$ en un intervalo I, es decir valores máximo y mínimo de $f(x)$, intervalos donde la función $f(x)$ es creciente y decreciente, intervalos donde la curva de $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo, entre otras, en donde lo anterior se aplica a casos de la vida real.

Por ejemplo, la gráfica de la Figura #1 fue trazada por cierto instrumento que mide y registra la temperatura superficial de superficies visibles en un sistema coordenado cartesiano, en donde las abscisas representan el tiempo (t) en segundos, mientras que las ordenadas representan las magnitudes de temperatura (T) en $°C$ medidas por el instrumento.

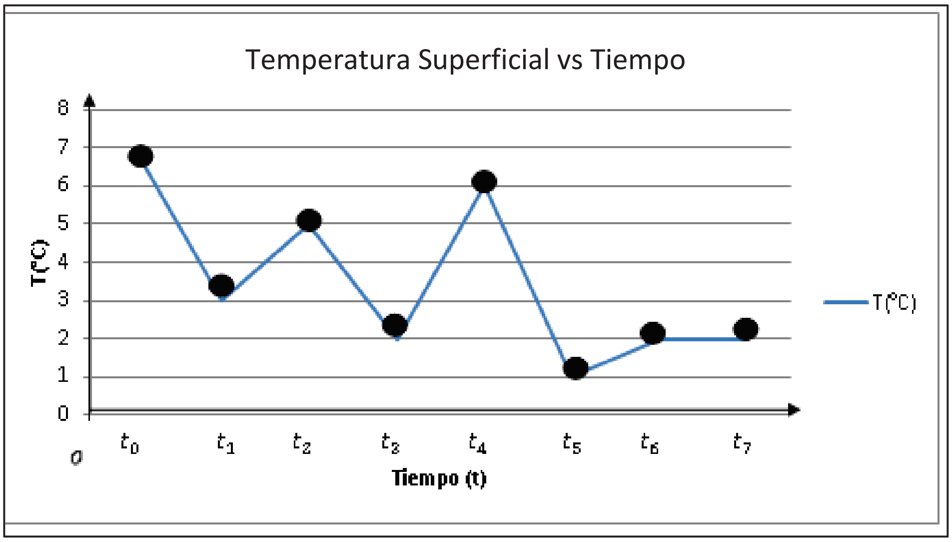


Figura 1

Analizando la gráfica de la Figura #1 se observa que durante el intervalo de tiempo de $[t_0, t_1]$ la temperatura de la superficie decrementa, mientras que en los siguientes intervalos de $[t_1, t_2]$ incrementa, de $[t_2, t_3]$ decrementa, de $[t_3, t_4]$ incrementa, de $[t_4, t_5]$ decrementa, de $[t_5, t_6]$ incrementa y $[t_6, t_7]$ se mantiene estable.
Si solamente se necesita conocer la temperatura en el intervalo cerrado de tiempo $[t_3,\ t_6]$, se observa que la temperatura de la superficie tiene el máximo valor en el instante del tiempo t_5 asi como su mínimo valor en t_5. Ahora analizando el intervalo cerrado de tiempo $[t_0, t_7]$ se tiene en el instante de tiempo t_0 el máximo y el mínimo en t_5.

En este caso, la temperatura (T) depende del tiempo (t) es decir $T\ =\ T(t)$ lo cual es una aplicación en la terminología de la función matemática $y = f(x)$.

Definición de función creciente y decreciente.

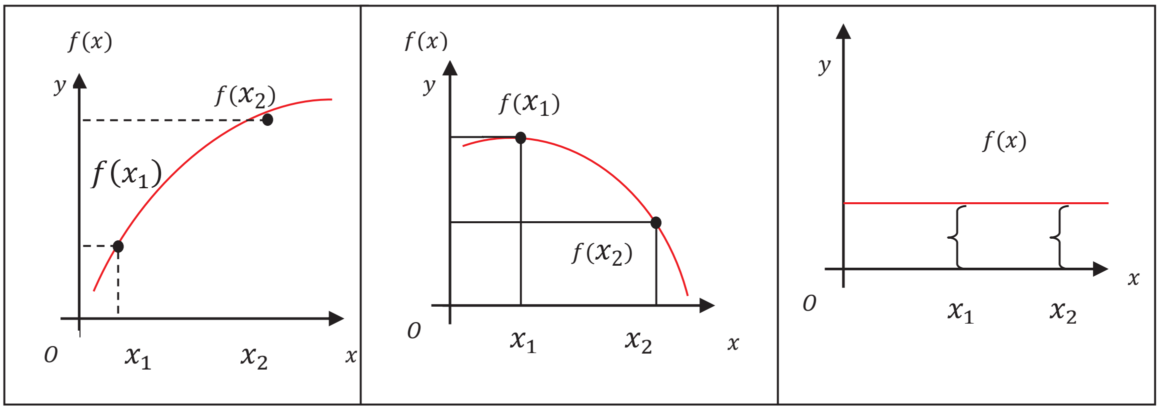
Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo I, y sean $x1$ y $x2$ dos valores que pertenecen a I, entonces:

- Si $x_1 < x_2$ la función $f(x)$ es creciente en I siempre que $f(x_1) < f(x_2)$.
- Si $x_1 > x_2$ la función $f(x)$ es decreciente en I siempre que $f(x_1) > f(x_2)$.
- Para todo valor de x_1 y x_2 la función $f(x)$ es constante en I si $f(x_1) = f(x_2)$.

En la figura 2 se muestra la definición anterior gráficamente.

Figura 2

- Función Creciente
- Función Decreciente
- Función Constante



En otras palabras, si una función $f(x)$ es creciente en un intervalo I, entonces cuando x aumenta, la gráfica de la función asciende, si una función $f(x)$ es decreciente en un intervalo I entonces su gráfica de la función desciende cuando x aumenta.

Considerando la definición anterior, en la Figura 1 se muestra que la gráfica de la temperatura (T)en función del tiempo (t) es creciente en los intervalos $[t_1, t_2]$, $[t_3, t_4]$, $[t_5, t_6]$, asimismo es decreciente en los intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_2, t_3]$, $[t_4, t_5]$, mientras la función es constante en el intervalo $[t_6, t_7]$.

Teorema Funciones crecientes y decrecientes

Sea $y = f(x)$ una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces:

- $f(x)$ es creciente en $[a, b]$ si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b).
- $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$ si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b).
- $f(x)$ es constante en $[a, b]$ si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Definición de valores máximos y mínimos.

Si $y = f(x)$, es una función definida en un intervalo I, tal que c es un valor de x que pertenece a I, entonces:

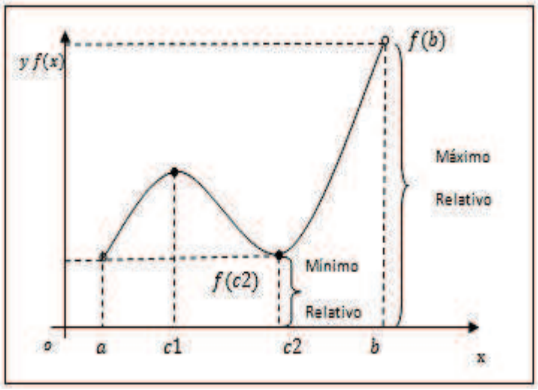
•Si $f(x) \leq f(c)$ entonces se dice que $f(c)$ es un valor máximo de $f(x)$ en I.

•Si $f(x) \geq f(c)$ entonces se dice que $f(c)$ es un valor mínimo de $f(x)$ en I.

Esta definición se aplica tanto para un intervalo cerrado como uno abierto, los valores máximos y mínimos también pueden darse en los puntos donde la gráfica tiene picos o saltos, o en los extremos del intervalo del dominio de la función dada.

Estos valores máximos y mínimos también se les llaman valores extremos de la función.

Las gráficas de las figuras 3 a) y 3 b) muestran los valores máximos y mínimos de una función en un intervalo cerrado y abierto respectivamente.



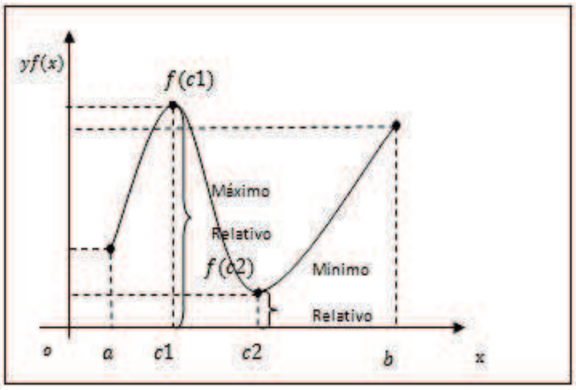


Figura 3 a) **Figura 3 b)**

Los valores extremos de una función $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ se les llama valor máximo absoluto o mínimo absoluto de $f(x)$, mientras en un intervalo abierto (a, b) se les llama valor máximo relativo o mínimo relativo de $f(x)$.

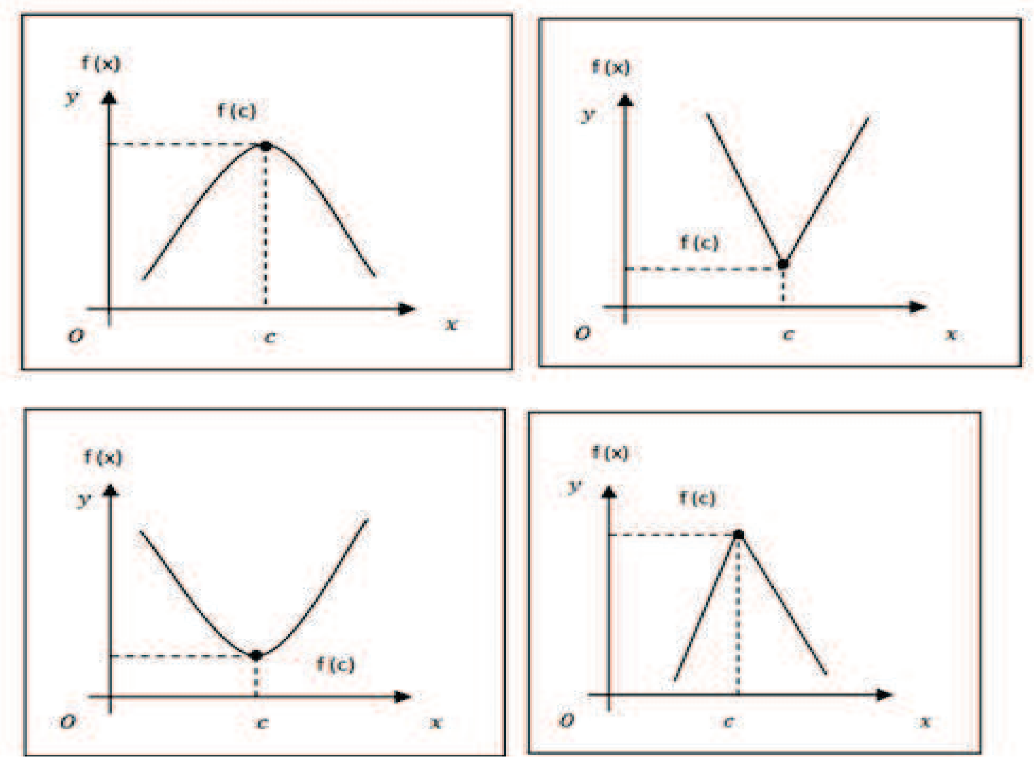
Nota 1: Al valor máximo relativo o mínimo relativo de una función $f(x)$ también se les llama valor máximo local o mínimo local de $f(x)$.

Para la figura 3 a) que es el caso de un intervalo cerrado, el valor máximo de la función se localiza en el extremo derecho del intervalo $x = b$, mientras que el valor mínimo se localiza en $x = c_2$, asimismo, para la figura 3 b) que es el caso de un intervalo abierto, el valor máximo de la función se localiza en $x = c_1$, mientras que el valor mínimo se localiza en $x = c_2$, cabe denotar que los valores máximos y mínimos en un intervalo abierto de una función no pueden localizarse en los extremos de dicho intervalo.

Una función $f(x)$ tiene un valor máximo y mínimo absoluto en un intervalo I, sin embargo no siempre tiene un mínimo o un máximo relativo en un intervalo I.

De una manera informal, se dice que un máximo relativo ocurre en una cima de la gráfica, así como un mínimo relativo ocurre en un valle de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo I en donde dicha cima o valle pueden ser en forma redondeada o pico, lo anterior se muestra en la figura 4.

Figura 4



Definición de Números Críticos de una función:

Si un número c pertenece al dominio de una función $f(x)$ tal que $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no está definida, entonces a este valor c se le llama número crítico de $f(x)$.

Procedimiento para determinar en dónde los intervalos son crecientes y decrecientes en una función $\boldsymbol{f(x)}$ en un intervalo $\boldsymbol{I}$.

- Encontrar los números críticos de $f(x)$ en I y utilizarlos para determinar los intervalos de prueba.
- Para un valor de prueba de cada uno de los intervalos, determinar el signo de la derivada de $f(x)$.
- En los intervalos prueba si $f'(x)$ es positiva entonces $f(x)$ es creciente, si $f'(x)$ es negativa entonces $f(x)$ es decreciente, y si $f'(x)$ es igual a cero entonces $f(x)$ es constante.

Nota 2: Existen funciones que solamente son crecientes o decrecientes en un intervalo dado.

Teorema en donde ocurren Máximos y Mínimos absolutos.

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, su valor máximo o mínimo absoluto puede ocurrir tanto en un número critico c que pertenezca al intervalo I o en alguno de los extremos de dicho intervalo.

Procedimiento para determinar los máximos y mínimos absolutos de una función.

- Encontrar los números críticos de $f(x)$ que pertenezcan al intervalo cerrado $[a, b]$.
- Se evalúa $f(x)$ para cada número crítico y para cada extremo que pertenezca al intervalo $[a, b]$.
- De estos valores evaluados de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, el más grande corresponde al valor máximo absoluto de $f(x)$ y el más pequeño corresponde al valor mínimo absoluto de $f(x)$.

Teorema en donde ocurren Máximos y Mínimos relativos.

Los valores máximo y mínimo relativos de una función $f(x)$ en un intervalo abierto I solamente ocurren en un número crítico, tal que si $f(c)$ es un máximo o un mínimo relativo, entonces c es un número crítico de $f(x)$.

Nota 3: No siempre en un número crítico c ocurre un máximo o mínimo relativo.

Del resultado del teorema de las funciones crecientes y decrecientes de f(x) se relaciona con el siguiente criterio.

Criterio de la primera derivada

Sea c un numero crítico de una función $f(x)$ que es continua en un intervalo abierto que contiene a c. Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo I, entonces el valor de la función $f(c)$ es:

- Si $f'(x)$ cambia de ser negativa a positiva es decir $f(x)$ cambia de ser decreciente a ser creciente en el número crítico c, entonces $f(x)$ tiene un valor mínimo relativo en $f(c)$.
- Si $f'(x)$ cambia de ser positiva a negativa es decir $f(x)$ cambia de ser creciente a ser decreciente en el número crítico c, entonces $f(x)$ tiene un valor máximo relativo en $f(c)$.
- Si $f'(x)$ es positiva o negativa en ambos lados del número crítico c es decir o es creciente o decreciente en todo el intervalo, entonces $f(c)$ no es un valor máximo ni mínimo relativo de $f(x)$.

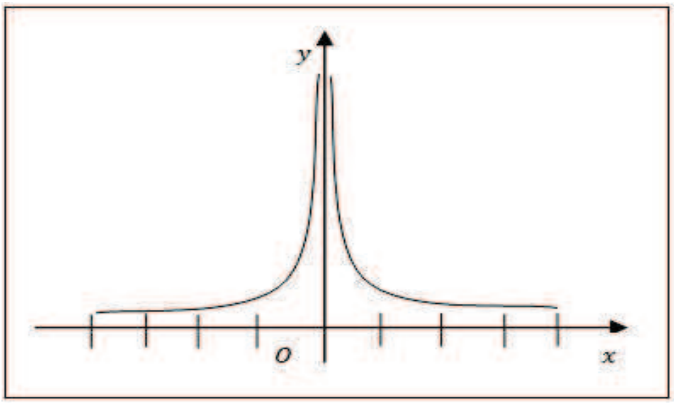
Ejemplo 1

En los intervalos siguientes, determinar si el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x^4}$ es creciente o decreciente y encontrar sus máximos y mínimos en cada intervalo:

$$[-1,3] \quad (-3,-1] \; (1,3) \; (1,3] \quad [1,3]$$

Solución: La función $f(x)$ no tiene números críticos en el intervalo $(-\infty,+\infty)$ ya que no existen valores de x en su dominio de la función que hacen $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no esté definida, (Ver figura 5).

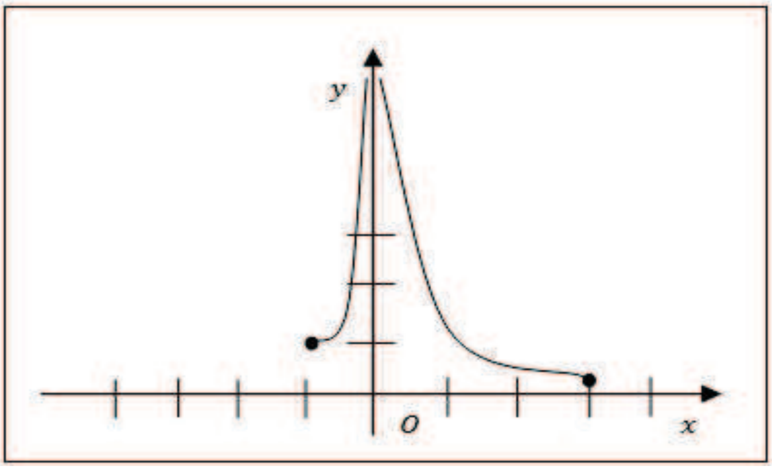
Figura 5



A partir de lo anterior, el comportamiento de la función $f(x)$ en los intervalos antes mencionados es el siguiente:

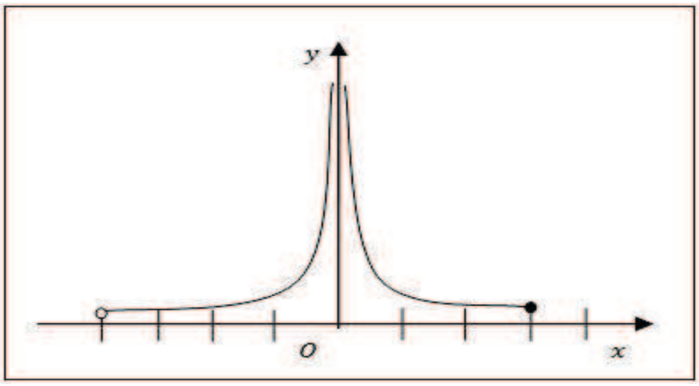
- En la figura 5.1 se muestra que la gráfica de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-1,3]$ no es creciente ni decreciente por haber una discontinuidad en $x = 0$ (asíntota), observando que la curva asciende para valores menores a cero y desciende para valores mayores a cero, asimismo se puede observar que la gráfica de $f(x)$ no tiene un valor máximo definido por la asíntota en este intervalo, sin embargo sí tiene un valor mínimo absoluto en $f(3) = 1/81$ (Extremo derecho del intervalo).

Figura 5.1



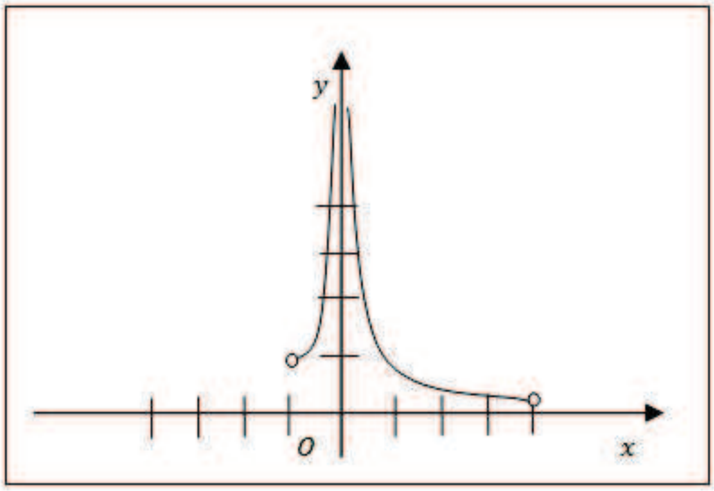
- En la figura 5.2 se muestra que la gráfica de $f(x)$ en el intervalo semiabierto por la izquierda $(-3,-1]$ la función es creciente, asimismo, la gráfica de $f(x)$ tiene un máximo absoluto en $f(-1) = 1$ (Extremo derecho del intervalo), sin embargo su valor mínimo no está definido ya que el extremo izquierdo del intervalo $x = -3$ es abierto.

Figura 5.2



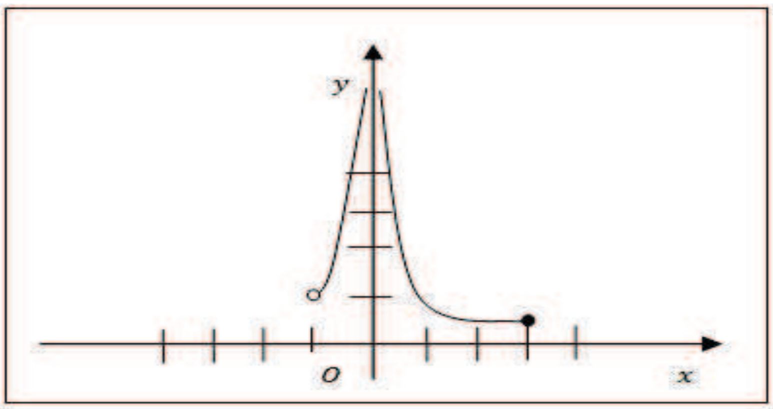
- En la figura 5.3 se muestra que la gráfica de $f(x)$ en el intervalo abierto $(1,3)$ la función es decreciente, sin embargo sus valores máximo y mínimo relativos no están definidos ya que ambos extremos del intervalo son abiertos.

Figura 5.3



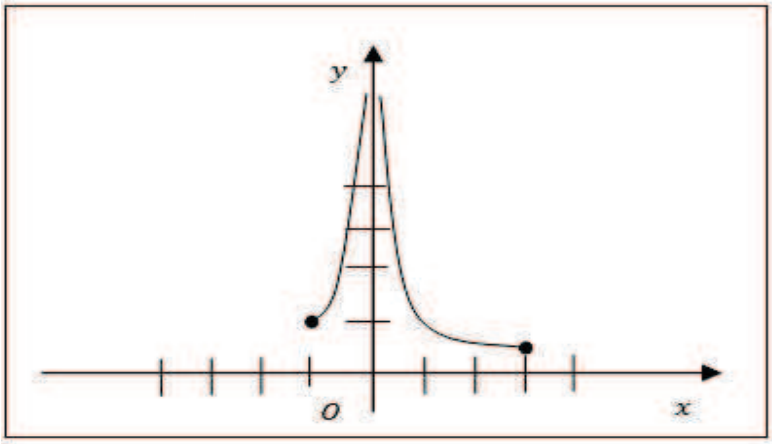
- En la figura 5.4 se muestra en la gráfica de $f(x)$ en el intervalo semiabierto por la izquierda $(1,3]$ la función es decreciente, asimismo la grafica de $f(x)$ no tiene un valor máximo definido ya que el extremo izquierdo del intervalo $x = 1$ es abierto, sin embargo sí tiene un valor mínimo absoluto en $f(3) = 1/81$ (Extremo derecho del intervalo).

Figura 5.4



- En la figura 5.5 se muestra en la gráfica de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[1, 3]$ es decreciente, su valor máximo absoluto es $f(1) = 1$ (Extremo izquierdo del intervalo) y su valor mínimo absoluto es $f(3) = 1/81$ (Extremo derecho del intervalo).

Figura 5.5



Ejemplo 2. Encontrar los valores extremos de $f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 9}$.

Solución. Considerando el procedimiento para determinar en donde los intervalos son crecientes y decrecientes en una función se empieza encontrando los números críticos que pertenezcan al dominio de $f(x)$, es decir, en los intervalos $(-\infty, -3)U\ (3, +\infty)$ por lo que se deriva $f(x)$ y se encuentran los valores de x que hacen $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no esté definida.

$f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 9}$ Se reescribe como $f(x) = (x^2 - 9)^{\frac{1}{2}}$

Derivada

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}}(2x)$

Simplificando $f'(x) = x(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{x}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt[2]{(x^2 - 9)}}$$

$x\ = ?$ para $f'(x) = 0$ $\frac{x}{\sqrt[2]{(x^2-9)}} = 0$

Despejando x se obtiene x = 0

$x = (0)(\sqrt[2]{(x^2 - 9)})$ $x = 0$

$x\ = ?$ para $f'(x)$ no esté definida $\frac{x}{\sqrt[2]{(x^2-9)}} \rightarrow \infty$

En este caso para que $f'(x) \rightarrow \infty$ es necesario que el denominador $\sqrt[2]{(x^2 - 9)} = 0$

Despejando x

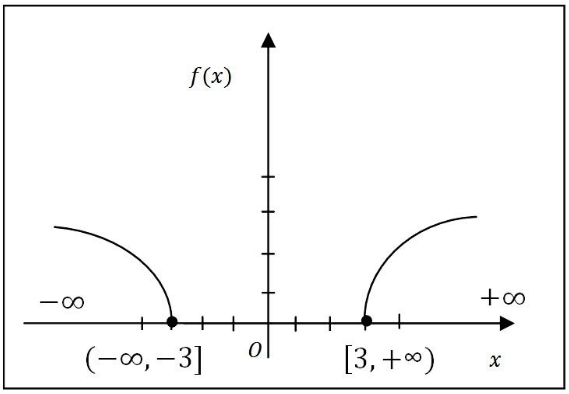
$\left(\sqrt[2]{(x^2-9)}\right)^2 = (0)^2$ $\qquad x^2-9=0$ $\qquad x^2=9$

$\sqrt[2]{x^2} = \pm\sqrt[2]{9}$ $\qquad x = \pm 3$

Los números críticos que pertenecen a los intervalos de su dominio de $f(x)$ son solamente $x = 3$ y $x = -3$, mientras que el valor de x = 0 no se considera ya que no pertenece al dominio de $f(x)$.

Se hace notar que los números críticos encontrados $x = 3$ y $x = -3$ conciden con los extremos cerrados de los intervalos del dominio de la función que son $(-\infty, -3]\ y\ [3, +\infty)$. Por lo anterior, analizando la gráfica de $f(x)$ (Ver figura 6) se observa que en el intervalo $(-\infty, -3]$ $f(x)$ es decreciente y tiene un valor extremo mínimo en $f(-3) = 0$, asimismo, en el intervalo $(3, \infty)$ $f(x)$ es creciente teniendo también un valor extremo mínimo en $f(3) = 0$.

Figura 6



Ejemplo 3. Calcular el valor máximo y mínimo absoluto de $f(x) = x^4 - 8x^2$ en el intervalo cerrado $[-1,\ 3]$ y trazar la gráfica de $f(x)$.

Solución. Considerando el procedimiento para determinar el valor máximo y mínimo absoluto en una función, se empieza encontrando los números críticos que pertenecen al intervalo $[-1,\ 3]$, por lo que se deriva $f(x)$ y se encuentran los valores de x que hacen $f´(x) = 0$ o $f´(x)$ no esté definida.

$f(x) = x^4 - 8x^2$

Derivada

$f´(x) = 4x^3 - 16x$

$x = ?$ para $f´(x) = 0$ $\qquad 4x^3 - 16x = 0$

Factorizando se tiene

$4x\,(x^2 - 4) \;=\; 0$

Se iguala a 0 cada factor despejando x.

$4x \;=\; 0$ $\qquad$ $x^2 - 4 \;=\; 0$ $\qquad$ $x = \;0$ $\qquad$ $x = \pm 2$

$x \;=?$ para $f\,'(x)$ no esté definida. En este caso no existe un valor de x que hace que $f\,'(x)$ no esté definida ya que el dominio de $f\,'(x)$ es $(-\infty, +\infty)$.

Por lo anterior los números críticos de $\boldsymbol{f(x)}$ son $\boldsymbol{x \;=\; -2}$, $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{x = 2}$.

Se evalúa $f(x)$ para cada número crítico que pertenezca al intervalo, así mismo para los valores extremos de dicho intervalo.

$f(x) = \;x^4 - \;8x^2$

$f(-1) = \;(-1)^4 - 8(-1)^2 = \;1 - 8(1) = \;1 - 8 = \;-7$ (Extremo izquierdo del intervalo).

$f(0) \;=\; (0)^4 - 8(0)^2 \;=\; 0 - 8(0) \;=\; 0$. (Numero crítico).

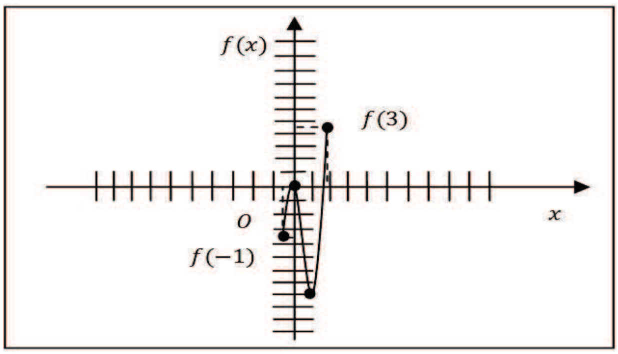
$f(2) = \;(2)^4 - 8(2)^2 \;=\; 16 - 8(4) = 16 - 32 = -16$ (Numero crítico).

$f(3) = \;(3)^4 - 8(3)^2 = \;81 - 8(9) = 81 - 72 \;=\; 9$ (Extremo derecho del intervalo).

De estos valores evaluados de $f(x)$ en el intervalo $[-1,\; 3]$, el más grande $f(3) \;=\; 9$ corresponde al valor máximo absoluto de $f(x)$ mientras que el más pequeño $f(2) \;=\; -16$ corresponde al valor mínimo absoluto de $f(x)$.

El número crítico -2 no se evaluó en la función $f(x)$ ya que no pertenece al intervalo cerrado $[-1, 3]$. (Ver figura 7).

Figura 7



Ejemplo 4. Determinar los intervalos en donde $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x - 3$ es creciente o decreciente y encontrar los valores máximo y mínimo relativos de $f(x)$ trazando su grafica.

Solución. Considerando el Procedimiento para determinar en donde los intervalos son crecientes y decrecientes en una función, se empieza encontrando los números críticos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ dominio de x, los cuales se utilizan para determinar los intervalos de prueba, por lo que se deriva $f(x)$ y se encuentran los valores de x que hacen $f'(x) = 0$ ó $f'(x)$ no esté definida.

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x - 3$

Derivada: $f'(x) = 6x^2 + 2x - 20$

$x = ?$ para $f'(x) = 0$ $\qquad\qquad 6x^2 + 2x - 20 = 0$

Se simplifica la ecuación anterior dividiendo ambos miembros de la ecuación entre 2 quedando.

$3x^2 + x - 10 = 0$

Factorizando el trinomio general se tiene

$(3x - 5)(x + 2) = 0$

Se iguala a 0 cada factor despejando x.

$(3x - 5) = 0 \qquad (x + 2) = 0$

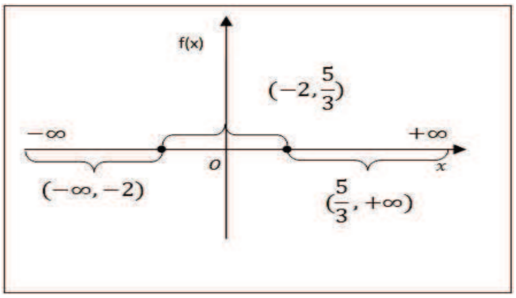
$x = \frac{5}{3} \qquad\qquad x = -2$

$x = ?$ para $f'(x)$ no esté definida. En este caso no existe un valor de x que hace que $f'(x)$ no esté definida ya que el dominio de $f'(x)$ es $(-\infty, +\infty)$.

Por lo anterior, los números críticos de $f(x)$ son $x = -2$, $x = \frac{5}{3}$

Con estos números críticos obtenidos se determinan los intervalos prueba (Ver figura 8)

Figura 8



Los cuales son: $(-\infty, -2) \quad (-2, \frac{5}{3}) \quad (\frac{5}{3}, +\infty)$

Para un valor prueba de cada uno estos intervalos, determinar el signo de $f'(x)$, por lo que en el intervalo $(-\infty, -2)$ se eligió como valor prueba $x = -3$, en el intervalo $(-2, \frac{5}{3})$ se eligió el valor $x = 0$, y en el intervalo $(\frac{5}{3}, \infty)$ se eligió el valor $x = 2$.

Nota 4: Se recomienda elegir valores prueba sencillos de sustituir en $f'(x)$.

Se sustituyen estos valores prueba en $f'(x)$.

$f'(-3) = 6(-3)^2 + 2(-3) - 20 = 54 - 6 - 20 = 28.$

$f'(0) = 6(0)^2 + 2(0) - 20 = 0 + 0 - 20 = -20.$

$f'(2) = 6(2)^2 + 2(2) - 20 = 24 + 4 - 20 = 8.$

Por el teorema de funciones crecientes y decrecientes antes mencionadas se puede concluir que en el intervalo de prueba $(-\infty, -2)$ $f'(x) > 0$ es decir $f(x)$ es creciente, en el intervalo prueba $(-2, \frac{5}{3})$ $f'(x) < 0$ es decir $f(x)$ es decreciente y en el intervalo prueba $(\frac{5}{3}, \infty)$, $f'(x) > 0$ es decir $f(x)$ es creciente.

Lo anterior se refleja en la siguiente tabla.

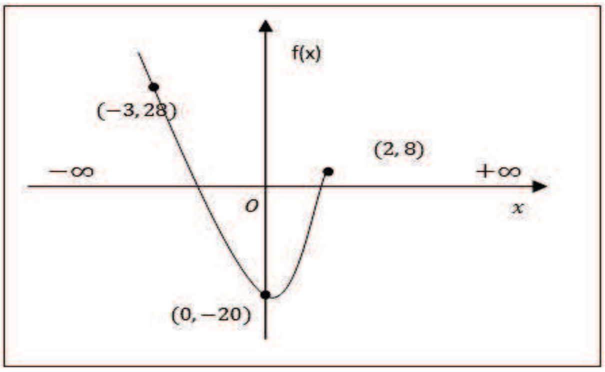
Intervalos	$(-\infty, -2)$	$(-2, \frac{5}{3})$	$(\frac{5}{3}, +\infty)$
Valores Prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 2$
Signo f'de prueba de x	$+$	$-$	$+$
Función	creciente	decreciente	creciente

Según el criterio de la primera derivada, como $f'(x)$ cambia de ser creciente a decreciente en el número crítico $x = -2$, es decir, $f'(x)$ cambia de ser positiva a negativa, por lo tanto la función tiene un valor máximo relativo en $f(-2) = -55$ mientras que la función cambia de ser decreciente a creciente en el número crítico $x = \frac{5}{3}$, es decir $f'(x)$ cambia de ser negativa a positiva, por lo tanto la función tiene un valor mínimo relativo en $f\left(\frac{5}{3}\right) = 0$. (Ver figura 9).

$f'(-2) = 6(-2)^2 + 2(-2) - 20 = 24 - 4 - 20 = 0.$

$f'\left(\frac{5}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{3}\right) - 20 = \frac{50}{3} + \frac{10}{3} - 20 = 0.$

Figura 9



Ejemplo 5. Determinar los intervalos en donde $f(x) = x^3 + \left(\frac{243}{x}\right)$ es creciente o decreciente y encontrar los valores máximo y mínimo relativos de $f(x)$ trazando su gráfica.

Solución: En este ejemplo se hace notar que la función dada es discontinua en $x = 0$, considerando lo anterior y el procedimiento para determinar en donde los intervalos son crecientes y decrecientes en una función se empieza encontrando los números críticos de $f(x)$ en los intervalos $(-\infty, 0)\ y (0, +\infty)$ de su dominio de x los cuales en conjunto con el valor de discontinuidad se utilizan para determinar los intervalos prueba, por lo que se deriva $f(x)$ y se encuentran los valores de x que hacen $f\,'(x) = 0$ o $f\,'(x)$ no esté definida.

$f(x) = x^3 + \left(\frac{243}{x}\right)$

Se reescribe la función: $f(x) = x^3 + 243x^{-1}$

Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 243x^{-2}$

Factor Común: $f'(x) = 3x^{-2}(x^4 - 81)$

Se aplica la ley de los exponentes: $f'(x) = \frac{3(x^4-81)}{x^2}$

$x = ?$ para $f\,'(x) = 0$ $\frac{3(x^4-81)}{x^2} = 0$

Se simplifica la ecuación multiplicando x^2 y el 3 dividiendo al lado derecho de la igualdad quedando.

$x^4 - 81 = 0$

Despejando: $x^4 = 81$ $x = \pm\sqrt[4]{81}$ $x = \pm 3$

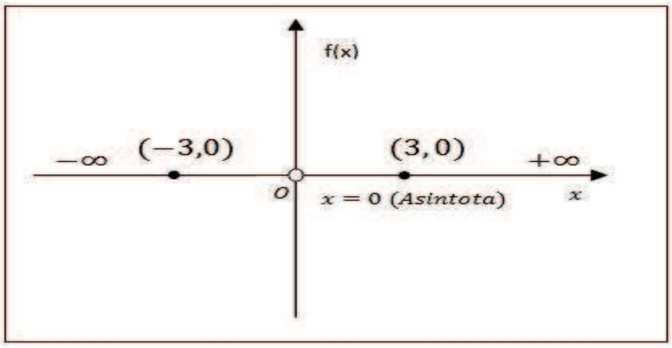
$x = ?$ para $f\,'(x)$ no esté definida $\frac{3(x^4-81)}{x^2} \to \infty$.

En este caso el denominador de la fracción x^2 se iguala a 0, quedando $x = 0$, pero como este valor es discontinuo de $f(x)$ no se considera como número critico.

Por lo anterior los números críticos de $f(x)$ son $x = -3, x = 3$

Con estos números críticos obtenidos y con el valor de discontinuidad de $f(x)$ se determinan los intervalos prueba (Ver figura 10).

Figura 10



Los cuales son: $(-\infty,-3)$ $(-3,0)$ $(0,3)$ $(3,+\infty)$

Para un valor prueba de cada uno de estos intervalos, se determina el signo de $f'(x)$, por lo que en el intervalo $(-\infty,-3)$ se eligió como valor prueba $x = -4$, en el intervalo $(-3,0)$ se eligió el valor $x = -1$, en el intervalo $(0,3)$ se eligió el valor $x = 1$ y en el intervalo $(3,+\infty)$ se eligió el valor $x = 4$.

Se sustituyen estos valores prueba en $f'(x)$.

$$f'(-4) = \frac{3((-4)^4-81)}{(-4)^2} = \frac{3(256-81)}{16} = \frac{525}{16}$$

$$f'(-1) = \frac{3((-1)^4-81)}{(-1)^2} = \frac{3(1-81)}{1} = -240$$

$$f'(1) = \frac{3((-1)^4-81)}{(-1)^2} = \frac{3(1-81)}{1} = -240$$

$$f'(4) = \frac{3((4)^4-81)}{(4)^2} = \frac{3(256-81)}{16} = \frac{525}{16}$$

Por el teorema de funciones crecientes y decrecientes antes mencionadas, se puede concluir que en el intervalo de prueba $(-\infty,-3)$ $f'(x) > 0$, es decir, $f(x)$ es creciente, en el intervalo prueba $(-3,0)$ $f'(x) < 0$, es decir, $f(x)$ es decreciente, en el intervalo prueba $(0,3)$ $f'(x) < 0$, es decir, $f(x)$ es decreciente y en el intervalo prueba $(3,+\infty)$ $f'(x) > 0$, es decir, $f(x)$ es creciente.

Lo anterior se refleja en la siguiente tabla.

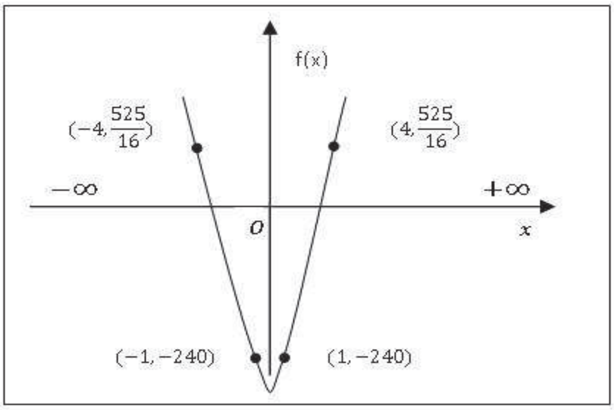
Intervalos	$(-\infty, -3)$	$(-3,0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Valores Prueba	$x = -4$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$
Signo f'de prueba de x	$+$	$-$	$-$	$+$
Función	creciente	decreciente	decreciente	creciente

Según el criterio de la primera derivada, como $f'(x)$ cambia de ser creciente a decreciente en el número crítico $x = -3$, es decir $f'(x)$ cambia de ser positiva a negativa, por lo tanto la función tiene un valor máximo relativo en $f(-3) = -108$ mientras que la función cambia de ser decreciente a creciente en el número crítico $x = 3$, es decir, $f'(x)$ cambia de ser negativa a positiva, por lo tanto la función tiene un valor mínimo relativo en $f(3) = 108$. (Ver figura 11).

$$f'(-3) = \frac{3((-3)^4-81)}{(-3)^2} = \frac{3(81-81)}{9} = 0$$

$$f'(3\,) = \frac{3((3)^4-81)}{(3)^2} = \frac{3(81-81)}{9} = 0$$

Figura 11



Ejemplo 6. Determinar los intervalos en donde $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ es creciente o decreciente y encontrar los valores máximo y mínimo relativos de $f(x)$ trazando su gráfica.

Solución: En este ejemplo se hace notar que la función dada es discontinua en $x = 0$, considerando lo anterior y el procedimiento para determinar en donde los intervalos son crecientes y decrecientes en una función, ahora empieza encontrando los números críticos de $f(x)$ en los intervalos $(-\infty, 0)\; y (0, \infty)$ de su dominio de x, así como el valor de discontinuidad, lo cual se utiliza para determinar los intervalos prueba, por lo que se deriva $f(x)$ y se encuentran los valores de x que hacen $f´(x) = 0$ o $f´(x)$ no esté definida. Reescribiendo la función $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. , la derivada: $f´(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

Simplificando: $f´(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$x = ?$ para $f´(x) = 0$ $\qquad -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0$

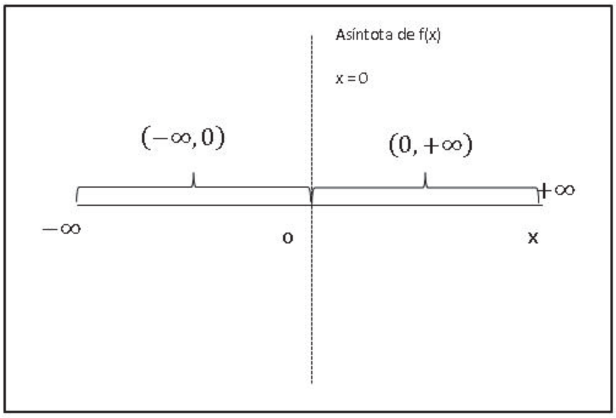
Despejando x de la ecuación se tiene que no existe ningún valor de x que satisfaga esta ecuación.

Ahora $x = ?$ para $f´(x) = no\ este\ definida$: $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \to \infty$

El denominador $3\sqrt[3]{x^4} = 0$ de donde se despeja x quedando $x = 0$.

Por lo anterior $f(x)$ no tiene ningún numero critico ya que el valor x = 0 pertenece a un punto de discontinuidad de la gráfica de $f(x)$, por lo que utilizando esta información se determinan los intervalos prueba. (Ver figura 12).

Figura 12



Los cuales son: $\qquad (-\infty, 0)\ (0, \infty)$

Para un valor prueba de cada uno de estos intervalos determinar el signo de $f´(x)$ por lo que en el intervalo $(-\infty, 0)$ se eligió como valor prueba $x = -1$ y en el intervalo $(0, \infty)$ se eligió el valor $x = 1$, se sustituyen estos valores prueba en $f´(x)$.

$$f´(-1) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3(1)} = -\frac{1}{3}$$

$$f´(1) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1)^4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3(1)} = -\frac{1}{3}$$

Por el teorema de funciones crecientes y decrecientes antes mencionadas se puede concluir que en el intervalo de prueba $(-\infty, 0)$ $f´(x) < 0$, es decir, $f(x)$

es decreciente y en el intervalo prueba $(0, \infty)$ también $f'(x) < 0$, es decir, $f(x)$ es decreciente.

Lo anterior se refleja en la siguiente tabla.

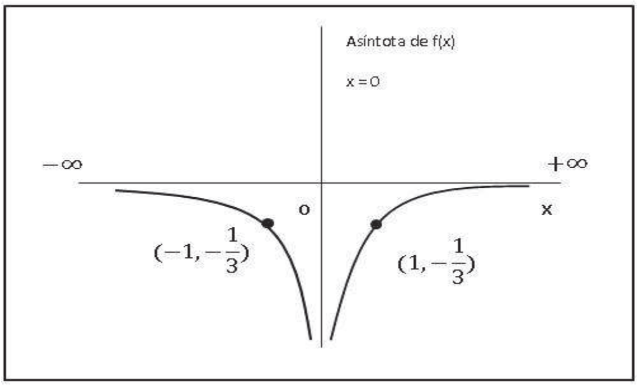
Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Valores Prueba	$x = -1$	$x = 1$
Signo f' de prueba de x	$-$	$-$
Función	decreciente	decreciente

Según el criterio de la primera derivada como $f'(x)$ es decreciente durante el primer intervalo $(-\infty, 0)$ y el segundo $(0, \infty)$, es decir $f'(x)$ es negativa en ambos lados del punto de discontinuidad, por lo tanto la función no tiene un valor máximo ni mínimo relativo de $f(x)$. (Ver figura 13).

$$f'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3(1)} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1)^4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3(1)} = -\frac{1}{3}$$

Figura 13



Ejercicio 3.2

I. En cada uno de los ejercicios del 1 al 10 encontrar los valores máximo y mínimo relativos de $f(x)$ y determine los intervalos en donde la función es creciente o decreciente y trazar la gráfica.

1) $f(x) = 4x^2 - 16x - 3$
2) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 5$
3) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 2$
4) $f(x) = x^3 - 6x^3 + 12x - 1$

5) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}}$
6) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2 - 12}$
7) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3)^2$
8) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
9) $f(x) = x^4 + \frac{128}{x}$
10) $f(x) = (x^2 + 4)^4$

II. En cada uno de los ejercicios del 11 al 15 encuentre los valores máximo y mínimo absolutos en el intervalo indicado.

11) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 1, [-1,8]$
12) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 1, [-4,0]$
13) $f(x) = (3x+1)^{\frac{4}{3}}, [-3,0]$
14) $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3, [-1,3]$
15) $f(x) = \operatorname{sen} 2\pi x, [0,1]$

Solución al Ejercicio 3.2

1) Decreciente $(-\infty, 2)$; creciente $(2, \infty)$; Mínimo relativo $f(2) = -19$
2) Creciente $(-\infty, -\frac{4}{3})$; decreciente $(-\frac{4}{3}, 1)$; creciente $(1, \infty)$; mínimo relativo $f(1) = -10$; máximo relativo $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{73}{27} = 2.7$
3) Decreciente $(-\infty, -2)$; creciente $(-2,0)$; decreciente $(0,2)$; creciente $(2, \infty)$; mínimo relativo $f(2) = -18$; máximo relativo $f(0) = -2$
4) Creciente $(-\infty, 2)$; creciente $(2, \infty)$; la función no tiene máximo ni mínimo relativo.
5) Decreciente $(-\infty, 0)$; decreciente $(0,8)$; creciente $(8, \infty)$; máximo relativo $f(0) = 0$; mínimo relativo $f(8) = -48$
6) Decreciente $(-\infty, -\sqrt[2]{3})$; decreciente $(-\sqrt[2]{3}, -3)$; creciente $(-3,0)$; decreciente $(0,3)$; creciente $(3, \sqrt[2]{3})$; creciente $(\sqrt[2]{3}, \infty)$; mínimos relativos $f(-3) = -12.98$ y $f(3) = -12.98$; máximo relativo $f(0) = 0$
7) Decreciente $(-\infty, 0)$; creciente $(0, \frac{3}{4})$; decreciente $(\frac{3}{4}, 3)$; creciente $(3, \infty)$; minimos relativos $f(0) = 0\ y\ f(3) = 0$; máximo relativo $f\left(\frac{3}{4}\right) = 4.15$
8) Decreciente $(-\infty, 0)$; decreciente $(0,1)$; creciente $(1, \infty)$; mínimo relativo $f(1) = -1$
9) Decreciente $(-\infty, 0)$; decreciente $(0,2)$; creciente $(2, \infty)$; mínimo relativo $f(2) = 80$; valor de discontinuidad $x = 0$
10) Decreciente $(-\infty, 0)$; creciente $(0, \infty)$; mínimo relativo $f(4) = 256$
11) Máximo absoluto $f(8) = 9$; mínimo absoluto $f(1) = -2$

12)Máximo absoluto $f(-3) = 17$; mínimo absoluto $f(0) = -1$

13)Máximo absoluto $f(-3) = 16$; mínimo absoluto $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

14)Máximo absoluto $f(3) = 21$; minimo absoluto $f(2) = -29$

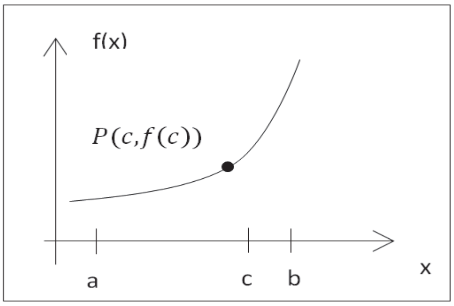
15)Máximo absoluto $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$; mínimo absoluto $f\left(\frac{3}{4}\right) = -1$

3.3 Concavidad y criterio de la segunda derivada

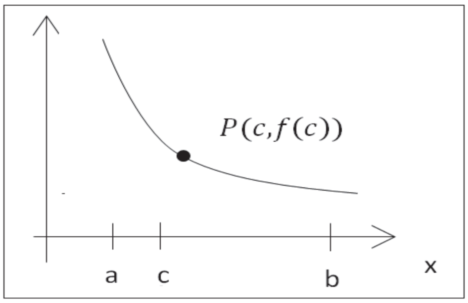
Para describir la gráfica de una función de x es útil saber el tipo de concavidad, (Ver figura 3.1), por lo que el signo de la segunda derivada de la función puede servir para averiguar la concavidad en los diferentes intervalos de su gráfica.

Figura 3.1

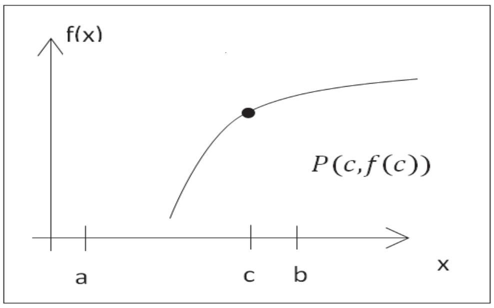
a) Concavidad hacia arriba



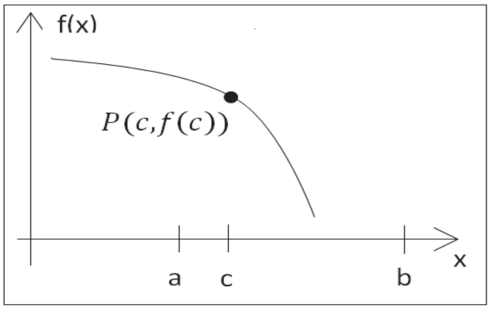
b) Concavidad hacia arriba



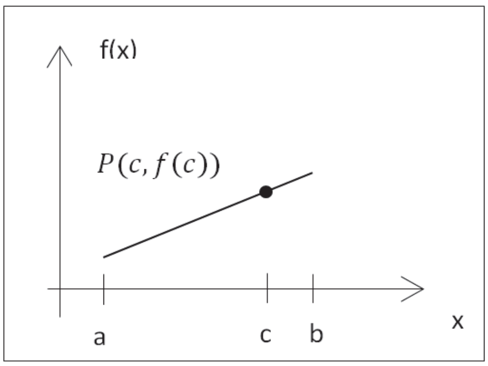
c) Concavidad hacia abajo



d) Concavidad hacia abajo



e) No tiene concavidad



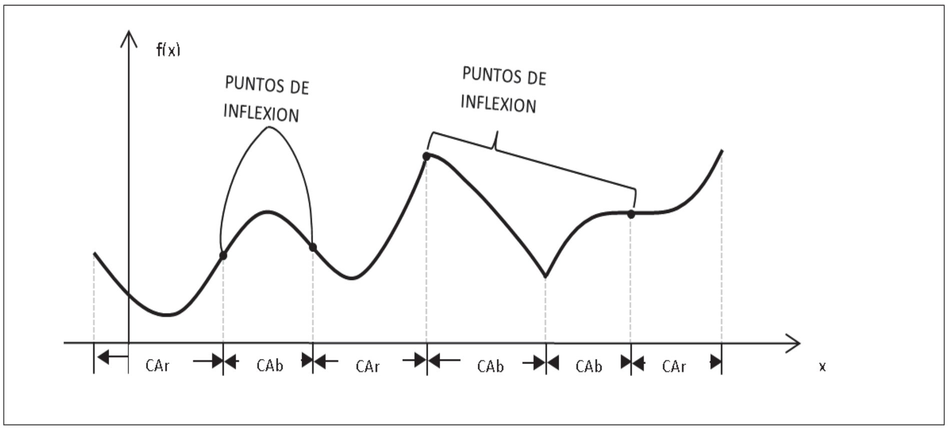
Teorema de prueba de la concavidad

Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c, tal que $f''(c)$ existe.

- Si $f''(c) > 0$, la gráfica de $f(x)$ tiene concavidad hacia arriba en $P(c, f(c))$.
- Si $f''(c) < 0$, la gráfica de $f(x)$ tiene concavidad hacia abajo en $P(c, f(c))$.

Definición de punto de inflexión

Si $f''(x)$ existe en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y $f''(x)$ cambia el signo en c, es decir la gráfica de $f(x)$ cambia de concavidad, entonces $P(c, f(c))$ en la gráfica de $f(x)$ se le llama punto de inflexión. (Ver gráfica 2).



Ejemplo 1. Determinar los intervalos en donde la gráfica de $f(x) = (x-1)^3$ tiene concavidad hacia arriba o hacia abajo, así como los puntos de inflexión y utilice también el criterio de la segunda derivada (siempre y cuando sea posible) para encontrar los extremos relativos de $f(x)$.

Solución

Sabiendo que el dominio de $f(x)$ son todos los números reales y considerando el procedimiento para determinar en donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo de una función se empieza encontrando la segunda derivada.

$f'(x) = 3(x-1)^2$

$f''(x) = 6(x-1)$

Se iguala a 0 $f''(x)$ y se despeja x

$6(x-1) = 0$

$x - 1 = 0$

$\boldsymbol{x = 1}$

Con este valor obtenido y sabiendo que $f''(x)$ es continua, se determinan los intervalos prueba que son; $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$, de donde se eligen como valores prueba de cada uno de estos intervalos, los valores $x = 0$ y $x = 2$ los cuales se sustituyen en $f''(x)$.

$f''(x) = 6(x-1)$

$f''(0) = 6(0-1)$

$f''(0) = -6$

$f''(2) = 6(2-1)$

$f''(2) = 6$

Por el teorema de prueba de concavidad antes mencionado se puede concluir que como $f''(0) < 0$ la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$, mientras que $f''(2) > 0$ la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, \infty)$, por lo que la gráfica tiene un punto de inflexión en $P(1{,}0)$ ya que en este punto cambia de concavidad.

Lo anterior se resume en la tabla siguiente:

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Valor prueba	$x = 0$	$x = 2$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
Concavidad	Hacia abajo	Hacia arriba

Ahora encontramos los números críticos de $f(x)$ para determinar los valores máximo y mínimo relativos, para lo anterior encontramos los valores de x que hacen $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x-1)^2$

$3(x-1)^2 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Utilizando el criterio de la segunda derivada sustituimos este número critico en

$f''(x)$.

$f''(x) = 6(x-1)$

$f''(1) = 6(1-1)$

$f''(1) = 0$

Por lo que el criterio no aplica ya que $x = 1$ es la abscisa del punto de inflexión antes mencionado. Por lo anterior $f(x)$ no tiene valores extremos relativos. (Ver figura 3)

Ejemplo 2: Determinar los intervalos en donde la gráfica de $f(x) = 3\cos 2x$ tiene concavidad hacia arriba o hacia abajo, así como los puntos de inflexión y utilice también el criterio de la segunda derivada (siempre y cuando sea posible) para encontrar los extremos relativos de $f(x)$.

Solución

El dominio de $f(x)$ son todos los números reales y recordando que la función coseno tiene un periodo de 2π, se puede restringir el análisis de la gráfica a cualquier intervalo de longitud 2π , por lo que se elige por comodidad el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Considerando el procedimiento para determinar en donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo de una función se encuentra $f''(x)$ la cual se iguala a 0 y despejando "x" se tiene:

$f'(x) = -6sen(2x)$

$f''(x) = -12\cos(2x)$

$-12\cos(2x) = 0$

$\cos(2x) = 0$

Para todos los números reales que pertenecen a su dominio $x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, $n =$ $todos\ los\ numeros\ reales\ y\ enteros$.

Para el caso de dicho intervalo elegido $(-\pi, \pi)$ los valores de "x" que pertenecen a dicho intervalo son:

Para $n = -1,\ x = -\frac{3}{4}\pi$

$n = 0, \qquad x = -\frac{\pi}{4}$

$n = 1, \qquad x = \frac{\pi}{4}$

$n = 2, \qquad x = \frac{3}{4}\pi$

Nota: Para todos los demás valores de n, el valor "x" no pertenece a dicho intervalo $(-\pi, \pi)$.

Con estos valores obtenidos y sabiendo que $f''(x)$ es continua en el intervalo $(-\pi, \pi)$ se determinan los intervalos prueba que son;

$$\left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right), \left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) y \ (\frac{3}{4}\pi, \pi)$$

De donde se eligen como valores prueba de cada uno de estos intervalos, los valores $x = -\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{2}{3}\pi$ los cuales se sustituyen en $f''(x)$.

$f''(x) = 12\cos(2x)$

$f''\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 12\cos\left[2\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$

$12\,cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = -6$

$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 12\cos\left[2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$12\,cos(-\pi) = -12$

$f''(0) = 12\cos[2(0)]$

$12\cos(0) = 12$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\cos\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$12\cos(\pi) = -12$

$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 12\cos\left[2\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$

$12\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -6$

Por el teorema de prueba de concavidad antes mencionado se puede concluir que como $f''\left(-\frac{2}{3}\pi\right) < 0$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right)$; en $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right)$; en $f''(0) > 0$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; en $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$; en $f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) < 0$,la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$.

Intervalos	$\left(-\pi, -\dfrac{3}{4}\pi\right)$	$\left(-\dfrac{3}{4}\pi, -\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$	$\left(\dfrac{3}{4}\pi, \pi\right)$
Valor prueba	$x = -\dfrac{2}{3}\pi$	$x = -\dfrac{\pi}{2}$	$x = 0$	$x = \dfrac{\pi}{2}$	$x = \dfrac{2}{3}\pi$
Signo $f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
Concavidad	Hacia abajo	Hacia abajo	Hacia arriba	Hacia abajo	Hacia abajo

Ahora encontramos los números críticos de $f(x)$ para determinar los valores máximos y mínimos relativos, para lo anterior encontramos los valores de x que hacen:

$f'(x) = 0$

$f'(x) = -6\, sen(2x)$

$-6\, sen(2x) = 0$

$sen(2x) = 0$

Para todos los números reales que pertenecen a su dominio $x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$, $n = todos\ los\ numeros\ reales\ y\ enteros$.

Ejercicio 3.3

En cada una de las funciones dadas, utilice el criterio de la segunda derivada (siempre y cuando sea posible) para encontrar los extremos relativos de $f(x)$, determine los intervalos donde la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encuentre las abscisas de los puntos de inflexión:

1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$

2) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$

3) $f(x) = 2\mathrm{x}^6 - 3\mathrm{x}^4 + 4$

4) $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^5 - 15\mathrm{x}^3 - 5$

5) $f(x) = 4sen\frac{x}{2}, [0,4\pi]$

Solución al Ejercicio 3.3

1) Cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$; cóncava hacia abajo $(-\frac{2}{3}, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; abscisas de punto de inflexión $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 0$

   Mínimo relativo $f(1)$=-2

2) Cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$; abscisas de punto de inflexión $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$; mínimos relativos $f(-1) = -1$, $f(1) = -1$; Máximo relativo $f(0) = +2$

3) Cóncava hacia arriba (-∞,-√3/5); cóncava hacia abajo (-√3/5, 0); cóncava hacia abajo (0,√3/5); cóncava hacia arriba (√3/5, ∞)

   Máximo relativo $f(0) = 4$; Mínimos relativos $f(-1) = 3$, $f(1) = 3$

   Abscisas de punto de inflexión x=-√3/5 y x=√3/5

4) Cóncava hacia abajo (-∞,-3/2√2); cóncava hacia arriba (-3/2√2, 0); cóncava hacia abajo (0, 3/2√2); cóncava hacia arriba (3/2√2, ∞);

   Máximo relativo $f(-3) = 157$

   Mínimo relativo $f(3) = -167$

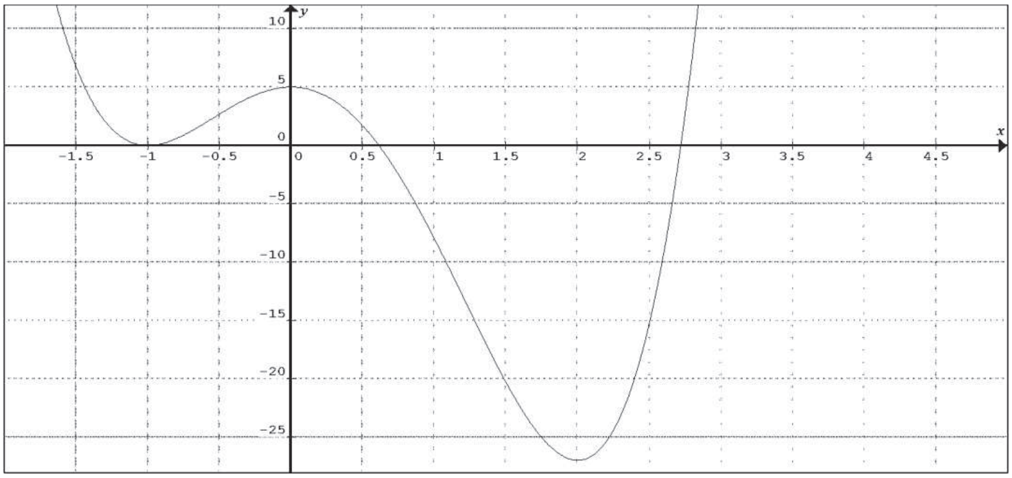
   Abscisas de punto de inflexión x=-3/2√2 y x=3/2√2

5) Cóncava hacia abajo $(0,2\pi)$; cóncava hacia arriba $(2\pi, 4\pi)$; máximo relativo en $f(\pi) = 4$; mínimo relativo en $f(3\pi) = -4$; Abscisa de punto de inflexión en $x = 2\pi$

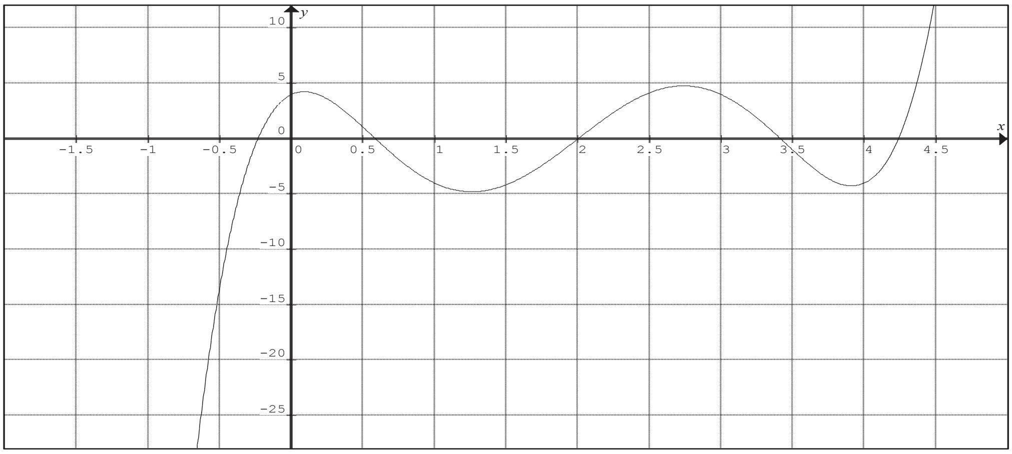
Actividad No. 13	Desarrollo	Individual – extra aula
Propósito: Análisis de gráficas de funciones.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga el argumento de las respuestas dadas.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos.		

Instrucciones: Para cada una de las gráficas dadas, determinar:

1. Máximos y mínimos locales.
2. Máximos y mínimos absolutos.
3. Intervalos donde la función es creciente.
4. Intervalos donde la función es decreciente.
5. Intervalos donde la función es cóncava hacia arriba.
6. Intervalos donde la función es cóncava hacia abajo.
7. Puntos de inflexión.



A



B

Nota: Utilizar valores aproximados al definir los intervalos y los puntos

Actividad No. 14	Desarrollo	Individual – extra aula
Propósito: Análisis de gráficas de funciones.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga los procedimientos correctos.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos		

Instrucciones: Bosqueje la gráfica de una función que cumpla con las propiedades dadas.

1) $f(0) = 1;\quad f(2) = 5;\quad f'(x) < 0\ para\ x < 0\quad y\quad x > 2;$
   $f'(x) > 0\quad para\quad 0 < x < 2$

2) $f'(-1) = f'(1) = 0,\quad f'(x) < 0\quad si\quad x < 1\quad y\quad x > -1$
   $f'(x) > 0\ \ si\ \ x < -1\quad ó\quad x > 1,\ \ f(-1) = 4,\ \ f(1) = 0$
   $f''(x) < 0\ \ si\ \ x < 0,\ \ f''(x) > 0\ \ si\ \ x > 0$

3.4 Optimización

Según el diccionario de la Real Academia, Optimizar consiste en planificar una actividad para obtener los mejores resultados, matemáticamente consiste en determinar los mejores valores posibles para las variables que intervienen en un proceso o sistema.

Por lo tanto, un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. Dicho de otra manera, se trata de encontrar el valor mínimo o máximo de una función de una variable.

Por ejemplo, si hablamos de costos, la intención es minimizarlos, pero si hablamos de utilidades lo que estaríamos buscando es de maximizarlas.

Los pasos a seguir para resolver un problema de optimización son:

1.- Determinar la función que se desea maximizar o minimizar mediante el análisis de la situación planteada.

2.- Derivar dicha función y encontrar los números críticos.

3.- Determinar los extremos locales para saber si la función es máxima o mínima.

Recordemos que para determinar si una función es máxima o mínima se utiliza el criterio de la segunda derivada, donde es máxima si la segunda derivada de la función es menor a cero para ese número crítico y es mínima si la segunda derivada de la función es mayor a cero para ese número crítico.

Ejemplo 1

La suma de un número y dos veces otro número da 24. ¿Qué números deben de elegirse para que el producto sea un máximo?

Solución: Hacer una ecuación donde consideremos "x" como el primer número, "y" como el segundo número y "P" como el producto que se quiere maximizar.

$$P = xy$$

Nos indica que la suma del primer número y el doble del segundo es igual a 24, por lo tanto:

$$x + 2y = 24$$

Despejando "x " nos queda:

$$x = 24 - 2y$$

Sustituyendo la segunda en la primera tendríamos que:

$$P = (24 - 2y)y$$

$$P = 24\,y - 2y^2$$

Lo derivamos para encontrar sus números críticos.

$$\frac{dP}{dy} = 24 - \ 4y$$

Igualamos a cero para encontrar su número crítico

$$0 = 24 - \ 4y$$

$$y = 6$$

Sustituyendo el valor de $y \ = \ 6$ para encontrar "x"

$$x = 24 - 2(6)$$

$$x = 12$$

Los dos números serian 6 y 12

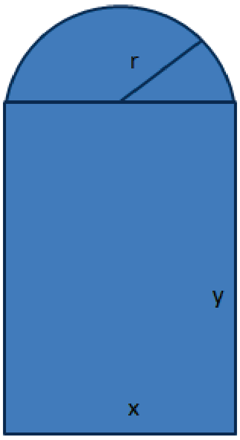
Derivamos por segunda vez para comprobar

$$\frac{d^2P}{dy^2} = -4$$

Como es menor que cero entonces es un máximo.

Ejemplo 2

Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de 10 m.



Considerando "A" como el Área que queremos maximizar y que "P" es el perímetro de la ventana entonces:

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r$$

$$P = x + 2y + \pi r$$

Considerando que $r = \frac{x}{2}$ y que P = 10

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2$$

$$10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y$$

Como tenemos el Área en función de dos variables y una ecuación, despejamos la “y” de la ecuación $10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y$ y nos quedaría:

$$y = 5 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x$$

Y la sustituimos en $A = xy + \frac{\pi}{8}x^2$

$$A = x\left(5 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x\right) + \frac{\pi}{8}x^2$$

Simplificando algebraicamente obtenemos A en función de “x”

$$A(x) = -\frac{\pi+4}{8}x^2 + 5x$$

$A(x)$ es la función que queremos maximizar, para lo cual necesitamos derivar y encontrar sus puntos críticos.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{8}(2x) + x^2(0) + 5$$

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 5$$

Igualamos a cero para encontrar sus puntos críticos

$$0 = -\frac{\pi+4}{4}x + 5$$

$$x = \frac{20}{\pi+4}$$

$A(x)$ sólo tiene un punto crítico.

Derivamos por segunda vez para comprobar que sea un máximo.

$$A''(x) = -\frac{\pi+4}{4}$$

$A''(x) < 0$ por lo que tiene un máximo local en $x = \frac{20}{\pi+4}$

Entonces el Área de la ventana es máxima cuando $x = \frac{20}{\pi+4}$

Por lo tanto, si:

$$y = 5 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x$$

Sustituyendo $x = \frac{20}{\pi+4}$

$$y = 5 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)\left(\frac{20}{\pi+4}\right)$$

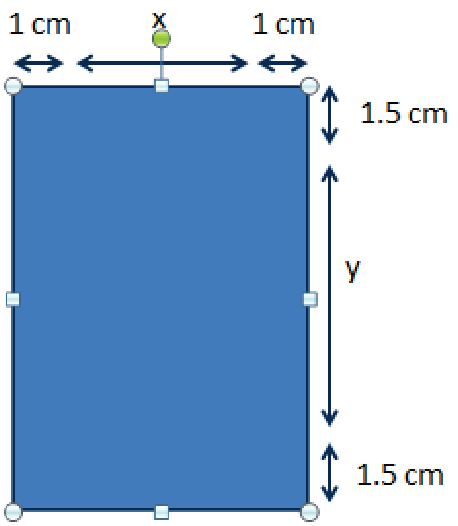
$$y = \frac{10}{\pi+4}$$

Concluyendo, podemos decir que cuando $x = \frac{20}{\pi+4}$m y cuando $y = \frac{10}{\pi+4}$ vemos que $y = \frac{2}{x}$

Ejemplo 3

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes de la página superior y la parte inferior de la página van a ser 1.5 cm y los márgenes de izquierda y derecha son 1 cm, ¿Cuáles serían las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?

Para resolver tenemos que tomar en cuenta que tenemos que minimizar el Área, por lo tanto establecemos nuestra ecuación primaria considerando



$$A = (x+2)(y+3)$$

El área impresa está determinada por:

$$xy = 24$$

Despejando la "x" nos quedaría $x = \frac{24}{y}$ y sustituyendo en la ecuación primaria nos quedaría como:

$$A = \left(\frac{24}{y} + 2\right)(y+3)$$

$$A = 30 + 2y + \frac{72}{y}$$

Debemos de tomar en cuenta que *y* debe de ser positiva, por lo cual solo nos interesan valores de A para $y > 0$. Para encontrar los puntos críticos derivamos con respecto a "*y*"

$$\frac{dA}{dy} = 2 - \frac{72}{y^2}$$

$$y^2 = 36$$

Los puntos críticos son para $y = 6$ y $y = -6$

No es necesario considerar el valor negativo porque está fuera de nuestro dominio. Utilizando el criterio de la primera derivada podemos observar que cuando *y* = 6 el Área es mínima, por lo tanto $x = 24/6$ y tenemos que:

$$y + 3 = 9\, pulgadas$$

$$x + 2 = 6\, pulgadas$$

Por lo tanto, las dimensiones de la página son de $\boldsymbol{6\, x\, 9\, pulgadas}$

Ejercicio 3.4

Resuelva los siguientes problemas optimizando sus resultados.

1. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

2. Si se cuenta con 1000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

3. Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 l. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

(Considerar que 1 l = 1 dm^3)

4. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

5. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?

6. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

7. Dos puntos A y B se encuentran en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400 tender 1 km de tubería en la playa y \$500 en el mar. Determine la forma más económica de trazar la tubería desde A hasta C (No necesariamente debe pasar por B).

8. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla. Considerar:
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad A_{esfera} = 4\pi r^2$

9. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos estos dos navíos?

10. A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 km al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 km/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 km/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

Soluciones al Ejercicio 3.4

1. $x = y = z = 10$
2. $V = \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{3}\right)^{3/2} \quad para \quad x = \sqrt{\frac{1000}{3}} \quad \& \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000}{3}}$
3. $r = \sqrt{\frac{600}{\pi}} \quad \& \quad h = 2r$
4. $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \quad \& \quad h = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} = 2r$
5. $A = 18 \quad para \quad x = 3 \quad \& \quad y = 6$
6. $Volumen\ máximo \quad V(2) = 128\ cm^3$
7. $El\ costo\ es\ de\ \$3{,}300\ pesos$
8. $r = h \approx 5.75882$
9. $t = \frac{3}{10}h$
10. $13 + \frac{12}{13}h$

Capítulo 4. Funciones de varias variables.

Conocimiento previo: Aplicar un software adecuado para graficar funciones de varias variables.

Actividad No.15	**Conocimiento previo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Graficar funciones de varias variables		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga las gráficas correctas de las funciones indicadas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

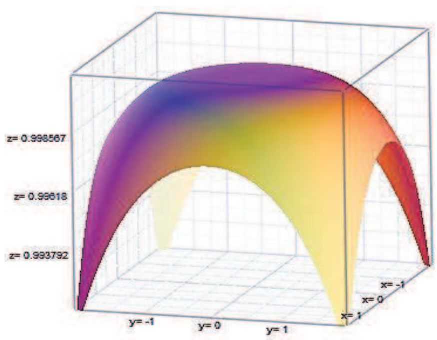
Instrucciones:

I. Coloca dentro del paréntesis la letra de la superficie que corresponde a cada una de las funciones dadas. Traza la superficie de las funciones restantes.

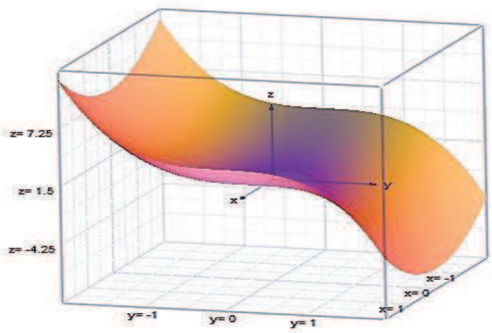
Funciones

1. $f(x,y) = x^2 + 3y^7$ ( )
2. $f(x,y) = cos^2x + y^2$ ( )
3. $f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$ ( )
4. $f(x,y) = x^2 - y^3$ ( )
5. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ ( )
6. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ ( )

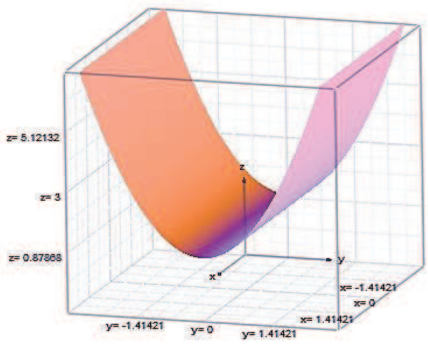
Superficie A



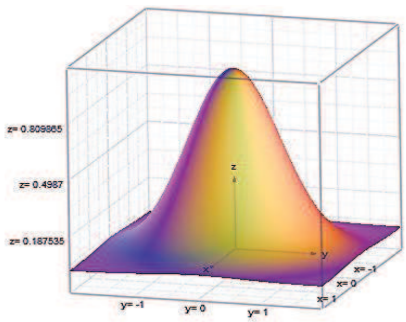
Superficie B



Superficie C



Superficie D



Introducción.

Hasta ahora se ha desarrollado el cálculo diferencial para funciones de una variable, sin embargo, existen ecuaciones que dependen de dos o más variables independientes (no relacionadas), por ejemplo: al calcular el alcance horizontal de un objeto que es golpeado a un ángulo θ sobre la horizontal, con una velocidad inicial v_0, éste está dado por:

$$R = \frac{1}{32}(v_0)^2 sen\ 2\theta$$

En donde:

R es el alcance (variable dependiente); v_0 y θ (variables independientes).

En este capítulo introducimos funciones de varias variables y extendemos la teoría del cálculo diferencial a esas funciones.

4.1 Dominio y rango.

Definición de una función de dos variables.

Una función de dos variables es una regla que asocia un número real $f(x, y)$ a cada par de números reales *(x,y)* del dominio de la función. Se expresa como:

$$z = f(x, y) = x + 3y$$

En donde, *"x" y "y"* son las variables independientes y *"z"* es la variable dependiente.

De la misma manera, una función de tres variables es una regla que asigna un número real $f(x, y, z)$ a cada triada de números reales (x, y, z) del dominio. Se expresan como:

$$w = f(x, y, z) = x^2 + 2yz + z^2$$

En donde, *"x", "y" y "z"* son las variables independientes y *"w"* es la variable dependiente.

De manera general, una función de *"n"* variables es una función $f(x_1, \dots, x_n)$ que asigna un número real a cada *n-planos* $(x_1, \dots, x_n)$ en un dominio en $\mathbb{R}^n$.

El **dominio** se define como el conjunto de todos los valores de las variables independientes para las cuales está definida la función.

El **rango o recorrido** es el conjunto de valores correspondientes al dominio de la variable dependiente.

Para determinar el dominio de cualquier función, es necesario:

1) Que los denominadores sean diferente de cero.
2) Que los radicandos de las raíces pares sean mayores a cero.
3) Conocer las limitaciones de las funciones trascendentales.

Para determinar el rango es importante hacer un análisis, ya sea matemático o gráfico de la función.

Ejemplo. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$\mathbf{1.}\, \boldsymbol{f(x,y) = \dfrac{2x}{y - x^2}}$

La función f está definida, a menos que haya división entre cero, lo que ocurre cuando $y - x^2 = 0$. El **dominio** f **es** entonces $\{\boldsymbol{(x,y)/y \neq x^2}\}$ que es todo el plano xy excepto los puntos en la parábola $y = x^2$.

$\mathbf{2.}\, \boldsymbol{g(x,y) = x\, lny}$

Recordando que ln*y* está definido solo para y>0. El **dominio** de *g* **es** entonces el conjunto $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{(x,y)/y > 0}\}$.

$\mathbf{3.}\, \boldsymbol{h(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

La función h está definida para $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, por lo tanto, el **dominio es:**

$\{\boldsymbol{(x,y)|1 \geq x^2 + y^2}\}$

$\mathbf{4.}\, \boldsymbol{f(x,y,z) = x\sqrt{y+z}\, e^{z/x}}$

Esta función está definida para $y + z \geq 0$ y para $x \neq 0$, por lo tanto, su **dominio es:** $\{\boldsymbol{(x,y,z)|y + z \geq 0\ y\ x \neq 0}\}$.

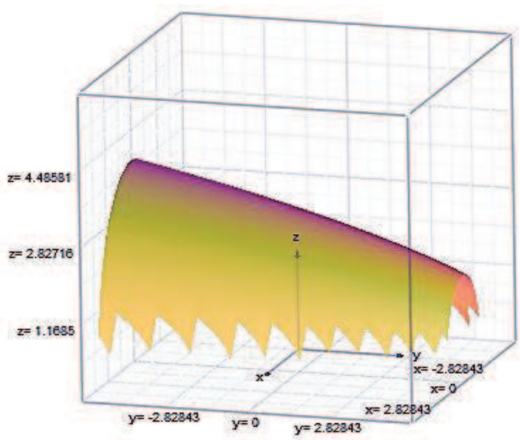
$\mathbf{5.}\, \boldsymbol{f(r,s) = \cos^{-1}(r,s)}$

La función $\cos^{-1}(r,s)$ solo está definida por valores entre -1 y 1, entonces el **dominio es:** $\{\boldsymbol{(r,s)|-1 \leq rs \leq 1}\}$.

Ejemplo: Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones.

$\mathbf{6.}\, \boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y}}$

La función *f* está definida únicamente para $9 - x^2 - y \geq 0$ o $y \leq 9 - x^2$, entonces el **dominio está dado por** $\{\boldsymbol{(x,s)\big|y \leq 9 - x^2}\}$



Para determinar el rango, observe que f es una función positiva y en consecuencia el **rango de f es el intervalo** $[\mathbf{0}, \infty)$**.**

$\mathbf{7.}\, \boldsymbol{g(x,y,z) = x\sqrt{y} + ln(z-1)}$

La función g está definida para $y \geq 0$ y para $z - 1 > 0$ o bien $z > 1$, por lo tanto el **dominio es** $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) | \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{z} > \mathbf{1}\}$.

El rango de g es la recta real$\mathbb{R}$**.**

$\mathbf{8.}\, \boldsymbol{f(x,y,z) = xz + e^y}$

$\boldsymbol{Dominio}$: $\boldsymbol{Todo\ espacio}\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

$\boldsymbol{Rango}$: $\boldsymbol{La\ totalidad\ de\ la\ recta\ Real}$

$\mathbf{9.}\, \boldsymbol{P(r,s,t) = \sqrt{16 - r^2s^2t^2}}$

$\boldsymbol{Dominio}$: $\{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) | -\mathbf{4} \leq \boldsymbol{rst} \leq \mathbf{4}\}$

$\boldsymbol{Rango}$: $\{\boldsymbol{\omega} | \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\omega} \leq \mathbf{4}\}$

Ejercicio 4.1

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = 12x - 5y$

2. $h(x,t) = \dfrac{1}{x+t}$

3. $g(x,y) = ln(4x^2 - y)$

4. $f(x,y) = sen\left({}^{y}/_{x}\right)$

5. $g(x,y) = \cos^{-1}(x+y)$

6. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

7. $f(x,y) = e^{x-y}$

8. $f(x,y,z) = \dfrac{cos\ (x+z)}{xy}$

9. $g(x,y,z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

10. $h(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{xy - z}$

Solución al ejercicio 4.1

1. **Todo el plano (x,y)**
2. $D = \{(x,t) \in R\ |x + t \neq 0\}$
3. $D: \{(x,y) \in R \middle| 4x^2 > y\}$
4. $D = \{(x,y) \in R | x \neq 0\}$
5. $D: \{(x,y) \in R | -1 \leq (x+y) \leq 1\}$
6. $D: \{(x,y) \in R \middle| x^2 + y^2 \geq 1\}$
7. $Todo\ el\ plano\ (x,y)$
8. $D: \{(x,y,z) \in R | x \neq 0,\ \ y \neq 0\}$
9. $D: \{(x,y,z) \in R \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$
10. $D: \{(x,y,z) \in R | xy - z \neq 0\}$

4.2 Evaluación de funciones

Para evaluar una función de dos o más variables es necesario que la n-ada indicada esté dentro de su dominio para que la función pueda estar definida.

Como se mencionó en la definición, este tipo de funciones deben estar expresadas en términos de sus variables independientes, para poder asignar los valores correspondientes al momento de evaluarlas.

Ejemplo: Evaluar cada una de las siguientes funciones.

1. $\boldsymbol{f(x,y) = x + yx^3 \ en \ (-1,4)}$

Se sustituye $x = -1; y = 4 \ en \ f \ y \ resulta:$

$$f(-1,4) = (-1) + (4)(-1)^3 = -1 + 4(-1) = -1 - 4 = \boxed{\mathbf{-5}}$$

2. $\boldsymbol{g(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \ en \ (3,-2)}$

$Si \ x = 3; y = -2 \ sustituyendo \ en \ la \ funcion, resulta:$

$$g(3,-2) = \frac{-2}{(3)^2 + (-2)^2} = \frac{-2}{9+4} = \boxed{-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{13}}}$$

3. $\boldsymbol{h(x,y) = x^2 + xsen \ y \ en \ (1, \pi/2)}$

$Si \ x = 1; y = \pi/2$

$$f(1, \pi/2) = (1)^2 + (1)sen \, \pi/2 = 1 + 1 = \boxed{\mathbf{2}}$$

4. $\boldsymbol{f(u,t) = e^{ut} - t \ en \ (ln3, 2)}$

$Si \ u = ln3; t = 2$

$$f(ln3,2) = e^{ln3(2)} - 2 = e^{2ln3} - 2 = e^{ln9} - 2 = 9 - 2 = \boxed{\mathbf{7}}$$

$\mathbf{5.}\, \boldsymbol{g(x,y) = arc\ tan\left(x/y\right)\ en\ (-1,1)}$

$Si\ x = 1; y = -1$

$g(1,-1) = arc\ tan\ \left(1/_{-1}\right) = arc\ tan(-1) = \boxed{\frac{7}{4}\pi}$

$\mathbf{6.}\, \boldsymbol{H(x,y,z) = 2x^2 - 3y + z\ en\ \left(\sqrt{2},-1,3\right)}$

$Si\ x = \sqrt{2}; y = -1; z = 3$

$H\left(\sqrt{2},-1{,}3\right) = 2\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3(-1) + 3 = 2(2) + 3 + 3 = \boxed{\mathbf{10}}$

$\mathbf{7.}\, \boldsymbol{f(r,s,t,u) = \frac{1-u^2}{s+t}\ en\ (1,-2,-1,1)}$

$Si\ r = 1; s = -2; t = -1; u = 1$

$f(1,-2,-1{,}1) = \frac{1-(1)^2}{-2-1} = \frac{0}{-3} = \boxed{\mathbf{0}}$

APLICACIÓN

La potencia eléctrica "P" está dada por: $P(V,R) = \frac{V^2}{R}$ en Watts, donde, "V" es el voltaje en Volts y "R" es la resistencia eléctrica en Ohms. Calcular la potencia si se aplican 300 volts a una resistencia de 3000 ohms.

Solución:

Si V = 300 V y R = 3000Ω, entonces, para calcular la potencia eléctrica se evalúa:

$$P(300{,}3000) = \frac{(300)^2}{3000} = \frac{90\ 000}{3\ 000} = \mathbf{30}\ \boldsymbol{Watts.}$$

Ejercicio 4.2

Evaluar cada una de las siguientes funciones en la n-ada indicada.

$\mathbf{1.}\, \boldsymbol{f(x,y) = x + 3x^2y\ \ f(1,2)}$

$\mathbf{2.}\, \boldsymbol{f(x,y) = \frac{xy^3-1}{x+y}\ \ f(-2,-2)}$

$\mathbf{3.}\, \boldsymbol{g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \ g(0,4,3)}$

$\mathbf{4.}\, \boldsymbol{h(x,y) = xe^y - x^2\ \ h(1,-ln2)}$

$5. G(\omega, z) = \dfrac{ln\ (1 - z\omega)}{1 + 2\omega}\quad G(1, 1 - e)$

$6. F(x, y, z) = 2x - 3y^2 + 4z\ F(-1, -2\sqrt{2}, 0)$

$7. g(x, y) = arc\ sen\left({}^{x}/{}_{y}\right)\quad g(1, 2)$

$8. H(x, y, z) = e^x\ lnyz\quad H(ln2, e, 1)$

$9. f(x, y) = x^2\ secy\ cosxy\quad f(1, \pi)$

$10. g(x, y) = senh\ xy\quad g(1, 1)$

Aplicación

Una empresa produce dos tipos de chocolate, blanco y oscuro, en donde “x” representa al chocolate blanco y “y” al chocolate oscuro. El costo $C(x, y)$ de material y mano de obra al producir un kg de ambos chocolates está dado por: $C(x, y) = 6x + 5y + 1200$ y el ingreso $I(x, y)$ está dado por: $I(x, y) = 10x + 8y$.

Si la utilidad $U(x, y)$ se calcula por: $U(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$. Determinar la utilidad obtenida si se producen y venden 300 kg de chocolate blanco y 500 kg de chocolate oscuro.

Solución al ejercicio 4.2

1. 7
2. $-\dfrac{15}{4}$
3. 5
4. $-\dfrac{1}{2}$
5. $\dfrac{1}{3}$
6. -26
7. $\dfrac{\pi}{6}$
8. 2
9. 1
10. 1.175
11. $\$\ 1500$

4.3 Límites

El concepto de límite de una sola variable es muy similar al de varias variables, es decir, cuando escribimos $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, se dice que cuando *(x,y)* se acerca a *(a,b)*, entonces *f(x,y)* se acerca a un número "*L*". En este caso *(x,y)* se puede aproximar a *(a,b)* por cualquier trayectoria que pase por *(a,b)*, de hecho, hay un número infinito de trayectorias diferentes que pasa por el punto (a,b).

Para muchas funciones se puede calcular el límite mediante una simple sustitución, pero cuando ésta sustitución da una forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$, entonces, se deben analizar las trayectorias.

Sin embargo, es difícil analizar todas las trayectorias (por ser infinitas), pero se puede aplicar el siguiente Teorema que permite generalizar éste número infinito de trayectorias.

Teorema:

Suponga que $|f(x,y) - L| \leq g(x,y)$ para todos los (x,y) en el interior de alguna circunferencia centrada en (a,b), con la posible excepción en (a,b). Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

Ejemplos:

Evaluar los siguientes límites, si es que existen:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x\,y - 1)$

Sustituyendo $x = 2$ y $y = 3$, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x\,y - 1) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = \mathbf{5}$$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} (sen\,xy - x^2y)$

Sustituyendo $x = 1$ y $y = \pi$, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} (sen\,xy - x^2y) = sen(\pi) - \pi = -\boldsymbol{\pi}$$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{2x^2y + xy}{xy^2 + 3y}$

Sustituyendo $x = 1$ y $y = -1$, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2y + xy}{xy^2 + 3y} = \frac{2(1)^2(-1) + (1)(-1)}{(1)(-1)^2 + 3(-1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1}$$

Al sustituir $x = 1$ y $y = 0$ resulta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo tanto, se hace el análisis de trayectorias, de la siguiente manera:

Considerando la trayectoria recta vertical a lo largo de $x = 1$ y calculando el límite cuando *"y"* tiende hacia *"0"*. Si $(x, y) \to (1,0)$ a lo largo de la recta $x = 1$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Considerando ahora que la recta horizontal $y = 0$, calculando el límite cuando *"x"* tiende hacia *"1"*, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{0}{x+0-1} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Como la función se acerca a los valores diferentes a lo largo de dos trayectorias diferentes al punto $(1,0)$, entonces, el límite **no existe**.

5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Como hicimos en ejemplos anteriores, comenzamos por examinar el límite a lo largo de varias trayectorias que pasan por $(0,0)$. (Si esos límites no coinciden, entonces el límite no existe y ¡no hay nada que hacer! Si coinciden, nos proporcionan una conjetura para el valor del límite). A lo largo de la trayectoria $x = 0$, tenemos:

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

A lo largo de la trayectoria $y = 0$, tenemos:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2+0} = 0$$

Además, a lo largo de la trayectoria $y = x$, tenemos:

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

En esta etapa, sabemos que si el límite existe, debe ser igual a 0. Podemos ensayar otras trayectorias, pero nuestro último cálculo proporciona una clave importante de que el límite existe efectivamente. En ese cálculo, después de simplificar la expresión quedo una potencia extra de x en el numerador que fuerza el limite hacia 0. Para demostrar que el límite $L = 0$, considere

$$|f(x,y) - L| = |f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right|$$

Se observa que si no hay termino y^2 en el denominador, podemos cancelar los términos x^2. Como $x^2 + y^2 \geq x^2$, tenemos:

$$|f(x,y) - L| = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2}\right| = |y|$$

Ciertamente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ y, por tanto, el teorema 2.1 nos da:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

6) *Calcule* $\boldsymbol{\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}$

Solución:

Primero, consideramos la trayectoria $x = y = 0$ (el eje z). Allí se tiene

$$\lim_{(0,0,z)\to(0,0,0)} \frac{0^2 + 0^2 - z^2}{0^2 + 0^2 + z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-z^2}{z^2} = -1$$

A lo largo de la trayectoria $x = z = 0$ (el eje y), se tiene

$$\lim_{(0,y,0)\to(0,0,0)} \frac{0^2 + y^2 - 0^2}{0^2 + y^2 + 0^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Como los límites a lo largo de esas dos trayectorias específicas no coinciden, el límite no existe.

Ejercicio 4.3

I. Calcule el limite indicado

1) $$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2+y^2}{x^2-2xy}$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}}{x+y}$$

3) $$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},1\right)} \frac{sen\, xy}{y+2}$$

II. Demuestre que el límite indicado no existe

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2}$$

Solución al ejercicio 4.3

1) $\frac{5}{8}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$

4.4 Continuidad

Como se mencionó en el capítulo 1, el concepto de continuidad está directamente relacionado con el límite de la función, ya sea de una, dos o más variables, es decir, se dice que la función es continua en un punto, siempre que el límite y el valor de la función coincidan.

Definición:

Suponga que $f(x, y)$ está definida en el interior de una circunferencia centrada en el punto (a, b). Decimos que *f* es continua en (a,b) si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Si $f(x, y)$ no es continua en (a, b) entonces (a, b) se le llama discontinuidad de f.

En la mayoría de los casos, determinar dónde es continua una función involucra determinar dónde no está definida.

Ejemplo:

Determinar si la función dada es continua o no en el punto indicado.

$$1)\ \boldsymbol{f(x,y) = \frac{x}{x^2-y}}\ \ \boldsymbol{en\ el\ punto\ (2,4)}$$

Solución:

Al evaluar $f(2,4)$ resulta que f no está definida, por lo tanto la función **es discontinua en (2,4).**

$$2)\ \boldsymbol{g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x(x^2+y^2)} & Si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & Si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$ **en (0,0)**

Primero se determina si la función está definida o no lo está en $(0,0)$, resulta que $g(0,0) = 0$

Al calcular el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x(x^2+y^2)}$ resulta que sí existe y su valor es 0. Por lo tanto la función $g(x, y)$ **sí es continua en $(0, 0)$.**

$$3)\ \boldsymbol{h(x,y) = \frac{3x+y}{x^2+y^2+1}\ \ en\ (1,2)}$$

Como $f(1,2) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \; h(x) = \frac{5}{6}$, entonces la función "*h*" **sí es continua en (1,2).**

Ejercicio 4.4

Determinar si la función dada es continua o no en el punto indicado.

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad en\ (3,4)$

2) $g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+y^2} \quad en\ (0,0)$

3) $h(x,y) = \dfrac{3x^2}{x^2+y^2} \; en\ (0,0)$

Solución al ejercicio 4.4

1) Sí es continua
2) Sí es continua
3) No es continua

4.5 Derivadas parciales

Para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes, se puede utilizar un procedimiento llamado derivación parcial y el resultado sería derivada parcial de f con respecto a una variable elegida.

Otra manera de entender las derivadas parciales es considerando que son la tasa de variación respecto a cada variable por separado.

Las derivadas parciales están definidas para funciones de cualquier número de variables. Se calcula la derivada parcial respecto a cualquiera de las variables considerando el resto de las variables como una constante.

Definición de las derivadas parciales de una función de dos variables.

Una función $f(x,y)$ de dos variables tiene dos derivadas parciales, que se denotan como $f_x \; y \; f_y$, definidas mediante los siguientes límites (siempre y cuando existan).

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Notación para las primeras derivadas parciales:

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y de denotan por:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad y \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b) \qquad y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b).$$

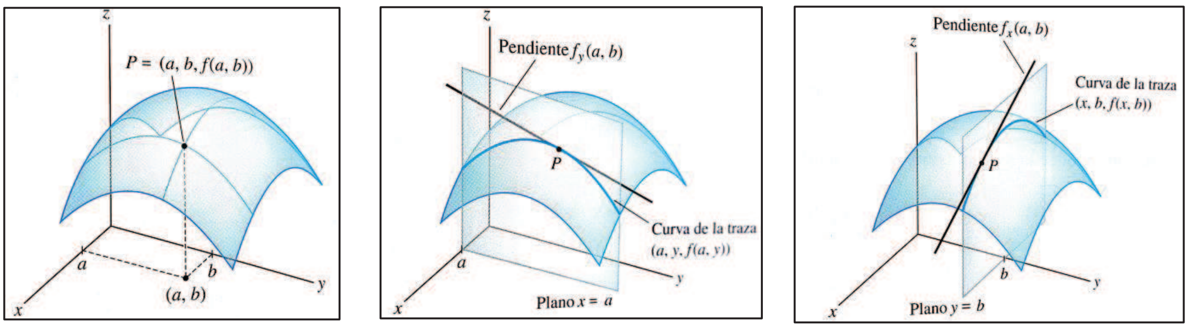
Procedimiento para la obtención de las derivadas parciales de primer orden:

Para obtener f_x se deriva ordinariamente, considerando a y como una constante.

Para obtener f_y se deriva ordinariamente, considerando a x como una constante.

Las derivadas parciales en $P = (a, b)$ son las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de las trazas verticales por el punto $(a, b, F(a, b))$ en la figura 1(a). Para calcular $f_x(a, b)$, se considera $y = b$ y se deriva en la dirección de x. Esto proporciona la pendiente de la recta tangente a la curva de la traza en el plano $y = b$ (fig 1(b)). De la misma manera$f_y(a, b)$ es la pendiente de la curva correspondiente a la traza en el plano vertical $x = a$ (figura 1(c)).

Figura 1



a) b) c)

Cuando queremos obtener la derivada parcial de primer orden de una función con respecto a x, lo que tenemos que hacer simplemente es derivar la función como si la única variable fuera x, considerando a la variable y como una constante.

De la misma manera obtendríamos la derivada parcial de primer orden con respecto a y, pudiendo decir que la obtención de las derivadas parciales es algo muy sencillo, pues aplicando las reglas las reglas básicas de derivación, considerando la variable que no nos interesa como una constante.

El concepto de derivada parcial se puede extender de manera natural a funciones de tres o más variables.

Si $w = f(x, y, z)$ entonces existen tres derivadas parciales, cada una de las cuales se forma considerando constantes las otras dos variables.

Podemos resumirlo de la siguiente manera:
Identifica y deriva solo los términos que tengan la variable que te interesa.
Si un término tiene más de una variable, tapa la que no te interesa, deriva y finalmente agrega lo que tapaste, de esa forma se evita aplicar la regla del producto.

Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas parciales de orden superior son las derivadas parciales de las derivadas parciales. Las derivadas parciales de segundo orden de f son las derivadas parciales de f_x y f_y

Por ejemplo si $z = f(x, y)$, entonces tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

2. Derivar dos veces con respecto a y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

4 Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

Los casos 3 y 4 se llamas derivadas parciales cruzadas.

Teorema de Clairaut: Igualdad de las parciales cruzadas.
Establece que las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir $f_{xy} = f_{yx}$, siempre que f_{xy} y f_{yx}, sean continuas.

De forma general, las derivadas parciales de orden superior se pueden calcular en cualquier orden. Por ejemplo, $f_{xyyz} = f_{yxzy}$ Si f es una función de x, y, z cuyas derivadas parciales de cuarto orden son continuas.

Ejemplos:

En los siguientes ejemplos se calculan las derivadas parciales de la función dada.

1. $Si\ f(x,y) = 3x^4 + 6y^2 - 5x^2y^3 + 1$. Encontrar: $\frac{\partial f}{\partial x}\ y\ \frac{\partial f}{\partial y}$

Solución:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12x^3 - 10xy^3 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 12y - 15x^2y^2$$

2. Hallar las derivadas parciales.
   a) Para hallar la derivada parcial de $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz$ con respecto a z, se consideran x y y constantes y se obtiene:

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial z}(xy + yz^2 + xz) = 2yz + x}$$

   b) Para hallar la derivada parcial de $f(x,y,z) = z\,Sen(xy^2 + 2z)$, con respecto a z, se consideran x y y constantes.
   Entonces, usando la regla del producto, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z}[z\,Sen(xy^2 + 2z] = z\frac{\partial}{\partial z}[Sen(xy^2 + 2z)] + Sen\,(xy^2 + 2z)\frac{\partial}{\partial z}[z]$$

$$= z[Cos\,(xy^2 + 2z)](2) + \ Sen\,(xy^2 + 2z)$$

$$= 2z\,Cos\,(xy^2 + 2z) + Sen\,(xy^2 + 2z)$$

   c) Para calcular la derivada parcial de $f(x,y,z,k) = \frac{x+y+z}{k}$ con respecto a k.

$$\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{x+y+z}{k}\right] = -\boldsymbol{\frac{x+y+z}{k^2}}$$

3. Para $f(x,y) = 7x^5 - 3x^4y^3 + y^7$. Encontrar las segundas derivadas parciales.

Solución:

$f_x(x,y) = 35x^4 - 12x^3y^3$
$f_{xx}(x,y) = 140x^3 - 36x^2y^3$
$f_{xy}(x,y) = -36x^3$

$f_y(x,y) = -9x^4y^2 + 7y^6$
$f_{yy}(x,y) = -18x^4y + 42y^5$
$f_{yx}(x,y) = -36x^3y^2$

Podemos observar que $f_{xy} = f_{fyx}$; esto se cumplirá siempre que las derivadas parciales de segundo orden sean continuas.

4. Calcule $f_z(0,0,1,1)$, donde:

$$f(x,y,z,w) = \frac{e^{xz+y}}{z^2+w}$$

Solución:

Aplicando la regla del cociente, considerando x, y y w como constantes:

$$f_z(x,y,z,w) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{xz+y}}{z^2+w}\right) = \frac{(z^2+w)\frac{\partial}{\partial z}e^{xz+y} - e^{xz+y}\frac{\partial}{\partial z}(z^2+w)}{(z^2+w)^2}$$

$$f_z(x,y,z,w) = \frac{(z^2+w)xe^{xz+y} - 2ze^{xz+y}}{(z^2+w)^2} = \frac{(z^2x+wx-2z)e^{xz+y}}{(z^2+w)^2}$$

$$f_z(0,0,1,1) = \frac{-2e^0}{(1^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$$

5. Una Ball Grid Array (BGA) es un microchip unido a una tarjeta de circuitos mediante pequeñas bolas de soldadura de radio R mm separadas una distancia L mm (figura 2). Los fabricantes realizan pruebas de fiabilidad de las BGA sometiéndolas a ciclos repetidos en los que la temperatura varía desde 0ºC hasta 100ºC en un periodo de 40 minutos. Según un modelo, el número medio N de ciclos antes que el chip falle es:

$$N = \left(\frac{2200R}{Ld}\right)^{1.9}$$

Donde d es la diferencia entre los coeficientes de expansión del chip y de la tarjeta de circuitos.

Encuentre el cambio en el número medio de ciclos cuando $R = 0.12\,mm$, $d = 10$ y $L = 0.4mm$.

Solución:

$$\frac{\partial N}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{2200R}{Ld}\right)^{1.9} = \left(\frac{2200R}{d}\right)^{1.9}\frac{\partial}{\partial L}L^{-1.9} = -1.9\left(\frac{2200R}{d}\right)^{1.9} L^{-2.9}$$

Evaluando $R = 0.12,\ d = 10\ y\ L = 0.4$:

$$\left.\frac{\partial N}{\partial L}\right|_{(L,R,d)=(0{,}4{,}0{,}12{,}10)} = -1.9\left(\frac{2200(0.12)}{10}\right)^{1.9} (0.4)^{-2.9} = 13.609.$$

6. El IMC (Indice de masa corporal) de una persona es $I = \frac{W}{H^2}$ donde W es el peso corporal (en Kg) y H es la altura del cuerpo (en metros). Estime el cambio en el IMC de un niño si (W, H) pasa de (40,1.45).

Solución:

$$\frac{\partial I}{\partial W} = \frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{W}{H^2}\right) = \frac{1}{H^2} \qquad \frac{\partial I}{\partial W} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{W}{H^2}\right) = \frac{-2W}{H^3}$$

En $(W, H) = (40{,}1.45),\ se\ tiene$:

$$\left.\frac{\partial I}{\partial W}\right| = \frac{1}{(1.45)^2} \approx 0.48 \qquad \frac{\partial I}{\partial H} = \frac{-2(40)}{(1.45)^3} \approx -26.24$$

Ejercicio 4.5

I.- En los ejercicios del 1 al 15 encuentre las primeras derivadas parciales:

1. $f(x,y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + 7x - 8$
2. $f(x,y) = 6x + 3y - 7$
3. $f(x,y) = 3xy + 6x - y^2$
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $f(x,y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$
6. $f(x,y) = (x^3 - y^2)^2$
7. $f(x,\varphi) = sen3\theta cos2\varphi$
8. $f(u,w) = tan^{-1}(\frac{u}{w})$
9. $f(x,y) = xcos(\frac{x}{y})$
10. $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2 \sec x}$
11. $f(x,y,z) = 4xyz + \ln(2xyz)$
12. $f(r,\theta,\varphi) = 4r^2sen\theta + 5e^r cos\theta sen\varphi - 2cos\varphi$
13. $f(x,y,z) = (y^2 + z^2)^x$
14. $f(r,s,v) = (2r + 3s)^{\cos v}$
15. $f(r,s,v,p) = r^3 \tan s + \sqrt{se^{v^2}} - v \cos 2p$

II.- En los ejercicios del 16 y 17 encuentre las derivadas parciales de orden superior que se indique:

16. Sea $W = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$ encuentre W_{xyz}
17.- Sea $u^4vt^2 - 3uv^2t^3$ encuentre W_{tuv}

III. Aplicación

18. La temperatura de sensación W mide el frío que siente una persona (basado en la tasa de pérdida de calor para la piel expuesta) cuando la temperatura exterior es de T ºC (con $T \leq 10$) y la velocidad del viento v en m/s ($v \geq 2$):

$$W = 13.1267 + 0.6215T - 13.947v^{0.16} + 0.486Tv^{0.16}$$

Calcular $\frac{\partial W}{\partial v}$ $en\ (T, v) = (-10{,}15)$

19. La temperatura de bochorno I es una medida de la sensación de calor cuando la humedad relativa es H (medida en porcentaje) y la temperatura real del aire es T(en grados Farenheit). Una fórmula aproximada para la temperatura de bochorno que es válida para (T, H) alrededor de $(90{,}40)$ es:

$$I(T, H) = 45.33 + 0.6845T + 5.758H - 0.00365T^2 - 0.1565HT + 0.001HT^2$$

a) Calcular la temperatura de bochorno (I) cuando la temperatura es de 95°F y la humedad relativa es de 50%.

b) ¿Qué derivada parcial informa sobre el aumento en la temperatura de bochorno (I), por grado incrementado en T, cuando $(T, H) = (95{,}50)$?

20. El volumen de un cono circular de radio r y altura h es $V = \frac{\pi}{3}r^2h$. Suponga que $r = h = 12cm$. ¿Qué incremento da lugar a un mayor aumento en V; un incremento de 1cm en r ó de 1cm en h?
Interprete la respuesta utilizando derivadas parciales.

Solución al Ejercicio 4.5

I.-

1. $f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + 7$ $\quad$ $f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy$

2. $f_x(x, y) = 6$ $\quad$ $f_y(x, y) = 3$

3. $f_x(x, y) = 3y + 6$ $\quad$ $f_y(x, y) = 3x - 2y$

4. $f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad$ $f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5. $f_x(x, y) = 8x^3y^3 - y^2$ $\quad$ $f_y(x, y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$

6. $f_x(x, y) = 6x^2(x^3 - y^2)$ $\quad$ $f_y(x, y) = -4y(x^3 - y^2)$

7. $f_\theta(\theta, \varphi) = 3cos\varphi cos3\theta$ $\quad$ $f_\varphi(\theta, \varphi) = -2sen3\theta sen2\varphi$

8. $f_u(u, w) = \frac{w}{u^2+w^2}$ $\quad$ $f_w(u, w) = \frac{-u}{w^2+u^2}$

9. $f_x(x, y) = \frac{-x}{y} sen\left(\frac{x}{y}\right) + \cos(\frac{x}{y})$ $\quad$ $f_y(x, y) = \frac{x^2}{y^2} sen\left(\frac{x}{y}\right)$

10. $f_x(x, y) = \frac{8x - y^2 \sec x \tan x}{2\sqrt{4x^2 - y^2 \sec x}}$ $\quad$ $f_y(x, y) = -\frac{ysec\,x}{\sqrt{4x^2 - y^2 \sec x}}$

11.
$$f_x(x, y, z) = 4yz + \frac{1}{x}$$
$$f_y(x, y, z) = 4yz + \frac{1}{y}$$
$$f_z(x, y, z) = 4yz + \frac{1}{z}$$

12.
$$f_r(r, \theta, \varphi) = 8rsen\theta + 5e^r cos\theta sen\varphi$$
$$f_\theta(r, \theta. \varphi) = 4r^2cos\theta - 5e^r sen\theta sen\varphi$$
$$f_\varphi(r, \theta, \varphi) = 5e^r cos\theta cos\varphi + 2sen\varphi$$

13.
$$f_x(x, y, z) = (y^2 + z^2)^x \ln(y^2 + z^2)$$
$$f_y(x, y, z) = 2xy(y^2 + z^2)^{x-1}$$
$$f_z(x, y, z) = 2xz(y^2 + z^2)^{x-1}$$

14.
$$f_r(r, s, v) = 2\cos v\,(2r + 3s)^{\cos v - 1}$$
$$f_s(r, s, v) = 3\cos v\ \ (2r + 3s)^{cosv-1}$$
$$f_v(r, s, v) = -sen\ v\ (2r + 3s)^{\cos v}\ln(2r + 3s)$$

15. $f_r(r,s,v,p) = 3r^2 \tan s$

$$f_s(r,s,v,p) = r^3 sec^2 s + \frac{e^{v^2}}{2\sqrt{s}}$$

$$f_v(r,s,v,p) = 2v\sqrt{s}e^{v^2} - \cos 2p$$

$$f_p(r,s,v,p) = 2v\ sen\ 2p$$

16. $W_x = 6xy^3z + 2y^4z^2$

$W_{xy} = 18xy^2z + 8y^3z^2$

$W_{xyz} = 18xy^2 + 16y^3z$

17. $W_t = 2u^4vt + 9uv^2t^2$

$W_{tu} = 8u^3vt - 9v^2t^2$

$W_{tuv} = 8u^3t - 18vt^2$

18. $\frac{\partial W}{\partial v} = -0.309$

19. $a)\ I(95{,}50) = 73{,}1913$

$b)\ \frac{\partial I}{\partial t} = 1.666$

20. $Un\ incremento\ de\ 1cm\ en\ r.$

4.6 Diferencial total

En el capítulo 2, se definió el diferencial a partir de $y = f(x)$, o bien, $dy = f'(x)dx$.

En esta sección se introduce el concepto de **diferencial total**, el cual se define como el cambio infinitesimal en una función de una o más variables, resultante de cambios infinitesimales en todas las variables.

En el caso de funciones de dos o más variables, la diferencial total se expresa como la suma de las derivadas parciales de la función con respecto a cada una de sus variables, es decir:

Si $z = f(x, y)$ y las diferenciales de las variables independientes "x" y "y" son: $dx = \Delta_x$ y $dy = \Delta_y$, entonces la diferencial total de la variable dependiente "z" es:

$$Dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

De manera similar:

Si $W = f(x, y, z), dx = \Delta_x; dy = \Delta_y \ y \ dz = \Delta_z$, entonces la diferencial total de "*W*" es:

$$DW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

Ejemplos:

Calcular el diferencial total para cada una de las siguientes funciones:

1. $x^3 + y^2$

$$Dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$Dz = 3x^2dx + 2ydy$$

2. $z = (x + y)sen\ 2x$

$$Dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$Dz = [(x + y)\cos 2x\ (2) + sen\ 2x\ (1)]\ dx + sen\ 2x\ dy$$

$$Dz = [2(x + y)\cos 2x + sen\ 2x]\ dx + sen\ 2x\ dy$$

3. $w = e^{\frac{yz^2}{x^3}}$

$$Dz = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$Dw = e^{\frac{yz^2}{x^3}} yz^2(-3x^{-4})dx + e^{\frac{yz^2}{x^3}}\left(\frac{z^2}{x^3}\right)dy + e^{\frac{yz^2}{x^3}}\left(\frac{2yz}{x^3}\right)dz$$

$$Dw = e^{\frac{yz^2}{x^3}}\left[\frac{-3}{x^4}dx + \frac{z^2}{x^3}dy + \frac{2yz}{x^3}dz\right]$$

Aplicación

Si $z = f(x, y)$, el error relativo o porcentual está dado por:

$$\text{Error relativo} = \frac{Dz}{z}$$

4. Suponer que la combadura [1] en una viga de longitud “L”, ancho “w”, y altura “h” está dada por:

$$S = 0.0004\left(\frac{L^4}{wh^3}\right)$$

Con todas las longitudes medidas en pulgadas.

Debido al clima y a otros factores, el fabricante garantiza solamente medida con tolerancia de error $L = 36 \pm 1$; $w = 2 \pm 0.4$; $h = 6 \pm 0.8$. Calcular:

a) La máxima variación de combaduras en la viga.
b) El máximo error relativo.

[1] *Combadura*: ligera curvatura convexa, que se realiza en una viga o cercha para compensar cualquier flecha prevista cuando soporte un peso.

Solución:

a) Primero se calcula la diferencial total DS a partir de $S = 0.0004\left(\frac{L^4}{wh^3}\right)$ y resulta:

$$DS = \frac{\partial s}{\partial L}dL + \frac{\partial s}{\partial w}dw + \frac{\partial s}{\partial h}dh$$

$$DS = \frac{0.0004(4L^3)}{wh^3}dL + \frac{0.004\,L^4}{h^3}(-1w^{-2})dw + \frac{0.0004\,L^3}{w}(-3h^{-4})dh$$

$$DS = \frac{0.0016\,L^3}{wh^3}dL - \frac{0.0004\,L^4}{w^2h^3}dw - \frac{0.0012\,L^3}{wh^4}dh$$

Sustituyendo los valores dados de:

$$L = 36 \qquad w = 2 \qquad h = 6$$

$$DS = \frac{0.0016\,(36)^3}{(2)(6)^3}dL - \frac{0.0004\,(36)^4}{(2)^2(6)^3}dw - \frac{0.0012\,(36)^3}{(2)(6)^4}dh$$

$$DS = 0.1728\,dl - 0.7776\,dw - 0.0216\,dh$$

Considerando todas las combinaciones de las diferenciales dadas: $dL = \pm$; $dw = 0.4$ y $dh = 0.8$ se genera la siguiente tabla, para encontrar la máxima variación de combaduras en la viga, sustituyendo en el DS

dL	dw	dh	DS
1	0.4	0.8	-0.155
-1	0.4	0.8	-0.501
1	-0.4	0.8	0.466
-1	-0.4	0.8	0.121
1	0.4	-0.8	-0.121
-1	-0.4	-0.8	0.155
1	-0.4	-0.4	0.501
-1	0.4	0.4	-0.466

La tabla muestra que el máximo valor de variación es $DS = \pm 0.501$

b) Para encontrar el máximo error relativo, se calcula "S", que está dada por:

$$S = 0.0004\left(\frac{L^4}{wh^3}\right) = \frac{0.0004\,(36)^4}{(2)(6)^3} = 1.555$$

Por lo tanto, para calcular el máximo error relativo se considera $DS = \pm 0.501$ y resulta:

$$Error\ relativo = \frac{DS}{S} = \frac{\pm 0.501}{1.555} = \pm 0.322 = \pm 32.2\%$$

5. El volumen de un cilindro de radio "r" y altura "h" es $V = \pi r^2 h$. Estimar el porcentaje de aumento en V, si tanto "r" como "h" aumentan ambas en un 2%:

Calculando DV resulta:

$$DV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$

$$DV = 2\pi rh\, dr + \pi r^2 dh$$

Se divide la ecuación anterior entre "V" ya que se pide estimar el error porcentual del volumen.

$$\frac{DV}{V} = \frac{2\pi rh}{\pi r^2 h}\ dr + \frac{\pi r^2}{\pi r^2 h}dh$$

Simplificando

$$\frac{DV}{V} = \frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

Como $\frac{dr}{r} = \frac{dh}{h} = 2\%$, sustituyendo resulta.

$\frac{DV}{V} = 2(2) + 2 = 6\%$ de error porcentual en el volumen del cilindro.

6. La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en un círculo está dada por $a = \frac{V^2}{r}$, donde "v" es la velocidad y "r" es el radio del círculo. Aproximar el error porcentual máximo al medir la aceleración debido a errores de 2% en "v" y 3% en "r"

Calculando Da resulta:

$$Da = \frac{da}{dv}dv + \frac{da}{dr}dr$$

$$Da = \frac{2v}{r}dv + v^2(-r^{-2})dr$$

$$Da = \frac{2v}{r}dv + \frac{v^2}{r^2}(-r^{-2})dr$$

Se divide la ecuación anterior entre "a" para determinar el error porcentual $\frac{Da}{a}$

$$\frac{Da}{a} = \frac{\frac{2v}{r}}{\frac{v^2}{r}}dv - \frac{\frac{v^2}{r^2}}{\frac{v^2}{r}}dr$$

Simplificando:

$$\frac{Da}{a} = \frac{2dv}{v} - \frac{dr}{r}$$

Para que resulte el máximo error porcentual, se debe considerar que: $\frac{Dv}{v} = 2\%$ y $\frac{Dr}{r} = -3\%$, sustituyendo resulta:

$\frac{Da}{a} = 2(2) - (-3) = 4 + 3 = 7\%$ es el máximo error porcentual al medir la aceleración.

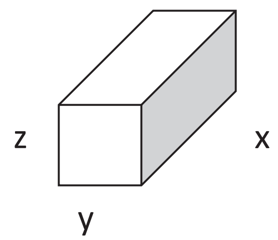
Ejercicio 4.6

I. En los ejercicios de 1 al 7, hallar el diferencial total.

1) $z = 3xy^2 - 2x^2y + 5$
2) $z = \ln xy^2$
3) $z = x^2e^{xy}$
4) $z = \frac{x+y}{x-2y}$
5) $w = x\ sen\ y + y\ cosxz$
6) $w = x^2yz^2 + tan\ y^2z$
7) $w = ye^{xz} + xyz$

II. Aplicación. Análisis de errores

8) El error producido al medir cada uno de los lados de una caja rectangular es de ±0.1 cm. Las dimensiones de la caja son $x = 40\ cm$, $y = 20\ cm$ y $z = 30\ cm$, como se muestra en la figura. Utiliza DV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.



9) En un péndulo simple de longitud L el periodo está dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Un péndulo se cambia de una zona en donde la gravedad es de 32.09 pies/s^2 a otra en donde cambia a 32.23 pies/s^2. Debido al cambio en la temperatura, la longitud del péndulo cambia de 2.5 pies a 2.48 pies, aproximar el cambio del período en el péndulo.

10) El radio "r" y la altura "h" de un cono circular recto se miden con posibles errores de 3% y 2% respectivamente. Aproximar el máximo error porcentual posible al medir el volumen. Considerar que el volumen del cono está dado por: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Soluciones al ejercicio 4.6

1) $Dz = y(3y - 4x)dx + 2x(3y - x)dy$
2) $Dz = \left(\frac{2}{x}\right)dx + \left(\frac{2}{y}\right)dy$
3) $Dz = xe^{xy}(xy + 2)dx + x^3e^{xy}dy$
4) $Dz = \left[\frac{-3y}{(x-2y)^2}\right]dx + \left[\frac{3x}{(x-2y)^2}\right]dy$
5) $Dw = (sen\, y - yz\, sen\, xz)dx + (xcos\, y + cos\, xz)dy - xy\, sen\, xz\, dz$
6) $Dw = (2xyz^2)dx + (x^2z^2 + 2yz\, sec^2 y^2z)dy + (2x^2yz + y^2 tan\, y^2z)dz$
7) $Dw = yz(e^{xz} + 1)dx + (e^{xz} + xz)dy + xy(e^{xz} + 1)dz$
8) $dv = 260\ cm^3$; error relativo = 1.08%
9) $DT = -0.01\ s$
10) $\frac{dv}{v} = 8\%$

4.7 Regla de la cadena

En el capítulo 2, se definieron las fórmulas para derivar diferentes tipos de funciones, las cuales se pueden demostrar por medio de la regla de la cadena, aplicando un cambio de variable.

Por ejemplo, en la función $y = (3x + 2)^6$ si $u = 3x + 2$ la función toma la forma de $y = u^6$ y al derivarla con respecto a *"x"* se aplica la regla de la cadena y resulta que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

En este tema se abordará la regla de la cadena, de manera similar, pero en funciones de dos o más variables.

Si $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, En varias ocasiones una función es de dos o más variables, las cuales a su vez dependen de una tercera variable.

Para encontrar la razón de cambio de la función respecto a esta última variable, se utiliza la regla del producto.

Por ejemplo, la producción de una fábrica depende del capital invertido y del tamaño de la fuerza de trabajo, pero ambos se modifican en el tiempo.
Por esta razón, la producción depende en última instancia del tiempo.

Si se tiene la función de dos variables $z = f(x, y)$ de tal manera que x y y son a su vez funciones que dependen de la variable t, entonces la derivada de z respecto a t se obtiene de la manera siguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplo 1.

Sean $w = u^3 + e^{2v}$, $u = xy^2$ y $v = x^3 seny$. Encuentre $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Solución:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (3u^2)(y^2) + (2e^{2v})(3x^2 seny) = 3u^2y^2 + 6e^{2v}x^2 seny$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (3u^2)(2xy) + (2e^{2v})(x^3 \cos y) = 6u^2xy + 2e^{2v}x^3 \cos y$$

Si deseamos expresar estas derivadas parciales en términos de "x" y "y" solamente, podemos hacerlo sustituyendo xy^2 en lugar de u y $x^3 seny$ en lugar de v.

Ejemplo 2:

Suponga que la producción de una empresa se modela mediante la función de **producción de Cobb-Douglas**, $P(k,l) = 20k^{\frac{l}{4}}l^{\frac{3}{4}}$, donde k mide el capital (en millones de dólares) y l mide la fuerza laboral (en miles de trabajadores). Suponga que $l = 2$; y $k = 6$; la fuerza laboral está creciendo a razón de 20 trabajadores por año y el capital está creciendo a razón de $400 000 dólares por año. Determine la razón de cambio de la producción.

Solución:

Suponga que $g(t) = P(k(t), l(t))$. Por la regla de la cadena tenemos:

$$g'(t) = \frac{\partial P}{\partial k}k'(t) + \frac{\partial P}{\partial l}l'(t).$$

Observe que $\frac{\partial P}{\partial k} = 5k^{-3/4}l^{3/4}$, $\frac{\partial P}{\partial l} = 15k^{1/4}l^{-1/4}$. Con $l = 2$, $k = 6$, esto nos da

$$\frac{\partial P}{\partial k}(6,2) \approx 2.1935, \ \ y \frac{\partial P}{\partial l}(6,2) \approx 19.7411.$$

Como k se mide en millones de dólares y l se mide en millones de trabajadores, tenemos: $k'(t) = 0.4$, $l'(t) = -0.02$. Por la regla de la cadena tenemos ahora

$$g'(t) = \frac{\partial P}{\partial k}k'(t) + \frac{\partial P}{\partial l}l'(t)$$

$$\approx 2.1935(0.4) + 19.7411(-0.02) = \mathbf{0.48258}.$$

Regla de la cadena utilizando derivación implícita.

Si la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \ F_y(x,y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \ F_z(x,y,z) \neq 0.$$

Ejemplo:

Determinación implícita de derivadas parciales.

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, dado que $F(x,y,z) = xy^2 + z^3 + sen(xyz) = 0$.

Solución:

Observe primero que al emplear la regla de la cadena usual, se obtiene:

$$F_x = y^2 + yz\cos(xyz),$$
$$F_y = 2xy + xz\cos(xyz), \text{ y}$$
$$F_z = 3z^2 + xy\cos(xyz),$$

Tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{y^2 + yz\cos(xyz)}{3z^2 + xy\cos(xyz)}$$

Y de manera similar tenemos:

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2xy+yz\cos(xyz)}{3z^2+xy\cos(xyz)}.$

Ejercicio 4.7

I. Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales.

1. $f(x,y) = xy + z^2, \quad x = u^2, \quad y = 2rs, \quad z = r^2 \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s}$

2. $f(x,y,z) = xy + z^2, \quad x = r + s - 2t, \quad y = 3rt, \quad z = s^2 \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$

3. $f(x,y) = cos(x-y), \quad x = 3u - 5v, \quad y = -7u + 15v, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$

4. $f(x,y,z) = (3x + 4y)^5, \quad x = u^2, \quad y = uv, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$

5. $f(x,y,z) = x^2y^3 + z^4, \quad x = s^2, \quad y = st^2, \quad z = s^2t \quad \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$

6. $w(x,y,z) = xyz, \quad x = s + t, \quad y = s - t, \quad z = st^2 \quad \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$

II. Calcule las derivadas parciales usando derivación implícita.

7. $x^2y + y^2z + xz^2 = 10 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ?$

8. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + xy = 4 \quad \frac{\partial y}{\partial x} = ?$

9. $e^{xy} + sen(xy) + y = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

Aplicación

10. Un supermercado vende café molido a “x” pesos el kg, y café granulado a “y” pesos. Actualmente la demanda mensual de café molido es:

$$D = (x,y) = 1600 - 6x^{\frac{4}{3}} + 10y^{\frac{3}{2}} \ kg$$

Dentro de “t” meses el supermercado venderá al kg de café molido a:

$x = 26.55 + 0.15\sqrt{t}$ Pesos y el café granulado a:

$x = 35.1 + 0.1t$ pesos.

¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café molido dentro de 9 meses?

Soluciones al ejercicio 4.7

1. $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 4rsu, \quad \dfrac{\partial f}{\partial r} = 2u^2s + 4r^3, \quad \dfrac{\partial f}{\partial s} = 2u^2r$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial r} = 3rt + 3(r + s - 2t)t, \quad \dfrac{\partial f}{\partial s} = y(1) + x3t + 2z2s, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = y(-2) + x3r + 2$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial u} = -3sen(x - y) + 7\, sen(x - y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial v} = 5sen(x - y) - 5sen(x - y)$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 30u(3x + 4y)^4 + 20v(3x + 4y)^4, \quad \dfrac{\partial f}{\partial v} = 20u(3x + 4y)^4$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial s} = 4xy^3s + 3x^2y^2t^2 + 8z^3st, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = 3x^2y^2s + 4z^3s^2$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = yz(1) + xz(1) + xyt^2, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = yz(1) + xz(-1) + xy2ts$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2xy + z^2}{y^2 + 2xz}$

8. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{x + y(x^2 + y^2)}{y + x(x^2 + y^2)}$

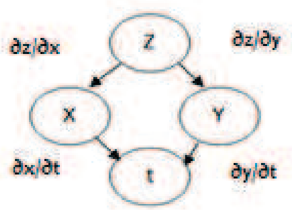
9. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xe^{xy} + 1}{xcos(xz)}$

10. 8.4

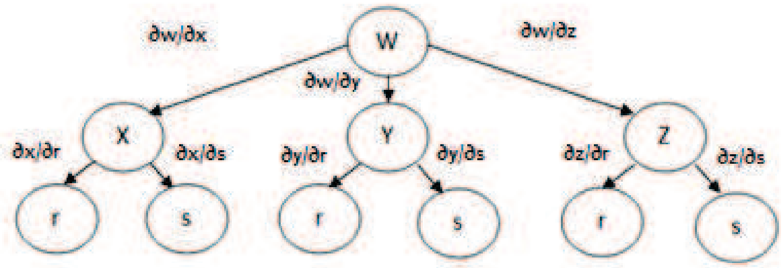
Actividad No. 16	Desarrollo	Individual – extra aula
Propósito: Derivación por Regla de la Cadena.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga los procedimientos correctos.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos.		

Instrucciones: expresar dz/dt utilizando la regla de la cadena.

1) Encontrar dz/dt



2) Encontrar $\frac{dw}{dr}$; $\frac{dw}{ds}$



4.8 Derivada direccional y gradiente

Se puede recordar que una aplicación de las derivadas parciales es cuando $T = f(x, y)$ representa la temperatura en el punto $P(x, y)$ del plano xy, en donde las razones de cambio o tasas de variación (instantáneas) de la temperatura T con respecto a la distancia en las direcciones horizontal (x) y vertical (y) están dadas por $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ respectivamente.

Lo anterior nos da pie para generalizar el concepto de la razón de cambio de una función en cualquier dirección, es decir, el concepto de la derivada direccional de una función $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ y en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ la cual se denota por $D_u f(x, y)$ (las primeras derivadas parciales de una función son casos especiales de la derivada direccional).También hay que hacer notar que si $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ es cualquier vector que tiene la misma dirección de vector unitario $\boldsymbol{u}$, la derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección del vector $\boldsymbol{a}$ está dada por $D_u f(x,y)$, de tal manera que si θ es el ángulo que describe la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{a}$, entonces el vector unitario $\boldsymbol{u}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{a}$ también se puede expresar de la forma **u**= $cos\theta\boldsymbol{i}$ + $sen\theta\boldsymbol{j}$.

Teorema Derivadas Direccionales

Si $f(x,y)$ es una función diferenciable y $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ es un vector unitario, entonces $D_u f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2$.

Nota: Si $\boldsymbol{u}$ se da de la forma $\boldsymbol{u} = cos\theta\boldsymbol{i} + sen\theta\boldsymbol{j}$ entonces $D_u f(x,y) = f_x(x,y)cos\theta + f_y(x,y)sen\theta$.

Nota 1: El teorema anterior también se aplica para una función $f(x,y,z)$, teniendo $D_u f(x,y,z) = f_x(x,y,z)u_1 + f_y(x,y,z)u_2 + f_z(x,y,z)u_3$

Ejemplo 1

Si $T(x,y) = x^3 - y^2$ es la temperatura (en $°C$) en un punto $P(x,y)$ de una placa rectangular plana. Determinar la tasa de variación de la temperatura de un punto $P(-2,1)$ que se mueve en la dirección del vector $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$.

Solución:

Si $T = f(x,y)$ es la temperatura en un punto $P(x,y)$ entonces $D_{\boldsymbol{u}} f(x,y)$ representa la tasa de variación de la temperatura de la placa de un punto $P(-2,1)$ en la dirección del vector "$\boldsymbol{a}$" en donde " $\boldsymbol{u}$" es un vector unitario en la dirección de "$\boldsymbol{a}$"**,** el cual se determina.

$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt[2]{(3)^2 + (4)^2}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt[2]{9 + 16}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt[2]{25}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = 5$$

En donde un vector unitario $\boldsymbol{u}$ en la dirección de $\boldsymbol{a}$ esta dado por $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$

$$\boldsymbol{u} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{5}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

Por la que la derivada direccional de $f(x,y)$ está dada por $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2$ en donde las primeras derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $P(-2,1)$ son:

$f_x(x,y) = 3x^2$

$f_x(x,y) = 3(-2)^2$

$f_x(x,y) = 12$

$f_y(x,y) = -2y$

$f_y(x,y) = -2(1)$

$f_y(x,y) = -2$

Se sustituyen estas derivadas así como las componentes rectangulares del vector $\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{D_u f(-2,1) = 12\left(\frac{3}{5}\right) - 2\left(-\frac{4}{5}\right)}$

$\boldsymbol{= \frac{36}{5} + \frac{8}{5} = \frac{44}{5}}$

Como $D_{\boldsymbol{u}}f(-2,1) = \frac{44}{5}$ entonces significa que si un punto P se mueve en la dirección de $\boldsymbol{u}$ la temperatura en P aumentará a una tasa de variación $\frac{44}{5}$°C por unidad de distancia.

El teorema de Derivadas Direccionales como se mencionó anteriormente también sirve para expresar una derivada direccional mediante el producto escalar de dos vectores como sigue:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = [f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}] \cdot [u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}]$$

En donde $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ es un vector unitario y $\boldsymbol{\nabla}f(x,y) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}$ llamándose gradiente de la función $f(x,y)$, en donde el símbolo $\boldsymbol{\nabla}$ se le llama *nabla* y representa un operador diferencial vectorial en el que $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$, también se denota al gradiente $\boldsymbol{\nabla}f(x,y)$ por **grad** $f(x,y)$.

Definición de derivada direccional por medio de gradiente

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables. El gradiente de $f(x,y)$ es la función vectorial dada por

$$\boldsymbol{\nabla}f(x,y) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

En donde la derivada direccional de $f(x,y)$ en dirección del vector unitario $\boldsymbol{u}$, en términos del gradiente está dada por:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{u}$$

Nota 2: La definición anterior también se aplica para una función $\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + f_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$

Ejemplo 2

Encontrar el gradiente de $f(x,y) = x^2 + 9xy$ en el punto $P(-1,2)$, usar dicho gradiente para calcular la derivada direccional de $f(x,y)$ en $P(-1,2)$ en la dirección de $Q(3,5)$ y representarlo gráficamente.

Solución:

Utilizando la definición de derivada direccional por medio de gradiente se tiene:

$$\nabla f(x,y) = (2x + 9y)\boldsymbol{i} + 9x\boldsymbol{j}$$

Por lo tanto en el punto $P(-1,2)$ el gradiente de la función es:

$$\nabla f(-1,2) = [2(-1) + 9(2)]\boldsymbol{i} + 9(-1)\boldsymbol{j} = 16\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j}$$

Teniendo que el vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{PQ}$, entonces

$$\boldsymbol{v} = (3 + 1)\boldsymbol{i} + (5 - 2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$$

El vector $\boldsymbol{v}$ no es un vector unitario ya que su magnitud $\|v\| = \sqrt[2]{4^2 + 3^2} = \sqrt[2]{25} = 5$, por lo que un vector unitario $\boldsymbol{u}$ en la dirección de $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|v\|} \quad \boldsymbol{u} = \frac{4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}}{5} = \frac{4}{5}\boldsymbol{i} + \frac{3}{5}\boldsymbol{j}$$

Aplicando la definición de derivada direccional por medio de gradiente:

$$D_{\boldsymbol{u}}f(-1,2) = \nabla f(-1,2) \cdot \boldsymbol{u}$$

$$= (16\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j}) \cdot (\frac{4}{5}\boldsymbol{i} + \frac{3}{5}\boldsymbol{j})$$

$$= \frac{48}{5} - \frac{27}{5} = \frac{21}{5} = 4.2$$

$$\boldsymbol{D_{u}f(-1,2) = 4.2}$$

Si $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)$ es la derivada direccional de $f(x,y)$ en un punto $P(x,y)$ en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ en donde $\boldsymbol{u}$ está variando de posición, entonces para un vector unitario dado, la derivada direccional puede ser positiva (es decir, $f(x,y)$ aumenta), negativa ($f(x,y)$ disminuye) o puede ser 0. Para muchas aplicaciones es importante encontrar la dirección en la que $f(x,y)$ aumenta más rápidamente y también calcular la razón de cambio máxima. Estas propiedades se resumen a continuación:

Propiedades del Gradiente

Sea $f(x,y)$ diferenciable en el punto $P(x,y)$, entonces:

- Si $\nabla f(x,y) = 0,$ entonces $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y) = 0$ para todo $\boldsymbol{u}$.
- La dirección del máximo incremento de $f(x,y)$ está dada por $\nabla f(x,y)$. El valor máximo de $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)$ es $\|\nabla f(x,y)\|$.
- La dirección del mínimo incremento de f está dada por $-\nabla f(x,y)$. El valor mínimo de $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)$ es $-\|\nabla f(x,y)\|$.

Ejemplo 3

T representa la temperatura de una pieza metálica en un punto $P(x,y,z)$ y está dada por $T = \frac{-196}{x^2+y^2+z^2}$

a) Hallar la razón de cambio de la temperatura T con respecto a la distancia en el punto $P(-1,-3,2)$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$
b) Encontrar en qué dirección a partir del punto P se incrementa más rápidamente la temperatura T.
c) Determinar la tasa máxima de variación de la temperatura T en el punto P dado.

Solución:

a) En este caso se empieza calculando el gradiente de la temperatura T en el punto dado de la forma siguiente.

$$\nabla \mathrm{T}(\mathrm{x,y,z}) = T_x(\mathrm{x,y,z})\mathbf{i} + T_y(\mathrm{x,y,z})\mathbf{j} + T_z(\mathrm{x,y,z})\mathbf{k}.$$

Para lo anterior se obtienen las primeras derivadas parciales de $T = \frac{-196}{x^2+y^2+z^2} =$ $20(x^2+y^2+z^2)^{-1}$ en el punto $P(-1,-3,2)$.

$$T_x(\mathrm{x,y,z}) = -196\mathrm{x}(x^2+y^2+z^2)^{-2} = \frac{-196\mathrm{x}}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$T_x(-1,-3,2) = \frac{-196(-1)}{((-1)^2 + (-3)^2 + (2)^2)^2} = \frac{196}{(1+9+4)^2} = \frac{196}{(14)^2} = \frac{196}{196} = 1$$

$$T_y(\mathrm{x,y,z}) = -196\mathrm{y}(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} = \frac{-196\mathrm{y}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$T_y(-1,-3,2) = \frac{-196(-3)}{((-1)^2 + (-3)^2 + (2)^2)^2} = \frac{588}{(1+9+4)^2} = \frac{588}{(14)^2} = \frac{588}{196} = 3$$

$$T_z(\mathrm{x,y,z}) = -196\mathrm{z}(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} = \frac{-196\mathrm{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$T_z(-1,-3,2) = \frac{-196(2)}{((-1)^2 + (-3)^2 + (2)^2)^2} = \frac{-392}{(1+9+4)^2} = \frac{-392}{(14)^2} = \frac{-392}{196} = -2$$

Las cuales se sustituyen en la formula al principio de este ejemplo mencionado:

$$\mathbf{\nabla}\mathrm{T}(-1,-3,2) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Ahora se determina un vector unitario"$\boldsymbol{u}$" en la dirección y sentido del vector dado "$\boldsymbol{v}$" de la forma siguiente; primero se obtiene la magnitud de $\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt[2]{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt[2]{9} = 3$ siendo $\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\boldsymbol{2i+j-2k}}{\boldsymbol{3}}$ en donde $\boldsymbol{u} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$.

De acuerdo con el Teorema de derivada direccional, la razón de cambio de $\boldsymbol{T}$ en el punto $\boldsymbol{P}$ en la dirección de $\boldsymbol{v}$ es:

$$D_{\boldsymbol{u}}T(-1,-3,2) = \mathbf{\nabla}\mathrm{T}(-1,-3,2) \cdot \boldsymbol{u}$$

$$D_{\boldsymbol{u}}T(-1,-3,2) = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot (\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k})$$

$$D_{\boldsymbol{u}}T(-1,-3,2) = \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} = \mathbf{3}$$

b) La temperatura T se incrementa más rápidamente a partir del punto P en la dirección del vector $\mathbf{\nabla}\mathrm{T}(-1,-3,2) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

c) La tasa máxima de la temperatura en el punto P está dado por $\|\mathbf{\nabla}\mathrm{T}(-1,-3,2)\| = \sqrt[2]{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = \sqrt[2]{14}$

Ejercicio 4.8

En los ejercicios del 1 al 4, hallar la derivada direccional de la función **en el punto $\boldsymbol{P}$ en dirección del vector $\boldsymbol{V}$.**

1)$f(x,y) = x^2 - y^2$

$P(3,-4)$

$\boldsymbol{v} = \frac{4}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3}{5}\boldsymbol{j}$

2)$f(x,y) = 5e^{(x^3-y^3)}$

$P(1,1)$

$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$

3)$f(x,y,z) = y^2 tanxz$

$P(\pi,3,1)$

$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

4)$f(x,y) = \cos(2x - y)$

$P(0,\frac{\pi}{2})$

$\boldsymbol{v} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\boldsymbol{i} + sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)\boldsymbol{j}$

En los ejercicios 5 y 6 hallar la derivada direccional **en el punto P en la dirección de Q especificado.**

5)$f(x,y) = \ln(x - y)$

$P(0,-1)$

$Q(4,-4)$

6)$f(x,y) = e^{x+y}\cos(x + y)$

$P(1,-1)$

$Q(-2,3)$

7-Hallar el gradiente de la función $\boldsymbol{f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y el valor máximo de la derivada direccional **en el punto** $\boldsymbol{P(2,1,2)}$

Solución al ejercicio 4.8

1) $D_u f(3,4)=0$

2) $D_u f(1,1)=21$

3) $D_u f(\pi,3,1)=6(1+\pi)$

4) $D_u f(0,\frac{\pi}{2})=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $D_u f(1,0)=\frac{7}{5}$

6) $D_u f(1,-1)=\frac{1}{5}$

7) $D_u f(2,1,2)=\frac{1}{9}$

4.9 Extremos de funciones de varias variables

Como se ha mencionado con anterioridad, en muchas situaciones cotidianas se presentan funciones de varias variables y a través de sus derivadas parciales se deben calcular los valores extremos, ya sean máximos o mínimos, que optimicen la función, de manera similar que en funciones de una sola variable.

Definición de extremos relativos

Sea *f* una función definida en una región *R* que contiene al punto (x_0,y_0), entonces:

1) La función *f* tiene un **mínimo relativo** en (x_0,y_0) si $\boldsymbol{f(x,y)>f(x_0,y_0)}$ para todo (x,y) en un disco abierto que contiene (x_0,y_0).
2) La función *f* tiene un **máximo relativo** en (x_0,y_0) si $\boldsymbol{f(x,y)<f(x_0,y_0)}$ para todo (x,y) en un disco abierto que contiene (x_0,y_0).

Nota: El punto (x_0,y_0) es llamado **punto crítico**.

El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de la función $f(x, y)$ si está en el dominio de f, y cuando $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, o bien cuando $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ no existen.

Existe un test de la segunda derivada para determinar el tipo de punto crítico (x_0, y_0) de una función $f(x, y)$ de dos variables. Este test se basa en el signo del **discriminante** $D = D(x_0, y_0)$**,** que se define como:

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

Test de la segunda derivada

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto crítico de $f(x, y)$. Suponga que $fxx,\ fyy, fxy$ son continuas cerca de P, entonces:

1) Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un mínimo local.
2) Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un máximo local.
3) Si $D < 0$ entonces f tiene un punto silla en (x_0, y_0).
4) Si $D = 0$, el test no decide.

Cuando el test no decide se debe hacer un análisis de la función aplicando la definición de máximos y mínimos relativos.

Procedimiento para calcular los extremos locales.

Paso 1. Hallar los puntos críticos.
Paso 2. Calcular las segundas derivadas parciales.
Paso 3. Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.
Paso 4. Calcular el discriminante en cada punto crítico.
Paso 5. Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.
Paso 6. Si el test no decide, analizar la función para ese punto crítico.

Ejemplos: Calcular los extremos relativos en cada una de las funciones dadas.

1) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} - \mathbf{7}\boldsymbol{y}$

Paso1: Hallar los puntos críticos.

Encontrando las primeras derivadas parciales

$$f_x = 4x - y \qquad\qquad f_y = 2y - x - 7$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos

$$f_x = 0 \qquad\qquad f_y = 0$$

(Ec.1) $4x - y = 0$ (Ec. 2) $2y - x - 7 = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se genera, resulta que $x = 1$ y $y = 4$, por lo tanto, el punto crítico es $P(1,4)$.

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales.

$$\boldsymbol{f_{xx} = 4} \qquad f_{yy} = 2 \qquad f_{xy} = -1$$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$$f_{xx}(1,4) = 4 \qquad f_{yy}(1,4) = 2 \qquad f_{xy}(1,4) = -1$$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico.

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$$D(1,4) = f_{xx}(1,4)f_{yy}(1,4) - [f_{xy}(1,4)]^2$$

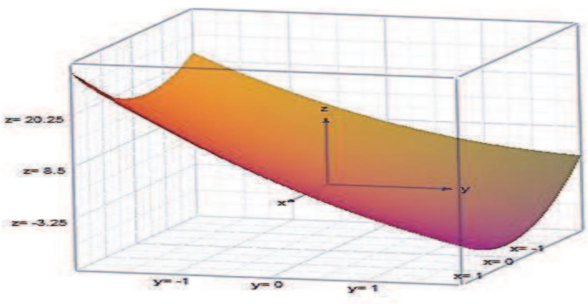
$$\boldsymbol{D(1,4)} = (4)(2) - (-1)^2 = 8 - 1 = \boldsymbol{7}$$

Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

Como $D(1,4) > 0 \;\; y \;\; f_{xx}(1,4) > 0$ entonces el punto *f(1,4)* es un **mínimo relativo** de la función.

$$\boldsymbol{f(1,4)} = 2x^2 + y^2 - xy - 7 = \boldsymbol{-14}$$

Gráfica



2) $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy}$

Paso1: Hallar los puntos críticos.

Encontrando las primeras derivadas parciales.

$$f_x = 3x^2 - 3y \qquad\qquad f_y = 3y^2 - 3x$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos.

$$f_x = 0 \qquad\qquad f_y = 0$$

(Ec.1) $3x^2 - 3y = 0$ (Ec. 2) $3y^2 - 3x = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se genera, resulta que los puntos críticos son $P_1(0,0)$ y $P_2(1,1)$.

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales

$$\boldsymbol{f_{xx} = 6x} \qquad f_{yy} = 6y \qquad f_{xy} = -3$$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$$f_{xx}(0.0) = 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = -3$$

$$f_{xx}(1,1) = 6 \qquad f_{yy}(1,1) = 6 \qquad f_{xy}(1,1) = -3$$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico.

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$$D(0,0) = f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0) - \left[f_{xy}(0,0)\right]^2 = -9$$

$$D(1,4) = f_{xx}(1,1) f_{yy}(1,1) - \left[f_{xy}(1,1)\right]^2 = 25$$

Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

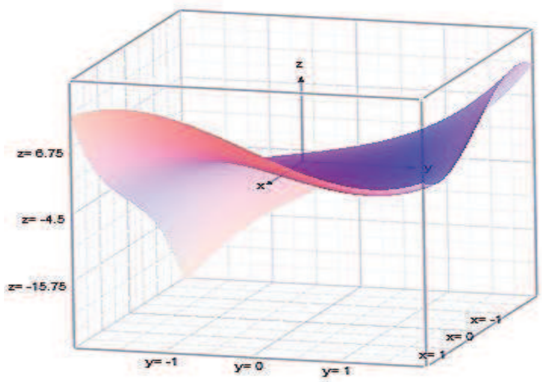
Como $D(0,0) < 0$ y $f_{xx}(0,0) > 0$ entonces *f* tiene un **punto silla** en *f(0,0)*

$$\boldsymbol{f(0,0) = x^3 + y^3 - 3xy = 0}$$

Como $D(1{,}1) > 0 \;\; y \;\; f_{xx}(1{,}1) > 0$ entonces el punto *f(1,1)* es un **mínimo relativo** de la función.

$$\boldsymbol{f(1,1) = \; x^3 + y^3 - 3xy = -1}$$

Gráfica



3) $\boldsymbol{f(x,y) = \; (x^2 + y^2)e^{-x}}$

Paso1: Hallar los puntos críticos.

Encontrando las primeras derivadas parciales:

$f_x = e^{-x}(2x - x^2 - y^2)$ $\qquad\qquad$ $f_y = 2ye^{-x}$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos:

$f_x = 0$ $\qquad\qquad$ $f_y = 0$

(Ec.1) $\;\; e^{-x}(2x - x^2 - y^2) = 0$ $\qquad$ (Ec. 2) $\;\; 2ye^{-x} \; = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se genera, resulta que los puntos críticos son $P_1(0{,}0) \;\; y \;\; P_2(2{,}0)$.

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales.

$\boldsymbol{f_{xx}} = \boldsymbol{e^{-x}}(x^2 + y^2 - 4x + 2)$ $\qquad$ $f_{yy} = 2e^{-x}$ $\qquad$ $f_{xy} = \; -2ye^{-x}$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$f_{xx}(0.0) = 2$ $\qquad$ $f_{yy}(0{,}0) = 2$ $\qquad$ $f_{xy}(0{,}0) = \; 0$

$f_{xx}(2{,}0) = -2e^{-2}$ $\qquad$ $f_{yy}(2{,}0) = \; 2e^{-2}$ $\qquad$ $f_{xy}(2{,}0) = \; 0$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico

$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$

$D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 4$

$D(1,4) = f_{xx}(2,0)f_{yy}(2,0) - [f_{xy}(2,0)]^2 = -4e^{-4}$

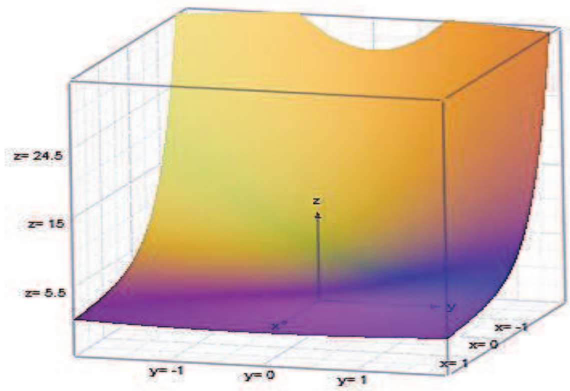
Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

Como $D(0,0) > 0$ y $f_{xx}(0,0) > 0$ entonces f tiene un **mínimo relativo** en *f(0,0)*

$\boldsymbol{f(0,0) = (x^2 + y^2)e^{-x} = 1}$

Como $D(2,0) < 0$ y $f_{xx}(2,0) > 0$ entonces *f* tiene un **punto silla** en *f (2,0).*

$\boldsymbol{f(1,1) = (x^2 + y^2)e^{-x} = 4e^{-2}}$



4) $\boldsymbol{f(x, y) = x\, sen(y)}$

Paso1: Hallar los puntos críticos.

Encontrando las primeras derivadas parciales

$f_x = sen\, y$ $\qquad\qquad$ $f_y = x \cos y$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos

$f_x = 0$ $\qquad\qquad$ $f_y = 0$

(Ec.1) $sen\, y = 0$ $\qquad\qquad$ (Ec. 2) $x \cos y = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se genera, resulta que $x = 0$ y $y = 0$, por lo tanto, el punto crítico es $P(0{,}0)$.

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales

$\boldsymbol{f_{xx} = 0}$ $\quad f_{yy} = -x\ sen\ y$ $\quad f_{xy} = \cos y$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$f_{xx}(0{,}0) = 0$ $\quad f_{yy}(0{,}0) = 0$ $\quad f_{xy}(0{,}0) = 1$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico.

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

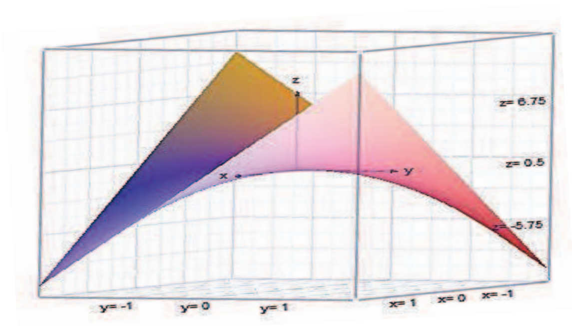
$$D(0{,}0) = f_{xx}(0{,}0)f_{yy}(0{,}0) - \left[f_{xy}(0{,}0)\right]^2 = -1$$

Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

Como $D(0{,}0) < 0$ entonces el punto *f(0,0)* es un **punto silla** de la función.

$\boldsymbol{f(0,0) = x\ sen(y) = 0}$

Gráfica



5) $\boldsymbol{f(x, y) = -(x^4 + y^4)}$

Paso1: Hallar los puntos críticos.

Encontrando las primeras derivadas parciales:

$f_x = -4x^3$ $\quad f_y = -4y^3$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos:

$f_x = 0$ $\quad f_y = 0$

(Ec.1) $-4x^3 = 0$ (Ec. 2) $-4y^3 = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se genera, resulta que $x = 0$ y $y = 0$, por lo tanto, el punto crítico es $P(0,0)$.

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales.

$$f_{xx} = -12x^2 \qquad f_{yy} = -12y^2 \qquad f_{xy} = 0$$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$$f_{xx}(0,0) = 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = 0$$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico.

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$$D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - \left[f_{xy}(0,0)\right]^2 = 0$$

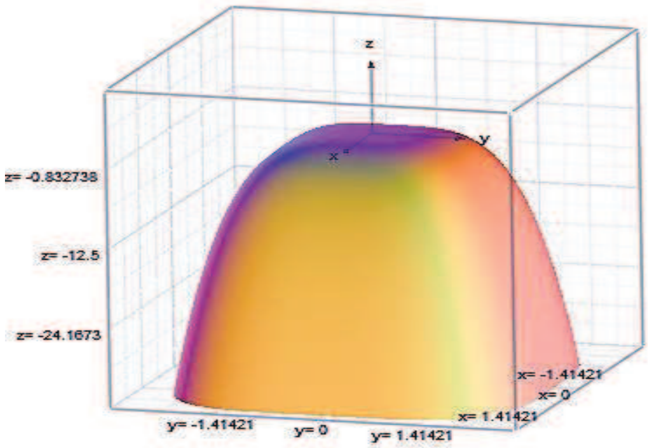
Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

Como $D(0,0) = 0$ entonces el test de la segunda derivada no decide sobre el punto $P(0,0)$.

$$f(0,0) = -(\boldsymbol{x^4} + \boldsymbol{y^4}) = 0$$

Paso 6: Si el test no decide, analizar la función para ese punto crítico.

Como para cualquier valor de “x” y de “y” resulta que $f(x, y) < 0$, entonces aplicando la definición de máximos relativos resulta que $f(0,0)$ es un **máximo relativo** de la función.



APLICACIÓN

1) **Hallar tres números positivos "x", "y" y "z" cuyo producto sea 27 y la suma sea mínima.**

Solución:

Primeramente se determina la función que se desea minimizar, con el menor número de variables posibles, es decir:

Sea "*S*" la función que me representa la suma de dichos números, entonces:

$$S = x + y + z$$

Como el producto de estos números es 27, se tiene que:

$$xyz = 27$$

Despejando *"z"* y sustituyendo en *S*, queda:

$$S(x, y) = x + y + \frac{27}{xy}$$

A partir de esta función se van a encontrar los valores extremos que la minimicen.

Paso1: Hallar los puntos críticos.

Encontrando las primeras derivadas parciales

$$S_x = 1 - \frac{27}{x^2 y} \qquad\qquad S_y = 1 - \frac{27}{xy^2}$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos

$f_x = 0$ $\qquad\qquad$ $f_y = 0$

(Ec.1) $1 - \frac{27}{x^2 y} = 0$ $\qquad\qquad$ (Ec. 2) $1 - \frac{27}{xy^2} = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se genera, resulta que $x = 3$ y $y = 3$, por lo tanto, el punto crítico es $P(3,3)$.

En el punto $P(0,0)$ las derivadas parciales no existen, pero este punto no se puede considerar como punto crítico ya que no está dentro del dominio de la función.

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales

$$S_{xx} = \frac{54}{x^3 y} \qquad S_{yy} = \frac{54}{xy^3} \qquad S_{xy} = \frac{27}{x^2 y^2}$$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$$S_{xx}(3,3) = \frac{2}{3} \qquad S_{yy}(3,3) = \frac{2}{3} \qquad S_{xy}(3,3) = \frac{1}{3}$$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico.

$$D(x_0, y_0) = S_{xx}(x_0, y_0) S_{yy}(x_0, y_0) - [S_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$$D(3,3) = S_{xx}(3,3) S_{yy}(3,3) - [S_{xy}(3,3)]^2 = \frac{1}{3}$$

Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

Como $D(3,3) > 0$ y $S_{xx} > 0$, entonces en *S(3,3)* se tiene un **mínimo relativo**, por lo tanto, los números cuyo producto es 27 y minimizan la suma son:

$$\boldsymbol{x = y = z = 3}$$

2) **Utilidad máxima**

Una empresa produce focos en dos lugares. El costo de producción de "x" unidades en el lugar A es:

$$\boldsymbol{C_1 = 0.02x^2 + 4x + 500}$$

Y el costo de producción de "y" unidades en el lugar B es:

$$\boldsymbol{C_2 = 0.05y^2 + 4y + 275}$$

Si la utilidad de la empresa está dada por:

$\boldsymbol{U(x,y) = 15(x+y) - C_1 - C_2}$ **en millones de dólares**

a) **Hallar la cantidad de focos que deben producirse en cada lugar para que la utilidad sea máxima.**
b) **Calcular la utilidad máxima.**

Solución:

Primero se determina la función de utilidad, en términos de "x" y de "y", sustituyendo C_1 y C_2 en la función, la cual se desea maximizar.

$$U(x,y) = 15x + 15y - (0.02x^2 + 4x + 500) - (0.05y^2 + 4y + 275)$$

$$U(x,y) = 15x + 15y - 0.02x^2 - 4x - 500 - 0.05y^2 - 4y - 275$$

$$U(x,y) = -0.02x^2 - 0.05y^2 + 11x + 11y - 775$$

Paso1: Hallar los puntos críticos.

$$U_x = 0.04x + 11 \qquad\qquad U_y = -0.1_y + 11$$

Igualando a cero para calcular los puntos críticos.

$$U_x = 0 \qquad\qquad U_y = 0$$

$$0.04x + 11 = 0 \qquad\qquad -0.1_y + 11 = 0$$

$$x = 275 \qquad\qquad y = 110$$

El punto crítico es: $P(275,110)$

Paso 2: Calcular las segundas derivadas parciales.

$$U_{xx} = -0.04 \qquad U_{yy} = -0.1 \qquad U_{xy} = 0$$

Paso 3: Evaluar las segundas derivadas parciales en cada punto crítico.

$$U_{xx}(275,110) = -0.04 \qquad U_{yy}(275,110) = -0.1 \qquad U_{xy}(275,110) = 0$$

Paso 4: Calcular el discriminante en cada punto crítico.

$$D(x_0, y_0) = U_{xx}(x_0, y_0)U_{yy}(x_0, y_0) - [U_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$$D(275{,}110) = (-0.04)(-0.1) - 0 = 0.004$$

Paso 5: Aplicar el test de la segunda derivada parcial para determinar los máximos y mínimos locales.

Como $D(275{,}110) > 0$ y $U_{xx}(275{,}110) < 0$, entonces la **utilidad** es **máxima** en $U(275{,}110)$.

a) $x = 275 \quad y = 110$

b) $U(275{,}110) = -0.02(275)^2 - 0.05(110)^2 + 11(275) + 11(110) - 775$

$$U(275{,}110) = -1512.5 - 605 + 3025 + 1210 - 775$$

$$\boldsymbol{U(275, 110) = 1342.5}$$ **Millones de Dólares**

Ejercicio 4.9

I. Calcular los extremos relativos en cada una de las funciones dadas.

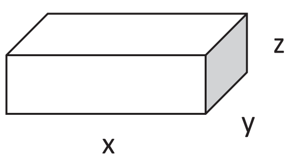
1) $f(x, y) = 11x^2 - 2xy + 2y^2 + 3y$
2) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy$
3) $f(x, y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$
4) $f(x, y) = 2x - x^2 - y^2$
5) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2$
6) $f(x, y) = x^4 + y^4$

II. Aplicación

7) **Hallar tres números positivos “x”, “y” y “z” cuyo producto sea 8 y su suma sea mínima.**

8) **Área mínima.**

Una caja rectangular sin tapa superior debe tener un volumen de 12 metros cúbicos. Hallar las dimensiones de la caja que darán un área mínima.



Solución al Ejercicio 4.9

1) Mínimo relativo en $f\left(\frac{-1}{14}, \frac{-11}{14}\right)$
2) Mínimo relativo en $f(4,4)\ y\ punto\ silla\ en\ f(0,0)$
3) Punto silla en f(5,2)
4) Mínimo relativo en $f(1,0)$
5) Mínimos relativos en $f(1,0)\ y\ en\ f(-1,0)\ y\ punto\ silla\ en\ f(0,0)$
6) Mínimo relativo en $f(0,0)$
7) $x = y = z = 2$
8) $x = y = \frac{6}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2} \quad y \quad z = \sqrt[3]{3}\ metros$

Actividad No. 17	**Desarrollo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Aplicar criterio de segundas derivadas parciales.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 Minutos		

Instrucciones: Determinar si hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla, o si la información es insuficiente para determinar la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0).

1. $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, f_{yy}(x_0, y_0) = 4, f_{xy}(x_0, y_0) = 6$
2. $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, f_{yy}(x_0, y_0) = -8, f_{xy}(x_0, y_0) = 2$
3. $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, f_{yy}(x_0, y_0) = 6, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$
4. $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, f_{yy}(x_0, y_0) = 8, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

4.10 Multiplicadores de Lagrange

Es un método que se aplica en problemas de optimización que tienen restricciones o ligaduras para los valores que puedan usarse al dar la solución óptima.

Este método considera el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto, si y solo si, sus vectores gradiente son paralelos. Es decir:

$$\boldsymbol{\nabla f}(x_0, y_0) = \lambda \boldsymbol{\nabla g}(x_0, y_0)$$

En donde:

$f(x, y)$ es la función objetiva (maximizar o minimizar); $g(x, y)$ es la restricción o ligadura y λ (lambda) es un escalar llamado Multiplicador de Lagrange.

Condición: $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$

Procedimiento:

1) Resolver simultáneamente las ecuaciones $\boldsymbol{\nabla f}(x, y) = \lambda \boldsymbol{\nabla g}(x, y)$ y $g(x, y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$
$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$
$$g(x, y) = c$$

2) Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción o ligadura $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción o ligadura $g(x, y) = c$

Los economistas llaman a λ obtenida en una función de producción, Productividad Marginal del Capital.

Ejemplo 1. Determinación de una distancia mínima.

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y la restricción está dada por $y = 4 - 2x$. Use $\boldsymbol{\nabla f}(x, y) = \lambda \boldsymbol{\nabla g}(x, y)$ para hallar el punto más cercano de la recta $y = 4 - 2x$ al origen.

Solución:

$\boldsymbol{\nabla f}(x, y) =< 2x, 2y >$ Y para $g(x, y) = 2x + y - 4$ se tiene que $\boldsymbol{\nabla g}(x, y) =< 2{,}1 >$.

Aplicando la condición dada (Multiplicadores de Lagrange) resulta la siguiente ecuación vectorial:

$< 2x, 2y >= \lambda < 2,1 >$

Se deduce que: $2x = 2\lambda$, por lo tanto, $x = \lambda$ y que $2y = \lambda$, entonces $y = \frac{\lambda}{2}$

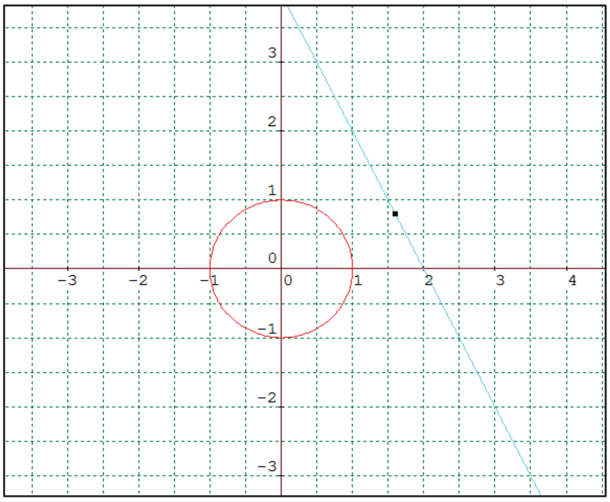
Sustituyendo en la ecuación de restricción $y = 4 - 2x$ y despejando λ, resulta que:

$\frac{\lambda}{2} = 4 - 2\lambda$

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} = 4$$

$$\frac{5\lambda}{2} = 4$$

$$\lambda = \frac{8}{5}$$



Por lo tanto, el punto más cercano es $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Ejemplo 2. Optimización en el interior de una región.

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 5$ sujeto a la restricción o ligadura $x^2 + y^2 \leq 5$

Solución

Caso I: Sobre el círculo $x^2 + y^2 = 5$

La función de restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$

$$\nabla \boldsymbol{f}(x, y) = \lambda \nabla \boldsymbol{g}(x, y)$$

$$(2x - 4)i + 6yj = \lambda(2xi + 2yj)$$

$2x - 4 = 2\lambda x$	$6y = 2\lambda y$	$x^2 + y^2 = 5$
$2(x - 2) = 2\lambda x$	$\lambda = \frac{6y}{2y}$	$1 + y^2 = 5$

$$x - 2 = \lambda x \qquad \boldsymbol{\lambda = 3} \qquad y^2 = 4$$

$$x - 2 = 3x \qquad \boxed{\boldsymbol{y = \pm 2}}$$

$$3x - x = -2$$

$$2x = -2$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = -1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1{,}2) = x^2 + 3y^2 - 4x + 5 = 1 + 12 + 4 + 5 = 22 \\ f(-1,-2) = 1 + 12 + 4 + 5 = 22 \end{array}\right\} \text{Máximos}$$

Como $y = 0$ es un número crítico y al ligarlo a $x^2 + y^2 = 5$ resulta que: $x^2 = 5;\ x = \pm\sqrt{5}$

$$\left. f\left(\pm\sqrt{5}, 0\right) = 5 - 4\sqrt{5} + 5 = 1.055 \quad \right\} \text{Mínimo}$$

Caso II: Dentro del círculo

Utilizando el criterio de las segundas derivadas parciales

$Fx = 2x - 4 \qquad fy = 6y$

Números críticos

$Fx = 0 \qquad fy = 0$

$2x - 4 = 0 \qquad 6y = 0$

$X = 2 \qquad y = 0$

$Fxx(2{,}0) = 2 \qquad fyy = (2{,}0) = 0 \qquad fxy(2{,}0) = 0$

$$D = fxx\, fyy - (fxy)^2 = 0$$

El criterio de las segundas derivadas parciales no decide, por lo tanto, analizando la función:

$f(x, y) = x^2 - 4x + 3y^2 + 5 \qquad f(2{,}0) = 4 - 8 + 5 = 1$

Completando un trinomio cuadrado perfecto

$f(x,y) = x^2 - 4x + 4 + 3y^2 + 5 - 4$

$f(x,y) = (x-2)^2 + 3y^2 + 1$

$f(x,y) > f(2,0)$

$f(x,y) > 1$

Por lo tanto hay un mínimo relativo en $f(2,0) = 1$

Ejemplo 3

Maximizar $f(x,y,z) = 2x + 3y + 5z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 19$

Solución:

La función de restricción o ligadura es $g(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 19$

$$\boldsymbol{\nabla f}(x,y,z) = \lambda \boldsymbol{\nabla g}(x,y,z)$$

$$< 2,3,5 > = \lambda < 2x, 2y, 2z >$$

$$2 = 2\lambda x; \quad 3 = 2\lambda y; \quad 5 = 2\lambda y$$

Despejando x, y, z de las ecuaciones anteriores y sustituyendo en la ecuación de ligadura y resolviendo para x, resulta que:

$$x = \frac{1}{\lambda}; \quad y = \frac{3}{2\lambda}; \quad z = \frac{5}{2\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{25}{4\lambda^2} = 19$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, se presenta un máximo en:

$$x = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{2} \;\; ; \;\; y = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad z = \frac{5}{2\lambda} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{f(\sqrt{2}\ ,\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ,\frac{5\sqrt{2}}{2}) = 19\sqrt{2}}$$

Ejemplo 4

Hallar los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$

Caso I: Sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$

$$\boldsymbol{\nabla f}(x, y) = \lambda \boldsymbol{\nabla g}(x, y)$$

$$< 2x + \; 3y, 3x + 2y > = \lambda < 2x, 2y >$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Ec. 1. } 2x + 3y = 2\lambda x \\ \textbf{Ec. 2. } 3x + 2y = 2\lambda x \end{array}\right\} \quad x^2 = y^2$$

-Multiplicar la **Ec. 1.** Por y

$2xy + 3y^2 = 2\lambda xy$

-Multiplicar la **Ec. 2.** Por x

$3x^2 + 2xy = 2\lambda xy$

Ec. 3. $x^2 + y^2 = 1$

Por igualación de $2\lambda xy$

Resulta que $x^2 = y^2$

Sustituyendo $y^2 = x^2$ en la **Ec. 3.** Resulta que:

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Máximo: $f\left(x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Mínimo: $f\left(x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Caso II: Dentro del círculo

$$\left.\begin{array}{l} fx = 2x + 3y = 0 \\ fy = 3x + 2y = 0 \end{array}\right\} \quad x = y = 0$$

$f_{xx} = 2 \; ; \; f_{yy} = 2 \; ; f_{xy} = 3$

$$D = f_{xx} f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 \leq 0 = \mathbf{-5}$$

Como $D < 0$

Punto silla $f(0,0) = 0$

Por una combinación de dos casos se tiene un máximo de 5/2 para:

$\left(x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **y un mínimo de -1/2 para** $\left(x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

APLICACIÓN

Suponga que la temperatura de una lámina de metal está dada por $T(x,y)=x^2+2x+y^2$ para puntos (x,y) de la lámina elíptica definida por $x^2+4y^2\leq 16$. Halle las temperaturas máximas y mínimas de la lámina.

Solución:

Caso I

Analizando dentro de la elipse $x^2+y^2=16$

$$T(x,y)=x^2+2\mathrm{x}+y^2$$

$$T_x=2x+2 \qquad\qquad T_y=2y$$

Números críticos

$$2x+2=0 \qquad\qquad 2y=0$$

$$2x=-2 \qquad\qquad \boxed{\boldsymbol{y=0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x=-1}}$$

$$T_{xx}=2\,;\;T_{yy}y2\;\;;\;T_{xy}=0$$

Si $D=T_{xx}\,T_{yy}-\left(T_{xy}\right)^2$

$D=(2)(2)-0$

$D=4>0$

Se presenta un mínimo en $(-1{,}0)$

$$\boxed{\boldsymbol{T(-1,0)=-1}}$$

Caso II

Sobre la elipse $x^2+4y^2=16$

La función de restricción es $g(x,y)=\;x^2+4y^2-16$

$$\nabla T(x,y)=\lambda\nabla\boldsymbol{g}(x,y,z)$$

$$<2\mathrm{x}+2,2\mathrm{y}>=\lambda<2x,8y>$$

$$2x + 2 = 2\lambda x \qquad\qquad 2y = 8\lambda y$$

$$x + 1 = \lambda x \qquad\qquad y = 4\lambda y$$

$$x + 1 = \frac{x}{4} \qquad\qquad 1 = 4\lambda$$

$$4x + 4 = x \qquad\qquad \lambda = \frac{1}{4}$$

$$3x = -4$$

$$x = \frac{-4}{3}$$

Sustituyendo x y λ en la ecuación de ligadura, resulta que:

$$\frac{16}{9} + 4y^2 = 16$$

$$4y^2 = 16 - \frac{16}{9}$$

$$y^2 = \frac{128}{9}$$

$$y = \frac{\pm 8\sqrt{2}}{3}$$

Los extremos son:

$$T\left(-\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{40}{3}$$

$$T\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{40}{3}$$

Como $y = 0$ es un número crítico, considerando la ecuación de restricción $x^2 + 4y^2 = 16$ resulta que, $x = \pm 4$

Evaluando los extremos:

$$T(4,0) = 24$$

$$T(-4,0) = 24$$

Se concluye que:

Considerando los valores encontrados en los extremos se tiene el valor máximo de temperatura en $T(\pm 4, 0) = 24$ y el mínimo en $T(-1, 0) = 1$

Ejercicio 4.10

1. Hallar los valores mínimos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $xy = 1$.
2. Hallar los valores mínimos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $2x + 3y = 6$.
3. Halle los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $x^4 + y^4 = 1$.
4. Halle los valores máximos de $f(x,y,z) = 3x - 2y + z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.
5. Función de producción de Cobb-Douglas.

Un fabricante de relojes, invirtiendo en "x" unidades de mano de obra y en "y" unidades de capital puede producir $P(x,y) = 50\, x^{0.4}\, y^{0.6}$ relojes. Encuentre el máximo número de relojes que se pueden producir con un presupuesto de \$20,000 si la unidad de mano de obra cuesta \$100 y la unidad de capital cuesta \$200.

Soluciones al ejercicio 4.10

1. $f(\pm 1, \pm 1) = 2$
2. $f\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right) = \frac{36}{13}$
3. $Máximo\ en\ f\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}$; $Mínimo\ en\ f(x,y) = 1$
4. $Máximo\ en\ f(3,-2,1) = 14\ y\ mínimo\ en\ f(-3,2,-1) = -14$
5. $P(80,60) \approx 3365\ relojes.$

Actividad No. 18	Integradora	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar los conceptos de funciones de varias variables.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte escrito a mano que contenga las respuestas correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

I. Mostrar que la función "z" dada satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Si: $z=\frac{y}{x^2+y^2}$

II. Análisis de errores:

Para determinar la altura de un poste, el ángulo de elevación a la parte superior del poste se midió desde un punto de $50m \pm \frac{1}{2}m$ de la base. La medida del ángulo da 60°, con un posible error de 1°. Suponer que el suelo es horizontal, para aproximar el error máximo al determinar la altura del poste.

III. Hallar las derivadas indicadas: $\frac{\partial w}{\partial r}$; $\frac{\partial w}{\partial t}$

a) Utilizando la regla de la cadena apropiada.
b) Por sustitución antes de derivar.

Si $w=x^2+y^2+z^2$

$x=r\cos t\,;\, y=r\, sen\, t\,;\, z=t$

IV. Hallar la derivada direccional de la función dada en P en la dirección de **V.**

$w=y^2+xz$ $\qquad P(1,2,2)$ $\qquad \vec{\boldsymbol{v}}=2i-j+2k$

V. Una empresa fabrica un artículo en dos lugares.
La función de costo para producir "x" unidades en el lugar A y "y" unidades en el lugar B son:

$C_1=0.05x^2+15x+5400$
$C_2=0.03y^2+15y+6100$

Si la función del ingreso total está dada por:

$R = [225 - 0.4(x + y)](x + y)$

Hallar los niveles de producción de ambos lugares que maximiza el beneficio $P(x, y) = R - C_1 - C_2$

VI. Use multiplicadores de Lagrange para hallar las dimensiones de una lata cilíndrica con base y tapa, de volumen fijo "V" y que tenga área mínima.

a) Si $V = 355ml$, calcular las dimensiones del cilindro.
b) Fabrica el cilindro.
c) Compara las dimensiones obtenidas con las de una lata de refresco que contenga el mínimo volumen y argumenta el porqué de las diferencias en las dimensiones.