Propriétés des transformées de Fourier

Quelques démonstrations. Le reste des propriétés peut être démontré de façons analogues.

Autres notations dans les transformées de Fourier:

En posant ω=2πf :

$$TF[g(t)] = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad \rightarrow \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt$$

ω=2πf, dω=2πdf ➔ df=dω/2π:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft}df \quad \rightarrow \text{g(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega / 2\pi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Linéarité:

$a_1g_1(t) + a_2g_2(t) \leftrightarrow a_1G_1(f) + a_2G_2(f)$

$$TF[a_1g_1(t) + a_2g_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[a_1g_1(t) + a_2g_2(t)]e^{-i2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1g_1(t)e^{-i2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2g_2(t)e^{-i2\pi ft}dt = a_1G_1(f) + a_2G_2(f)$$

Symétrie:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft}df. \qquad \text{Changer t} \leftrightarrow \text{-t} \Rightarrow \quad g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{-i2\pi ft}df$$

En interchangeant t et f: $g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{-i2\pi ft}dt = TF(G(t))$

Échelle du temps:

$$g(at) = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \text{avec a} \in \text{R*}.$$

$$TF[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-i2\pi ft}dt \qquad \text{x = at} \Rightarrow \text{dx = adt} \Rightarrow \text{dt = dx/a}$$

Si a > 0: $FT[g(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi fx/a}dx = \frac{1}{a}G(f/a)$

C'est l'argument de l'exponentiel qui donne l'argument de G.

Si a < 0: $FT[g(at)] = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} g(x)e^{-i2\pi fx/a}dx = \frac{1}{-a}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi fx/a}dx = \frac{1}{|a|}G(f/a)$

$$FT[g(at)] = \frac{1}{|a|}G(f/a)$$

Parité:

$G(\omega)$ est la transformée de Fourier de g(t)

Si g(t) est réelle et paire ⇒ $G(\omega)$ est réelle et paire

Si g(t) est réelle et impaire ⇒ $G(\omega)$ est imaginaire et impaire

Si $G(\omega)$ est réelle et positive ⇒ elle fait un angle 0 avec l'axe des réels ⇒ la phase vaut zéro ($\phi(\omega) = 0$).

Si $G(\omega)$ est réelle et négative ⇒ elle fait un angle de $\pm\pi$ avec l'axe des réels ⇒ la phase vaut $\pm\pi$ ($\phi(\omega) = \pm\pi$).

TABLE 8.8 Fourier Transform Properties and Theorems

Property	$f(t)$	$F(\omega)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \ldots$
Symmetry	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Time Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time Shifting	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$
Time Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Frequency Differentiation	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Time Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
Conjugate Functions	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Time Convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$
Frequency Convolution	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega)*F_2(\omega)$
Area under f(t)	$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$	
Area under F(w)	$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$	
Parseval's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2 d\omega$	

La fonction de Dirac δ

La fonction de Dirac δ peut être définie comme la dérivée de la fonction de Heaviside qui est définie comme:

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1/2 & si \quad t = 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$$

et δ(x) est définie comme:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases} \qquad \left(\delta \text{ de Kronecker } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 & \text{si} \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases} \right)$$

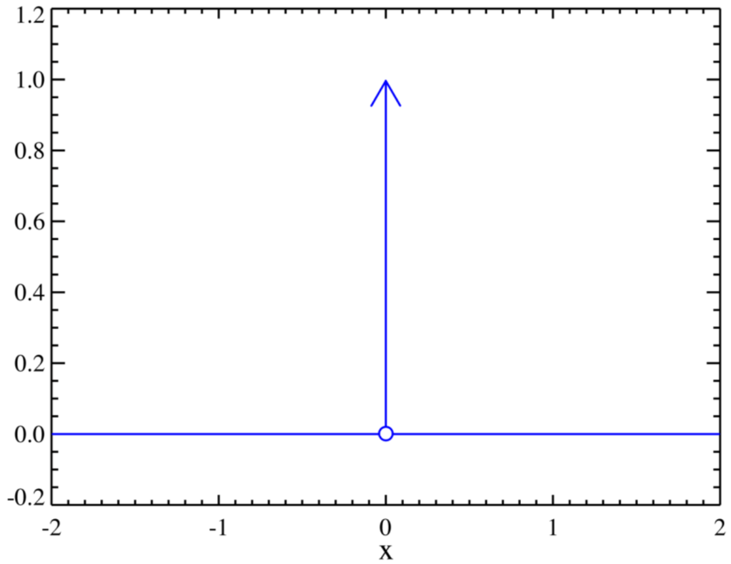

Figure. Fonction de Dirac δ.

Les propriétés de δ(x):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Le peigne de Dirac ou train d'impulsions:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

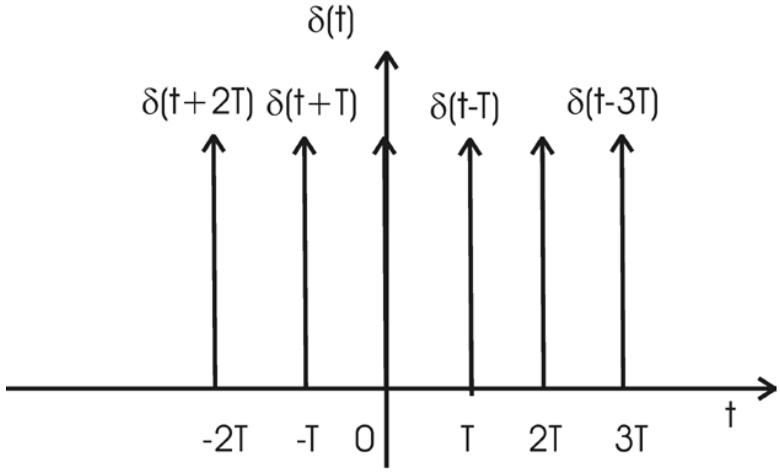

Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

Transformées de Fourier généralisées

Certaines fonctions ne sont pas de carrés intégrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \infty$$

c'est le cas des fonctions périodiques comme le sinus et le cosinus, la fonction de Heaviside, une constante etc....

Fonction de Heaviside: $H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1/2 & si \quad t = 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$

Par définition, une fonction généralisée à progrès lent g(t) est une fonction associée à une fonction symbolique ϕ(t) qui décroît rapidement:

$$\langle g(t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$$

Pour calculer les transformées de Fourier de fonctions généralisées, on utilise la formule de Parseval.

La formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)dx$$

Celle-ci peut être démontrée de la façon suivante, en utilisant les transformées de Fourier:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy\right]dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right]dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)F(y)dy$$

et en changeant la variable y en x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(x)dx$$

Cette équation peut se rapporter aux transformées de Fourier comme suit, en intégrant sur ω:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)TF[g(t)]d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} TF[f(t)]g(\omega)d\omega$$

ou bien, en intégrant sur t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF^{-1}[F(\omega)]G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)TF^{-1}[G(\omega)]dt$$

Dans les deux cas, nous avons conservé la même variable ω ou t pour f et F et pour g et G.

Exemple 1:

Trouver la TF d'une constante, soit g(t) = 1.

g(t) = 1 est à progrès lent.

En utilisant la formule de Parseval avec la fonction rapidement décroissante ϕ(t):

Soit la formule de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\Phi(x)dx$

qui devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt\right]_{\omega=0}$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt\right]_{\omega=0} = TF[\Phi(t)]_{\omega=0}$$

et par la propriété de la symétrie:

$$TF[\Phi(t)]_{\omega=0} = [2\pi\phi(-\omega)]_{\omega=0} = 2\pi\phi(0)$$

Par la propriété de δ(x): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

$$2\pi\phi(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

Finalement, en reprenant l'équation de départ $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$ et en

remplaçant le second membre par le résultat précédent qui est $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

et en identifiant le contenu des intégrales des deux membres de l'équation:

$TF[g(t)] = G(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

Noter que dans cet exemple nous avons conservé ω pour simplifier les écritures au lieu de travailler avec $2\pi f$.

Exemple 2:

Calculer la TF de $\delta(t)$.

$\delta(t)$ est une fonction généralisée à progrès lent.

Par définition: $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$

soit $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\Phi(t)dt = \Phi(0)$

aussi $\Phi(0) = TF[\phi(t)]_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-i\omega t}dt\right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)d\omega$ par changement de variable $t \rightarrow \omega$.

ainsi $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\phi(\omega)d\omega$

et par identification:

$$FT[\delta(t)] = G(\omega) = 1$$

On aurait pu faire le calcul directement : $\mathrm{FT}[\delta(\mathrm{t})] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t}\Big|_{t=0} = 1$

En conclusion, la TF d'une constante est une fonction δ, et la TF d'une fonction δ est une constante.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t)=\exp(i\omega_o t)$

$g(t)$ peut être réécrite sous la forme $g(t)=f(t)\exp(i\omega_o t)$. Par la propriété du décalage de la fréquence: $TF[f(t)\exp(i\omega_0 t)] = F(\omega-\omega_0)$. Et comme $f(t) = 1$, et de l'exemple 1 ci-dessus: $TF[1] = 2\pi\delta(\omega)$ ➔ $TF[\exp(i\omega_o t)] = 2\pi\delta(\omega-\omega_o)$. C'est un décalage de fréquence de la fonction δ.

Exemple 4:

Calculer la TF de $\cos(\omega_o t)$ et $\sin(\omega_o t)$.

$\cos(\omega_o t) = (\exp(i\omega_o t) + \exp(-i\omega_o t))/2$

$TF[\cos(\omega_o t)] = TF[(\exp(i\omega_o t) + \exp(-i\omega_o t))/2]$

$= \pi\delta(\omega-\omega_o) + \pi\delta(\omega+\omega_o)$

Pour le sinus : $TF[\sin(\omega_o t)] = -i\pi\delta(\omega-\omega_o) + i\pi\delta(\omega+\omega_o)$

Quelques fonctions courantes et leur transformée de Fourier

TABLE 8.9 Common Fourier transform pairs

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{-j\omega t_0}$ exp(jw0t)	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$sgn(t)$	$2/(j\omega)$
$u_0(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$e^{-at}u_0(t)$ $a>0$	$\frac{1}{j\omega+a}$ $a>0$
$te^{-at}u_0(t)$ $a>0$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$ $a>0$
$e^{-at}\cos\omega_0 t u_0(t)$ $a>0$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega^2}$ $a>0$
$e^{-at}\sin\omega_0 t u_0(t)$ $a>0$	$\frac{\omega}{(j\omega+a)^2+\omega^2}$ $a>0$
$A[u_0(t+T)-u_0(t-T)]$	$2AT\frac{\sin\omega T}{\omega T}$

Transformée de Fourier à deux dimensions

Si l'on remplace $2\pi f$ par ω, la paire de Fourier s'écrit:

$$G(\omega) = FT(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = FT^{-1}(G(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} df$$

Par analogie, on détermine les paires en 2 dimensions (2D):

$$G(u,v) = TF(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i(ux+vy)} dxdy$$

$$g(x,y) = TF^{-1}(G(u,v)) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(u,v) e^{i(ux+vy)} dudv$$

Exercices :

1. Calculer la TF de $\delta(t-t_0)$.
2. Calculer la TF de $\delta(t+t_0)$.
3. Montrer que $TF[\delta(t+t_0) + 2\delta(t) + \delta(t-t_0)] = 4\cos^2(\omega t_0/2)$.

Notes extra de démonstrations faites en classe

— La fonction porte $f(t) = \Pi(t)$ est définie comme :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sa TF est $F(w) = \text{sinc}(w/2)$. Le sinc est le sinus cardinal défini comme

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

— Étant donnée une fonction Gaussienne :

$$g(t) = \exp(-t^2/(2\sigma^2))$$

Telle que vue en classe, à l'aide de la complétion de carré, sa TF est

$$G(f) = \sqrt{2\sigma^2\pi}\,\exp(-2\pi^2\sigma^2 f^2)$$

Il est important de noter la définition de la TF utilisée ici. Rappelez-vous qu'il y a 2 définition de la TF, une avec la fréquence f, et une avec la fréquence angulaire ω. Ici, quand j'utilise la variable f, on utilise la définition de la TF qui a un 2π dans l'équation et qui est souvent celle implémentée dans les logiciels et librairies (python, matlab, ...). Par exemple, voir `https://mathworld.wolfram.com/FourierTransformGaussian.html`.

— Quelques exemples faits en classe de propriétés de la TF. Il faut faire attention aux changements de variables et ordre des propriétés.

...