

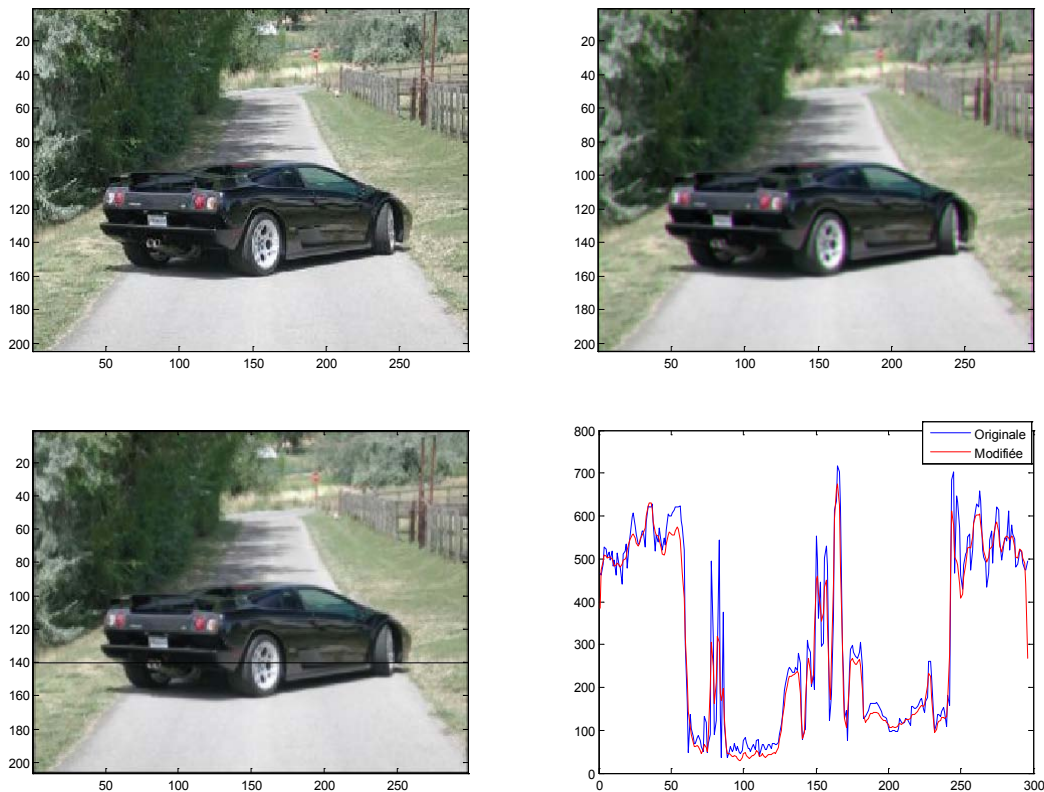
V. La convolution

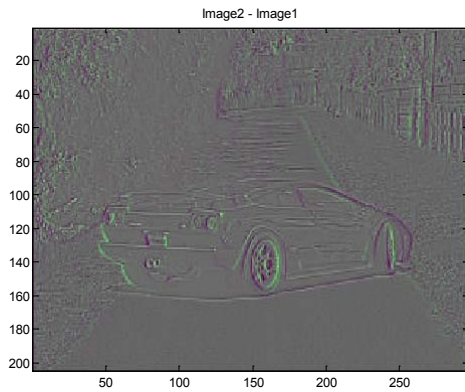
Exemple 1.

Un système de mesure introduit inéluctablement une déformation de l'objet mesuré. Cette déformation est appelée réponse du système.

Un système de mesure numérique est encore plus drastique où une portion de l'objet à mesurer doit être représentée par un point de mesure statistiquement défini (pixel, voxel, intervalle de temps etc...).

L'exemple ci-dessous représente des portions de l'objet par des pixels. Plus la taille des pixels est grosse, plus l'image perd les détails. L'objet est convolué par la fonction de réponse du système de mesure (*point spread function* en anglais).





Exemple 2. Faire la moyenne entre 3 nombres successifs du vecteur $a = [0 \ 4 \ 1 \ 3 \ 6 \ 5 \ 2 \ 0]$ en faisant la moyenne de chaque valeur avec ses deux voisines. (Par exemple dans un but de réduire les écarts entre les valeurs expérimentales a):

$$(0+0+4)/3 = 1.33; (0+4+1)/3=1.67; (4+1+3)/3=2.67.....$$

On trouve: $b = [1.33 \ 1.67 \ 2.67 \ 3.33 \ 4.67 \ 4.33 \ 2.33 \ 0.67]$.

Exemple 3. La moyenne entre les 3 nombres successifs du vecteur précédent peut se faire avec l'opération de convolution:

L'opération de convolution: $b = a \otimes h = h \otimes a$. $b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)h(k-n)$ et $0 \leq k \leq N+M-1$ avec N

et M sont les longueurs de a et de h respectivement.

Exemple d'application de cette formule:

$a=[1 \ 2 \ 3]$, $h=[1 \ 3]$. Calculer $b=a \otimes h$. Nous pouvons utiliser les indices $n=0:N-1$. n est l'indice du vecteur a . Dans cet exemple, les indices de a sont 0, 1 et 2, et les indices de h sont 0 et 1. Les valeurs de a et de h ailleurs qu'à ces indices valent 0. Comme le vecteur a possède 3 valeurs et h possède 2 valeurs, le produit de la convolution b aura $3+2-1=4$ valeurs ce qui implique que b a pour indices k variant de 0 à 3:

	n=0		n=1		n=2
k=0:	$b(0) = a(0).h(0-0)$	+	$a(1).h(0-1)$	+	$a(2).h(0-2) = 1.1 + 2.0 + 3.0 = 1$
k=1:	$b(1) = a(0).h(1-0)$	+	$a(1).h(1-1)$	+	$a(2).h(1-2) = 1.3 + 2.1 + 3.0 = 5$
k=2:	$b(2) = a(0).h(2-0)$	+	$a(1).h(2-1)$	+	$a(2).h(2-2) = 1.0 + 2.3 + 3.1 = 9$
k=3:	$b(3) = a(0).h(3-0)$	+	$a(1).h(3-1)$	+	$a(2).h(3-2) = 1.0 + 2.0 + 3.3 = 9$

L'opération peut-être faite en intervertissant les arguments de a et de h comme suit:

$$b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k-n)h(n) \text{ et } 0 \leq k \leq N+M-1.$$

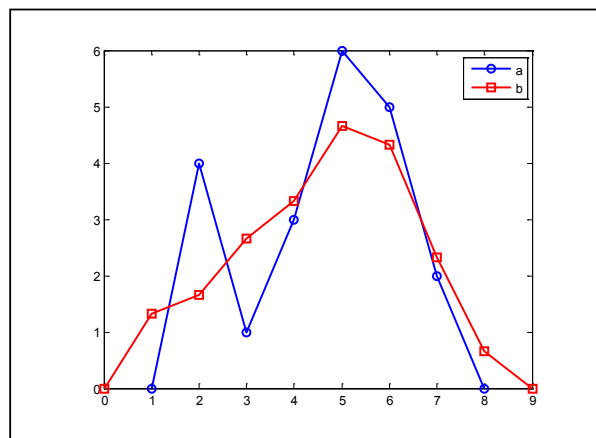
	n=0		n=1		n=2	
k=0:	b(0)= a(0-0).h(0)	+	a(0-1).h(1)	+	a(0-2).h(2)	= 1.1 + 0.3 + 0.0 = 1
k=1:	b(1)= a(1-0).h(0)	+	a(1-1).h(1)	+	a(1-2).h(2)	= 2.1 + 1.3 + 0.0 = 5
k=2:	b(2)= a(2-0).h(0)	+	a(2-1).h(1)	+	a(2-2).h(2)	= 3.1 + 2.3 + 3.0 = 9
k=3:	b(3)= a(3-0).h(0)	+	a(3-1).h(1)	+	a(3-2).h(2)	= 0.1 + 3.3 + 2.0 = 9

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'évaluer pour n=2 car h(2)=0, et le calcul se réduit à 2 colonnes correspondant aux valeurs de h.

		0	4	1	3	6	5	2	0	
0.33	0.33	0.33								0
	0.33	0.33	0.33							1.33
		0.33	0.33	0.33						1.67
			0.33	0.33	0.33					2.67
				0.33	0.33	0.33				3.33
					0.33	0.33	0.33			4.67
						0.33	0.33	0.33		4.33
							0.33	0.33	0.33	2.33
								0.33	0.33	0.67
									0.33	0

Avec n=3 valeurs pour h, il faut m+n-1=10 opérations de multiplications-additions pour couvrir les m=8 valeurs de a.

```
a = [0 4 1 3 6 5 2 0]; h=[1 1 1]; h = h / sum(h);
b = conv(a,h); figure;plot(1:length(a),a,'bo-','(1:length(b))-1,b','rs-', 'linewidth',2);
set(gcf, 'xcolor',[0 0 0], 'ycolor',[0 0 0], 'FontSize',16);
set(gcf, 'Color',[1 1 1], 'Position',[280 200 680 500], 'InvertHardCopy','off');
legend('a','b'); print -dmeta convol_ab
```



Exemple 4.

Faire le produit de deux polynômes a et b :

$$a = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$$

$$b = 2x^2 + x + 3$$

$$\begin{aligned} c = a * b &= (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x)(2x^2 + x + 3) \\ &= 2x^6 + 5x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 3x. \end{aligned}$$

Faire la convolution de a et b :

$$a = [1 \ 2 \ 3 \ 1]$$

$$b = [2 \ 1 \ 3]$$

$$c = a \otimes b = [2 \ 5 \ 11 \ 11 \ 10 \ 3]$$

La convolution est une multiplication polynomiale.

Connaissant c et b , on peut retrouver a par une division polynomiale: $a = c/b$.

La déconvolution est une division polynomiale. [La division ne donne pas toujours un quotient sans reste, si bien que le quotient pourrait être très approximatif.]

Exemple 5. L'opération de la convolution vue comme un produit matriciel. Cette approche est utilisée lors des convolutions non-stationnaires.

$$a = [1 \ 2 \ 3 \ 1]$$

$$b = [2 \ 1 \ 3]$$

$$c = a \otimes b = [2 \ 5 \ 11 \ 11 \ 10 \ 3]$$

qui peut s'écrire sous la forme:

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemple 6:

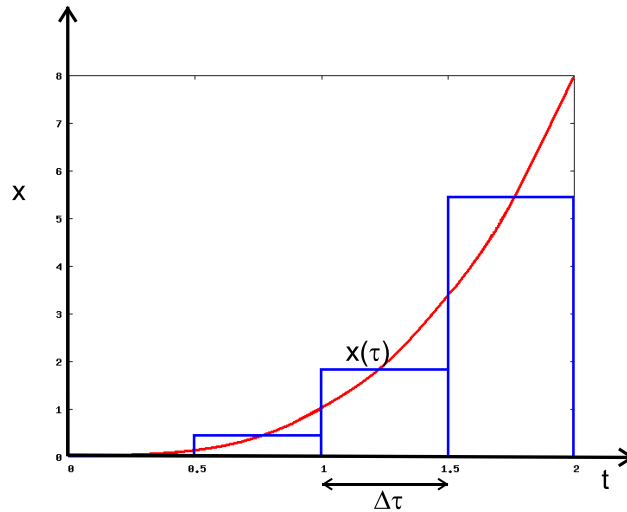
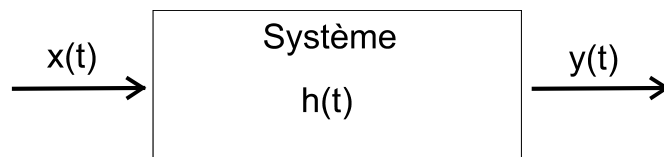


Figure. La courbe $x(t)$ a été mesurée à $t=\tau$ sur un intervalle $\Delta\tau$.

Supposons que les signaux $x(t)$ sont des signaux instantanés delta mesurés pendant $\Delta\tau$. Ceci équivaut à un signal δ de Dirac pondéré par la surface du rectangle $x(\tau)\Delta\tau$: $x(\tau)\Delta\tau\delta(\tau)$.

Pour une position quelconque τ_k , ceci devient: $x_k(t)=x(\tau_k)\Delta\tau\delta(t-\tau_k)$.

Ce signal $x_k(t)$ est transformé par un système de fonction de réponse h pour devenir: $y_k(t)=x(\tau_k)\Delta\tau h(t-\tau_k)$.



En considérant tous les points de $x(t)$, on trouve:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n x(\tau_k) h(t - \tau_k) \Delta\tau$$

et lorsque $\Delta\tau$ tend vers 0: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$

Définition de la convolution

La convolution de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} est donnée par:

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Ici t est une variable quelconque et ne représente pas uniquement le temps.

La convolution existe et est définie si:

1- $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions de carré intégrable:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \infty \text{ et } \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \infty$$

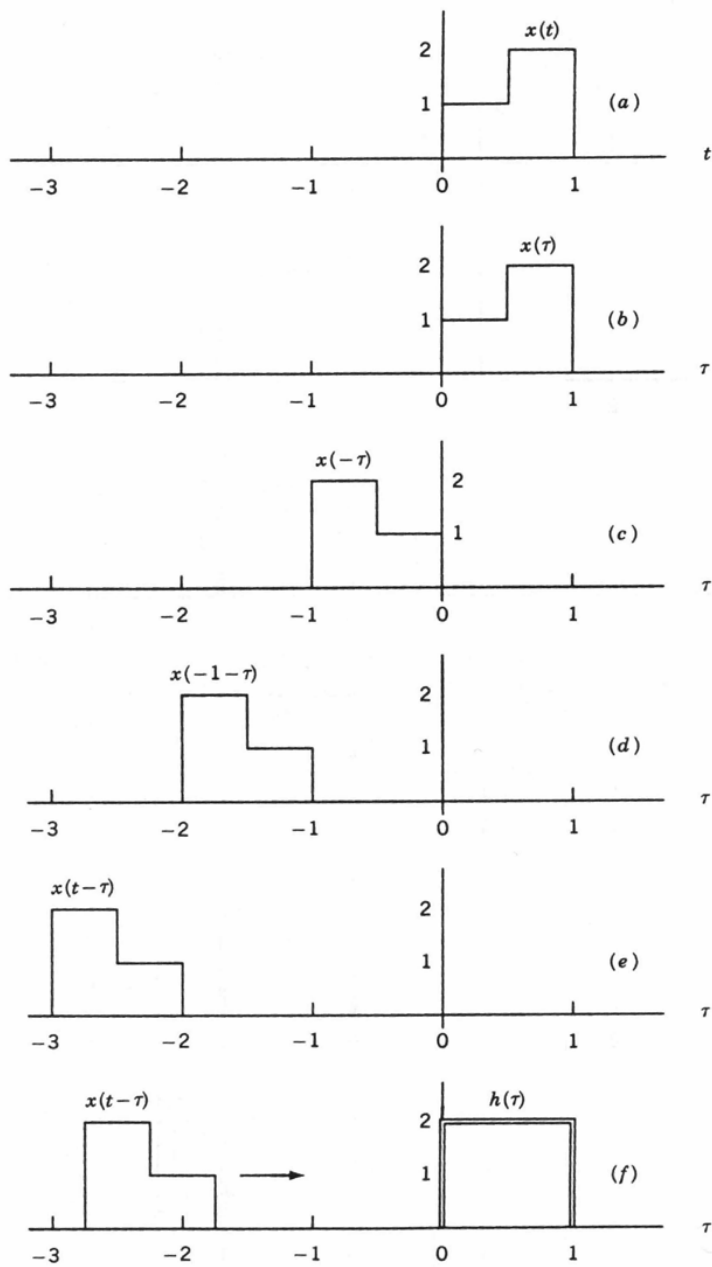
ou bien:

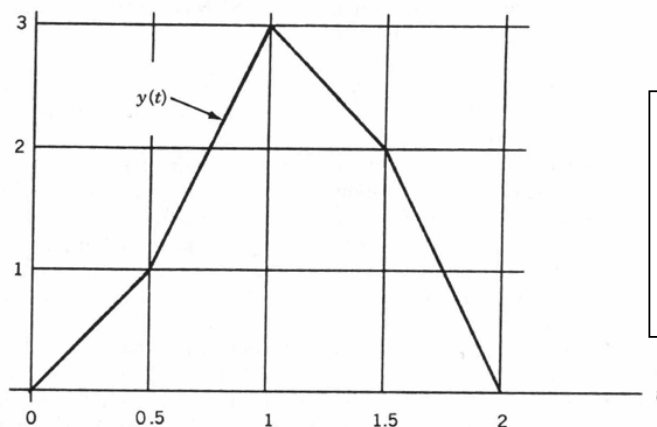
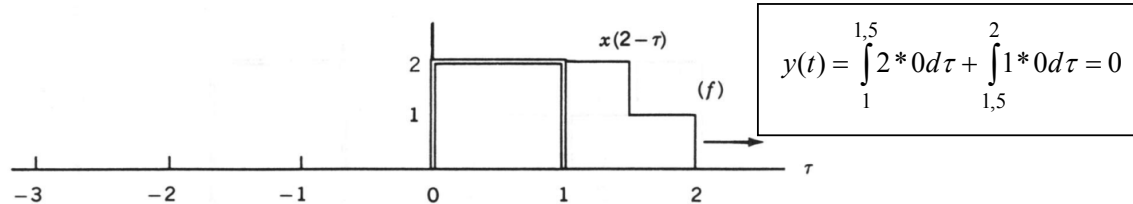
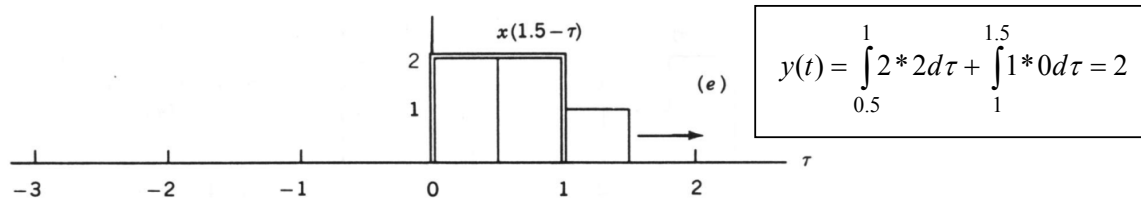
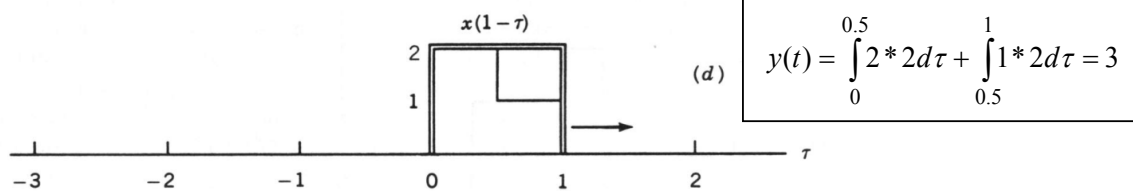
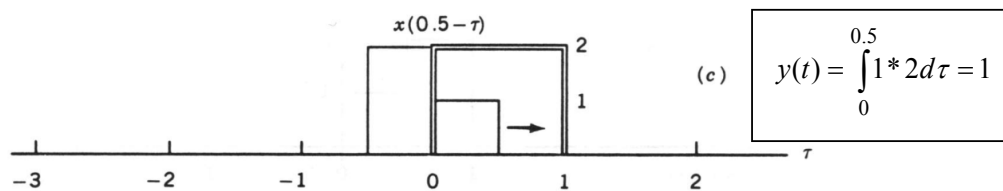
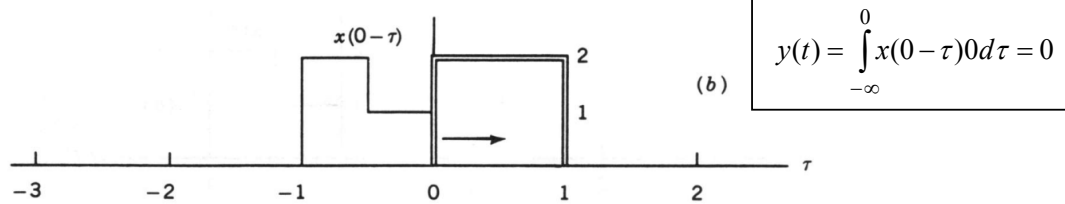
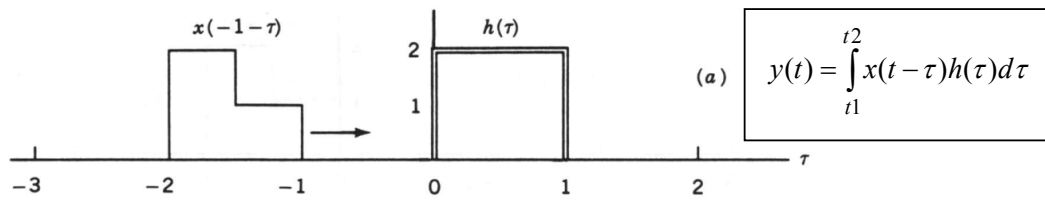
$$|f(t) \otimes g(t)| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} < \infty$$

2- $f(t)$ est intégrable et $g(t)$ est bornée.

Exemple 1:

Calcul **graphique** de la convolution.





Par calcul **numérique**:

```
x = [0 1 2 0];
h = [1 1];
y = conv(x,h)
y = [0 1 3 2 0];
```


Exemple 2.

Calcul **analytique** de la convolution.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = e^{-t}u(t) \quad u(t) = \text{fonction de Heaviside.}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \Leftrightarrow g(t) = t[u(t) - u(t-T)]$$

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)(t-\tau)[u(\tau) - u(\tau-T)]d\tau$$

$$\begin{cases} t < 0 & f(t) \otimes g(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq T & f(t) \otimes g(t) = \int_0^t e^{-\tau}(t-\tau)d\tau = t \int_0^t e^{-\tau}d\tau - \int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau = [-te^{-\tau} + t] + [e^{-\tau}(t+1) - 1] = e^{-t} + t - 1 \\ t \geq T & f(t) \otimes g(t) = \int_{t-T}^t e^{-\tau}(t-\tau)d\tau = e^{-(t-T)}(T-1) + e^{-t} \end{cases}$$

Soit $h = f \otimes g$. $h(t < 0) = 0$; $h(0 \leq t \leq T) = \exp(-t) + t - 1$;

$h(t \geq T) = \exp(-(t-T))(T-1) + \exp(-t)$.

```
T=2;ts=0.1;t1=-T:ts:0;h1=0*t1; t2=0: ts:T;h2= exp(-t2) + t2 - 1; t3=T: ts:2*T;h3= exp(-(t3-
T))*(T-1) + exp(-t3); t=[t1 t2 t3]; h=[h1 h2 h3]; figure;plot(t,h,'bo-','linewidth',2);
set(gca, 'xcolor',[0 0 0], 'ycolor',[0 0 0], 'FontSize',16);
set(gcf, 'Color',[1 1 1], 'Position',[280 200 680
500], 'InvertHardCopy','off');
xlabel('t');ylabel('Amplitude'); print -dmeta convol_exp1
```

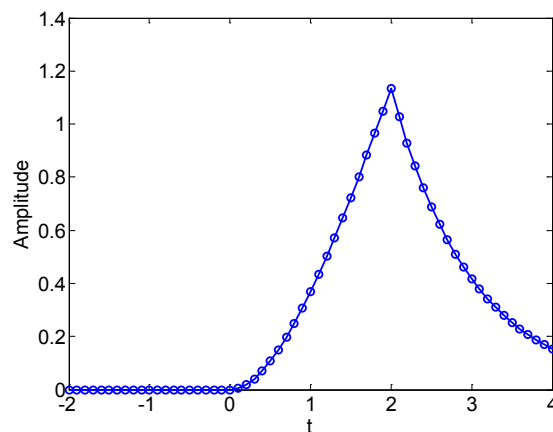


Figure. Graphique de $h = f \otimes g$ calculée analytiquement.

Prenons le même exemple et retrouvons les résultats par la convolution de $f(t)$ et $g(t)$

numériquement:

```
T=2; ts=0.1; t1=-T:ts:0; f1=0*t1; g1=0*t1;
t2=0:ts:T; f2=exp(-t2); g2=t2;
t3=T:ts:2*T; f3=exp(-t3); g3=0*t3;
t=[t1 t2 t3]; f=[f1 f2 f3]; g=[g1 g2 g3];
figure; plot(t, f, 'bo-', t, g, 'rs-', 'linewidth', 2); set(gca, 'xcolor', [0 0 0], 'ycolor', [0
0 0], 'FontSize', 16);
set(gcf, 'Color', [1 1 1], 'Position', [280 200 680
500], 'InvertHardCopy', 'off');
xlabel('t'); ylabel('Amplitude'); legend('f(t)', 'g(t)'); print -dmeta convol_exp2;

h=conv(f,g); imax=find(h==max(h)); t1=(-imax+1)*ts+2:ts:2; t2=2+ts:0.1:(length(h)-imax-
1)*ts+2+ts; t=[t1 t2]; figure; plot(t, h, 'bo-', 'linewidth', 2); set(gca, 'xcolor', [0 0
0], 'ycolor', [0 0 0], 'FontSize', 16);
set(gcf, 'Color', [1 1 1], 'Position', [280 200 680
500], 'InvertHardCopy', 'off');
xlabel('t'); ylabel('Amplitude'); legend('f(t)*g(t)'); axis([-4.2 8.1 0 13]); print -dmeta
convol_exp3;
```

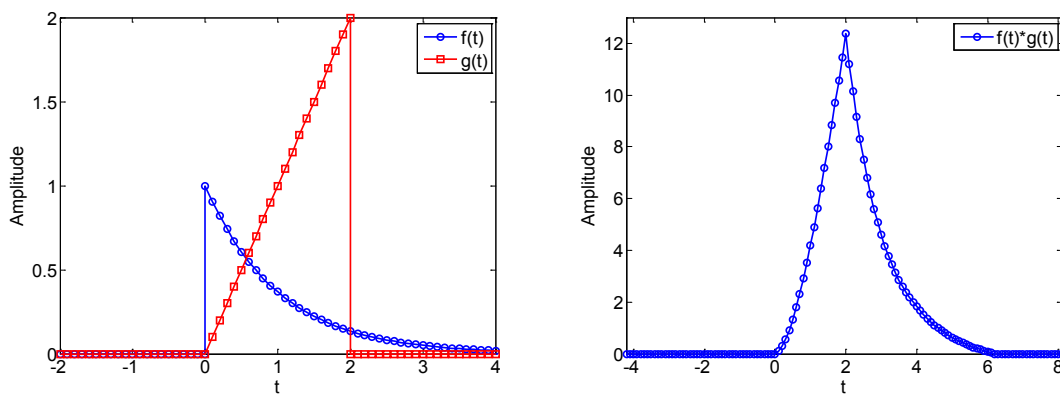


Figure. Graphiques de $f(t)$ et $g(t)$. Figure. Graphique de $h = f \otimes g$.

% t de la dernière figure est utilisé ici, et en normalisant h par rapport à ha:

```
T=2; ts=0.1; t1=min(t):ts:0; h1=0*t1; t2=ts:ts:T; h2= exp(-t2) + t2 - 1; t3=T+ts: ts:max(t); h3=
exp(-(t3-T))*(T-1) + exp(-t3); ta=[t1 t2 t3]; ha=[h1 h2 h3]; figure; plot(ta, ha, 'bo-
', ta, h*tot1(ha)/tot1(h), 'r*', 'linewidth', 2); set(gca, 'xcolor', [0 0 0], 'ycolor', [0 0
0], 'FontSize', 16); set(gcf, 'Color', [1 1 1], 'Position', [280 200 680
500], 'InvertHardCopy', 'off'); xlabel('t'); ylabel('Amplitude'); legend('f(t)*g(t) analytique',
'f(t)*g(t) numérique'); axis([-4.2 8.1 0 1.5]); print -dmeta convol_exp4;
```

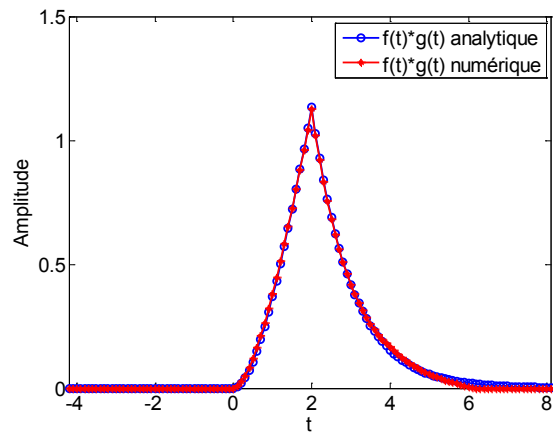


Figure. $h(t)$ analytique et numérique.

Exemple 3:

Calcul analytique de la convolution.

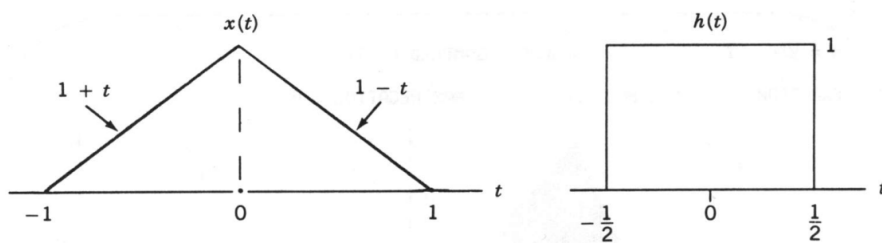


Figure 7.15. $x(t)$ and $h(t)$.

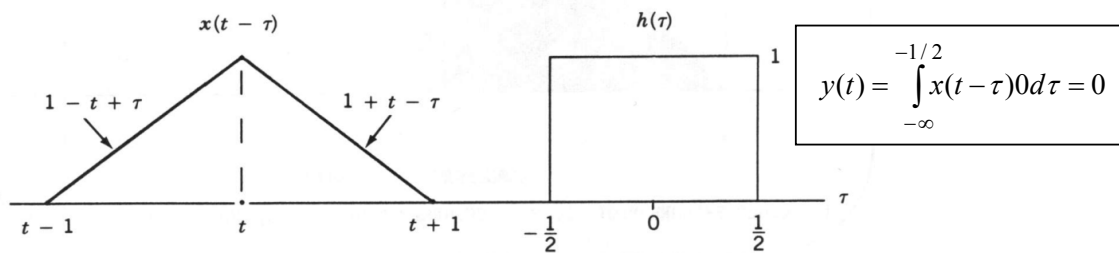


Figure 7.16. Case 1, $t < -\frac{3}{2}$.

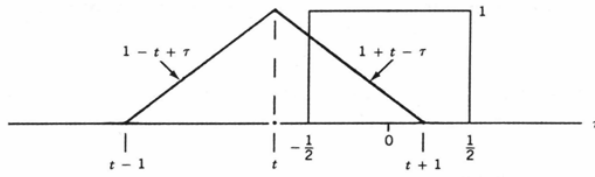


Figure 7.17. Case 2, $-\frac{1}{2} < t < -\frac{1}{2}$.

$$y(t) = \int_{-1/2}^{t+1} (1+t-\tau) * 1 d\tau = \frac{4t^2 + 12t + 9}{8}$$

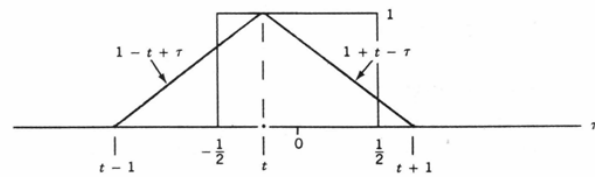


Figure 7.18. Case 3, $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.

$$y(t) = \int_{-1/2}^t (1-t+\tau) * 1 d\tau + \int_t^{1/2} (1+t-\tau) * 1 d\tau = \frac{-4t^2 + 3}{4}$$

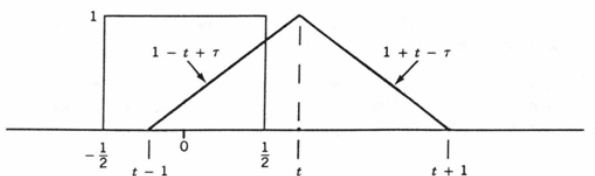


Figure 7.19. Case 4, $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$.

$$y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (1-t+\tau) * 1 d\tau = \frac{4t^2 - 12t + 9}{8}$$

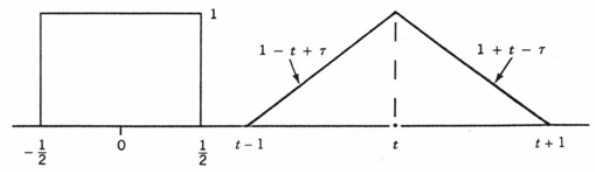
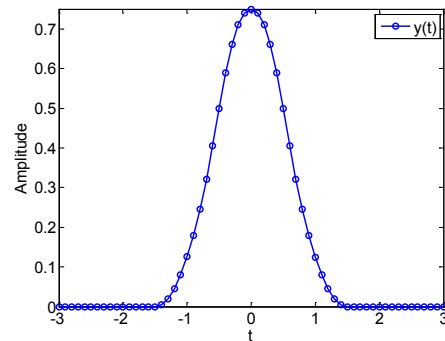


Figure 7.20. Case 5, $\frac{3}{2} < t$.

$$y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (1-t+\tau) * 0 d\tau = 0$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < -\frac{3}{2}\right) \\ \frac{9 + 12t + 4t^2}{8} & \left(-\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2}\right) \\ \frac{3 - 4t^2}{4} & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right) \\ \frac{9 - 12t + 4t^2}{8} & \left(\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{3}{2} < t\right) \end{cases}$$



% Tracer y(t) analytique comme définie ci-dessus:

```
ts=0.1; t1=-3:ts:-3/2; y1=0*t1; t2=-3/2+ts:ts:-1/2; y2=(9+12*t2+4*t2.^2)/8; t3=-1/2+ts:ts:1/2; y3=(3-4*t3.^2)/4; t4=1/2+ts:ts:3/2; y4=(9-12*t4+4*t4.^2)/8; t5=3/2+ts:ts:3; y5=0*t5; t=[t1 t2 t3 t4 t5]; y=[y1 y2 y3 y4 y5]; figure;plot(t,y,'bo-','linewidth',2); set(gca,'xcolor',[0 0 0],'ycolor',[0 0 0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 200 680 500],'InvertHardCopy','off');xlabel('t');ylabel('Amplitude'); legend('y(t)');axis([-4.2 8.1 0 1.5]); print -dmeta convol_triang1;
```

Les propriétés de la convolution:

La commutativité: $g_1(t) \star g_2(t) = g_2(t) \star g_1(t)$.

$$g_1(t) \otimes g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t - \tau) d\tau$$

En faisant le changement de la variable de $t - \tau = x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t - x) g_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) g_1(t - x) dx = g_2(t) \otimes g_1(t)$$

L'associativité: $[g_1(t) \star g_2(t)] \star g_3(t) = g_1(t) \star [g_2(t) \star g_3(t)]$.

$$f(t) = g_1(t) \otimes g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) g_2(t - y) dy$$

$$f(t) \otimes g_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_3(t - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) g_2(x - y) dy \right] g_3(t - x) dx$$

En substituant $z = x - y$:

$$f(t) \otimes g_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(z) g_3(t - y - z) dz \right] dy$$

$$\text{Soit: } h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(z) g_3(t - z) dz$$

qui donne avec $t = t - y$:

$$h(t - y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(z) g_3(t - y - z) dz$$

$$\begin{aligned} f(t) \otimes g_3(t) &= [g_1(t) \otimes g_2(t)] \otimes g_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) h(t - y) dy = g_1(t) \otimes h(t) \\ &= g_1(t) \otimes [g_2(t) \otimes g_3(t)] \end{aligned}$$

La distributivité: $g_1(t) \star [g_2(t) + g_3(t)] = g_1(t) \star g_2(t) + g_1(t) \star g_3(t)$.

La convolution et les transformées de Fourier:

$$\omega = 2\pi f.$$

$$\text{TF}[g_1(t) \star g_2(t)] = G_1(\omega) G_2(\omega) \text{ et } \text{TF}[G_1(\omega) G_2(\omega)] = g_1(t) \star g_2(t).$$

$$\text{TF}[g_1(t) \star g_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(t - x) dx \right] e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t - x) e^{-i\omega t} dt \right] dx$$

à l'aide de la propriété du décalage dans le temps (Time shifting):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-x)e^{-i\omega t} dt = G_2(\omega)e^{-i\omega x}$$

qui est substituée dans l'équation précédente:

$$\begin{aligned} TF[g_1(t) \boxtimes g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)G_2(\omega)e^{-i\omega x} dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)e^{-i\omega x} dx \right] G_2(\omega) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)e^{-i\omega t} dt \right] G_2(\omega) = G_1(\omega)G_2(\omega) \end{aligned}$$

La convolution et les transformées de Fourier inverses:

$$TFI[G_1(\omega) \boxtimes G_2(\omega)] = 2\pi g_1(t)g_2(t)$$

$$\text{et } TF[g_1(t)g_2(t)] = [G_1(\omega) \boxtimes G_2(\omega)]/2\pi.$$

Le théorème de Parseval:

Soit $TF[g(t)] = G(\omega)$ et $g^*(t)$ est le conjugué de $g(t) \implies$

$$TF[g^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)e^{i\omega t}]^* dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} [g(t)e^{-i(-\omega)t}] dt \right]^* = G^*(-\omega)$$

De la propriété de la convolution dans l'espace des fréquences qui s'écrit:

$$TF[g_1(t)g_2(t)] = [G_1(\omega) \boxtimes G_2(\omega)]/2\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(y)G_2(\omega-y)dy$$

qui s'écrit à son tour:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g_1(t)g_2(t)]e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(y)G_2(\omega-y)dy$$

en faisant $\omega = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(y)G_2(-y)dy$$

puis en changeant y en ω dans le membre de droite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2(-\omega)d\omega$$

En prenant le conjugué $g_2^*(t)$ de $g_2(t)$, nous obtenons selon ce qui a été démontré ci-haut

$$TF[g_2^*(t)] = G_2^*(-\omega):$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2^*[-(-\omega)]d\omega$$

qui devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2^*(\omega)d\omega$$

Qui est l'identité de Parseval.

Si on considère $g(t)=g_1(t)$ et $g^*(t)=g_2^*(t)$, l'équation précédente devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G^*(\omega)d\omega$$

qui peut s'écrire:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

Qui est l'identité de Plancherel.

Dans le monde discret, la normalisation par (2π) est remplacé par la taille du signal de période N ; c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{N-1} |g[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |G[k]|^2$$

1- La corrélation

Définition: La corrélation croisée entre $g_1(t)$ et $g_2(t)$ permet de mesurer le degré de similitude entre les deux fonctions. Si la corrélation croisée vaut 0, les fonctions sont dites non-corrélées.

La corrélation croisée est donnée par:

$$r_{12}(s) = g_1 \circ g_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t+s)dt \quad \text{et} \quad r_{21}(s) = g_2 \circ g_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)g_1(t+s)dt$$

L'autocorrélation de la fonction $g_1(t)$ est donnée par:

$$r_{11}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_1(t+s)dt$$

L'autocorrélation peut être normalisée comme suit:

$$\gamma(s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_1(t+s)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [g_1(t)]^2 dt} \quad \text{et dans ce cas } \gamma(0) = 1.$$

Les définitions ne changent pas en changeant t en $t-s$ dans les corrélations croisées et les autocorrélations.

$$r_{12}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t+s)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-s)g_2(t)dt$$

$$r_{21}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)g_1(t+s)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-s)g_1(t)dt$$

$$r_{11}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_1(t+s)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-s)g_1(t)dt$$

Propriétés des corrélations:

$$r_{12}(s) = r_{21}(-s)$$

$$r_{11}(s) = r_{11}(-s)$$

Fonctions discrètes:

De façon similaire à la convolution, on utilise un filtre de corrélation h , de préférence avec un nombre impaire d'éléments, soit $2N+1$. La corrélation s'écrit:

$$(h \circ g)(n) = \sum_{i=-N}^N h(i)g(n+i)$$

Exemple 1.

$g1=[5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6]$.

On désire faire la moyenne de 3 éléments consécutifs de $g1$ et obtenir un nouveau vecteur $g2$.

Le noyau serait alors $h=[1/3 \ 1/3 \ 1/3]$, et l'opération de corrélation est similaire à celle de la convolution, mais sans inversion du noyau. Aussi on doit centrer le noyau sur chaque élément de $g1$:

$$g2(1)=h(1)*g1(0)+ h(2)*g1(1)+ h(3)*g1(2) = [0*1/3 + 5*1/3 + 4*1/3]$$

..

..

$$g2(4)= h(1)*g1(3)+ h(2)*g1(4)+ h(3)*g1(5) = [2*1/3 + 3*1/3 + 7*1/3]$$

..

..

Puisque la moyenne sur le 1er élément de $g1$ se fait seulement sur 2 éléments, on doit soit ajouter un 0 à gauche du 1er élément et à droite du dernier élément de $g1$ (zero padding); ou bien répéter une fois le 1er élément de $g1$ à gauche et le dernier élément de $g1$ à droite. Ces arrangements dépendent de l'application sous étude.

Exemple 2.

Calcul des dérivées dans un vecteur: $h=[-1/2 \ 0 \ 1/2]$ qui permet de calculer $[g1(i+1) - g1(i-1)]/2$.

Exemple 3.

Retrouver un signal dans un vecteur (ou dans une image). Soit un modèle h du signal recherché. On le fait parcourir sur le vecteur $g1$ pour localiser la partie de $g1$ qui ressemble (qui est corrélée) à h . Pour quantifier la ressemblance, on calcule la somme des carrés des différences entre h et la partie correspondante de $g1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N}^N [h(i) - g1(n+i)]^2 &= \sum_{i=-N}^N [h(i)^2 + g1(n+i)^2 - 2h(i)g1(n+i)] \\ &= \sum_{i=-N}^N h(i)^2 + \sum_{i=-N}^N g1(n+i)^2 - 2 \sum_{i=-N}^N h(i)g1(n+i) \end{aligned}$$

Cela revient à calculer la somme du carré du noyau, la somme du carré de la partie de g1 correspondante et 2 fois la corrélation. Plus ce nombre calculé est faible, plus h est corrélé avec cette partie de g1.

$g1=[5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6]$; $h=[3 \ 7 \ 4]$;

$$\sum_{i=-N}^N h(i)^2 = 3^2 + 7^2 + 4^2 = 74$$

$$\sum_{i=-N}^N g1(n+i)^2 = [\dots\dots\dots]$$

$$2 \sum_{i=-N}^N h(i)g1(n+i) = [\dots\dots\dots]$$

Quelle est la partie de g1 la plus corrélée à h?