

TP2 - IMN359 - Série de Fourier et Transformée de Fourier

Maxime Descoteaux

15 septembre 2022

Ce TP 2 est à me remettre par courriel à la date déterminer en classe (suggestion : vendredi **7 octobre**). Vous devez rédiger un rapport avec les solutions en *Latex* et me remettre un zip avec votre code python. Commentez le code et assurez-vous que je puisse reproduire vos résultats et figures. Séparez votre code en différents fichiers pour faciliter la lecture. Des points seront attribués pour la qualité du document latex et ses figures (5 points), et la qualité du code python (5 points).

1. **Produit Hermitien. [10 points]** Soit, $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sin(2x)$, calculez et démontrez le résultat de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Que concluez-vous sur les fonctions $f(x)$ et $g(x)$?

Vérifiez votre résultat en python

2. **Périodes [10 pts]**

(a) Quelle est la période fondamentale de $\sin^2(t)$? Montrez votre démarche. Illustrez votre résultat en python.

(b) Quelle est la période fondamentale de

$$f(t) = 2 \cos(t) + \cos(t/3) + 3 \cos(t/5).$$

En vous inspirant des notes de cours, illustrez les périodes de chacun des cosinus et illustrez la période fondamentale. Faites un beau graphe représentant les différents cosinus et $f(t)$. Mettez-le dans le latex.

3. Série de Fourier [35 pts]

- (a) Déterminer les coefficients de la série de Fourier réelle (SF) de $f(t) = \Lambda(t)$ de période 2.

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

- (b) Ecrivez la SF réelle de $f(t)$. Prenez la période de 2 entre $[-1, 1]$.

- (c) Ecrivez la version complexe de la SF de $f(t)$.

- (d) Sur un intervalle de $[-20, 20]$, faites le graphe de $\Lambda(t)$ et de ses SF réelle et complexe en utilisant 100 harmoniques. Mettez le graphe dans le latex.

- (e) Calculez l'approximation de la SF complexe faite pour 3 différents nombres d'harmoniques. Calculez l'erreur quadratique moyenne numériquement et analytiquement de la SF complexe pour chacune des approximations.

- (f) Trouvez et illustrez la SF complexe de $f(t)$ de période 20 suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 5 \\ 0 & 5 < |t| < 15 \\ 1 & |t| > 15 \end{cases}$$

- (g) Évaluez la SF de $f(t)$ aux points $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$.
(indice : vous devriez me parler des conditions de Dirichlet)

4. Transformée de Fourier (TF) [15 pts]

(a) Calculez la TF de $g(t) = \delta(2t + 1)$

(b) Sachant que la transformée de Fourier (TF) de la fonction porte $\Pi(t)$ est le sinus cardinal $\text{sinc}(w/2)$, c-a-d $\text{TF}[\Pi(t)] = \text{sinc}(w/2)$, utilisez les propriétés de la Table 8.8 des notes de cours pour résoudre les TF suivantes. Ecrivez quelle(s) propriété(s) vous utilisez.

i. $\Pi(\frac{t-1}{3})$

ii. $\text{sinc}(t) + \text{sinc}(3t)$

5. Transformée de Fourier (TF) 2D [10 pts].

Calculez et démontrez la transformée de Fourier 2D des fonctions suivantes. Prenez les propriétés que vous voulez et décrivez ce que vous faisez.

(a) $f(x_1, x_2) = \Pi(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2})$

(b) $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$