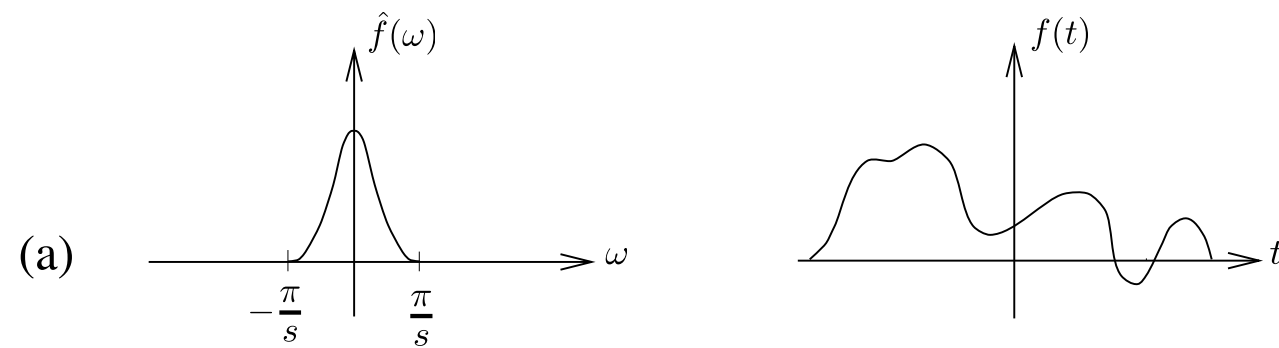
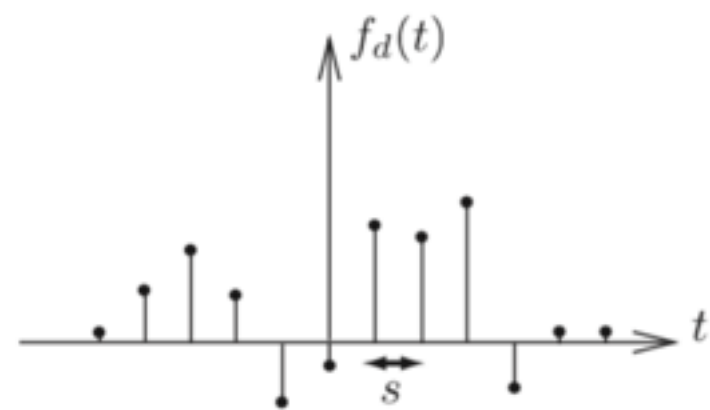
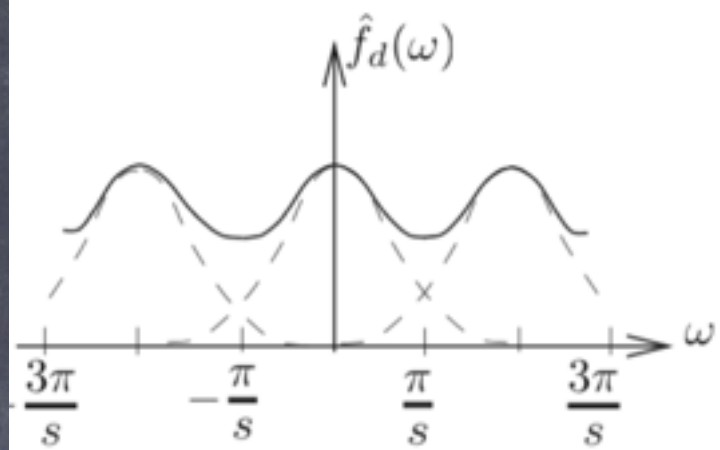
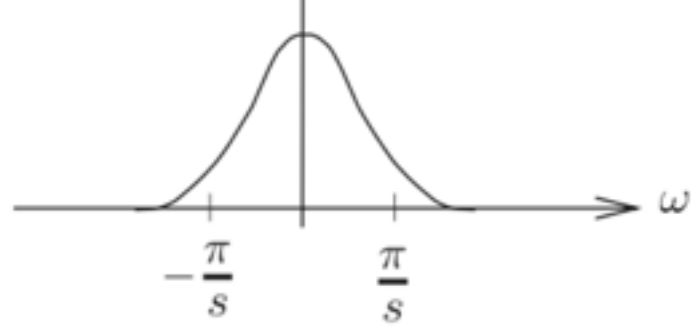


# IMN-359

Cours  
Limites de Fourier

# Échantillonnage







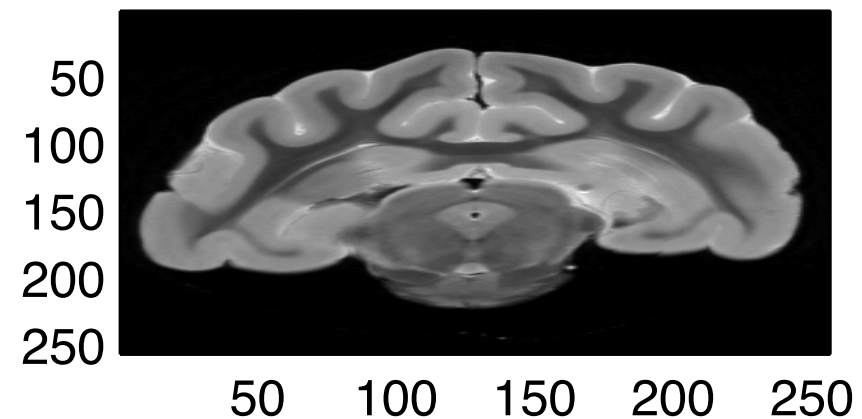
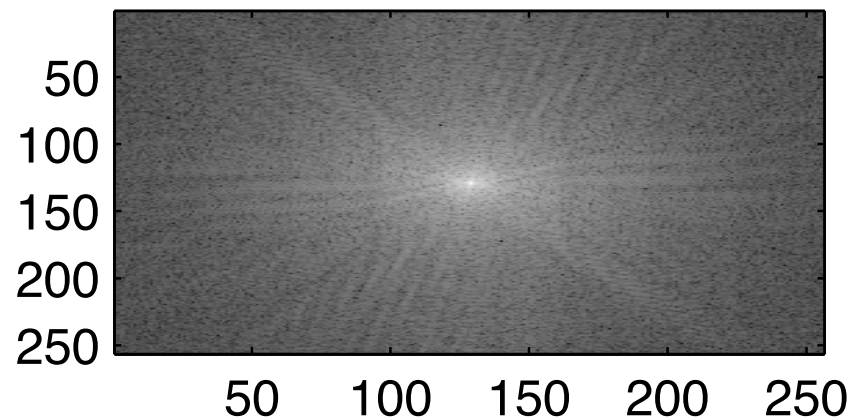
# Problème d'échantillonnage

- Repliement
- Artéfactes de géométries
- Bruit
- Interférences

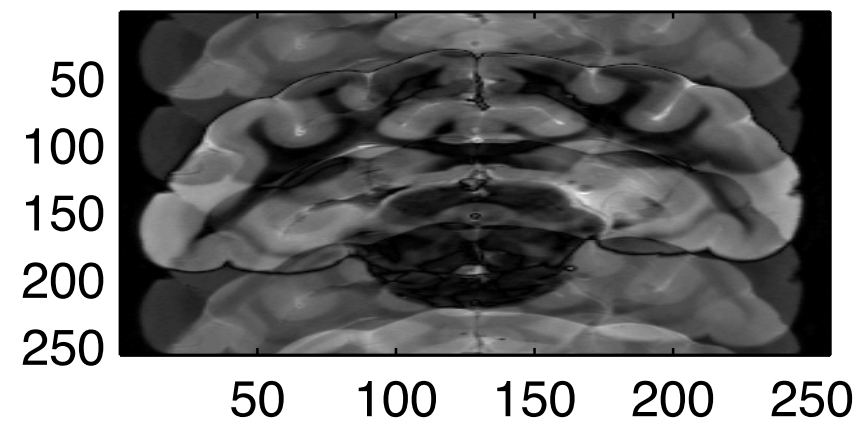
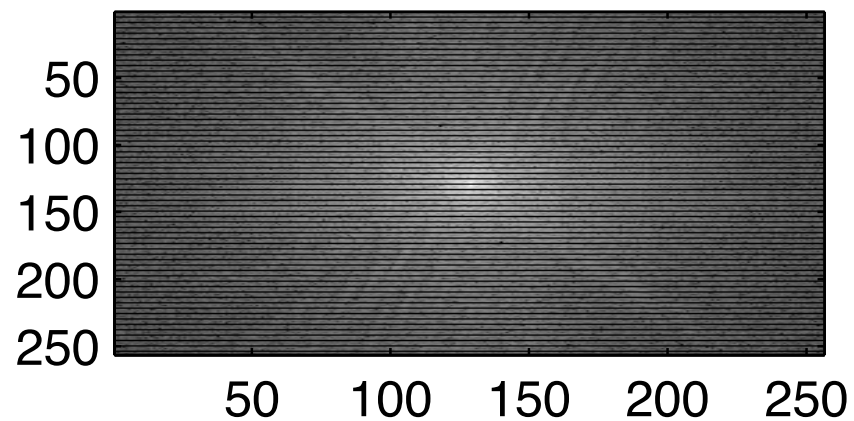
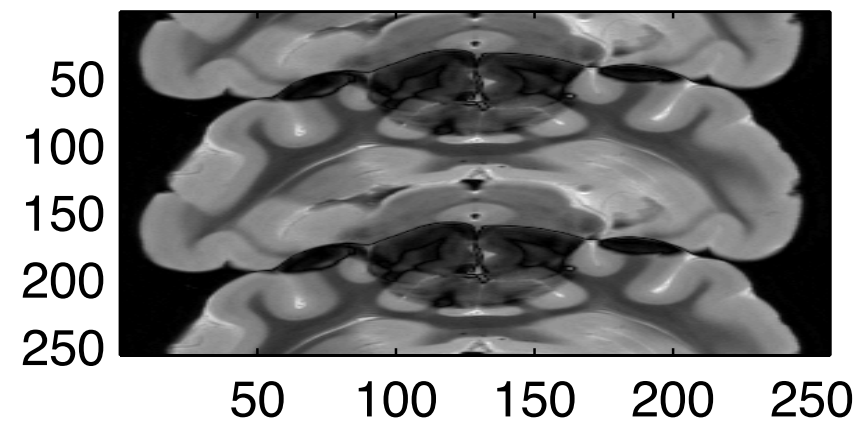
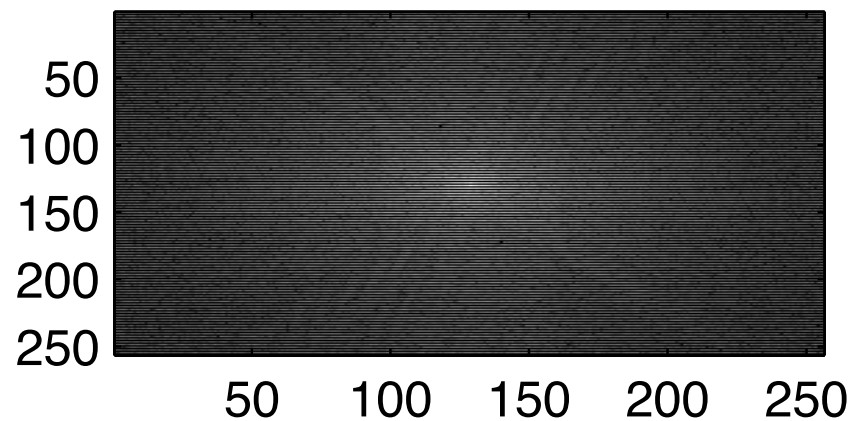


# Repliements horizontaux

50%



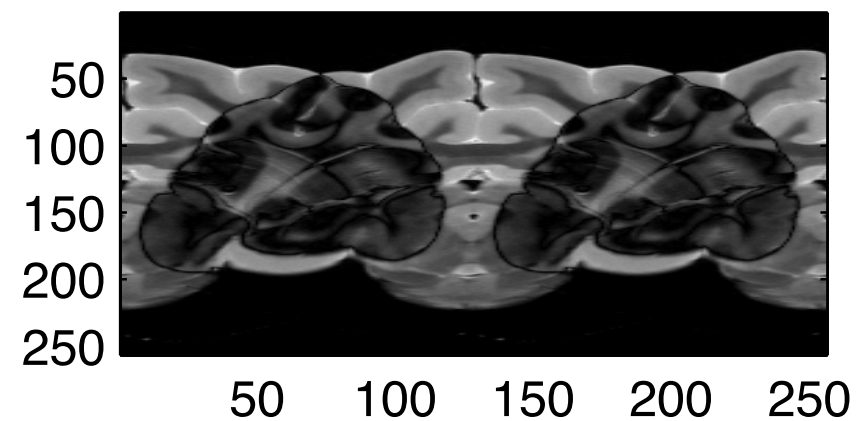
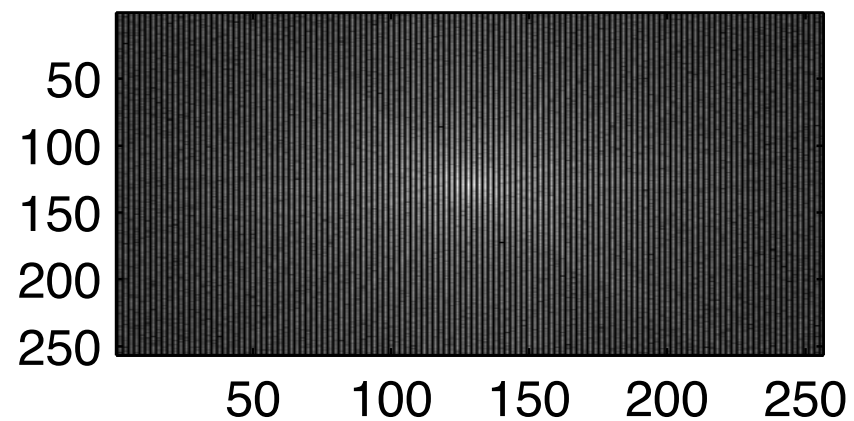
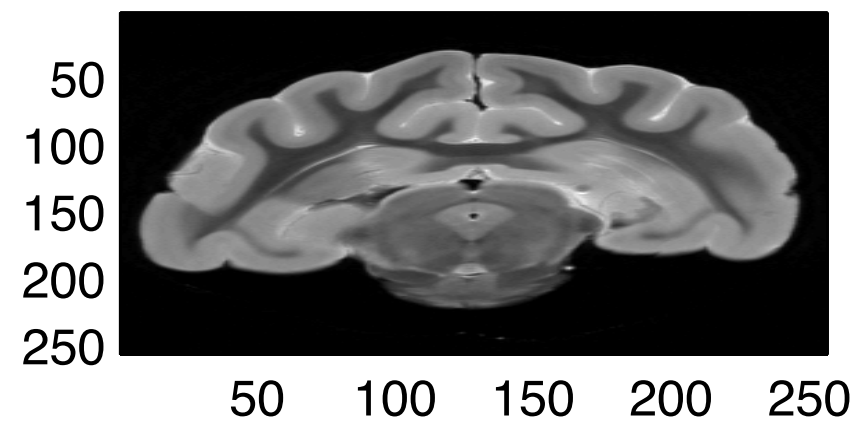
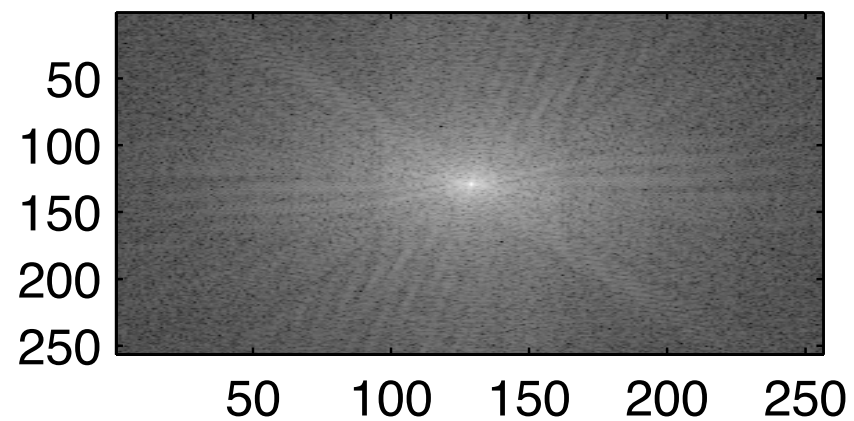
25%



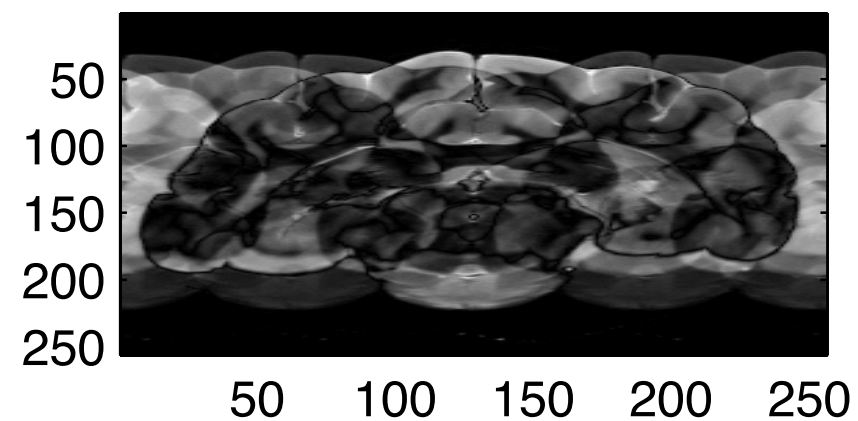
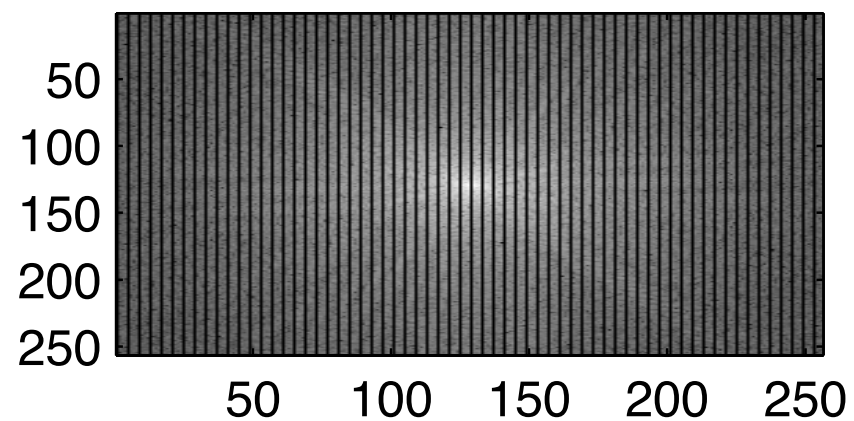


# Repléments verticaux

50%

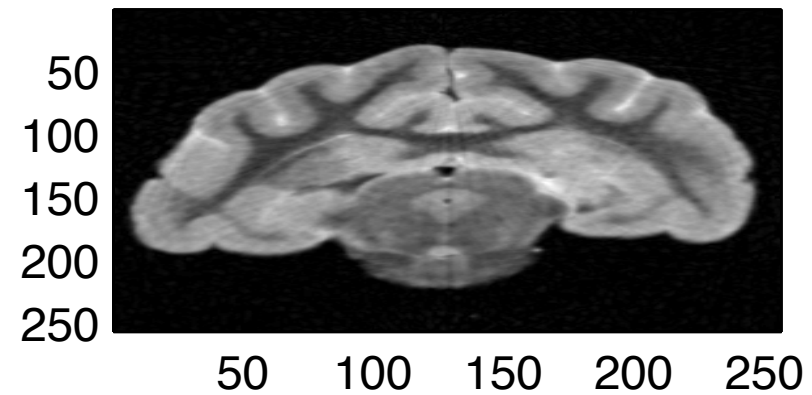
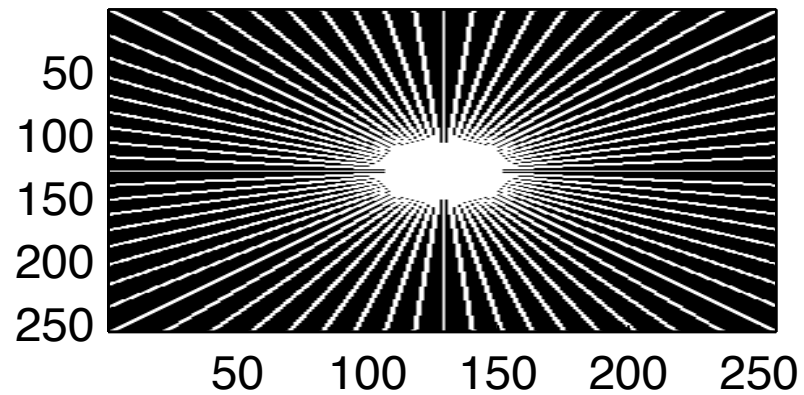


25%

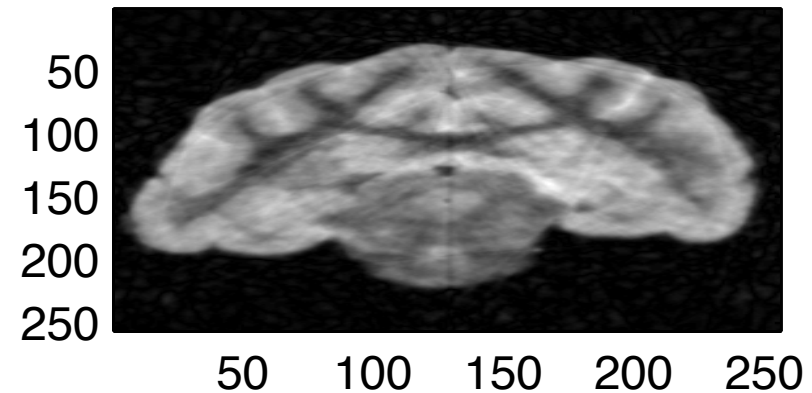
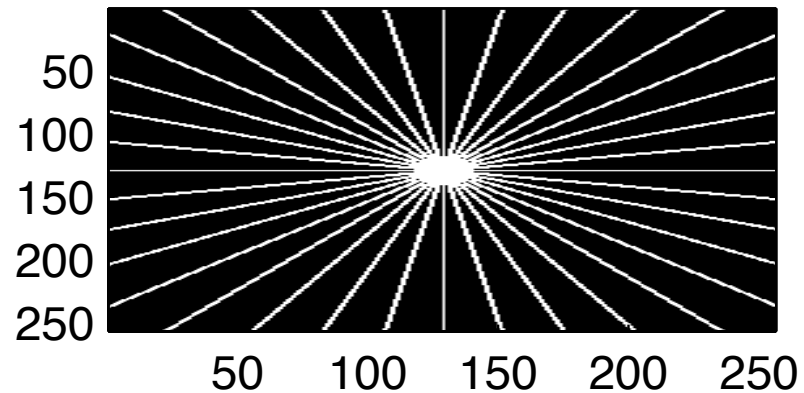


# Artéfactes radiales

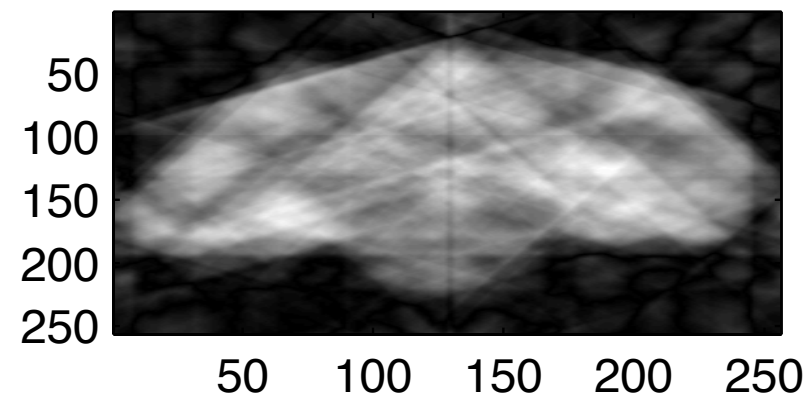
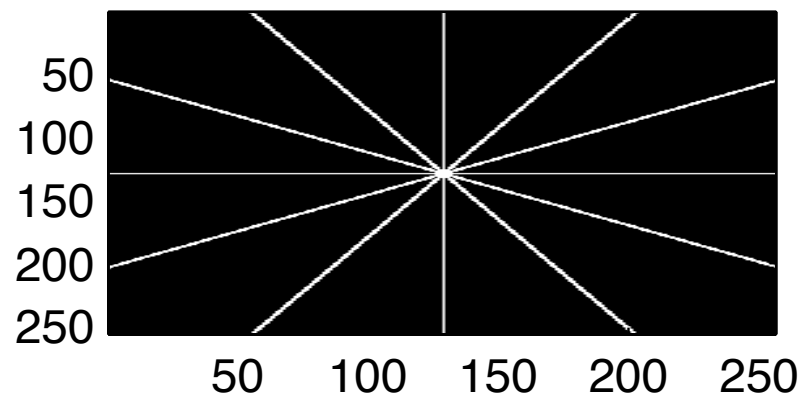
36  
rayons



18  
rayons



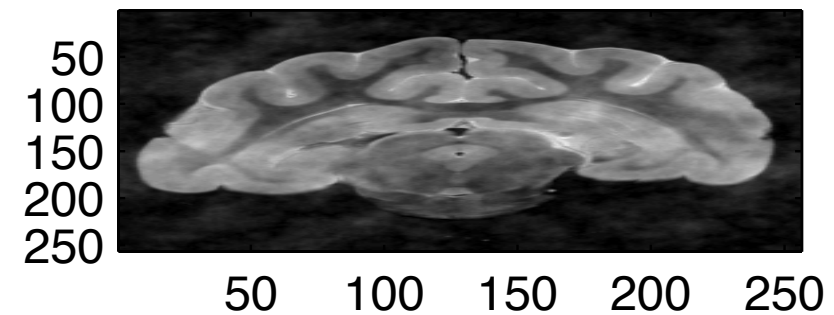
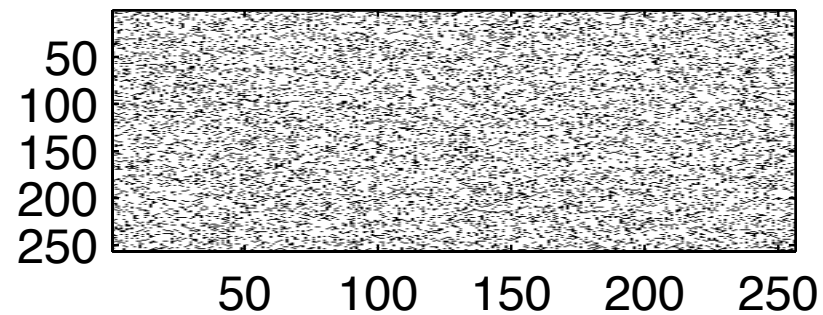
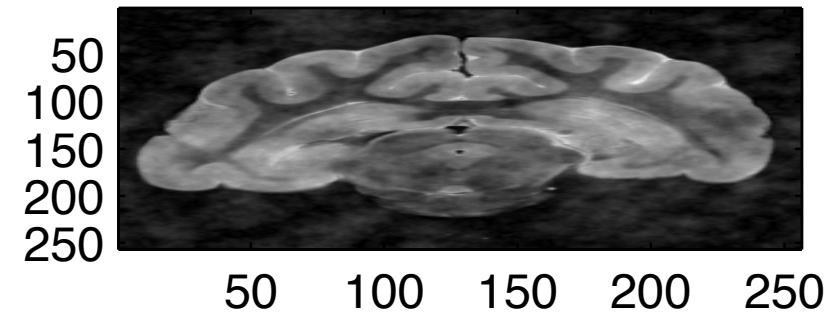
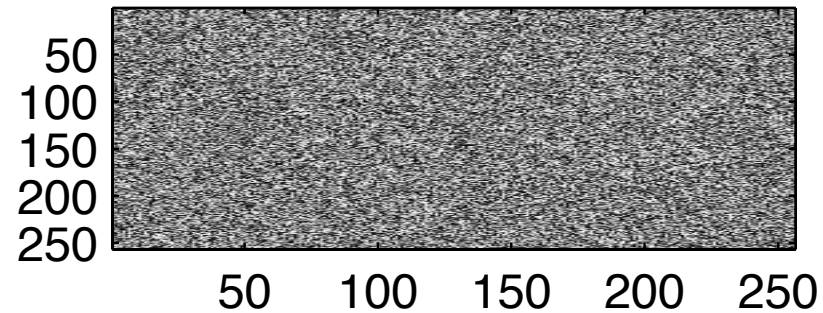
6  
rayons



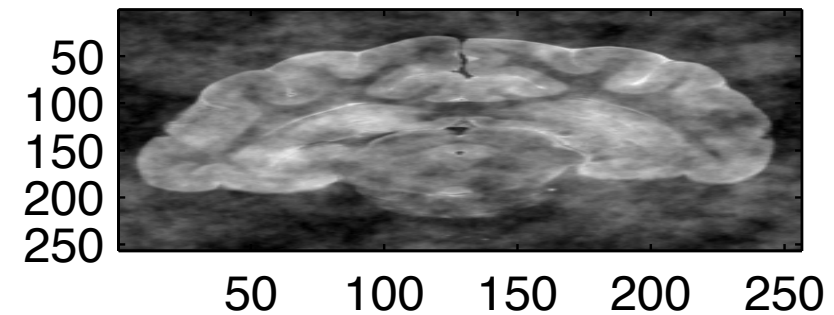
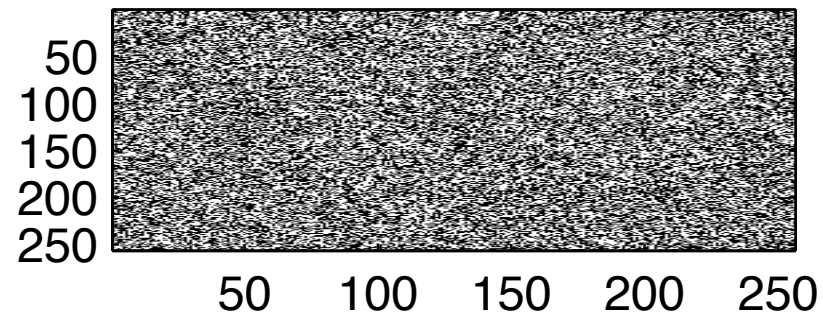


# Artéfactes mouchetés

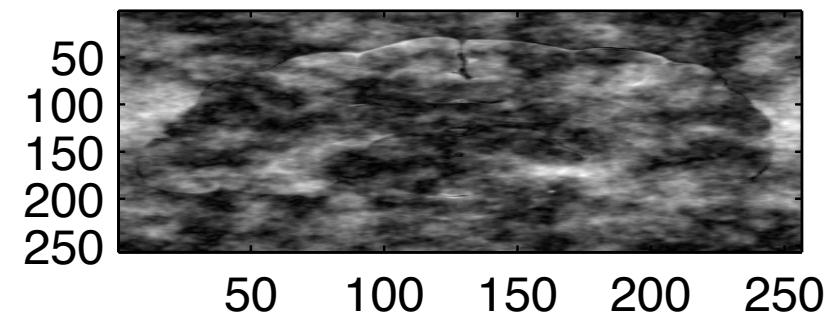
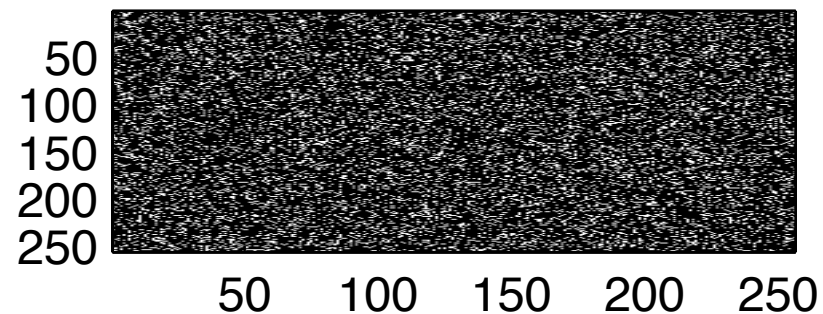
80%



50%

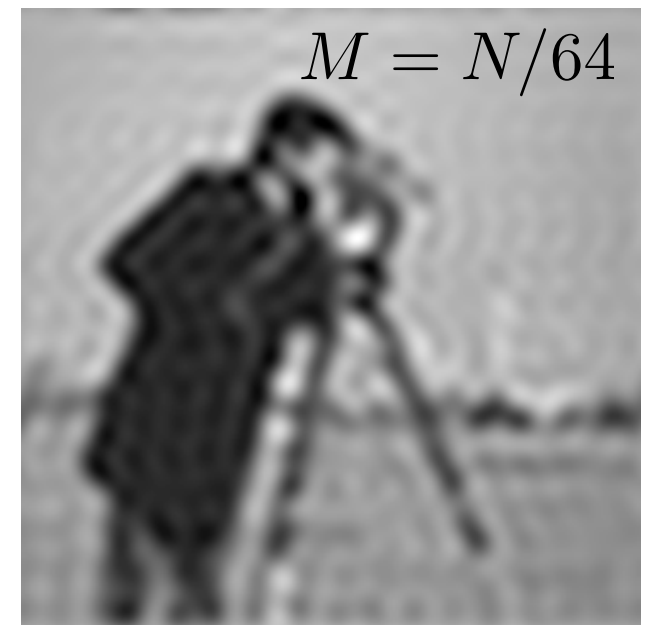
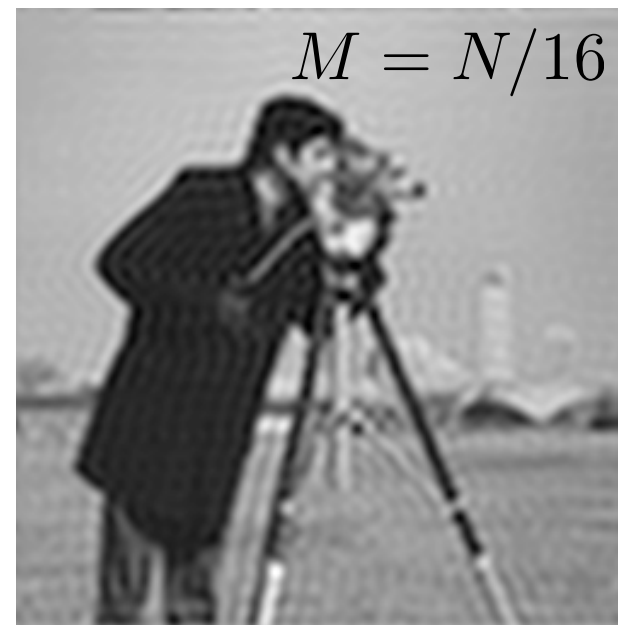
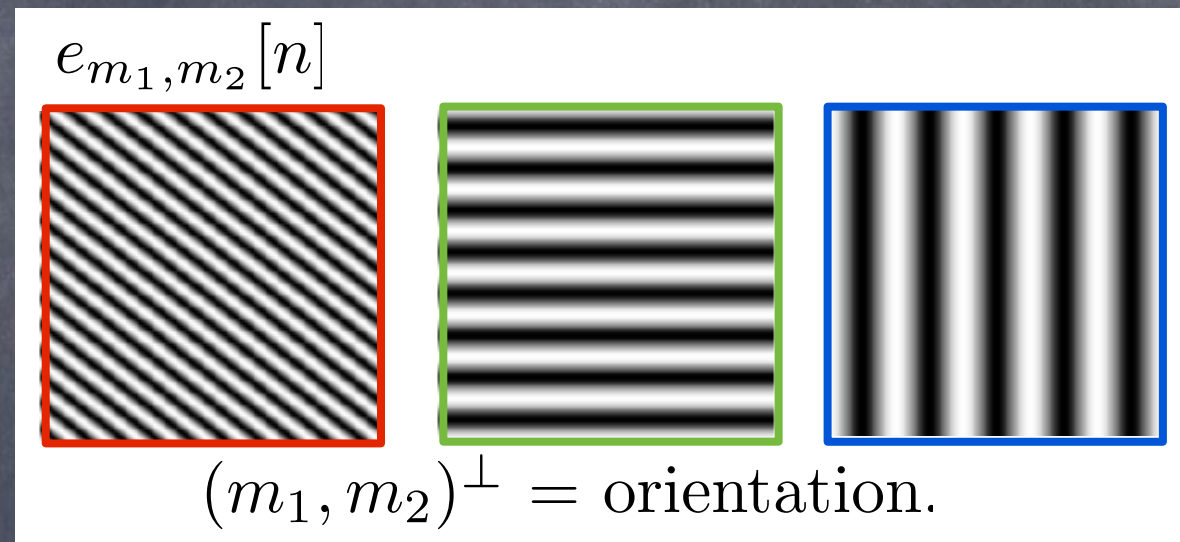
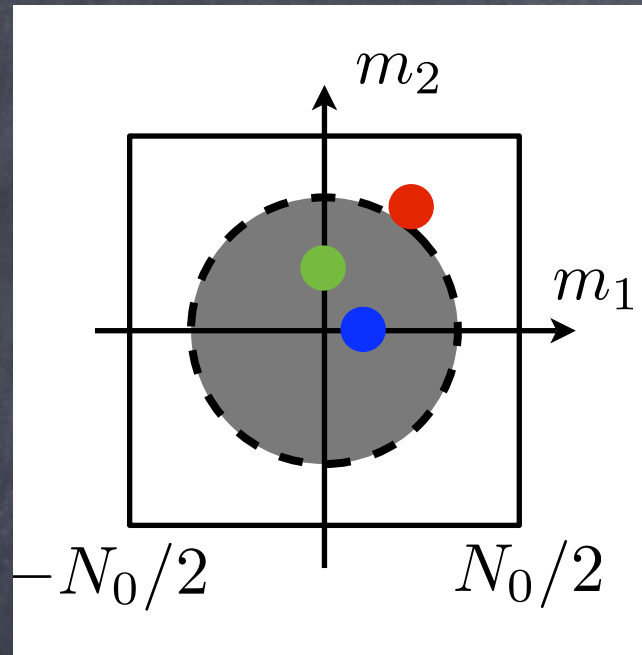


20%





# Fourier & discontinuities

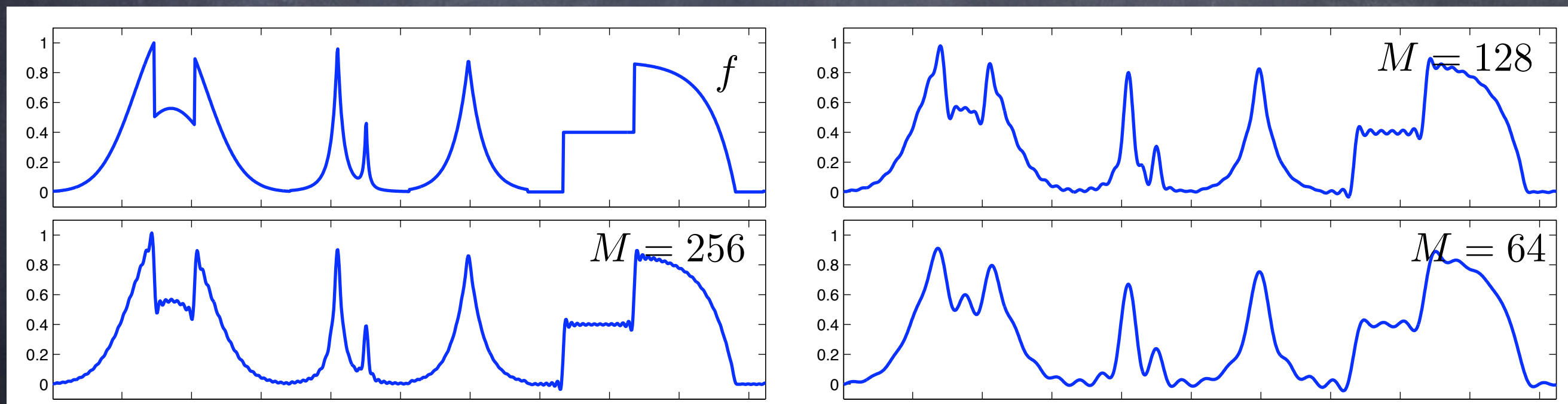


[Peyré, Numerical Tour of Signal Processing]

# Fourier & discontinuities

Linear Fourier approximation:

$$f_M = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \langle f, e_m \rangle e_m$$



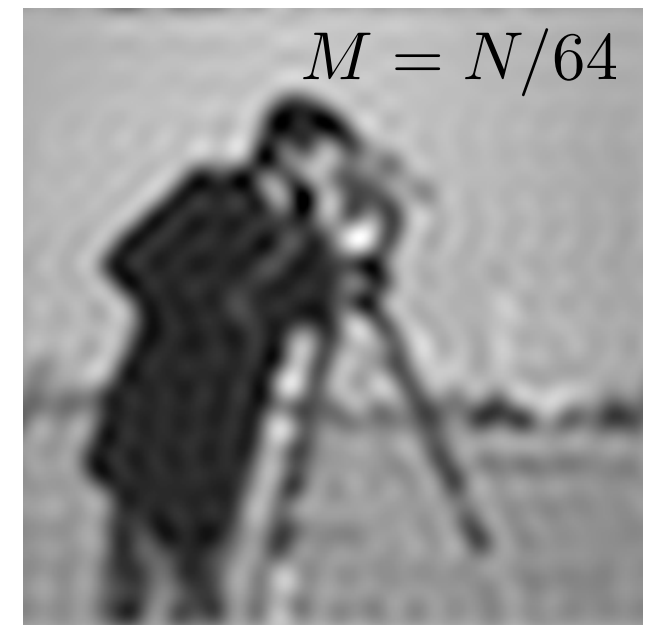
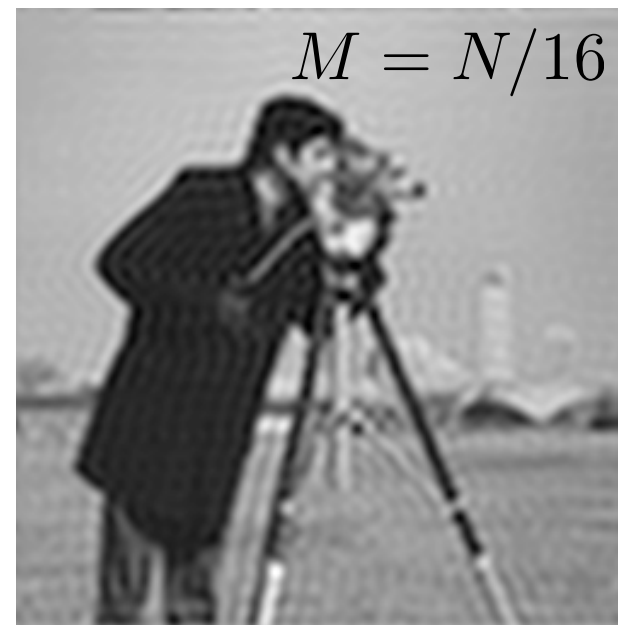
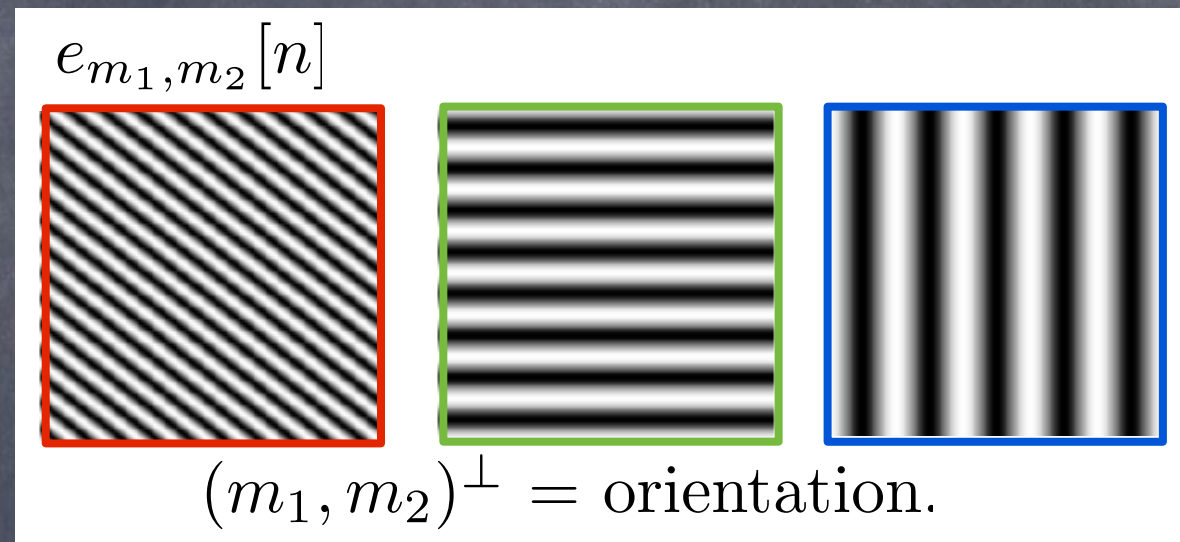
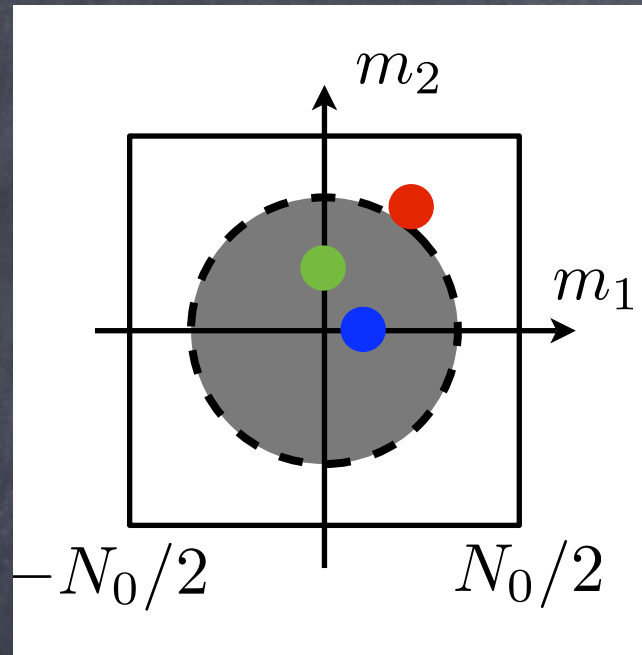
Step singularity: Gibbs oscillations.

[Peyré, Numerical Tour of Signal Processing]

Smooth  $C^\alpha$  signals:  $\|f - f_M\|$  decays fast.



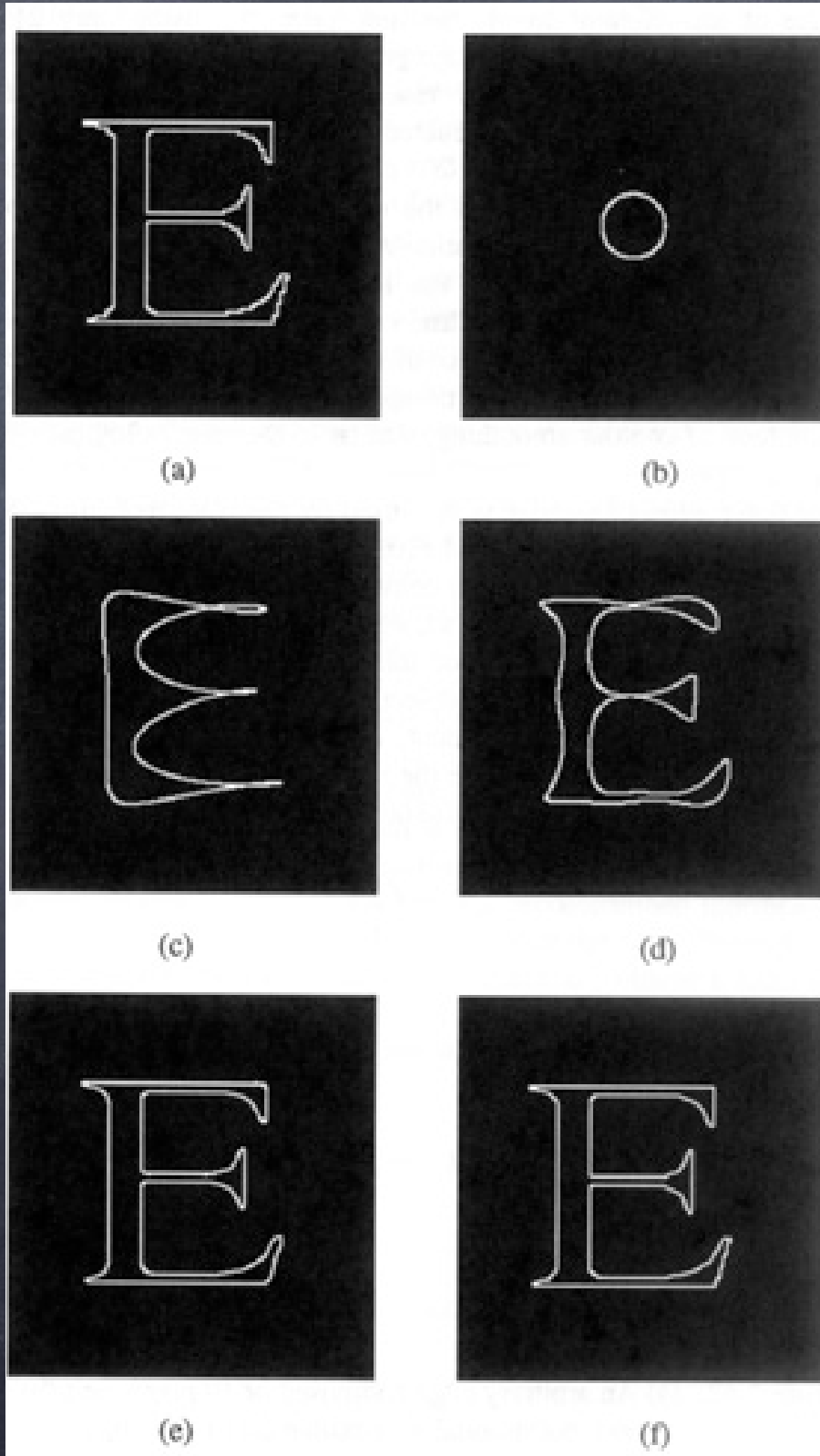
# Fourier & discontinuities





# D'autres exemples

Image 1024x1024  
( $\sim 10^6$  pixels)



3 coeffs de Fourier

21 coeffs de Fourier

61 coeffs de Fourier

201 coeffs de Fourier

401 coeffs de Fourier



# Fourier (FFT) agacements

- Complex!
  - La plus part du temps nos signaux sont réels
- DCT (discrete cosinus transform)
  - `dct.m` `idct.m`
  - `dct2.m` `idct2.m`



# Limites de Fourier

- L'analyse de Fourier est donc inadaptée aux signaux qui changent brusquement et de manière imprévisible: or, en traitement du signal c'est souvent dans de tels changements que l'information est la plus intéressante



# Limites de Fourier

- Défauts majeurs:

1) une information sur un moment du signal est répartie parmi toutes les fréquences de sa transformée

2) le manque d'information sur le temps (espace) rend une T.F. terriblement sensible aux erreurs



# Limites de Fourier

- Si on enregistre un signal d'une heure et que les 5 dernières minutes sont corrompues, cette erreur corrompt toute la T.F.
- Les erreurs de phases sont désastreuses : elles risquent d'engendrer un signal totalement différent du signal initial



# Limites de Fourier

“Parce que la FFT est très efficace, elle est employée dans des problèmes auxquelles elle est inadaptée. On abuse de la FFT de même que les Américains prennent leur voiture pour aller au coin de la rue”

Yves Meyers



# Au delà de Fourier

- Problème: Ça ne sera plus linéaire

“On dit parfois que la grande découverte du XIXe siècle était que les équations de la nature sont linéaires, et la grande découverte du XXe siècle est qu’elles ne le sont pas”

Körner



# À la recherche du temps caché

“Nos expériences quotidiennes – notamment nos sensations auditives – imposent une description en terme de temps ET de fréquences”

Gabor (1900–1979)



à la recherche du temps caché



# T.F. à fenêtre glissante

$$\text{STFT} \{x(t)\} \equiv X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{STFT} \{x[n]\} \equiv X(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n - m]e^{-j\omega n}$$

Différentes  
fonctions de  
fenêtrage

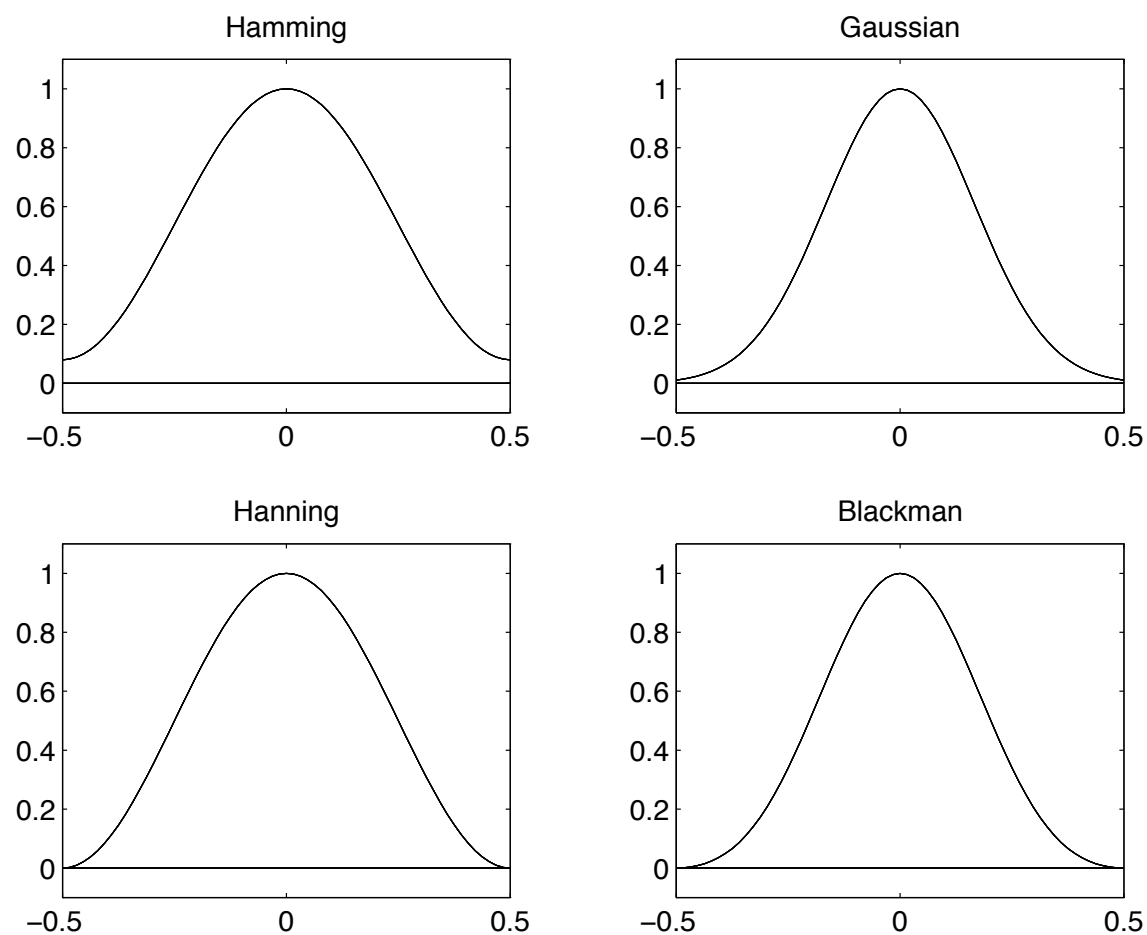


Fig. 4.5. A Wavelet Tour of Signal Processing, 3<sup>rd</sup> ed. Graphs of four windows  $g$  whose support are  $[-1/2, 1/2]$ .



# T.F. à fenêtre glissante

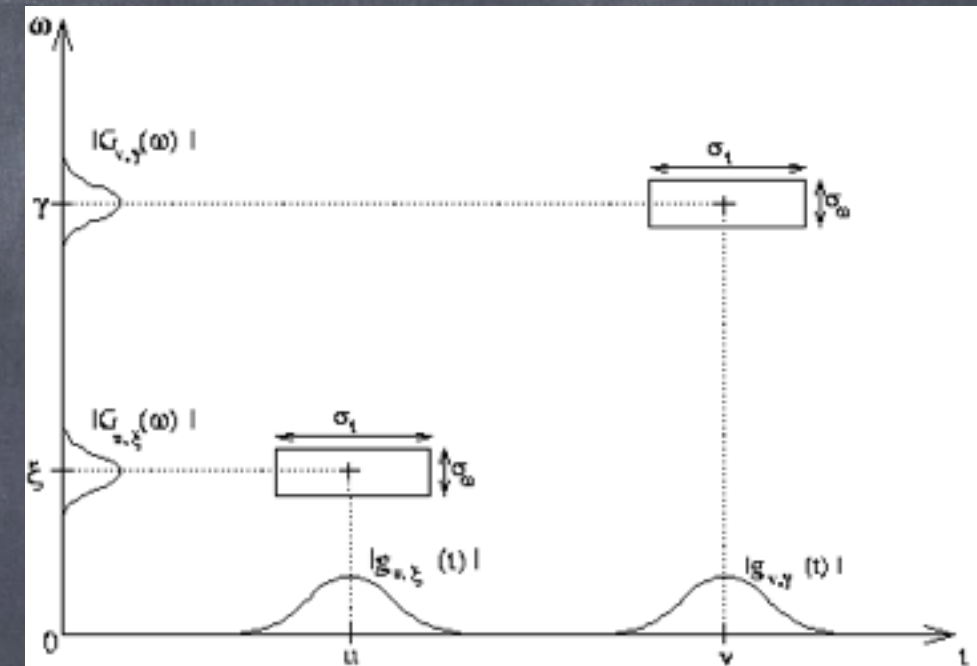
- Problème: la fenêtre est de taille fixe

- Compromis:

Quand la fenêtre est étroite, on localise les changements soudains, mais on est aveugle aux basses fréquences du signal

Quand la fenêtre est large, on ne peut pas préciser l'instant où se produit un pic ou discontinuité

- Problème: Pas de reconstruction facile (comme en Fourier classique) pour obtenir l'inverse





# À la recherche du temps caché

“On a besoin d’une notion d’échelle”



Multirésolution