mathématiques au traitement de l'image. J'avais trop de respect pour les mathématiques pour penser pouvoir y contribuer, et j'étais encore persuadé que la connaissance procédait des mathématiques pures vers les applications. C'est lorsque j'ai essayé d'établir la relation pressentie que je me suis rendu compte que l'approche du traitement de l'image pouvait contribuer à la compréhension mathématique des ondelettes.»

La définition d'une multirésolution

Comparons l'analyse multirésolution à l'approximation du nombre 88/7 = 12,5714285... Selon la précision désirée, on peut arrondir 88/7 par 10 ; 12 ; 12,5 ; ou 12,57... De la même manière, la fonction d'échelle, comprimée ou dilatée, donne l'image du signal à une résolution donnée.

Les ondelettes encodent la différence d'information entre deux résolutions (ici elles diffèrent d'un facteur deux ; dans le système décimal, elles diffèrent d'un facteur dix). Entre 10 et 12, les ondelettes encodent le détail 2 ; entre 12 et 12,5, des ondelettes plus petites encodent le détail 0,5 ; entre 12,5 et 12,57, d'autres ondelettes encodent 0,07 ; et ainsi de suite.

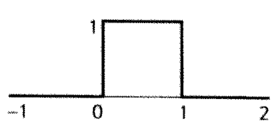
La finesse des détails améliore l'approximation. Dans l'autre sens, quand on étire la fonction d'échelle, on finit par ne plus rien voir du tout, comme si on essayait d'approximer 88/7 en utilisant les centaines. La totalité de l'information est donc contenue dans la somme des détails encodés par des ondelettes : 10 + 2 + 0,5 + 0,07 + 0,001 + ...

Les nombres décimaux peuvent approximer n'importe quel nombre, sans redondance et avec une précision arbitraire ; une multirésolution en fait de même pour n'importe quel signal, si elle satisfait quatre conditions mathématiques[7]. Voici ces conditions :

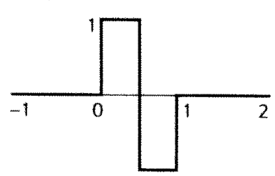
(1) La fonction d'échelle doit être orthogonale à ses translatées par des entiers.

Quand on translate la fonction d'échelle φ («phi») par un nombre entier, les fonctions translatées doivent êtres orthogonales entre elles : le produit scalaire de φ et de chacune de ses translatées est nul.

Examinons cette condition d'orthogonalité imposée aux translatés d'une fonction d'échelle associée à la fonction de Haar. La fonction de Haar, qui date de 1910[8], est la première ondelette engendrant une famille d'ondelettes orthogonales ; toutefois les discontinuités de cette fonction créent des artefacts lors de l'encodage d'une image.



La fonction d'échelle de Haar.



L'ondelette de Haar.

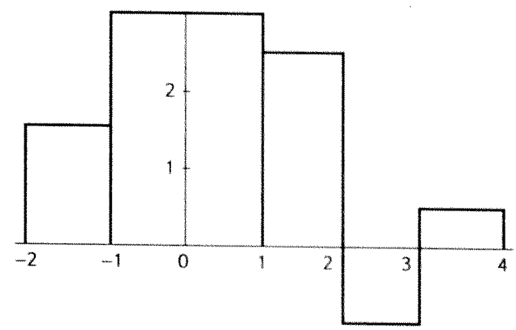
La fonction d'échelle de Haar vaut 1 lorsque x est compris entre 0 et 1, et 0 pour toute autre valeur de x. Quand on translate cette fonction d'un nombre entier, la fonction d'échelle vaut 1 là où sa translatée vaut zéro ; leur produit scalaire est donc nul ; elles sont orthogonales.

La condition d'orthogonalité est plus difficile à satisfaire quand le support de la fonction d'échelle est supérieur à 1 : la fonction translatée par le nombre 1 empiète sur la fonction initiale ; il faut alors des compensations délicates entre termes positifs et négatifs pour éviter la corrélation.

(2) Le signal à une résolution donnée contient toute l'information du signal aux résolutions plus grossières.

Considérons les espaces V_j $(\dots V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_1, V_2 \dots)$. L'espace V_0 est, par définition, l'espace engendré par la fonction d'échelle et ses translatées par des entiers : tout ce qu'on peut exprimer par ces fonctions est contenu dans V_0, et tout ce qui est contenu dans V_0 peut être exprimé par ces fonctions.

Ainsi, l'espace V_0 de Haar est l'espace des fonctions localement constantes (les histogrammes) avec éventuellement des discontinuités aux valeurs entières de la variable.

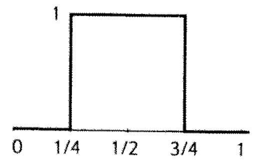


Une fonction dans l'espace V_0 de Haar.

L'espace V_j est engendré par les fonctions de V_0 comprimée d'un facteur 2^j. Ainsi, pour la multirésolution de Haar, V_1 est l'espace des fonctions localement constantes, ayant éventuellement des discontinuités aux demi-entiers : cet espace est engendré par la fonction d'échelle comprimé par le facteur deux et translaté par tous les demi-entiers.

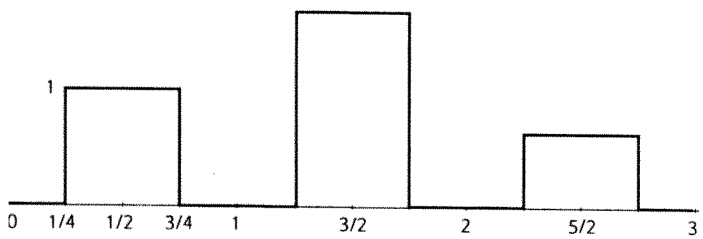
La condition *(2)* stipule que l'espace V_0 d'une multirésolution doit être contenu dans V_1. C'est le cas de la multirésolution Haar : une fonction localement constante, sauf éventuellement aux entiers, est une fonction localement constante, sauf éventuellement aux demi-entiers. De même V_1 est contenu dans V_2, V_2 dans V_3, etc. (Certains auteurs, dont Daubechies, utilisent la notation opposée : V_1 est contenu dans V_0. Un piège de plus pour les novices!)

Ne vous laissez pas abuser par la simplicité de l'exemple de Haar. On dilate et translate une fonction arbitraire, pour créer de nouveaux espaces V_j ; *a priori*, aucune raison nous assure que ces espaces successifs seront contenus les uns dans les autres. Considérons une fonction qui vaut 1 entre 1/4 et 3/4, et 0 ailleurs.



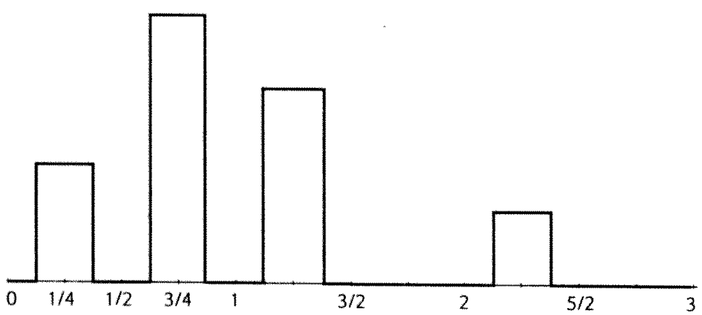
Une fonction analogue à la fonction d'échelle de Haar (celle-ci n'engendre pas des espaces contenus les uns dans les autres).

Si on la translate par des entiers, on obtient un espace V_0 qui ressemble à une fonction localement constante.



Exemple de fonction de l'espace V_0 formée de translatées par des entiers d'une fonction analogue à la fonction d'échelle de Haar (qui vaut 1 entre 1/4 et 3/4, et 0 ailleurs).

Cette fonction comprimée par un facteur deux vaut 1 entre 1/8 et 3/8, et 0 ailleurs. Les translatées de cette nouvelle fonction par des demi-entiers forment un nouvel espace, V_1, qui ressemble aussi à une fonction localement constante espacée. Toutefois l'espace V_0 n'est pas contenu dans V_1.



Exemple de fonction de l'espace V_1 formée à partir de la même fonction comprimée d'un facteur 2, et de ses translatées par des demi-entiers. Dans ce cas, V_0 n'est pas contenu dans V_1.

(3) La fonction 0 est le seul objet commun à tous les espaces V_j.

A la fin de ce processus de dilatation, l'image du signal devient infiniment floue : elle ne contient plus aucune information. En langage mathématique, cette condition s'écrit :

$$\lim_{j \to -\infty} V_j = \cap V_j = \{0\}.$$

(4) On peut approximer avec une précision arbitraire n'importe quel signal :

$$\lim_{j \to \infty} V_j = L^2(\mathbb{R}).$$

Construire une multirésolution

Si ces quatre conditions sont satisfaites, la théorie de multirésolution assure qu'il existe une ondelette qui, avec ses translatées et dilatées, encode la différence d'information entre deux images d'un signal de résolutions successives. L'espace W_j associé à l'ondelette est orthogonal à l'espace V_j et représente la différence entre V_j et V_{j+1} :

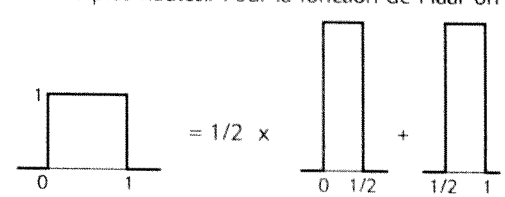
$$W_j \oplus V_j = V_{j+1}.$$

L'existence de fonctions satisfaisant ces conditions, notamment les conditions *(1)* et *(2)*, n'est pas, *a priori*, évidente (excepté pour la fonction d'échelle de Haar). Mallat découvrit cependant qu'il est possible de construire une fonction ~~d'échelle, et son~~ ondelette, à partir de la transformée de Fourier – la fonction de transfert – de presque n'importe quel filtre. Il existe donc une infinité de systèmes de multirésolution, chacun avec sa propre fonction d'échelle et sa propre ondelette mère.

Esquissons la méthode de Mallat[9]. Nous commençons par définir une fonction de transfert à partir d'une fonction d'échelle donnée. Pour cela, nous écrivons la fonction d'échelle comme la combinaison de ses translatées à la résolution deux fois plus fine, chaque translatée étant affectée d'un coefficient (cela est possible d'après la condition *(2)*)[10] :

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, 2\,\varphi(2x - n).$$

(On écrit 2 φ plutôt que φ pour normaliser l'intégrale de ces nouvelles fonctions à 1 : puisqu'elles sont comprimées par un facteur de 2, elles doivent être deux fois plus hautes.) Pour la fonction de Haar on obtient :



La fonction de Haar est égale à la demi-somme de deux fonctions comprimées par un facteur 2, la deuxième étant translatée par 1/2.

$$\varphi_H(x) = \frac{1}{2}\ [2\ \varphi_H(2x)] + \frac{1}{2}\ [2\ \varphi_H(2x-1)].$$

Donc $a_0 = a_1 = 1/2$ et les autres a_n sont nuls. (Habituellement, c'est la longueur de la fonction – donc l'intégrale du carré de la fonction – qui est normalisée à 1. Les coefficients seraient alors $a_0 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La valeur 1/2 facilitera nos calculs plus tard.)

Ensuite on crée une série de Fourier $A(\xi)$ à l'aide des coefficients a_n :

$$A(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi i n \xi}, \qquad (13)$$

où A satisfait les conditions suivantes :

$$A(0) = 1 \text{ et}$$

$$|A(\xi)|^2 + |A(\xi + \tfrac{1}{2})|^2 = 1. \qquad (14)$$

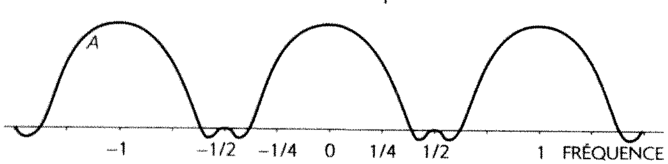
On ajoute une condition de régularité : les a_n convergent, à un taux raisonnable, vers zéro. Cette fonction A est de période 1. (Mallat utilise une fonction de période 2π, mais, à ceci près, sa formule[11] est identique.)

Du point de vue géométrique, la condition *(14)* indique que la courbe parcourue par les points de coordonnées complexes $A(\xi)$ et $A(\xi + \frac{1}{2})$ «vit» sur la 3-sphère de rayon 1.

En traitement d'image, la condition *(14)* détermine le filtre passe-bas d'une paire de ~~filtres, jumelés et complé~~mentaires : elle leur vaut le nom rébarbatif de *filtres miroirs en quadrature*. C'est dans ce contexte que D. Esteban et ~~C. Galand~~[12] ont d'abord étudié, en 1977, la fonction A, avant que Mallat ne la redécouvre dans le contexte des ondelettes.

La fonction A est la transformée de Fourier du filtre numérique passe-bas (qu'on notera a), égal à la suite de nombres … a_{-1}, a_0, a_1 … (Si vous êtes troublé par l'existence de la transformation de Fourier d'une suite de nombres, voir l'Appendice E, *La transformée de Fourier d'une fonction périodique*, page 208.)

Considérons les valeurs $A(0)$ et $A(1/2)$: puisque $A(0) = 1$, la condition *(14)* donne $A(1/2) = 0$. Le graphe ressemble bien (au moins, la partie centrale) à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas[13].



La fonction A.

La multirésolution de Haar

Appliquons cela à la fonction de Haar. Nous créons une série de Fourier A_H à partir des coefficients $a_0 = a_1 = 1/2$:

$$A_H(\xi) = \frac{1}{2}\ e^{0\,(2\pi i\xi)} + \frac{1}{2}\ e^{1\,(2\pi i\xi)} = \frac{1}{2}\ (1 + e^{2\pi i\xi}).$$

Sachant que $\cos\theta = \frac{1}{2}\ (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, nous obtenons :

$$A_H(\xi) = e^{\pi i\xi} \cos \pi\,\xi, \text{ et}$$

$$A_H(\xi + \tfrac{1}{2}) = e^{\pi i(\xi + \frac{1}{2})} \cos \pi\,(\xi + \tfrac{1}{2}) = e^{\pi i\xi}\,(-\,i \sin \pi\,\xi).$$

(La dernière égalité utilise les formules $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ et $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$.)

On voit que la condition *(14)* est satisfaite :

$$(\underbrace{|e^{\pi i\xi}|}_{=1}\,|\cos \pi\xi|)^2 + (\underbrace{|e^{\pi i\xi}|}_{=1}\,|-i \sin \pi\xi|)^2 = 1.$$

Construire une fonction d'échelle

En pratique, on suit la démarche inverse. Il n'est pas difficile de créer une fonction A qui satisfait les conditions imposées. (Quand Mallat a compris le rapport entre les ondelettes et les filtres, il existait un grand nombre d'articles sur ces filtres et sur les méthodes numériques de construction.) En revanche, nous ignorons à quoi ressemble cette fonction d'échelle, même si nous savons que les coefficients de Fourier de A sont aussi les coefficients d'une fonction d'échelle décomposée en la somme de ses translatées à une résolution deux fois plus fine.

Mallat a relié la fonction A à la transformée de Fourier de la fonction d'échelle $\hat{\varphi}$ par :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{\xi}{2^j}\right). \qquad (15)$$

Cette formule[14] représente un produit infini : la valeur de $\hat{\varphi}$ à chaque ξ est égale au produit de toutes les valeurs de A évaluée aux points $\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ pour j allant de 1 à l'infini. Ces multiplications correspondent dans l'espace physique à une cascade de convolutions du filtre passe-bas avec lui-même aux échelles différentes.

L'idée d'un produit infini peut effrayer le lecteur inexpérimenté, mais il ne faut pas prendre l'infini trop au sérieux ici. Ce produit converge à une vitesse vertigineuse, et souvent six termes du produit suffisent pour construire la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle. Il suffit alors d'inverser la transformée de Fourier, pour obtenir la fonction d'échelle. Quand le nombre de coefficients a_n non nuls est fini, on obtient une fonction d'échelle à support compact. C'est le cas de la fonction d'échelle de Haar, et des fonctions d'échelles liées aux ondelettes de Daubechies.

Les ondelettes

Que deviennent les ondelettes dans tout cela? Dans la perspective géométrique, on crée une deuxième courbe sur la 3-sphère. Chaque point de la première courbe, celle associée à la fonction A, est un vecteur ; on construit la courbe des ondelettes avec des vecteurs orthogonaux (perpendiculaires) aux vecteurs de la courbe associée à A. On utilise cette nouvelle courbe pour construire une fonction qu'on nomme D (pour différences, puisque les ondelettes encodent les différences), de la même manière qu'on a construit A à partir de la première courbe : la première coordonnée de cette nouvelle courbe est le nombre complexe $D(\xi)$, la seconde est $D(\xi + \frac{1}{2})$.

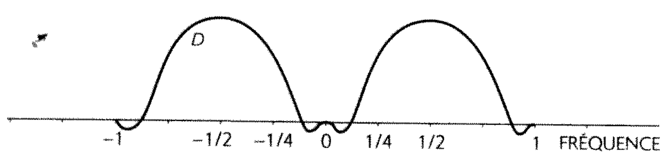
Comprendre la représentation géométrique

Créons l'ondelette ψ («psi») à partir de D et de A selon la formule :

$$\hat{\psi}(\xi) = D\left(\frac{\xi}{2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} A\left(\frac{\xi}{2^j}\right). \qquad (16)$$

Il existe plus d'une courbe orthogonale à la première courbe. Par conséquent, la même fonction A peut engendrer plusieurs ondelettes. Toutefois l'une d'elles est préférable aux autres. On impose la règle suivante : si la fonction d'échelle est réelle (pas complexe), alors l'ondelette engendrée par la deuxième courbe (orthogonale à la première) sera réelle aussi. De plus, si la fonction d'échelle a un support compact, la courbe «préférable» engendre une ondelette à support compact, ce qui n'est pas nécessairement le cas des autres courbes orthogonales. (Cette règle ne marche qu'à une dimension.)

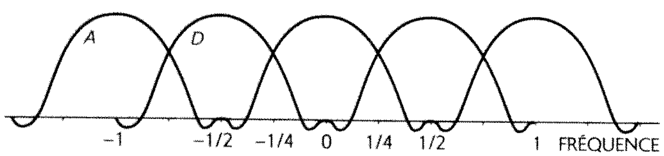
Si vous n'êtes pas à l'aise avec la géométrie, examinons la question à l'aide des filtres. La condition $|D(\xi)|^2 + |D(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1$, qui impose que la courbe associée à D appartienne à la 3-sphère de rayon 1, est l'analogue de la condition *(14)* imposée à la fonction $A(\xi)$. Par conséquent, D a la même forme que A. En outre, les deux courbes sont orthogonales : si $A(\xi) = 1$, alors $D(\xi) = 0$, et *vice versa*. Dans ces conditions, le graphe de $D(\xi)$ a l'allure suivante :



La fonction D.

On peut reconnaître ce type de courbe comme la transformée de Fourier d'un filtre passe-haut.

Notez que, puisque A et D sont périodiques, les transformées de Fourier des filtres «passe-bas» et «passe-haut» alternent :



Ces fonctions ne semblent pas se préoccuper des «hautes» ou des «basses» fréquences! Ne vous laissez pas abuser : les fréquences d'un filtre numérique (ou d'un signal échantillonné) ne se placent pas sur une droite, entre moins l'infini et l'infini ; elles s'enroulent sur un cercle. En effet, il est facile de montrer que la transformée de Fourier d'un signal échantillonné est périodique. Si p est la période d'échantillonnage, un coefficient de Fourier du signal échantillonné est égal à la somme, multipliée par p, du produit des valeurs échantillonnées par l'exponentielle complexe de la fréquence p (voir la formule *(8)* dans *La transformation de Fourier rapide*, page 50). Le coefficient de Fourier de la fréquence $(\tau + \frac{1}{p})$ est égal au coefficient de la fréquence τ :

$$p \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(np)\, e^{2\pi i(\tau + \frac{1}{p})np} = p \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(np)\, e^{2\pi i \tau np} \underbrace{e^{2\pi i n}}_{=1}.$$

Donc les coefficients des fréquences t, $(t + \frac{1}{p})$, $(t + \frac{2}{p})$... sont tous égaux (voir l'Appendice E, *La transformée de Fourier d'une fonction périodique*, page 208, où nous utilisons des distributions pour montrer que la fonction périodique A est la transformée de Fourier d'une séquence de valeurs a_n).

Dans le cas d'un signal défini sur une gamme de fréquences limitée, échantillonné à la fréquence imposée par Shannon, les termes «hautes» et «basses» fréquences gardent leur sens ordinaire. Considérons un signal défini sur 10 000 hertz, échantillonné 20 000 fois par seconde. On choisit l'unité de temps pour que la graduation 1 des figures précédentes corresponde à 20 000 hertz, et on considère la région située entre −1/2 et 1/2.

La fonction d'échelle «père»

On peut aussi déduire directement l'ondelette de la fonction d'échelle. L'espace W associé à l'ondelette est contenu dans l'espace V à une résolution deux fois plus fine : $V_0 \oplus W_0 = V_1$. Alors on a :

$$\psi(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\, \varphi(2t - n). \qquad (17)$$

Dans le cas de la fonction de Haar, nous savons que

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1),$$

c'est-à-dire

$\psi(t) = 1$, si $0 \leq t < 1/2$;
$\psi(t) = -1$, si $1/2 \leq t < 1$;
$\psi(t) = 0$, autrement.

Donc les coefficients d_n sont $d_0 = 1/2$ et $d_1 = -1/2$, les autres étant nuls ; en outre, nous avons $d_0 = a_0$ et $d_1 = -a_1$.

La facilité avec laquelle on construit une ondelette à partir de la fonction d'échelle découle de la relation simple et intime qui lie les coefficients a_n de A et d_n de D.

«C'est absolument remarquable, écrit Strang : les coefficients d_n sont identiques aux a_n. Simplement, les d_n apparaissent dans l'ordre inverse des a_n et leurs signes alternent.»[15] La simplicité de cette relation ne doit pas nous surprendre entièrement, compte tenu de la ressemblance des graphes de A et de D.

Calculer une transformée en ondelettes sans ondelettes

Conséquence curieuse mais essentielle de la multirésolution, on peut transformer un signal en ondelettes, sans ondelette ni fonction d'échelle. Pour calculer la transformée en ondelettes, on n'a besoin que des filtres. Au lieu d'effectuer le produit scalaire de la fonction d'échelle, ou de l'ondelette, avec le signal, on réalise un produit de convolution du signal avec ces filtres (voir *La transformation en ondelettes rapide*, page 115).

«Il est très surprenant de calculer avec une fonction inconnue, écrit Strang[16], mais les applications n'exigent que des coefficients. Nous avons appris comment travailler lorsqu'une règle simple engendre des fonctions compliquées : il faut rester avec la règle simple.»

Attention, tous les ouvrages n'emploient pas les mêmes notations : la fonction A est notée H par Mallat[4] et m_0 par Lemarié[6] ; les coefficients, notés a_n ici, sont c_n dans Strang[15]. En outre, tout le monde ne normalise pas de la même façon : les coefficients de notre filtre passe-bas de Haar sont $a_0 = a_1 = 1/2$, Daubechies[17] utilise $a_0 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, Strang[15] utilise $a_0 = a_1 = 1$. *Caveat emptor*...

Calculer vite

Le deuxième rôle que confère Mallat à la fonction d'échelle (la rapidité des calculs), est inspiré des algorithmes pyramidaux, décrits en 1981 et 1983 par deux Américains, spécialistes du traitement d'images : Peter Burt, qui travaille maintenant au *David Sarnoff Research Center*, à Princeton, et Edward Adelson, chercheur au *Massachusetts Institute of Technology*.

Si l'on ne se préoccupait pas du temps de calcul, on pourrait décomposer le signal en ondelettes en le comparant, à chaque échelle, aux ondelettes de taille appropriée. Le retour, à chaque étape, au signal initial est très lent. C'est comme si l'on étudiait les sols avant d'élaborer toute carte, que ce soit une carte d'état-major des Causses, une carte touristique de la Bretagne, ou une carte de la France qui n'indique que les villes et routes principales. Il est plus astucieux de se servir du travail déjà fait ; on réalise des cartes sommaires à partir de cartes

détaillées. De même, pour calculer vite, on commence l'analyse d'un signal par la résolution la plus fine : *fine to coarse*.

La première étape de cet algorithme rapide consiste à séparer le signal en deux composantes : une composante lisse (l'allure générale du signal) et l'ensemble des petits détails (les fluctuations). L'image lisse est le signal tel qu'on le voit à la moitié de la résolution la plus fine : avec deux fois moins d'échantillons. On obtient cette image lisse à l'aide d'un filtre passe-bas qui correspond à la fonction d'échelle ; c'est pour cela que la fonction d'échelle est parfois appelée fonction de lissage.

Les détails sont les retouches qu'il faut apporter à l'image lisse pour reconstituer le signal initial. On les obtient en utilisant un filtre passe-haut, qui correspond aux plus petites ondelettes.

On conçoit intuitivement qu'il doit exister une relation mathématique précise entre la fonction d'échelle et les ondelettes utilisées. Si l'on fabrique un filtre à partir du «père» d'une autre famille d'ondelettes, il n'y a aucune raison de supposer que le signal lissé par le père et les détails encodés par les ondelettes contiennent toute l'information du signal. La mère, la fonction père et les bébés ondelettes ont effectivement un air de famille, qu'évoque cette terminologie, aujourd'hui quelque peu discréditée.

Après l'enregistrement des premiers coefficients d'ondelettes (qui encodent les petits détails), la deuxième étape consiste à répéter la procédure sur le signal à une résolution demie. On sépare ce signal lissé en deux parties : un signal encore plus lissé (vu à un quart de la résolution du signal initial) et de nouveaux détails (deux fois plus grands que les précédents.)

Pour cela on dilate d'un facteur deux la fonction d'échelle et l'ondelette. Ce travail est deux fois plus rapide que celui de la première étape : on détermine deux fois moins de coefficients et la difficulté du calcul est la même. On calcule de nouveaux détails et de nouvelles valeurs moyennes à partir d'intervalles deux fois plus grands et à partir de la valeur moyenne, déjà connue, de chaque moitié d'intervalle.

La troisième étape est encore deux fois plus rapide : on calcule deux fois moins de coefficients, pour produire un signal à un huitième de la résolution initiale... A la fin de ce processus, le signal lissé est tellement lissé qu'il disparaît : toute l'information s'est envolée dans les coefficients d'ondelettes. Ces coefficients sont classés par résolution, chaque résolution correspondant à une certaine échelle, donc à certaines fréquences... On peut aussi arrêter le processus avant que le

La question c'est comment on détermine la fonction de départ ?

signal ne se volatilise ; l'information qui reste est alors encodée par la fonction d'échelle (voir *La transformation en ondelettes rapide*, page 115).

Cet algorithme rapide qu'on vient d'esquisser – la FWT, ou *fast wavelet transform* – est très proche des algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson, qui utilisent des bancs de filtres. «Quand on les relit après coup, on réalise qu'ils avaient tout dit dans leurs travaux, dit Meyer. Avec la distance acquise aujourd'hui, je dirais qu'on a ajouté un epsilon à l'œuvre magnifique de Burt et Adelson. L'epsilon n'était toutefois pas négligeable. On ne voyait, dans leurs techniques, aucune théorie scientifique permettant d'expliquer les choix qu'ils ont faits par instinct.

À lire

Les algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson

Peter Burt et Edward Adelson ont commencé à collaborer après leur doctorat, à New York où Adelson travaillait ; Burt faisait la navette entre New York et l'Université de Maryland. «Nous étions tous les deux intéressés par les idées dans le vent sur l'analyse multi-échelle, comme celles de David Marr, du *Massachusetts Institute of Technology* ; nous avions indépendamment développé l'idée d'une décomposition multi-échelle itérative, dit Adelson. A l'origine, notre travail ne se fondait sur rien de plus qu'un peu d'intuition et l'algèbre élémentaire.» Burt avait introduit les algorithmes pyramidaux pour la perception visuelle par l'ordinateur. Adelson et lui écrivirent un article[18], où ils introduisirent les termes *pyramides gaussiens* et *pyramides laplaciens* et montrèrent comment les utiliser dans la compression d'images.

Leur article le plus célèbre sur les algorithmes pyramidaux[19] fut publié en 1983. «Je soupçonne, écrivit un rapporteur, que personne n'utilisera jamais cet algorithme.» En 1986, dans les laboratoires de RCA, avec un étudiant, Eero Simoncelli, Adelson construisit des pyramides orthogonales[20]. «Plus tard, dit-il, nous avons appris que nous avions réinventé des filtres miroirs en quadrature.» En 1989, Adelson et Simoncelli (aujourd'hui au *Massachusetts Institute of Technology*) ont obtenu un brevet pour l'emploi de la transformation dans la compression des images.

«Le brevet appartient aujourd'hui à *General Electric* (GE), acquéreur de RCA, et pourrait bien s'appliquer à l'essentiel de l'encodage des images par ondelettes, dit Adelson. Je ne sais pas si GE s'en rend compte.» (D'autres disent qu'il est peu probable que le brevet s'applique à cet encodage, puisque les filtres miroirs en quadrature, introduits par D. Esteban et C. Galand en 1977, étaient connus depuis longtemps.)

«Deux concepts faisaient défaut : le concept d'ondelette et le concept de moments nuls. L'aspect orthogonal était aussi absent. Burt et Adelson calculaient les coefficients, mais ils ne les interprétaient pas comme une base orthogonale. Ils ont eu toutefois un énorme instinct. Ils ont donné un exemple où le moment est nul... On a découvert *a posteriori* nombre de justifications des choix qu'ils ont faits.»

De même que la FFT, la FWT n'est pas un luxe qui augmente la rapidité des calculs ; elle permet de réaliser des calculs, infaisables autrement.

«Dans la plupart des signaux unidimensionnels, la vitesse de calcul n'est pas essentielle ; aujourd'hui on calcule très vite, avec les processeurs spécialisés. Cela devient faux quand on considère des images à deux dimensions, sans parler de dimensions plus hautes ; il existe des calculs impossibles à faire sans algorithmes rapides», dit Grossmann.

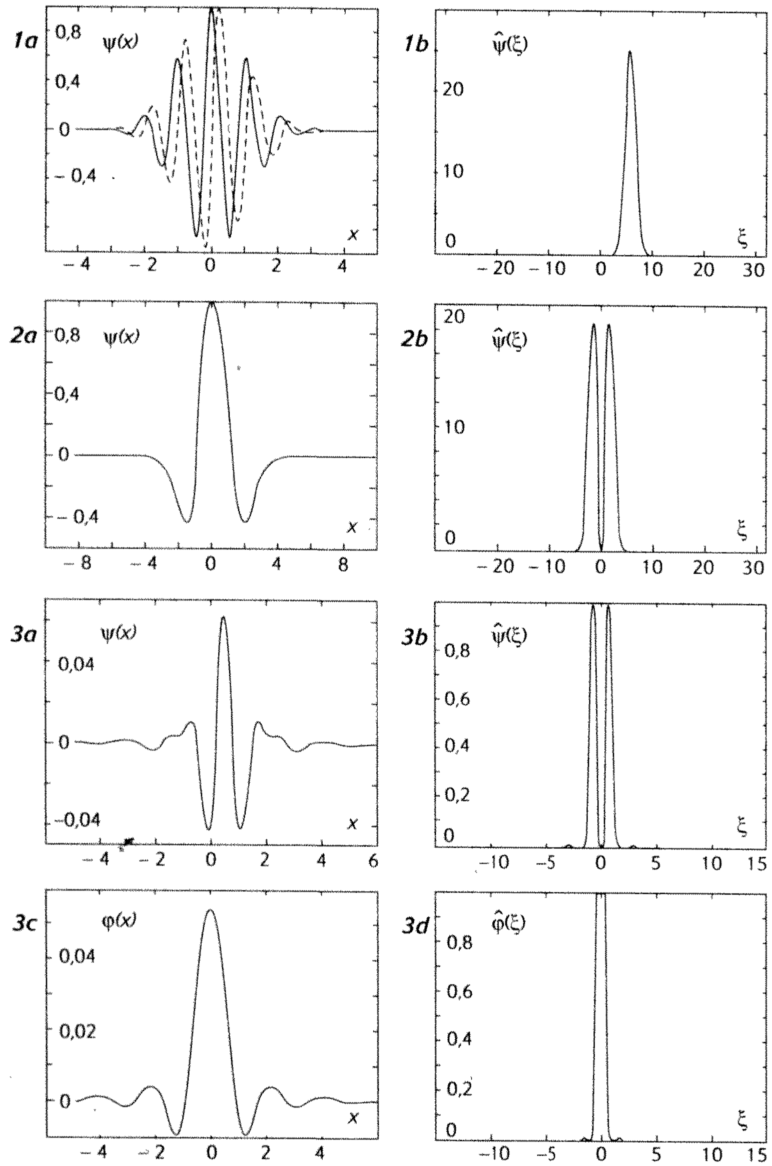
Même en une dimension, selon Mallat, la rapidité peut être indispensable : «Si on veut calculer, par exemple, une transformée en ondelettes d'un signal de parole en temps réel, il faut être capable de calculer une transformée en ondelettes de 16 000 échantillons par seconde... il faut absolument des algorithmes rapides.»

Le temps retrouvé : les ondelettes de Daubechies

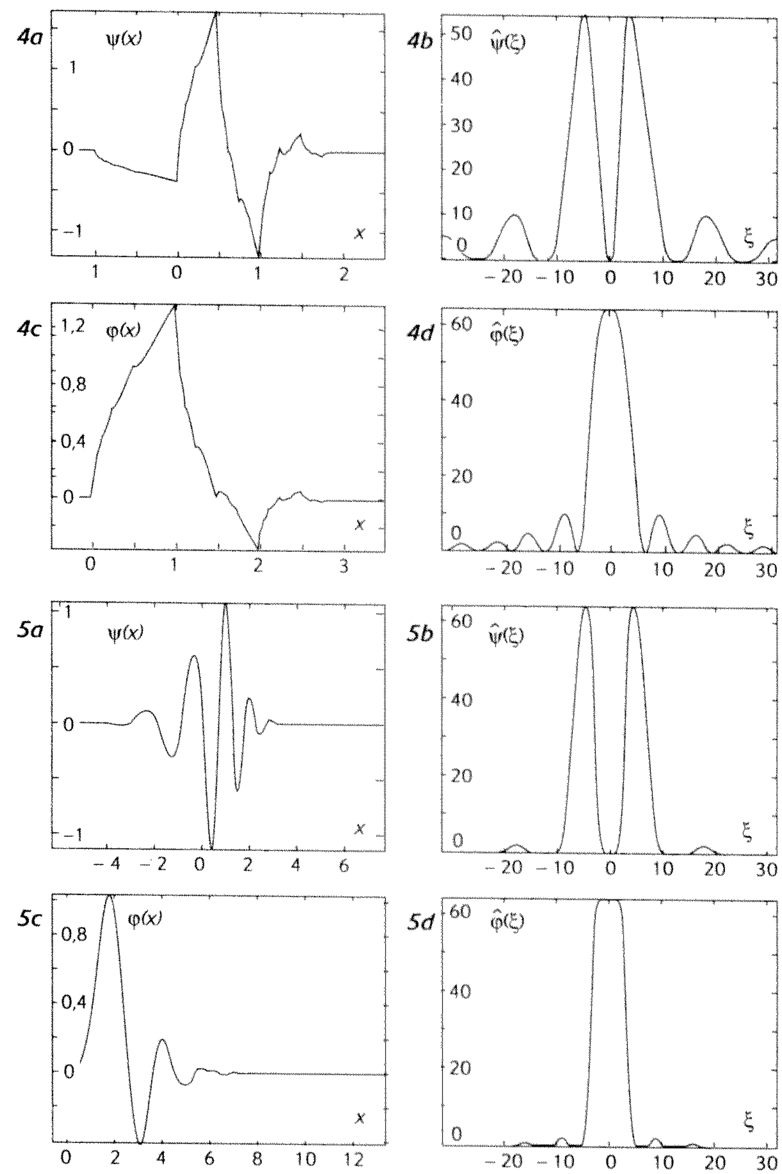
Mallat avait d'abord proposé son algorithme rapide en utilisant les versions tronquées d'ondelettes infinies construites par Guy Battle et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset. Une nouvelle sorte d'ondelette orthogonale à «support compact» permet d'éviter les erreurs qu'entraîne cette troncation. Ces ondelettes, construites par Daubechies, ne sont pas infinies ; elles sont nulles partout, sauf dans un «support» limité : entre – 2 et 2, par exemple.

Elles sont aussi, à l'opposé des ondelettes de Morlet ou de Meyer, de véritables créatures de l'ère informatique : les ondelettes de Daubechies ne peuvent être construites à partir de formules analytiques ; on les fabrique à l'aide d'itérations[10].

Une itération consiste à appliquer successivement une opération sur le dernier résultat obtenu ; itérer $(x \to x^2 - 1)$ à partir de $x = 2$, donne 3, puis 8, puis 63... La transformation en ondelettes rapide est une itération, puisqu'elle utilise chaque fois la dernière version du signal lissé comme nouveau point de départ. Itérer est ce qu'un ordinateur fait le mieux : «on donne



13. Ondelettes, fonctions d'échelle et leur transformée de Fourier. Les ondelettes 1 et 2 servent en représentations continues, qui ne nécessitent aucune fonction d'échelle : (*1a*) l'ondelette de Morlet, fonction complexe (la courbe en tiretés est la partie imaginaire) et (*1b*) sa transformée de Fourier ; (*2a*) le «chapeau mexicain» et (*2b*) sa transformée de Fourier. Les autres ondelettes sont orthogonales, et associées à une fonction d'échelle : (*3a*) l'ondelette de



Meyer-Lemarié d'ordre 4, (*3c*) sa fonction d'échelle, (*3b*) et (*3d*) leurs transformées de Fourier ; (*4a*) l'ondelette de Daubechies d'ordre 2, (*4c*) sa fonction d'échelle, (*4b*) et (*4d*) leurs transformées de Fourier ; (*5a*) l'ondelette de Daubechies d'ordre 7, (*5c*) sa fonction d'échelle, (*5b*) et (*5d*) leurs transformées de Fourier. L'ordre mesure la régularité d'une courbe : l'ondelette d'ordre 7 est plus lisse que celle d'ordre 2. (Avec l'aimable autorisation de M. Farge et E. Goirand) une seule commande et puis on boucle ; ça va très vite», dit Meyer.

En apparence, une telle itération est simple, mais il n'est pas si facile de la comprendre. Les itérations non linéaires, telles que $x^2 - 1$, sont l'équivalent, en temps discret, des équations différentielles non linéaires, rebelles à tout effort d'analyse. Pendant longtemps les mathématiciens avaient prudemment pris le parti de n'y pas penser, tant ces itérations sont difficiles. Depuis une vingtaine d'années, avec l'aide des ordinateurs, ils ont appris à les utiliser pour créer, à partir de logiciels simples, des objets extraordinairement complexes, tels que les ensembles de Julia ou de Mandelbrot, produisant ainsi les belles images de «chaos» et de systèmes dynamiques.

Néanmoins nombre de mathématiciens restent mal à l'aise face aux itérations. Selon Yves Meyer, l'idée de les utiliser pour construire des fonctions explicites ne leur est pas familière. «En revanche, dit-il, pour les gens qui travaillent avec les ordinateurs et qui font du traitement du signal, les méthodes itératives sont extrêmement naturelles.»

Stéphane Mallat étudiait la vision artificielle ; pour lui l'usage des ordinateurs était presque naturel ; il imagina de construire les ondelettes par une méthode itérative. Il a suggéré cette approche (également inspirée des algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson) dans son article sur la multirésolution. Il n'est toutefois pas allé au bout de cette idée. «Mallat lance les idées brillantes, qui font travailler deux cents, trois cents personnes, puis il passe à autre chose, constate Meyer. C'est Ingrid Daubechies, avec sa ténacité et sa puissance de travail, qui est parvenue à la réaliser.»

Ingrid Daubechies, de nationalité belge, a travaillé en physique mathématique avec Grossmann, en France, puis sur la mécanique quantique, au *Courant Institute* de New York.

«Son rôle a été essentiel, raconte Grossmann. Ses contributions sont très importantes, mais elles sont également abordables et utilisables par diverses communautés. Elle sait parler aux ingénieurs comme aux mathématiciens, et sa formation en mécanique quantique est une bonne influence.»

Daubechies connaissait la multirésolution de Meyer et Mallat. «Yves Meyer m'en a parlé à une conférence. Je réfléchissait déjà à certaines de ces questions, et leur travail m'a intriguée», dit-elle. Avec les ondelettes infinies de Meyer, calculer un seul coefficient d'ondelette nécessitait beaucoup de travail. Daubechies voulait construire des ondelettes plus faciles à utiliser. Elle était exigeante ; en plus d'orthogonalité et

de support compact – deux contraintes tellement opposées qu'on doutait de la possibilité de les réconcilier –, elle tâchait d'obtenir des ondelettes régulières, avec des moments nuls.

«Je me demandais, pourquoi n'existerait-il aucune méthode possédant ces caractéristiques, raconte Daubechies. Cette question m'a passionnée ; une période de travail intense a suivi. A l'époque, je connaissais peu Yves Meyer. Quand j'ai obtenu la première construction, il s'est montré très enthousiaste ; quelqu'un m'a signalé qu'il en avait parlé au cours d'un séminaire. Je savais que c'était un mathématicien brillant et j'ai pensé, mon Dieu, il est en train de comprendre les choses bien plus vite que moi… Je sais aujourd'hui qu'il ne se serait jamais attribué le mérite de la découverte, mais à l'époque je sentais que c'était urgent. Je travaillais d'arrache-pied. A la fin de mars 1987, j'avais tous les résultats.»