Décomposition et reconstruction, ou transformation et transformation inverse, à l'aide de filtres

Il est possible de développer ses propres programmes de calculs de décomposition et de reconstruction en ondelettes, comme il est possible d'utiliser des outils déjà existants.

Filtres de décomposition

Nous avons jusqu'à présent utilisé des calculs algébriques dans la décomposition et la reconstruction des signaux. Nous pouvons cependant procéder les mêmes calculs avec des filtres, des opérations matricielles et des opérations de convolution. Les calculs par convolution sont les plus utilisés.

Exemple :

Trouves les coefficients d'approximation et de détail du vecteur S = (s_1,s_2).

Méthode usuelle :

$a_1 = \frac{s_1 + s_2}{2}$ et $d_1 = \frac{s_1 - s_2}{2}$

Méhode par filtres :

Le filtre de la sommation est LD = [1 1]/2. <u>LD est le filtre basse fréquence de décomposition</u> (LD = Low Decomposition).

Le filtre de la différence est HD = [1 -1]/2. <u>HD est le filtre haute fréquence de décomposition</u> (HD = High Decomposition).

La régularité du signal s'observe à basse fréquence.

Les fluctuations du signal (bruit) s'observe à haute fréquence.

$$a_1 = S.LD^T = (s_1 \quad s_2).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}/2 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

$$d_1 = S.HD^T = (s_1 \quad s_2).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}/2 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

LD^T et HD^T sont les transposées de LD et HD.

On peut comme précédemment décomposer un signal en ses coefficients d'approximation et de détail avec les sommations et les différences, on peut le faire aussi matriciellement avec les filtres LD et HD, en produisant une matrice filtre H:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}/2$$

Ainsi les coefficients C^1 sont obtenus:

$$C^1 = S.H = (s_1 \quad s_2).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}/2 = \begin{pmatrix} \frac{s_1 + s_2}{2} & \frac{s_1 - s_2}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple:

a- Décomposer par la méthode algébrique (sommation et différence) au niveau 1 le vecteur $S = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5)$. Noter que nous avons omis d'insérer les virgules entre les éléments de S. <u>À partir de maintenant, nous allons toujours faire toutes les sommations d'abord, suivies de toutes les différences pour obtenir en première moitié du vecteur les coefficients d'approximation, et en deuxième moitié les coefficients de détail</u>.

$$C = (0+3 \quad 1+5 \quad 0\text{-}3 \quad 1\text{-}5)/2 = (3 \quad 6 \quad -3 \quad -4)/2$$

b- Décomposer par la méthode des filtres avec calcul matriciel et au niveau 1 le vecteur $S = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5)$.

Puisque nous avons 4 éléments dans le vecteur à décomposer, il nous faut une matrice filtre <u>H de 4 x 4</u> qui agit sur les éléments de S <u>par paire</u> pour les <u>sommations</u> et pour les <u>différences</u>.

$$C = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}/2 = \begin{pmatrix}0+3 & 1+5 & 0-3 & 1-5\end{pmatrix}/2 = \begin{pmatrix}3 & 6 & -3 & -4\end{pmatrix}/2$$

c- Décomposer par la méthode de la convolution au niveau 1 le vecteur $S = \begin{pmatrix}0 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$.
Les filtres de convolution sont LD = [1 1]/2 et HD = [1 -1]/2. Faisant d'abord la convolution de S avec LD suivie de la convolution de S avec HD, on obtient : C = ([0 0+3 3+1 1+5 5] [-0 0-3 3-1 1-5])/2. Les valeurs dans le premier crochet correspondent aux coefficients d'approximation, et celles du second crochet correspondent aux coefficients de détail. Une seconde opération est nécessaire dans cette procédure: c'est la <u>décimation</u>. Il s,agit de ne retenir que les éléments de rand pair et d'ignorer les autres:
C = ([0+3 1+5] [0-3 1-5])/2 = ([3 6] [-3 -4])/2 = (3 6 -3 -4])/2.

Remarque: Même si la procédure par la convolution nécessite 2 opérations, convolution-décimation, elle est la plus rapide et la plus utilisée. La méthode algébrique nécessite des boucles et un tri des éléments. La méthode matriciel nécessite la création et le maintien en mémoire de la matrice des filtres.

Exercice 1.
a- Écrire le filtre H pour décomposer un vecteur de 8 éléments.
b- Décomposer aux niveaux 1, 2 et 3 le vecteur S = (3,1,0,4,8,6,9,9).

Filtres de reconstruction
Nous avons démontré ci-haut la reconstruction par l'approche algébrique:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = a \\ \dfrac{x-y}{2} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x + y} = 2a \\ \mathrm{x - y} = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{2x = 2(a + d)} \\ \mathrm{2y = 2(a - d)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x = a + d} \\ \mathrm{y = a - d} \end{cases}$$

il apparaît donc que:

$$(a \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+d & a\text{-}d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$$

soit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et les filtres de reconstruction basse fréquence LR et de haure fréquence HR sont donnés par: LR = [1 1]; HR = [1 -1];

Exercice 2:
a- Établir les filtres de reconstruction aux niveaux 3, 2 et 1.

b- Retrouver, à partir du vecteur décomposé de S de l'exercice 1 ci-dessus, les coefficients C^2, C^1 puis le signal S.

La transformée de Haar en 2D
La transformée de Haar en 2D s'obtient en transformant selon les lignes, puis le résultat est trasnformé selon les colonnes.

Exemple:

$$S = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{pmatrix}$$

Algébriquement:

$$C_l^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{s_{00}+s_{01}}{2} & \dfrac{s_{00}-s_{01}}{2} \\ \dfrac{s_{10}+s_{11}}{2} & \dfrac{s_{10}-s_{11}}{2} \end{pmatrix}$$ calculs selon les lignes.

$$C^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{s_{00}+s_{01}}{2} + \dfrac{s_{10}+s_{11}}{2} & \dfrac{s_{00}-s_{01}}{2} + \dfrac{s_{10}-s_{11}}{2} \\ \dfrac{s_{00}+s_{01}}{2} - \dfrac{s_{10}+s_{11}}{2} & \dfrac{s_{00}-s_{01}}{2} - \dfrac{s_{10}-s_{11}}{2} \end{pmatrix} / 2$$ Calculs selon les colonnes.

$$= \begin{pmatrix} (s_{00}+s_{01}) + (s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01}) + (s_{10}-s_{11}) \\ (s_{00}+s_{01}) - (s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01}) - (s_{10}-s_{11}) \end{pmatrix} / 4$$

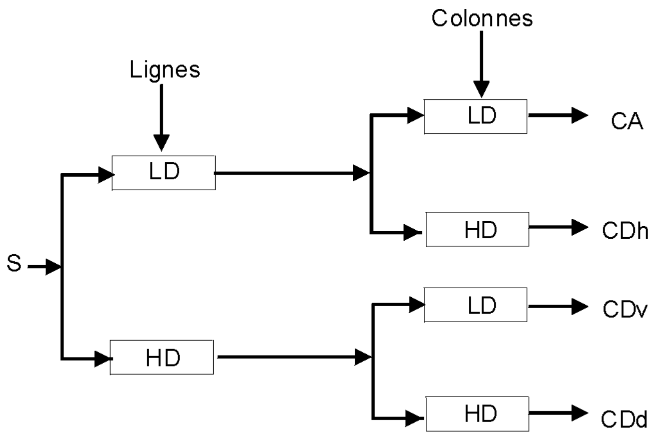

Figure. Diagramme représentant la décomposition d'une matrice S selon les lignes, puis selon les colonnes, en appliquant les filtres de décomposition de basse fréquence LD et de haute fréquence HD, pour obtenir les coefficients des approximations CA, les coefficients des détails horizontaux CDh, verticaux CDv, et diagonaux CDd, et ce pour un niveau 1 de décomposition.

La décomposition de S ci-dessus s'exprime:

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \begin{pmatrix} (s_{00}+s_{01})+(s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01})+(s_{10}-s_{11}) \\ (s_{00}+s_{01})-(s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01})-(s_{10}-s_{11}) \end{pmatrix} / 4 \\
&= \begin{pmatrix} s_{00}+s_{01}+s_{10}+s_{11} & s_{00}-s_{01}+s_{10}-s_{11} \\ s_{00}+s_{01}-s_{10}-s_{11} & s_{00}-s_{01}-s_{10}+s_{11} \end{pmatrix} / 4 \\
&= \begin{pmatrix} s_{00}+s_{01}+s_{10}+s_{11} & s_{00}+s_{10}-s_{01}-s_{11} \\ s_{00}+s_{01}-s_{10}-s_{11} & s_{00}+s_{11}-s_{01}-s_{10} \end{pmatrix} / 4 \\
&= \begin{pmatrix} CA & CDv \\ CDh & CDd \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Habituellement, les coefficients s'écrivent selon : $\begin{pmatrix} CA & CDh \\ CDv & CDd \end{pmatrix}$, et donc selon les calculs précédents on doit permuter CDh et CDv.

Exemple:
Voici un exemple de décomposition au niveau 1 de l'image suivante :

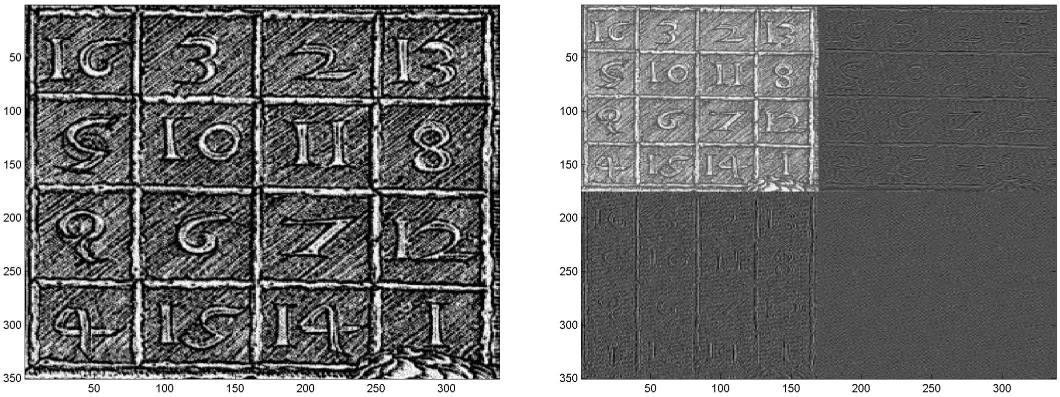

Figure. Image décomposée au niveau 1 par l'ondelette de Haar montrant les coefficients des approximations, des détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

Exemple 2 :
Voici maintenant un exemple de la décomposition au niveau 3 de l'image de woman.

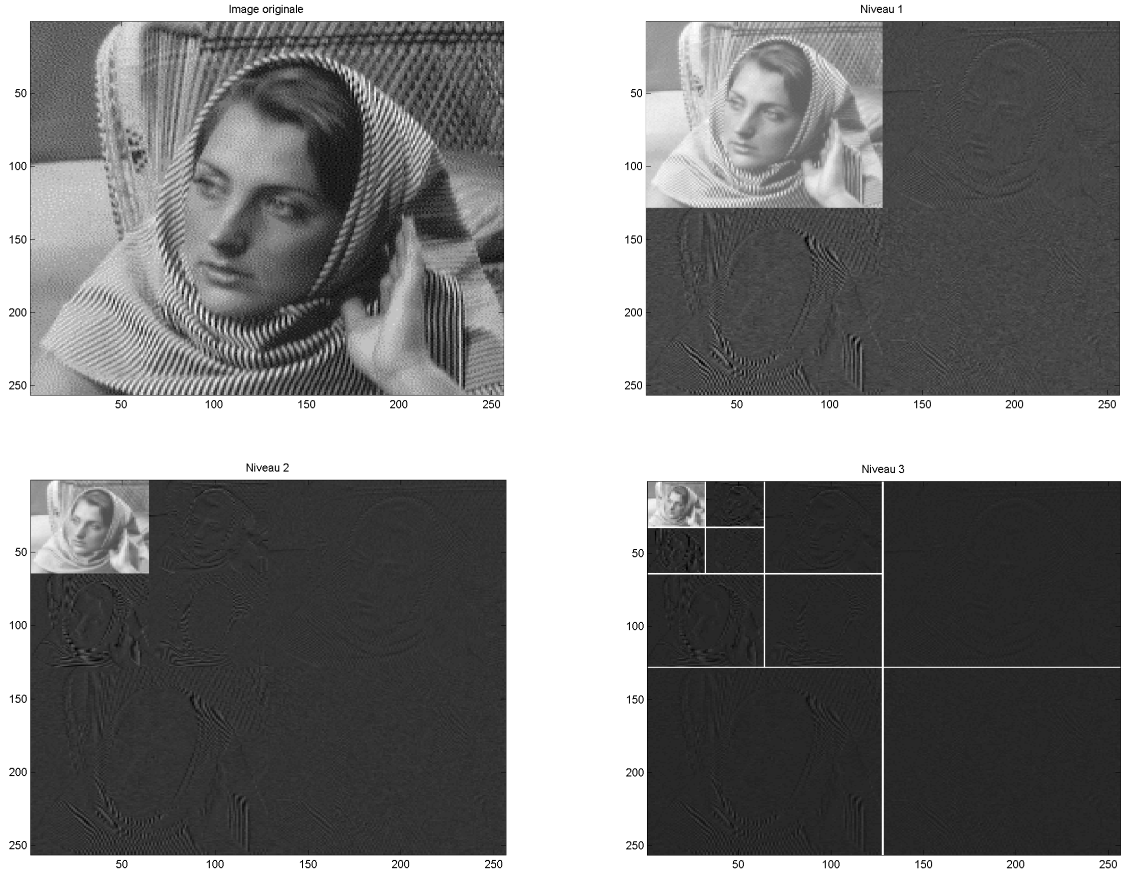

Figure. Image de woman décomposée aux niveaux 1, 2 et 3 avec dwt2. L'image peut aussi être directement décomposée avec wavedec1:

Exercice 1.

Décomposer $S = \begin{pmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ selon les lignes-colonnes puis selon les colonnes-lignes et comparer les résultats. Reconstruire S à partir des coefficients.

Exercice 2.

Décomposer $S = \begin{pmatrix} a & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{g} & \mathrm{h} \\ \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & \mathrm{l} \\ \mathrm{m} & \mathrm{n} & \mathrm{o} & \mathrm{p} \end{pmatrix}$ au niveau 1 selon les lignes-colonnes puis selon les colonnes-lignes et comparer les résultats.