III. Transformée de Fourier.

Soit la série de Fourier complexe

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-i\omega nt}dt$$

Nous appelons la fonction g au lieu de f pour ne pas confondre avec la fréquence f.

avec $\omega_n = n\omega = 2\pi n/T \Rightarrow \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = 2\pi n/T - 2\pi(n-1)/T = 2\pi/T$

$\Rightarrow \Delta\omega = 2\pi/T \rightarrow 1/T = \Delta\omega/2\pi$

Remplaçons c_n dans g(t):

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-i\omega nt}dt\right]e^{i\omega nt}$$

Remplaçant 1/T par $\Delta\omega/2\pi$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-i\omega nt}dt\right]e^{i\omega nt}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-i\omega_n t}dt\right]e^{i\omega_n t}\Delta\omega$$

En se servant de la somme de Riemann qui s'énonce comme suit:

soit un intervalle [a,b] partitionné en plusieurs points tel que

$a < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_{n-1} < b$, et les intervalles entre ces points sont:

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, ...$ et Δx_n. Soit y, un point d'un sous-intervalle Δx_k, alors la somme d'une fonction g des points y correspondants dans chaque sous-intervalle Δx_k est donnée par: $\sum_{k=1}^{n} g(y)\Delta x_k$

et cette fonction devient une intégrale lorsque les sous-intervalles Δx tendent vers 0.

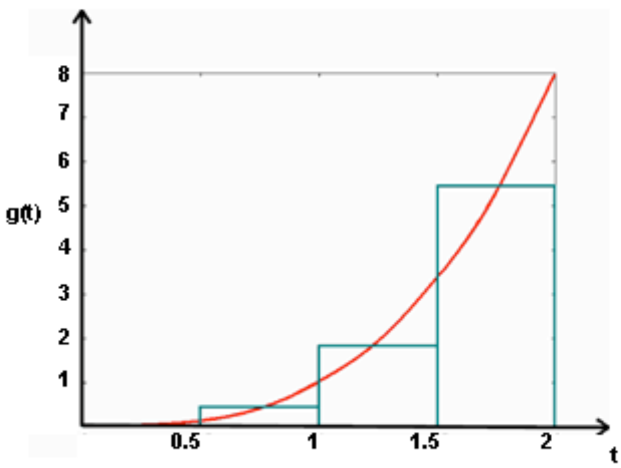


Figure. Somme de Riemann.

Dans la fonction $g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$ et $\Delta\omega = 2\pi/T$

lorsque T → ∞, Δω → 0, ce qui justifie l'utilisation de l'intégrale de Riemann:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

Puisque $\omega_n = n\omega$ avec $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$, l'indice n est omis et l'intégration se fait sur ω.

Définissons:

$$G(\omega) = TF(g(t)) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right]$$ TF = transformée de Fourier

et $$g(t) = TF^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$ TF^{-1} = Transformée de Fourier inverse.

La variable dans le domaine de Fourier, correspondant à la variable spatiale x (cm) ou à la variable temporelle t (sec), est la fréquence f. f a l'unité de cm^{-1} ou s^{-1} (Hertz, Hz).

$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$, soit f = 1/T et les transformées de Fourier deviennent:

$$G(f) = TF(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df$$

Pour que TF existe, il faut que g(t) soit de carré intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$. D'autres définitions:

g(t) définie sur [0, T] et à valeurs complexes. Elle est de carré intégrable si $\int_{0}^{T} |g(t)|^2 dt < \infty$. Aussi,

la condition pour que G(f) existe est que g(t) soit absolument intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$).

Exemple 1:

Calculer la TF de g(t) = exp(-αt) pour t > 0; et g(t) = 0 pour t < 0; α >0.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{0} 0 e^{-i2\pi f t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i2\pi f t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} dt$$

$$G(f) = \left| \frac{1}{-(\alpha + i2\pi f)} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} \right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} = \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Le module est : $|G(f)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2} + \frac{4\pi^2 f^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$

L'argument est: $\arg(G) = arctg\left(\frac{-2\pi f}{\alpha}\right)$

G(f) peut s'écrire sous la forme G(f) = |G(f)|*exp(i*arg(G)):

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i * arctg\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$$

α=0.05 ; ts=1; t=0:ts:100; N=length(t);
Pour retrouver avec plus de précision les féquences sur le graphique des transformées de Fourier, on doit augmenter le nombre N de points dans la transformée de Fourier en allongeant avec des zeros la fonction de départ.

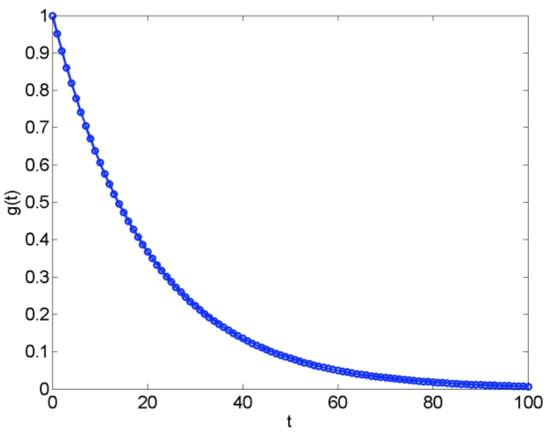


Figure. g(t) = exp(-0.05t) avec t = 0:1:100.

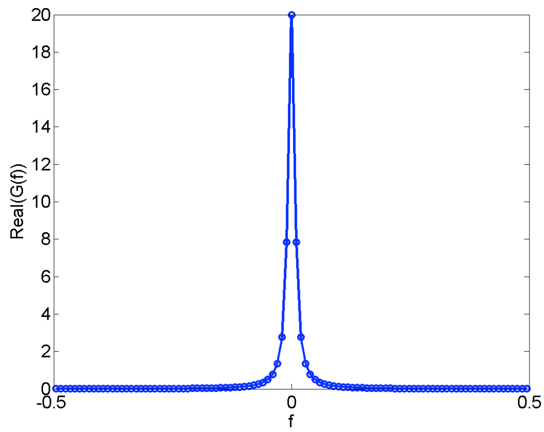
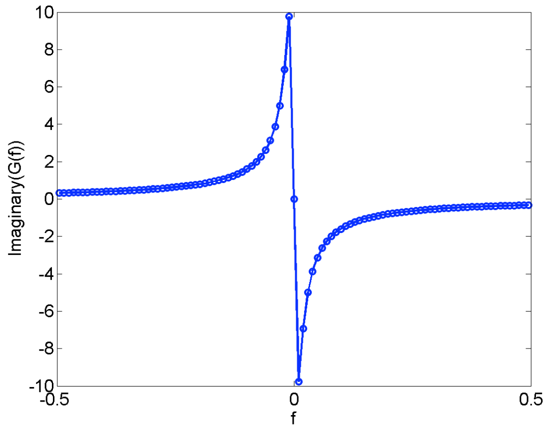


Figure. Re(G(f)).



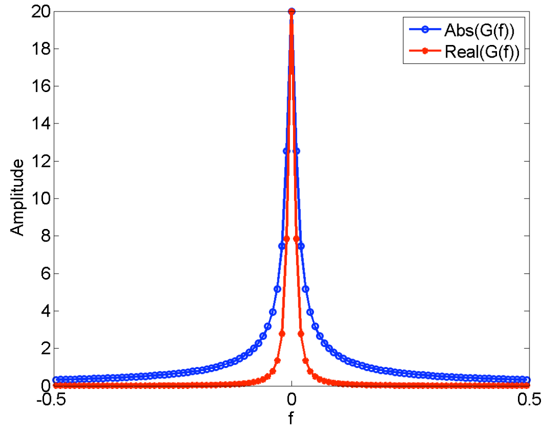


Figure. Im(G(f)). Figure. Abs(G(f)). ($z = a + ib; \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

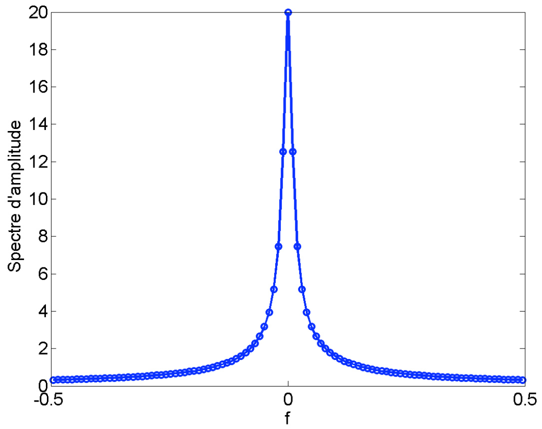


Figure. Spectre d'amplitude.

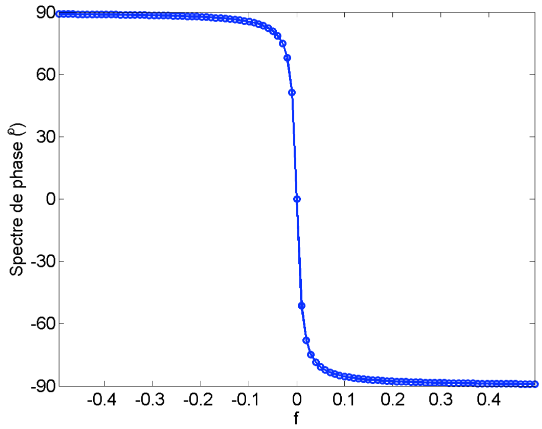


Figure. Spectre de phase.

Calcul de la transformée inverse de $G(f) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i * arctg\left(-\dfrac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$

La formule s'écrit : $g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i * arctg\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]} e^{i2\pi f t} df$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i * (2\pi f t - arctg\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right))\right]} df$$ .... approche compliqué

Si l'on garde $G(f) = \dfrac{1}{\alpha + i2\pi f}$ $\Rightarrow$ $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{i2\pi f t} df$

on multiplie et on divise par $e^{\alpha t}$: $g(t) = \dfrac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{\alpha t} e^{i2\pi f t} df$

$$\Rightarrow \quad g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{(\alpha + i2\pi f)t} df$$

soit $u = \alpha + i2\pi f \Rightarrow du = i2\pi df \Rightarrow df = du/i2\pi$.

$\Rightarrow \quad g(t) = \dfrac{e^{-\alpha t}}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{u} e^{ut} du$ .... On doit recourir aux tables d'intégration.

Exemple 2:

Calculer la TF de g(t) = 1 si |t| < d et g(t) = 0 si |t| > d, et d > 0.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-d}^{d} e^{-i2\pi f t} dt = \left| \frac{e^{-i2\pi f t}}{-i2\pi f} \right|_{-d}^{d} = \frac{1}{-i2\pi f} \left(e^{-i2\pi f d} - e^{i2\pi f d} \right)$$

$$G(f) = \frac{1}{i2\pi f} \left(e^{i2\pi f d} - e^{-i2\pi f d} \right) = d \left(\frac{e^{i2\pi f d} - e^{-i2\pi f d}}{i2\pi f d} \right) = 2d \frac{\sin(2\pi f d)}{2\pi f d}$$

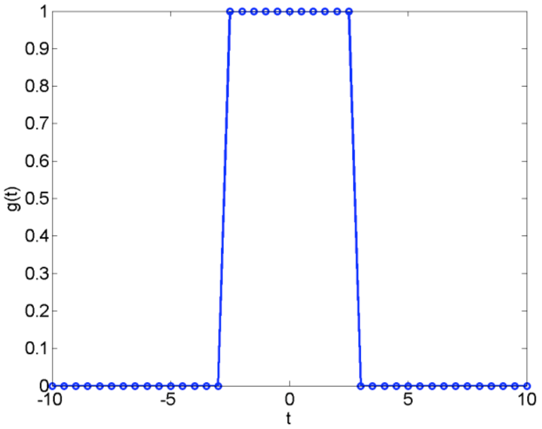
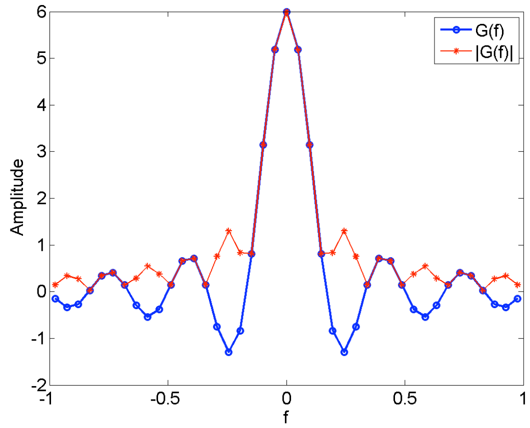


Figure. g(t) avec T=20, d=3, ts=0.5.



G(f) et spectre d'amplitude.

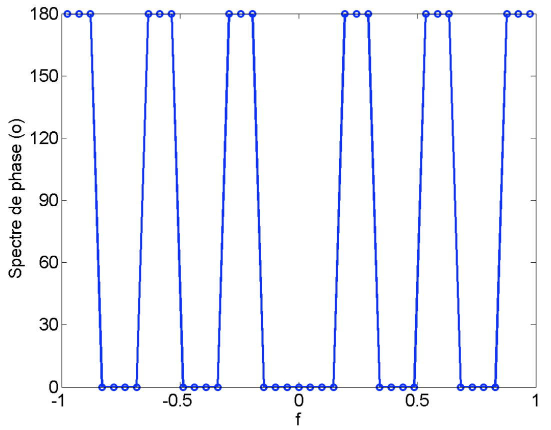


Figure. Spectre de phase.

Exemple 3:

Calculer la TF de g(t) = cos(ω_0t) pour |t| < d/2, d > 0 et g(t)=0 ailleurs.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} + e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} \left[\sin c\big((\omega_0 - 2\pi f)d/2\big) + \sin c\big((\omega_0 + 2\pi f)d/2\big) \right]$$

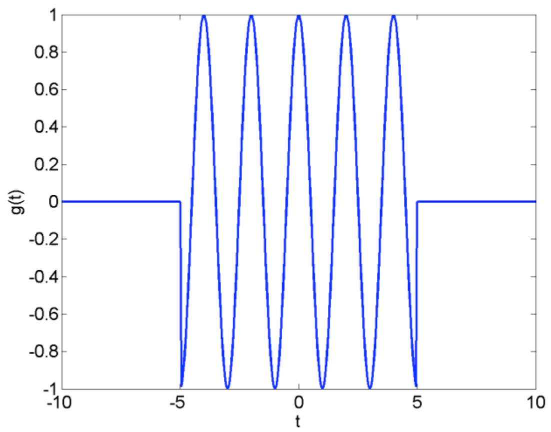


Figure. g(t)=cos(2πf$_0$t). f$_0$=0.5 et T=2.

ts=0.5; t=-10:ts:10; d=10.

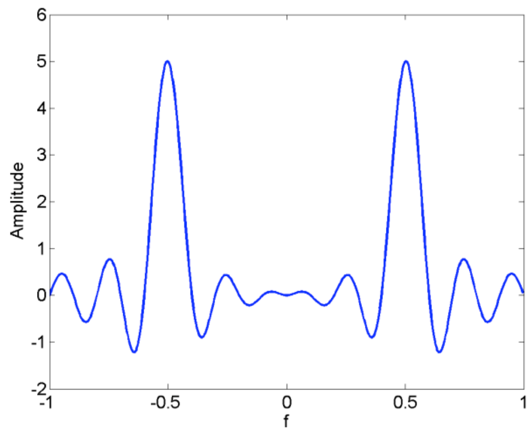


Figure. G(f).

Exemple 4 :

Calculer la TF de g(t) = sin(ω_0t) pour |t| < d/2, d > 0 g(t)=0 ailleurs.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{-i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

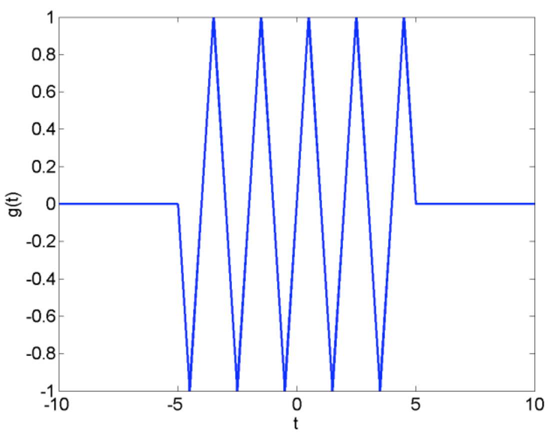
$$G(f) = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\mathrm{sinc}\left((\omega_0 - 2\pi f)d/2\right) - \mathrm{sinc}\left((\omega_0 + 2\pi f)d/2\right) \right]$$

$$G(f) = -\frac{id}{2} \left[\mathrm{sinc}\left((\omega_0 - 2\pi f)d/2\right) - \mathrm{sinc}\left((\omega_0 + 2\pi f)d/2\right) \right]$$



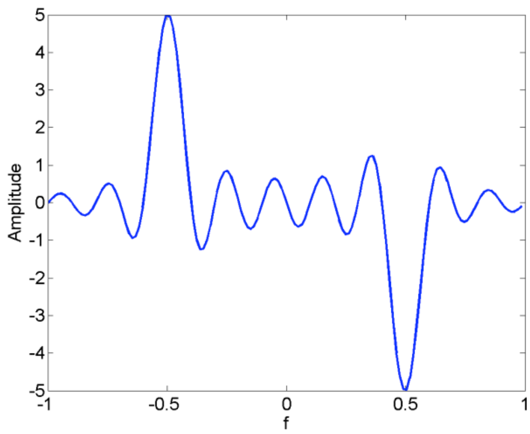


Figure. g(t)=sin(2πf$_0$t). f$_0$=0.5 et T=2. Figure. G(f).

ts=0.5; t=-10:ts:10; d=10.

Transformée de Fourier en cosinus

La transformée de Fourier en cosinus d'une fonction g(t) est la transformée de Fourier de la partie paire de g(t). Si $g_{pair}(t) = g_p(t)$:

$g_p(t) = g(t)$ si t > 0; et $g_p(t) = g(-t)$ si t < 0.

Par définition $TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_p(t) \left[\cos(2\pi f t) - i \sin(2\pi f t)\right] dt$$

$$G_{\cos}(f) = G_c(f) = 2\int_{0}^{\infty} g(t) \cos(2\pi f t) dt$$

Ex. Trouver la transformée de Fourier en cosinus de g(t)=exp(-a|t|) avec a>0 pour |t|<∞.

Réponse : $G(f)=2a/(a^2 + 4\pi^2 f^2)$

Transformée de Fourier en sinus

La transformée de Fourier en sinus d'une fonction g(t) est la transformée de Fourier de la partie impaire de g(t). Si $g_{impair}(t) = g_i(t)$:

$g_i(t) = g(t)$ si t > 0; et $g_i(t) = -g(-t)$ si t <0.

Par définition $TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) \left[\cos(2\pi f t) - i \sin(2\pi f t)\right] dt$$

$$G_{\sin}(f) = G_s(f) = -2i\int_{0}^{\infty} g(t) \sin(2\pi f t) dt$$