

Exemple 3:

Trouver les spectres d'amplitude et de phase de la fonction $f(t)$ de période T :

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq d \\ 0 & \text{si } d < t \leq T \end{cases} \quad d < T; \quad \omega = 2\pi/T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega n t} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-i\omega n t} dt = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n t}}{-i\omega n} \right]_0^d = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n d}}{-i\omega n} - \frac{1}{-i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{A}{T} \left[\frac{1}{i\omega n} - \frac{e^{-i\omega n d}}{i\omega n} \right] = \frac{A e^{-i\omega n d/2}}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{A d e^{-i\omega n d/2}}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{2i\omega n d/2} \right] = \frac{A d e^{-i\omega n d/2}}{T} \left[\frac{\sin(\omega n d/2)}{\omega n d/2} \right]$$

$$c_n = \frac{A d}{T} \sin c(\omega n d/2) e^{-i\omega n d/2} \quad \text{de la forme } c_n e^{i\phi_n}$$

$$\text{avec } |c_n| = \left| \frac{A d}{T} \sin c(\omega n d/2) \right| \quad \text{et } \phi_n = -\frac{\omega n d}{2} = -\frac{2\pi}{T} \frac{n d}{2} = -\frac{\pi n d}{T}$$

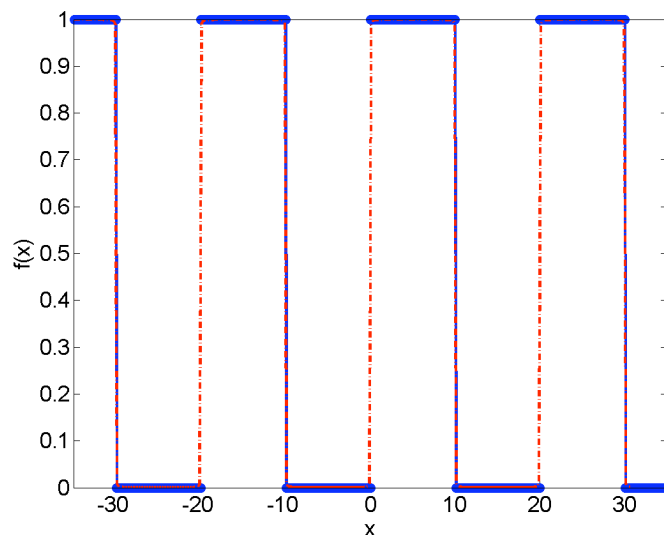


Figure. rect (bleu), sa SF complexe (rouge). $A=1$, $T=2d=20$. Donne même spectre d'amplitude que précédemment.

II.6. Propriétés d'approximation en moindres carrés

La série de Fourier trigonométrique définie sur $-T/2 < t < T/2$,

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)\}$ peut être approximée par les k premiers termes:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \{a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)\}$$

L'erreur alors introduite est $e_k(t) = f(t) - s(t)$

L'erreur quadratique moyenne (ou erreur moyenne quadratique) est donnée par:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [e_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - s(t)]^2 dt$$

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

Théorème de Parseval: si a_n et b_n sont les coefficients de la SF de $f(t)$ de période T, alors:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Exemple:

Trouver la série de Fourier de $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$ et $f(t+2\pi) = f(t)$. Calculer l'erreur quadratique

moyenne, E_k , pour les 5 premiers harmoniques non nuls. Résultat SF: $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$

Réponse:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$$

$$u=t \rightarrow du=dt; dv=\cos(nt)dt \rightarrow v=\sin(nt)/n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left\{ [t \sin(nt)/n]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ [0 - 0] - \left[-\frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] \right\} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

$$u = t; du = dt; dv = \sin(nt)dt; v = (-1/n)\cos(nt).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[t(-1/n)\cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (1/n)\cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[(-1/n)\pi \cos(n\pi) - (-1/n)(-\pi) \cos(-n\pi) \right]_{-\pi}^{\pi} - 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) - \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi) \sin(nt)$$

avec $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $(-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$: $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$

Pour le calcul de l'erreur quadratique moyenne E_k :

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2 \cos(n\pi)}{n} \right)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2 \cos(n\pi)}{n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^k \left(\frac{\cos(n\pi)}{n} \right)^2$$

Nous avons proposé de tracer $f(t)$ et sa série de Fourier pour certaines harmoniques et d'observer les variations de E_k et de l'ajustement de $f(t)$ par sa SF:

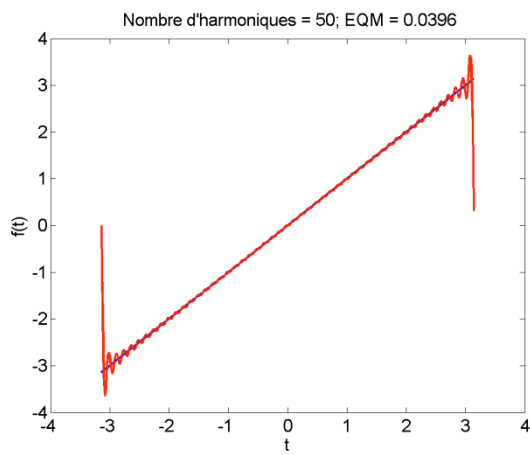
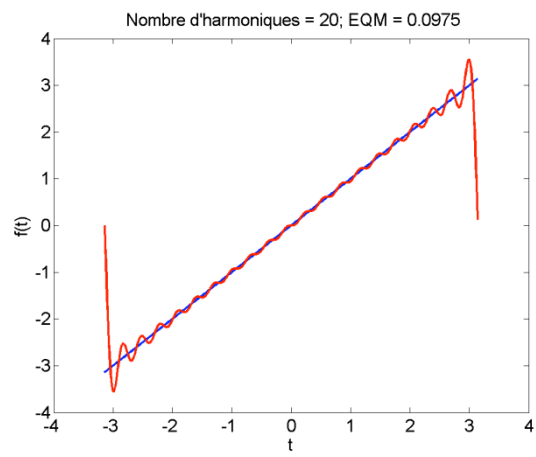
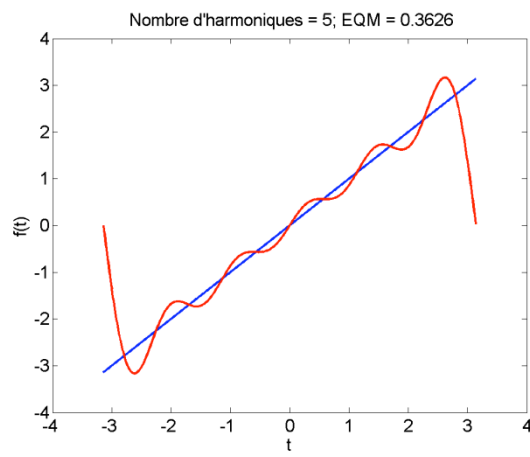


Figure. Étude de E_k et SF pour $f(t)=t$ sur $[-\pi, \pi]$. $\Delta t=0.01$. EQM=erreur quadratique moyenne.

II.7. Symétries et séries de Fourier.

II.7.1. Différentes symétries

Une fonction est **paire** si $f(t) = f(-t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Si une fonction est paire:
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

Le graphe de $f(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des y.

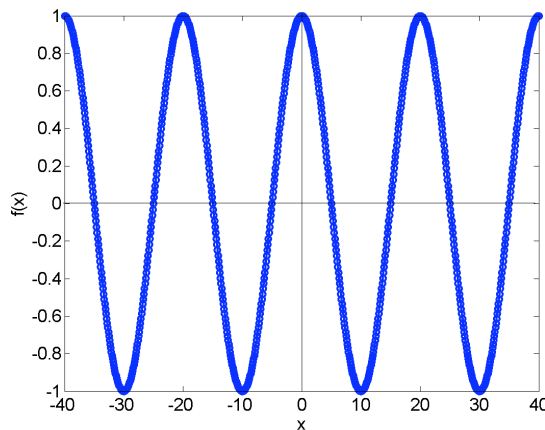


Figure. Fonction cosinus: paire. (Ex.: x^2 ; gaussienne,).

Une fonction est **impaire** si $f(t) = -f(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si une fonction est impaire:
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Le graphique de $f(t)$ est alors symétrique par rapport à l'origine.

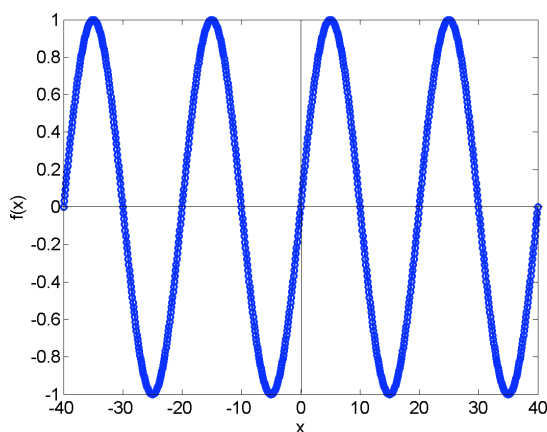


Figure. Fonction sinus: impaire. (Ex.: x^3 , tangente,).

Composantes paire et impaire:

Une fonction peut s'écrire comme la somme de deux composantes paire et impaire.

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t)/2 + f(t)/2 + f(-t)/2 - f(-t)/2 = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \\ &= \frac{1}{2}f_{\text{pair}}(t) + \frac{1}{2}f_{\text{impair}}(t) \end{aligned}$$

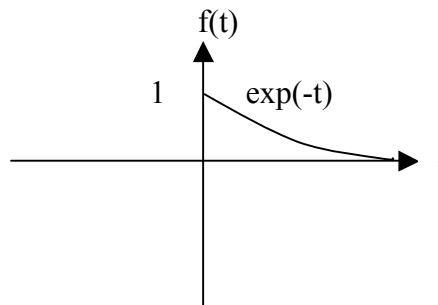
Exemple 1:

Trouver les composantes paire et impaire de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

De $f(t)$ on déduit $f(-t)$:

$$f(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$



$$f_{\text{paire}}(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ \frac{1}{2}e^t & t < 0 \end{cases}$$

$$f_{\text{impaire}}(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ -\frac{1}{2}e^t & t < 0 \end{cases}$$

Symétrie de demi-période:

Une fonction périodique de période T est dite symétrique de semi-période si $f(t) = -f(t + T/2)$.

Symétrie d'un quart de période:

Si une fonction périodique $f(t)$ a une symétrie de demi-période, et si elle est de plus paire ou impaire, alors $f(t)$ est symétrique d'un quart de période paire ou impaire.

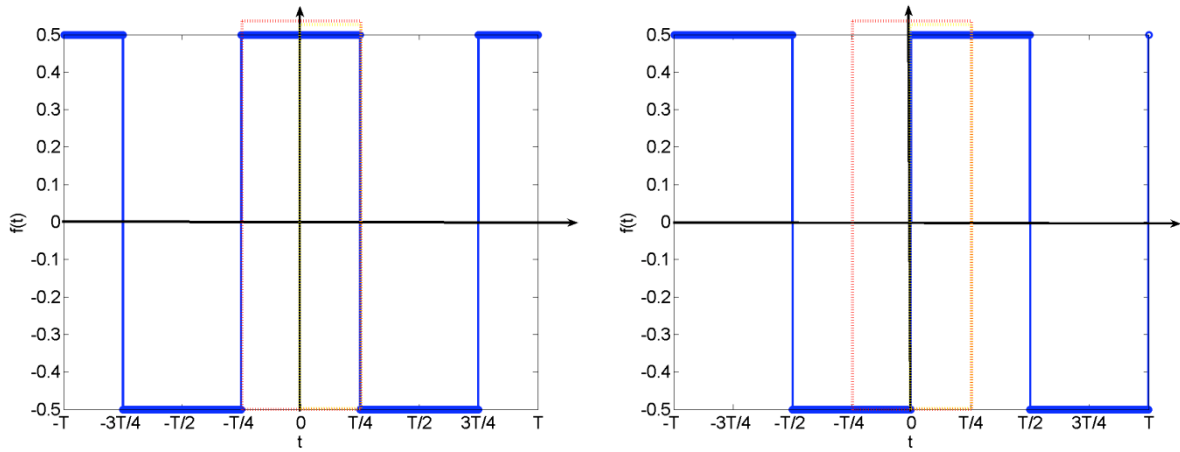


Figure. Exemple de fonctions paire et impaire et toutes deux symétriques de demi-période, elles sont alors symétriques d'un quart de période paire ou impaire.

II.7.2. Séries de Fourier de fonctions symétriques

L'utilisation de la symétrie des fonctions simplifie le calcul des séries de Fourier.

Fonction paire:

Rappel des formules:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Si $f(t)$, de période T , est **paire**, sa transformée de Fourier se réduit à:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

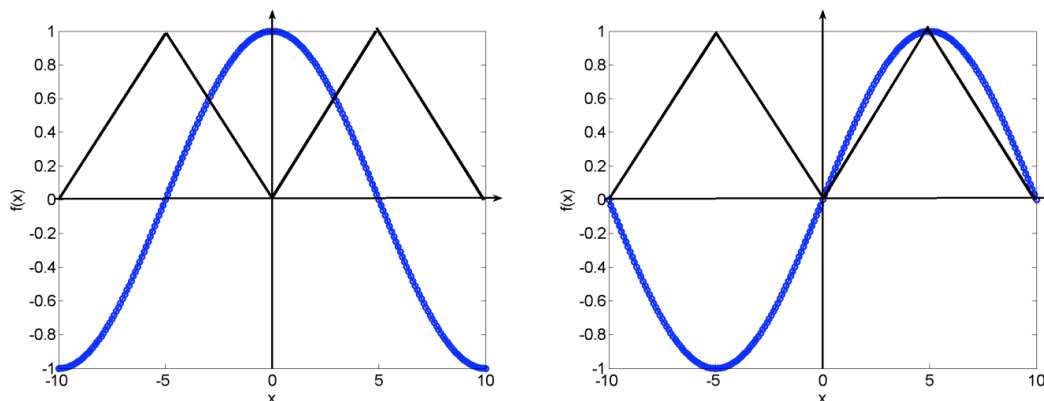


Figure. La fonction $f(t)$ en noir est paire. Lorsqu'elle multiplie un cosinus (en bleu, figure de gauche), comme dans le cas des a_n , l'intégrale du produit $f(t)\cos(n\omega t)$ ne s'annule pas. Tandis que

lorsqu'elle multiplie un sinus (en bleu, figure de droite), comme dans le cas des b_n , l'intégrale du produit $f(t)\sin(n\omega t)=0 \Rightarrow b_n = 0$.

Fonction impaire:

Si $f(t)$, de période T , est **impair**, sa transformée de Fourier se réduit à:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

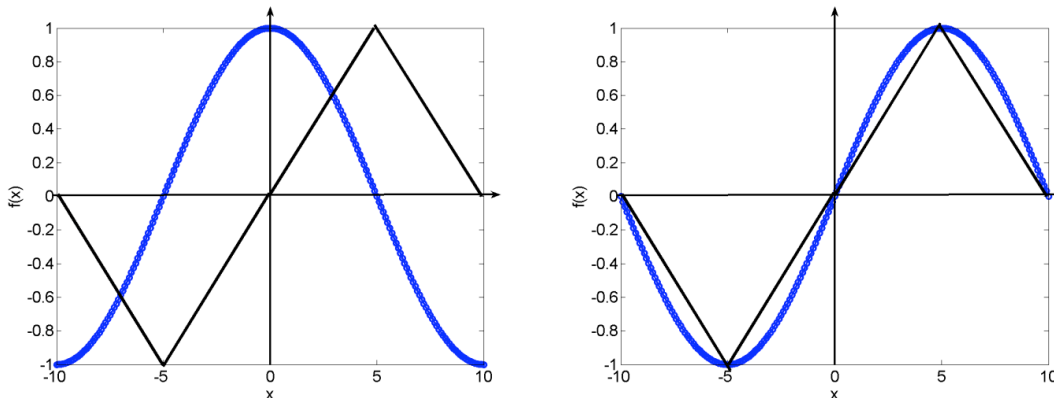


Figure. La fonction $f(t)$ en noir est impaire. Lorsqu'elle multiplie un cosinus (en bleu, figure de gauche), comme dans le cas des a_n , l'intégrale du produit $f(t)\cos(n\omega t)$ s'annule $\Rightarrow a_n = 0$. Tandis que lorsqu'elle multiplie un sinus (en bleu, figure de droite), comme dans le cas des b_n , l'intégrale du produit $f(t)\sin(n\omega t)$ ne s'annule pas.

Fonction symétrique de demi-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique et symétrique de demi-période contient seulement les harmoniques impaires:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt \quad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt \quad n=1,2,3,\dots$$

Fonction paire et symétrique de quart-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique paire et symétrique de quart-période contient seulement les harmoniques impaires en cosinus:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega t]$$

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt$$

Fonction impaire et symétrique de quart-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique impaire et symétrique de quart-période contient seulement les harmoniques impaires en sinus:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin[(2n-1)\omega t]$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt$$

II.8. Conditions de Dirichlet:

- 1- Si $f(x)$ est définie sur $[-L, L]$, sauf à un nombre déterminé de points,
- 2- $f(x)$ est périodique de période $2L$,
- 3- $f(x)$ et $df(x)/dx$ sont continues par morceaux sur $[-L, L]$,

alors la série de Fourier de $f(x)$ converge:

- a) vers $f(x)$ au point x si $f(x)$ est continue en ce point,
- b) vers $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ si $f(x)$ est discontinue au point x .

Exemple 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{avec la période } L = 10$$

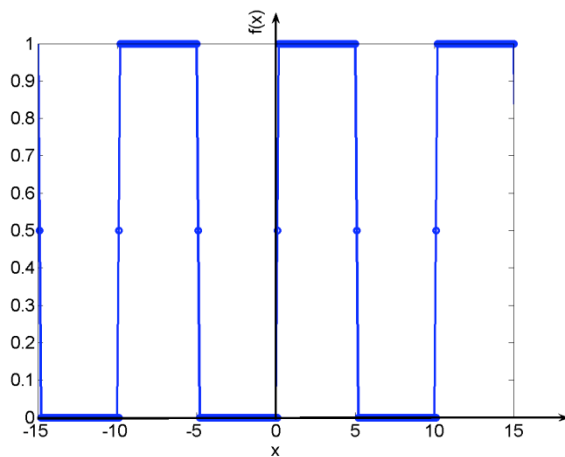


Figure. $f(x)$.

Quelles sont les valeurs de $f(x)$ à -5 , -3 , 0 , 2 et 5 ?

$$f(-5) = \frac{f(-5-0) + f(-5+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(-3) = 0$$

$$f(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(5) = \frac{f(5-0) + f(5+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

II.9. Phénomène de Gibbs

Lors des discontinuités d'une fonction, les sommes partielles de la série de Fourier de $f(t)$ sont affectées par des oscillations autour des points de discontinuités. Ces oscillations sont appelées le phénomène de Gibbs.

Exemple 1.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad \text{Période } T = 2\pi$$

La série de Fourier de $f(t)$ est:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)t]$$

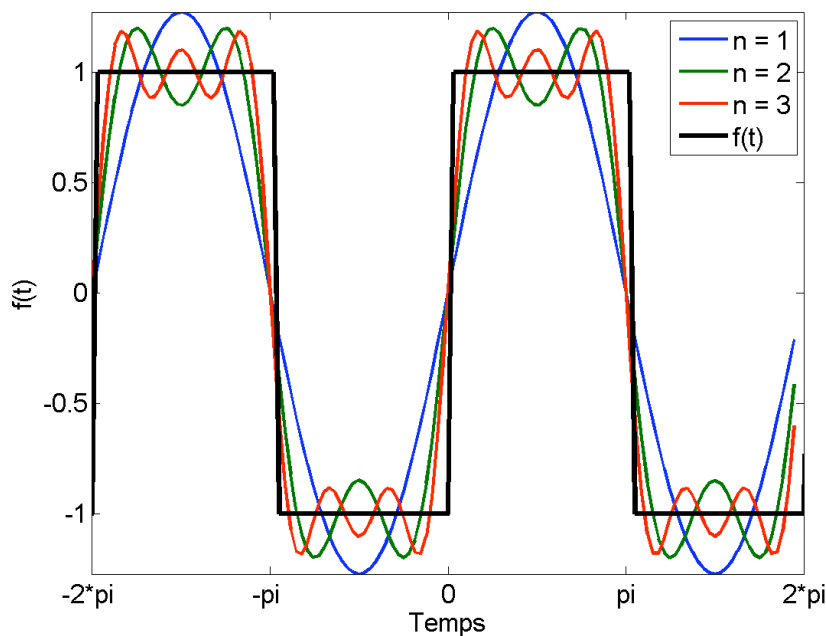


Figure. Phénomène de Gibbs (overshoot, ou ringing).