

Propriétés des transformées de Fourier

Quelques démonstrations. Le reste des propriétés peut être démontré de façons analogues.

Autres notations dans les transformées de Fourier:

En posant $\omega = 2\pi f$:

$$TF[g(t)] = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt \rightarrow G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df \Rightarrow df = d\omega / 2\pi$:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df \rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Linéarité:

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

$$\begin{aligned} TF[a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)] e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 g_1(t) e^{-i2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 g_2(t) e^{-i2\pi ft} dt = a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \end{aligned}$$

Symétrie:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df. \quad \text{Changer } t \leftrightarrow -t \Rightarrow g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{-i2\pi ft} df$$

$$\text{En échangeant } t \text{ et } f: g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i2\pi ft} dt = TF(G(t))$$

Échelle du temps:

$$g(at) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

$$TF[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-i2\pi ft} dt \quad x = at \Rightarrow dx = a dt \Rightarrow dt = dx/a$$

$$\text{Si } a > 0: FT[g(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx/a} dx = \frac{1}{a} G(f/a)$$

C'est l'argument de l'exponentiel qui donne l'argument de G.

$$\text{Si } a < 0: FT[g(at)] = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} g(x) e^{-i2\pi f x / a} dx = \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x / a} dx = \frac{1}{|a|} G(f/a)$$

$$FT[g(at)] = \frac{1}{|a|} G(f/a)$$

Parité:

$G(\omega)$ est la transformée de Fourier de $g(t)$

Si $g(t)$ est réelle et paire $\Rightarrow G(\omega)$ est réelle et paire

Si $g(t)$ est réelle et impaire $\Rightarrow G(\omega)$ est imaginaire et impaire

Si $G(\omega)$ est réelle et positive \Rightarrow elle fait un angle 0 avec l'axe des réels \Rightarrow la phase vaut zéro ($\phi(\omega) = 0$).

Si $G(\omega)$ est réelle et négative \Rightarrow elle fait un angle de $\pm \pi$ avec l'axe des réels \Rightarrow la phase vaut $\pm \pi$ ($\phi(\omega) = \pm \pi$).

TABLE 8.8 Fourier Transform Properties and Theorems

Property	$f(t)$	$F(\omega)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \dots$
Symmetry	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Time Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time Shifting	$f(t - t_0)$	$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Time Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Frequency Differentiation	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Time Integration	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
Conjugate Functions	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Time Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Frequency Convolution	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$
Area under $f(t)$	$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$	
Area under $F(\omega)$	$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$	
Parseval's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$	

La fonction de Dirac δ

La fonction de Dirac δ peut être définie comme la dérivée de la fonction de Heaviside qui est définie comme:

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et $\delta(x)$ est définie comme:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \left(\delta \text{ de Kronecker } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \right)$$

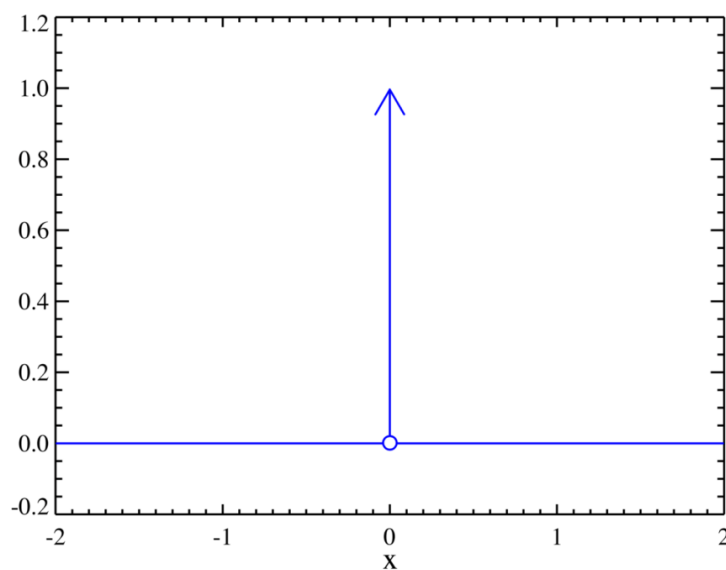


Figure. Fonction de Dirac δ .

Les propriétés de $\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

Le peigne de Dirac ou train d'impulsions:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

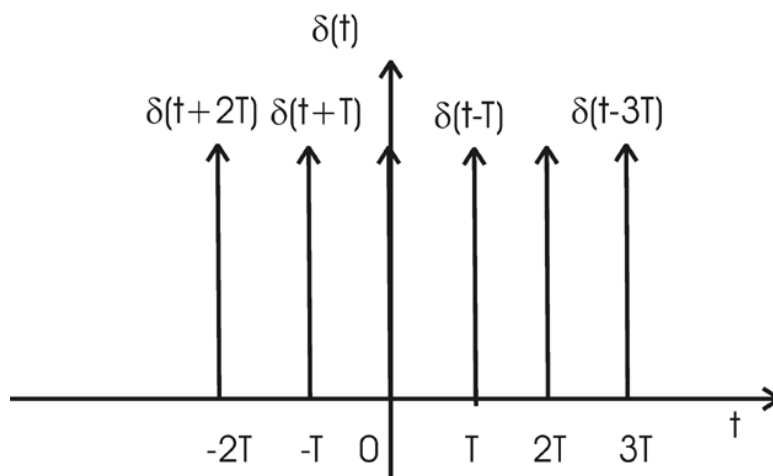


Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

Transformées de Fourier généralisées

Certaines fonctions ne sont pas de carrés intégrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \infty$$

c'est le cas des fonctions périodiques comme le sinus et le cosinus, la fonction de Heaviside, une constante etc....

$$\text{Fonction de Heaviside: } H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Par définition, une fonction généralisée à progrès lent $g(t)$ est une fonction associée à une fonction symbolique $\phi(t)$ qui décroît rapidement:

$$\langle g(t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi(t) dt$$

Pour calculer les transformées de Fourier de fonctions généralisées, on utilise la formule de Parseval.

La formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx$$

Celle-ci peut être démontrée de la façon suivante, en utilisant les transformées de Fourier:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-ixy} dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-ixy} dy \right] dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right] dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(y) dy$$

et en changeant la variable y en x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(x)dx$$

Cette équation peut se rapporter aux transformées de Fourier comme suit, en intégrant sur ω :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)TF[g(t)]d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} TF[f(t)]g(\omega)d\omega$$

ou bien, en intégrant sur t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF^{-1}[F(\omega)]G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)TF^{-1}[G(\omega)]dt$$

Dans les deux cas, nous avons conservé la même variable ω ou t pour f et F et pour g et G.

Exemple 1:

Trouver la TF d'une constante, soit $g(t) = 1$.

$g(t) = 1$ est à progrès lent.

En utilisant la formule de Parseval avec la fonction rapidement décroissante $\phi(t)$:

Soit la formule de Parseval:
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\Phi(x)dx$$

qui devient:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt \right]_{\omega=0} \\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt \right]_{\omega=0} &= TF[\Phi(t)]_{\omega=0} \end{aligned}$$

et par la propriété de la symétrie:

$$TF[\Phi(t)]_{\omega=0} = [2\pi\phi(-\omega)]_{\omega=0} = 2\pi\phi(0)$$

Par la propriété de $\delta(x)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

$$2\pi\phi(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

Finalement, en reprenant l'équation de départ $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$ et en

remplaçant le second membre par le résultat précédent qui est $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

et en identifiant le contenu des intégrales des deux membres de l'équation:

$$TF[g(t)] = G(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Noter que dans cet exemple nous avons conservé ω pour simplifier les écritures au lieu de travailler avec $2\pi f$.

Exemple 2:

Calculer la TF de $\delta(t)$.

$\delta(t)$ est une fonction généralisée à progrès lent.

$$\text{Par définition: } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$$

$$\text{soit } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\Phi(t)dt = \Phi(0)$$

$$\text{aussi } \Phi(0) = TF[\phi(t)]_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-i\omega t} dt \right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)d\omega \text{ par changement de}$$

variable $t \rightarrow \omega$.

$$\text{ainsi } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\phi(\omega)d\omega$$

et par identification:

$$FT[\delta(t)] = G(\omega) = 1$$

$$\text{On aurait pu faire le calcul directement : } FT[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

En conclusion, la TF d'une constante est une fonction δ , et la TF d'une fonction δ est une constante.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t)=\exp(i\omega_0 t)$

$g(t)$ peut être réécrite sous la forme $g(t)=f(t)\exp(i\omega_0 t)$. Par la propriété du décalage de la fréquence: $TF[f(t)\exp(i\omega_0 t)] = F(\omega-\omega_0)$. Et comme $f(t) = 1$, et de l'exemple 1 ci-dessus: $TF[1] = 2\pi\delta(\omega) \rightarrow TF[\exp(i\omega_0 t)] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$. C'est un décalage de fréquence de la fonction δ .

Exemple 4:

Calculer la TF de $\cos(\omega_0 t)$ et $\sin(\omega_0 t)$.

$$\cos(\omega_0 t) = (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2$$

$$TF[\cos(\omega_0 t)] = TF[(\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2]$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\text{Pour le sinus : } TF[\sin(\omega_0 t)] = -i\pi\delta(\omega-\omega_0) + i\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

Quelques fonctions courantes et leur transformée de Fourier

TABLE 8.9 Common Fourier transform pairs

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{-j\omega_0 t} \exp(j\omega_0 t)$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
$u_0(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-at} u_0(t)$ $a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$ $a > 0$
$te^{-at} u_0(t)$ $a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$ $a > 0$
$e^{-at} \cos\omega_0 t u_0(t)$ $a > 0$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega^2}$ $a > 0$
$e^{-at} \sin\omega_0 t u_0(t)$ $a > 0$	$\frac{\omega}{(j\omega + a)^2 + \omega^2}$ $a > 0$
$A[u_0(t + T) - u_0(t - T)]$	$2AT \frac{\sin\omega T}{\omega T}$

Transformée de Fourier à deux dimensions

Si l'on remplace $2\pi f$ par ω , la paire de Fourier s'écrit:

$$G(\omega) = FT(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = FT^{-1}(G(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Par analogie, on détermine les paires en 2 dimensions (2D):

$$G(u, v) = TF(g(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

$$g(x, y) = TF^{-1}(G(u, v)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv$$

Exercices :

1. Calculer la TF de $\delta(t-t_0)$.
2. Calculer la TF de $\delta(t+t_0)$.
3. Montrer que $TF[\delta(t+t_0) + 2\delta(t) + \delta(t-t_0)] = 4\cos^2(\omega t_0/2)$.

Notes extra de démonstrations faites en classe

- La fonction porte $g(t) = \Pi(t)$ est définie comme :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sa TF est $G(w) = \text{sinc}(w/2)$. Le sinc est le sinus cardinal défini comme

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- Étant donnée une fonction Gaussienne :

$$g(t) = \exp(-at^2)$$

Telle que vue en classe, à l'aide de la complétion de carré, sa TF est

$$G(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{-\pi^2 f^2}{a}\right)$$

Il est important de noter la définition de la TF utilisée ici. Rappelez-vous qu'il y a 2 définitions de la TF, une avec la fréquence f , et une avec la fréquence angulaire ω . Ici, quand j'utilise la variable f , on utilise la définition de la TF qui a un 2π dans l'équation et qui est souvent celle implémentée dans les logiciels et bibliothèques (python, matlab, ...). Par exemple, voir <https://mathworld.wolfram.com/FourierTransformGaussian.html>.

On a aussi parlé en classe du cas $a = \pi$. Dans ce cas, la TF de la Gaussienne retombe sur exactement la même Gaussienne.

- Quelques exemples faits en classe de propriétés de la TF. Il faut faire attention aux changements de variables et ordre des propriétés.

1. Sachant que la TF de $g(t) = \Pi(t)$ est $G(w) = \text{sinc}(w/2)$, $G(2w) = \text{sinc}(w)$. Calculons la TF $TF[\Pi(3t)]$ en utilisant la mise à l'échelle.

$$\begin{aligned} TF[\Pi(3t)] &= \frac{1}{3} TF[\Pi(t)] \left(\frac{w}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} TF[\Pi(t)] \left(\frac{w}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{w/2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{w}{6}\right) \end{aligned}$$

2. Calculons la TF de $\text{sinc}(t)$ en utilisant la propriété de symétrie et mise à l'échelle.

$$\begin{aligned}
 TF[\text{sinc}(t)] &= TF[G(2t)] \\
 &= \frac{1}{2}TF[G(t)]\left(\frac{w}{2}\right) \\
 &= 2\pi\frac{1}{2}g\left(-\frac{w}{2}\right) \\
 &= \pi\Pi\left(-\frac{w}{2}\right) \\
 &= \pi\Pi\left(\frac{w}{2}\right)
 \end{aligned}$$

3. Calculons la TF d'une porte mise à l'échelle et décalée dans le temps avec la propriété de *time shifting*.

$$\begin{aligned}
 TF\left[\Pi\left(\frac{t}{2}-4\right)\right] &= \left\{e^{-4iw}TF\left[\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right\}(w) \\
 &= \left\{\frac{1}{1/2}e^{-4iw}TF[\Pi(t)]\right\}(2w) \\
 &= 2e^{-8iw}\text{sinc}(w)
 \end{aligned}$$

4. Un dernier exemple difficile pour la forme combinant les propriétés de symétrie, mise à l'échelle et décalage dans le temps.

$$\begin{aligned}
 TF\left[\text{sinc}\left(\frac{t-1}{3}\right)\right] &= TF\left[\text{sinc}\left(\frac{t}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] \\
 &= \left\{e^{-\frac{iw}{3}}TF\left[\text{sinc}\left(\frac{t}{3}\right)\right]\right\}(w) \\
 &= \left\{e^{-\frac{iw}{3}}\frac{1}{1/3}TF[\text{sinc}(t)]\right\}\left(\frac{w}{1/3}\right) \\
 &= \left\{3e^{-\frac{iw}{3}}TF[G(2t)]\right\}(3w) \\
 &= \left\{\frac{3}{2}e^{-\frac{iw}{3}}TF[G(t)]\right\}\left(\frac{3w}{2}\right) \\
 &= \left\{\frac{3}{2}e^{-\frac{iw}{3}}(-2\pi g(w))\right\}\left(\frac{-3w}{2}\right) \\
 &= -3\pi e^{\frac{iw}{2}}\Pi\left(\frac{-3w}{2}\right) \\
 &= -3\pi \exp\left(\frac{iw}{2}\right)\Pi\left(\frac{3w}{2}\right)
 \end{aligned}$$