

# Logique et ensembles

## Exercice 1

Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. 3 est un diviseur commun de 6, 9 et 15.
2.  $x$  est divisible par 2 et par 3 mais pas par 4.
3.  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels, et exactement l'un d'entre eux est premier.
4.  $x$  et  $y$  sont des hommes, et soit  $x$  est plus grand que  $y$ , soit  $y$  est plus grand que  $x$ .
5. Soit  $x$  soit  $y$  a les yeux bruns, et soit  $x$  soit  $y$  a les cheveux noirs.
6. Soit  $x$  soit  $y$  a à la fois les yeux bruns et les cheveux noirs.

## Exercice 2

Que signifient les énoncés suivants ? Sont-ils vrais ou faux ?

1.  $\forall x \in N, \exists y \in N, x < y$
2.  $\exists y \in N, \forall x \in N, x < y$
3.  $\exists x \in N, \forall y \in N, x < y$
4.  $\forall y \in N, \exists x \in N, x < y$
5.  $\exists x \in N, \exists y \in N, x < y$
6.  $\forall x \in N, \forall y \in N, x < y$

## Exercice 3

Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. Quiconque a pardonné au moins une personne est un saint.
2. Tout le monde apprécie Mary, sauf Mary elle-même.
3. Jane a vu un policier, et Roger en a vu un aussi.
4. Jane a vu un policier, et Roger l'a vu aussi.
5. Quelqu'un qui a acheté une Rolls Royce en liquide doit avoir un oncle riche.
6. Si quelqu'un dans le dortoir a la rougeole, alors tous ceux qui ont un ami dans le dortoir vont devoir être mis en quarantaine.

7. Si personne n'échoue à l'examen, alors tous ceux qui ont eu un 20 vont aider quelqu'un qui a eu un 12.
8. Si quelqu'un peut le faire, Jones peut le faire.
9. Si Jones peut le faire, n'importe qui peut le faire.

## Exercice 4

Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. Chaque nombre qui est plus grand que  $x$  est plus grand que  $y$ .
2. Pour chaque nombre  $a$ , l'équation  $ax^2 + 4x - 2 = 0$  a au moins une solution si et seulement si  $a \geq -2$ .
3. Toutes les solutions de l'inégalité  $x^3 - 3x < 3$  sont inférieures à 10.
4. Si il existe un nombre  $x$  tel que  $x^2 + 5x = w$  et qu'il existe un nombre  $y$  tel que  $4-y^2 = w$ , alors  $w$  est strictement compris entre  $-10$  et  $10$ .

## Exercice 5

Traduire les énoncés suivants en français :

1.  $\forall x, (H(x) \wedge \neg(\exists y, M(x, y))) \Rightarrow T(x)$ , où  $H(x)$  signifie «  $x$  est un homme »,  $M(x, y)$  signifie «  $x$  est marié à  $y$  » et  $T(x)$  signifie «  $x$  est triste ».
2.  $\exists z, P(z, x) \wedge S(z, y) \wedge F(y)$  où  $P(z, x)$  signifie «  $z$  est un parent de  $x$  »,  $S(z, y)$  signifie «  $z$  et  $y$  sont frère et soeur » et  $F(y)$  signifie «  $y$  est une femme ».
3.  $\forall x, P(x) \wedge \neg(x = 2) \Rightarrow I(x)$ , où  $P(x)$  signifie «  $x$  est un nombre premier » et  $I(x)$  signifie «  $x$  est impair ».

## Exercice 6

Toutes les variables sont des entiers naturels. Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1.  $x$  est un carré parfait
2.  $x$  est un multiple de  $y$
3.  $x$  est un nombre premier
4.  $x$  est le plus petit entier positif qui est un multiple de  $y$  et de  $z$ .