

Logique et ensembles

Exercice 1

Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. 3 est un diviseur commun de 6, 9 et 15.
2. x est divisible par 2 et par 3 mais pas par 4.
3. x et y sont des entiers naturels, et exactement l'un d'entre eux est premier.
4. x et y sont des hommes, et soit x est plus grand que y , soit y est plus grand que x .
5. Soit x soit y a les yeux bruns, et soit x soit y a les cheveux noirs.
6. Soit x soit y a à la fois les yeux bruns et les cheveux noirs.

Exercice 2

Que signifient les énoncés suivants ? Sont-ils vrais ou faux ?

1. $\forall x \in N, \exists y \in N, x < y$
2. $\exists y \in N, \forall x \in N, x < y$
3. $\exists x \in N, \forall y \in N, x < y$
4. $\forall y \in N, \exists x \in N, x < y$
5. $\exists x \in N, \exists y \in N, x < y$
6. $\forall x \in N, \forall y \in N, x < y$

Exercice 3

Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. Quiconque a pardonné au moins une personne est un saint.
2. Tout le monde apprécie Mary, sauf Mary elle-même.
3. Jane a vu un policier, et Roger en a vu un aussi.
4. Jane a vu un policier, et Roger l'a vu aussi.
5. Quelqu'un qui a acheté une Rolls Royce en liquide doit avoir un oncle riche.
6. Si quelqu'un dans le dortoir a la rougeole, alors tous ceux qui ont un ami dans le dortoir vont devoir être mis en quarantaine.

7. Si personne n'échoue à l'examen, alors tous ceux qui ont eu un 20 vont aider quelqu'un qui a eu un 12.
8. Si quelqu'un peut le faire, Jones peut le faire.
9. Si Jones peut le faire, n'importe qui peut le faire.

Exercice 4

Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. Chaque nombre qui est plus grand que x est plus grand que y .
2. Pour chaque nombre a , l'équation $ax^2 + 4x - 2 = 0$ a au moins une solution si et seulement si $a \geq -2$.
3. Toutes les solutions de l'inégalité $x^3 - 3x < 3$ sont inférieures à 10.
4. Si il existe un nombre x tel que $x^2 + 5x = w$ et qu'il existe un nombre y tel que $4 - y^2 = w$, alors w est strictement compris entre -10 et 10 .

Exercice 5

Traduire les énoncés suivants en français :

1. $\forall x, (H(x) \wedge \neg(\exists y, M(x, y))) \Rightarrow T(x)$, où $H(x)$ signifie « x est un homme », $M(x, y)$ signifie « x est marié à y » et $T(x)$ signifie « x est triste ».
2. $\exists z, P(z, x) \wedge S(z, y) \wedge F(y)$ où $P(z, x)$ signifie « z est un parent de x », $S(z, y)$ signifie « z et y sont frère et soeur » et $F(y)$ signifie « y est une femme ».
3. $\forall x, P(x) \wedge \neg(x = 2) \Rightarrow I(x)$, où $P(x)$ signifie « x est un nombre premier » et $I(x)$ signifie « x est impair ».

Exercice 6

Toutes les variables sont des entiers naturels. Analyser la forme logique des énoncés suivants :

1. x est un carré parfait
2. x est un multiple de y
3. x est un nombre premier
4. x est le plus petit entier positif qui est un multiple de y et de z .