La méthode de newton

7 février 2024

1 Échauffement

La valeur r est une *racine* de la fonction g si $g(r) = 0$.

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 2$. Quelle est l'équation de sa tangente en $x = 1.5$?

Quelle est la racine de cette tangente (c'est-à-dire : quelles sont les coordonnées du point où cette tangente croise l'axe des abscisses ?).

2 La méthode de Newton « à la main »

Soit $h(t)$ une fonction quelconque. On veut trouver une approximation d'une racine de cette fonction. On notera t^* la valeur exacte de la racine qu'on cherche. Bien qu'on ne connaisse pas la valeur exacte t^*, on supposera qu'on peut en donner une première approximation t_0.

Considérons la tangente de $h(t)$ en $t = t_0$.

1. Quelle est la pente de cette droite ? (On ne peut pas l'écrire numériquement, mais on dispose d'une notation qui permet de la décrire).
2. Donnez un point par lequel cette tangente doit passer (écrire les deux coordonnées).
3. À l'aide de la pente de la tangente et du point par lequel elle doit passer, déterminez l'équation de la tangente (sous la forme $y = at + b$).
4. Maintenant, trouvez la racine t_1 de cette tangente, c'est-à-dire la valeur de t à laquelle la tangente croise l'axe des ordonnées. Simplifiez la formule de t_1 le plus possible. (Remarque : la formule qu'on obtient pour t_1 dépend de t_0, en d'autres termes : c'est une fonction de t_0)
5. Répétez ce procédé : trouvez une formule pour la racine t_2 de l'équation de la tangente à h au point t_1. (Remarquez à nouveau que la formule de t_2 dépend de t_1, donc est une fonction de t_1)
6. Écrivez une formule récursive générale pour la racine t_{n+1} de l'équation de la tangente à h au point t_n.

Testons notre formule sur un cas spécifique. Soit $h(t) = t^3 - 2$

1. Calculez $h'(t)$.
2. Commençons avec $t_0 = 1.5$. Calculez $h(t_0)$ et $h'(t_0)$. Utilisez la formule pour calculer t_1, la racine de la tangente à h en t_0.
3. Calculez $h(t_1)$ et comparez le résultat avec la valeur de $h(t_0)$. Lequel de t_0 ou de t_1 est plus proche de la racine de h ? Comment le savez-vous ?
4. Dessinez un graphe de h illustrant la détermination de t_1.
5. Répétez ce procédé pour calculer t_2, puis $h(t_2)$ et $h'(t_2)$. La suite d'estimations t_n semble-t-elle converger ? Pensez-vous avoir une bonne idée de la limite $\lim_{n\to\infty} t_n$? À quel degré d'erreur ? Que pourriez-vous faire pour obtenir la limite de cette suite précisément ?

3 Implémentation sur ordinateur

1. Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$. Implémentez en Python les fonctions suivantes :

```
def f(x)

def f_prime(x)

# Renvoie les coefficients a et b de l'équation de la tangente à f en x
def equation_tangente(x)

# Renvoie la solution de l'équation ax + b = 0
def racine_droite(a, b)

# Renvoie l'estimation t_n+1 à partir de
# l'estimation t_n passée en argument
def estimation_racine(estimation_precedente)
```

2. Testez votre code pour trouver une approximation de la racine de f.
3. Modifiez un peu votre code pour trouver une approximation de solution de l'équation $\cos(x) = x$.
4. Modifiez un peu votre code pour calculer la racine carrée de 117 (sans utiliser la fonction `sqrt`).

Bonus : Créez une fonction `approximation_racine(f, f_prime, t0)` qui prend en arguments une fonction f, sa dérivée f' et une première estimation t_0 d'une racine de f, et qui renvoie une approximation t_n de la racine de f telle que $|f(t_n)| < 0.01$.

Bonus : Utilisez matplotlib pour afficher les différentes étapes de la méthode de Newton que vous avez programmé.

4 Les limites de la méthode de Newton

1. Essayez d'appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ avec $t_0 = 6$. Que se passe-t-il ?

2. Essayez d'appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(t) = t^3 - t$.
   (a) Faites les 3 premières itérations avec une estimation initiale de $t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ à la main (sans remplacer les fraction et les racines par des approximations décimales !). Que se passe-t-il ?
   (b) Utilisez votre programme pour calculer le résultat des 10 premières itérations de la méthode de Newton avec $t_0 = 0.55$. Que se passe-t-il ? Pourquoi ?