Exercices: Combinatoires et probabilités

Combinatoire

1. Combien y a-t-il de plaques d'immatriculations de 7 signes dont les 2 premiers signes sont des lettres et les 5 autres des chiffres ?
2. Même question, avec la condition supplémentaire que chaque lettre ou chiffre ne peut pas être répété plus d'une fois dans une plaque.
3. Combien y a-t-il de séquences de résultats possibles quand on lance un dé quatre fois ? (Par exemple, une séquence de résultat possible est 3, 4, 3, 1).
4. 20 travailleurs sont assignés à 20 emplois différents, un travailleur pour chaque emploi. Combien y a-t-il d'assignements possibles ?
5. John, Jim, Jay et Jack ont formé un groupe avec 4 instruments. Si chacun d'entre eux peut jouer des 4 instruments, combien d'arrangements différents sont possibles ? Et si John et Jim peuvent tous les deux jouer 4 instruments, mais que Jay et Jack ne peuvent jouer que du piano et de la batterie ?
6. Un enfant a 12 blocs : 6 noirs, 4 rouges, 1 blanc et 1 bleu. En les mettant en ligne, combien d'arrangement différents sont possibles ?
7. Dans un groupe de 20 personnes, tout le monde sert la main à tout le monde. Combien de poignées de mains y a-t-il eu ?
8. Combien y a-t-il de main de 5 cartes au poker ?
9. 7 cadeaux différents sont distribués parmi 10 enfants. Combien y a-t-il d'arrangements possibles si aucun enfant n'a le droit de recevoir plus d'un cadeau ?
10. Les ambassadeurs de 10 pays, incluant la Russie, la France, l'Angleterre et les États-Unis, doivent être assis en ligne. Combien y a-t-il d'arrangements possibles si les ambassadeurs français et anglais doivent être assis l'un à côté de l'autre, mais que les ambassadeurs russe et américain ne doivent pas être assis côte-à-côte ?
11. Si 8 tableaux noirs identiques doivent être répartis entre 4 écoles, combien y a-t-il de répartitions différentes possibles ? Et si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?

Probabilités

1. Une boîte contient 3 billes : une rouge, une verte et une bleue. On tire une bille de la boîte puis on la replace avant de tirer à nouveau une bille. Décrivez l'univers des possibles. Même question lorsque la seconde bille est tirée sans que la première ne soit replacée.
2. Un dé est lancé à répétition jusqu'à ce qu'un 6 apparaisse. Quel est l'univers des possibles de cette expérience ? Soit E_n l'événement : n lancers sont nécessaires pour compléter l'expérience. Quels sont les points de l'univers qui sont contenus dans E_n ?
3. Deux dés sont lancés. Soit E l'événement que la somme des dés est impaire, et F l'événement qu'au moins un des dés tombe sur 1, et soit G l'événement que la somme est 5. Décrivez les événements $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $E \cup \overline{F}$, $E \cap F \cap G$.
4. 60% des étudiants dans une école ne portent ni bague ni collier. 20% portent une bague et 30% portent un collier. Si l'un des étudiants est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il ou elle porte :

   1. une bague ou un collier ?
   2. une bague et un collier ?

5. Le poker-dé est joué en lançant simultanément 5 dés. Calculer :
   - $\mathbb{P}(\text{tous les dés différents})$
   - $\mathbb{P}(\text{une paire})$
   - $\mathbb{P}(\text{deux paires})$
   - $\mathbb{P}(\text{trois identiques})$
   - $\mathbb{P}(\text{full house})$
   - $\mathbb{P}(\text{quatre identiques})$
   - $\mathbb{P}(\text{cinq identiques})$
6. Deux cartes sont tirées au hasard d'un paquet. Quelle est la probabilité qu'elles forment un blackjack ? En d'autres termes, quelle est la probabilité que l'une d'elle soit un As et que l'autre soit un 10, un valet, une reine ou un roi ?
7. Combien de personnes doivent être dans une pièce pour que la probabilité que deux d'entre eux fêtent leur anniversaire le même jour soit d'au moins $\frac{1}{2}$. On supposera que chaque date possible est également probable.
8. Supposez que n boules soit réparties au hasard dans N compartiments. Trouvez la probabilité que m boules tombent dans le premier compartiment. On supposera que chacun des N^n arrangements est également probable.
9. Si 4 couples mariés sont assis en rang, trouver la probabilité pour qu'aucun mari ne soit assis à côté de sa femme.
10. Calculer la probabilité pour qu'une main de 13 cartes contienne :
    - l'As et le Roi d'au moins une couleur
    1. 4 cartes d'au moins une des 13 valeurs possibles

Probabilités conditionnelles

1. Deux dés sont lancés. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'au moins l'un des dés tombe sur 6 sachant que les deux dés tombent sur des faces différentes ?
2. Deux dés sont lancés. Quelle est la probabilité conditionnelle que le premier tombe sur 6 sachant que la somme des deux dés est i ? Répondre pour toutes les valeurs de i entre 2 et 12.
3. Deux dés sont lancés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux tombe sur 6 sachant que la somme des deux dés est i ? Répondre pour toutes les valeurs de i entre 2 et 12.
4. Une urne contient 6 billes blanches et 9 noires. Si 4 billes sont tirées au hasard sans être replacées, quelle est la probabilité que les deux premières tirées soit blanches et les deux dernières noires ?
5. Une urne contient 12 billes, dont 8 blanches. Quatre sont tirées sans être replacées. Quelle est la probabilité conditionnelle que la première et la troisième billes tirées soient blanches sachant qu'il y a exactement 3 billes blanches parmi les 4 tirées ? Même question, sauf que les billes tirées sont replacées après chaque tirage.

6. Le roi vient d'une famille de 2 enfants. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit sa soeur ?
7. Un couple a 2 enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient des filles si le plus âgé des deux est une fille ?
8. Soient 3 urnes. L'urne A contient 2 billes blanches et 4 rouges, l'urne B contient 8 blanches et 4 rouges et l'urne C contient 1 blanche et 3 rouges. Si une bille est tirée de chaque urne, quelle est la probabilité que la bille tirée de l'urne soit blanche sachant qu'exactement 2 bille blanches ont été tirées ?
9. Deux cartes sont tirées au hasard d'un paquet sans être replacées. Soit B l'événement que les deux cartes soient des As, soit A_p l'événement que l'As de pique ait été tiré, et soit A l'événement qu'au moins une des cartes tirées soit un As. Calculer :
    1. $P(B \mid A_p)$
    2. $P(B \mid A)$
10. Une étudiante doit passer un concours avec trois épreuves de sélection. Si elle est reçue à une épreuve, elle a le droit de passer la suivante; mais si elle échoue à une épreuve, elle échoue au concours. La probabilité qu'elle soit reçue à la première épreuve est 0.9. Si elle est reçue à cette première épreuve, la probabilité conditionnelle qu'elle soit reçue à la deuxième est 0.8. Si elle est reçue aux deux premières épreuves, la probabilité conditionnelle qu'elle soit reçue à la troisième est 0.7.
    1. Quelle est la probabilité qu'elle soit reçue aux trois épreuves ?
    2. Sachant qu'elle n'a pas été reçue aux trois épreuves, quelle est la probabilité conditionnelle qu'elle ait échouée au deuxième examen ?
11. Dans une ville, 36% des familles possèdent un chien et 22% des familles qui possèdent un chien possèdent aussi un chat. De plus, 30% des familles possède un chat. Quelle est :
    1. la probabilité qu'une famille choisie au hasard possède un chien et un chat ?
    2. la probabilité conditionnelle qu'une famille choisie au hasard possède un chien sachant qu'elle possède un chien ?
12. Les jours de pluie, Joe arrive en retard au travail avec une probabilité de 0.3; les jours sans pluie, il arrive en retard avec une probabilité de 0.1. Il pleuvra demain avec une probabilité de 0.7.
    1. Quelle est la probabilité que Joe arrive à l'heure demain ?
    2. Sachant que Joe est arrivé à l'heure, quelle est la probabilité conditionnelle qu'il a plu ?
13. Nous avons 10 pièces telles que la i-ème pièce a une probabilité $i/10$ de tomber sur face lorsqu'elle est lancée (pour $i = 1, 2, ..., 10$. Quand l'une des pièces est choisie au hasard et lancée, on tombe sur face. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'il s'agissait de la cinquième pièce ?
14. On effectue une série de lancers indépendants d'une pièce qui a une probabilité p de tomber sur face.
    1. Quelle est la probabilité que les 4 premiers résultats soient F, F, F, F ?
    2. Même question avec P, F, F, F
    3. Quelle est la probabilité que la séquence T, H, H, H advienne avant la séquence H, H, H, H ?

15. Barbara et Diane font du tir. Chaque tir de Barbara touche un canard en bois avec une probabilité p_1, tandis que chaque tir de Diane touche avec une probabilité p_2. Elles tirent simultanément sur la même cible. Si un canard en bois est touché, quelle est la probabilité que :

    1. les deux tirs aient touché le canard ?

    2. le tir de Barbara ait touché le canard ?

    Quelles suppositions sur l'indépendance avez-vous faites ?

16. A et B se battent en duel. Ils doivent se tirer dessus simultanément. Si l'un d'entre eux ou les deux sont touchés, alors le duel est terminé. Si les deux tirs sont manqués, alors ils répètent le procédé. Chaque tir est indépendant des autres et chaque tir de A a une probabilité p_A de toucher B, tandis que chaque tir de B a une probabilité p_B de toucher A. Quelle est :

    1. la probabilité que A ne soit pas touché ?

    2. la probabilité que les deux duellistes soient touchés ?

    3. la probabilité que le duel s'arrête après la n-ème série de tirs ?