Théorie des ensembles

5 février 2024

1 Un peu de logique

1.1 Connecteurs logiques et tables de vérité

La logique, c'est l'étude des raisonnements, aussi appelés *déductions*. Une déduction est un enchaînement de propositions qui se termine sur une conclusion. Elle est *valide* si la conclusion découle bien des propositions qu'on a prises pour vraies au départ (qu'on appelle les *prémisses* du raisonnement).

En ce qui nous concerne, une *proposition* est un énoncé dont on peut dire s'il est vrai ou faux. Par exemple, « $2 + 2 = 7$ » est une proposition, « » n'en est pas une.

Plusieurs propositions peuvent être assemblées avec des *connecteurs logiques* pour former une nouvelle proposition. La vérité (ou la fausseté) de la proposition ainsi formée dépend de la vérité des propositions qui la composent (qu'on appelle parfois des *atomes*).

L'effet d'un connecteur logique peut être représenté dans une *table de vérité*. Voici par exemple la table de vérité du connecteur « Et » (noté $\wedge$) :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Quelques autres connecteurs logiques souvent utilisés sont :

— La Négation (notée $\neg$)

— Le Ou (noté $\vee$)

— L'Implication (notée $\implies$)

1.2 Ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets, par exemple : une boîte de macaronis, l'ensemble des nombres entiers, ou encore l'ensemble des points d'une droite. On appellent souvent les objets contenus dans un ensembles des *éléments*, peu importe qu'ils soient des points, des nombres, des pâtes...

La plupart du temps, on nommera les ensembles avec des lettres majuscules : A, B, C... et on aura plutôt tendance à noter les éléments de ces ensembles par des lettres minuscules : x, y, z...

Pour écrire qu'un élément x *appartient* à l'ensemble A, on utilise le symbole $\in$: $x \in A$ signifie « x appartient à A ».

Pour écrire qu'un élément y *n'appartient pas* à l'ensemble A, on utilise le même symbole, mais barré : $y \notin A$ signifie « y n'appartient pas à A ».

Souvent, on voudra parler de tous les éléments d'un ensemble A. Dans ce cas-là, on utilisera le symbole $\forall$, qui se lit « pour tout ». Ainsi, l'énoncé : $\forall x \in A, x > 7$ se lit « pour tout x dans A, x est strictement plus grand que 7 ».

À d'autres occasions, on voudra dire qu'il existe un élément dans un ensemble A qui vérifie une certaine propriété, sans nécessairement vouloir l'identifier. Dans ces cas-là, on utilisera le symbole $\exists$, « il existe ». La proposition $\exists x \in A, x < 12$, se lit « il existe un x dans A tel que x soit plus petit que 12 ».

1.3 Exercices

1. Écrire la table de vérité du connecteur logique $\neg$.
2. Écrire la table de vérité du connecteur logique $\vee$.
3. Écrire la table de vérité de la proposition $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$.
4. Écrire la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q$
5. Soit $A = \{12, 14, 56, 78\}$. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   (a) $\forall x \in A, x > 13$
   (b) $\forall x \in A, x$ est pair
   (c) $\exists x \in A, 2x = 28$
   (d) $\forall x \in A, \exists y \in A, x \geq y$
   (e) $\exists x \in A, \forall y \in A, x \geq y$

2 Construire des ensembles

2.1 Exemples d'ensemble

Voilà quelques ensembles qu'on rencontrera assez souvent en maths :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3...
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : il comprend les entiers positifs ainsi que les négatifs.
- $\emptyset$ est l'ensemble vide, il ne contient rien du tout.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels (les nombres « à virgule »). On le représente souvent par une droite, qu'on appelle la *droite réelle*.

Souvent, on ne s'intéresse pas à $\mathbb{R}$ tout entier, mais à certaines de ses parties, notamment à des *intervalles*. Par exemple : $[4, 7]$ est un intervalle, c'est l'ensemble des nombres réels entre 4 et 7 (inclus). 4 et 7 sont les *bornes* de l'intervalle $[4, 7]$. L'intervalle $[4, 7]$ est *fermé* : il contient ses bornes.

L'intervalle $]4, 7[$ est *ouvert*, c'est l'ensemble des nombres réels compris entre 4 et 7 exclus.

2.2 Construire de nouveaux ensembles à partir d'anciens

L'*intersection* de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments contenus à la fois dans A **et** dans B.

L'*union* de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments contenus dans A **ou** dans B.

L'ensemble A privé de l'ensemble B, noté $A \backslash B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Le *complémentaire* d'un ensemble A par rapport à un ensemble B, est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A.

Définir un ensemble par *compréhension*, c'est créer un petit ensemble à partir d'un ensemble plus grand en sélectionnant certains éléments à l'aide d'une proposition. Par exemple : $\{n \in \mathbb{N} | n > 12\}$ est l'ensemble des entiers strictement supérieurs à 12. C'est une manière très puissante de définir de nouveaux ensembles.

2.3 Exercices

1. Répondre par vrai ou faux :
   (a) $3 \in [3, 18[$
   (b) $76 \in [5, 76[$
   (c) $12 \in]12, 17]$
2. Écrire $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$.
3. Écrire $12, 24, 56, 76 \cup 7, 8, 24, 56, 58, 76$
4. Écrire $\{3, 4, 7\} \cap \{1, 67, 89\}$.
5. Écrire $[23, 45] \cap [56, 75]$
6. Soient $X = [0, 5[$, $Y = [2, 4]$, $Z =]1, 3]$ et $W =]3, 5[$. Écrire les ensembles suivants :
   (a) $Y \cup Z$
   (b) $Z \cap W$
   (c) $Y \backslash W$
   (d) $(X \cap Y) \cup Z$
   (e) $X \backslash (Z \cup W)$
7. Soient les ensembles :
   — $G = \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ est pair}\}$

— $H = \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ est un multiple de } 3\}$
— $I = \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ est impair}\}$
— $J = \{n \in \mathbb{Z} | 0 \leq n \leq 10\}$

Écrire les ensembles suivants :

(a) $G \cup I$
(b) $G \cap I$
(c) $G \cap H$
(d) $J \backslash G$
(e) $I \backslash H$
(f) $J \cap (G \backslash H)$

8. Un sondage sur 100 étudiants a révélé que :
— 54 d'entre eux appréciaient la cuisine italienne
— 30 appréciaient la cuisine chinoise
— 16 appréciaient à la fois la cuisine italienne et la cuisine chinoise
— 19 appréciaient à la fois la cuisine chinoise et la cuisine indienne
— 10 appréciaient à la fois la cuisine italienne et la cuisine indienne
— 5 appréciaient toutes les cuisines
— 11 n'appréciaient aucune des cuisines

Combien d'étudiants appréciaient :

(a) Seulement la cuisine indienne ?
(b) Seulement la cuisine italienne ?
(c) Seulement une cuisine ?

9. Dessiner un schéma représentant trois ensembles A, B et C tels que :
— $A \cap B \neq \emptyset$
— $C \backslash A = \emptyset$
— $B \cap C = \emptyset$