Les dérivées

6 février 2024

1 La pente d'une courbe

1.1 Intuition et définition

Géométriquement, *dériver* revient à trouver la pente d'une courbe en un point, ou encore son taux de changement. En physique, si j'ai une courbe de mouvement, la dérivée par rapport au temps donne la vitesse du mouvement. En *machine learning*, si je veux enseigner à une intelligence artificielle à jouer à un jeu, je peux programmer une fonction `score` puis la dériver par rapport aux paramètres de mon IA, afin de savoir comment modifier ces paramètres pour atteindre un score plus élevé.

Nous avons deux problèmes à régler pour définir correctement la dérivée :

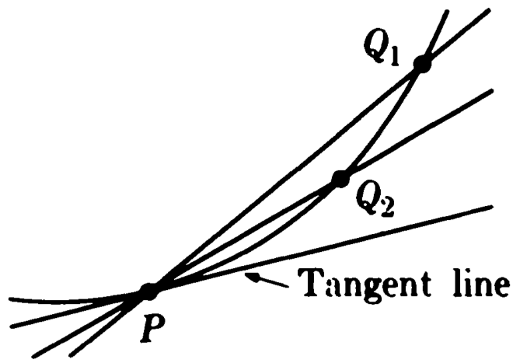
- Définir correctement l'idée géométrique de *tangente* d'une courbe en un point.
- Vérifier si cette idée nous permet de calculer l'équation de cette tangente lorsque la courbe est donnée par une équation simple.

Heureusement, la solution du premier problème nous donnera aussi une solution au deuxième problème !

Précédemment, on a vu que si on connaît la pente d'une droite et qu'on connaît un point par lequel elle passe, alors on peut retrouver l'équation de cette droite. Nous allons donc nous intéresser à la pente d'une tangente en un point, puis obtenir l'équation complète grâce à la méthode vue auparavant.

On cherche la tangente au point P d'une courbe. Prenons un autre point Q, alors les deux points P et Q définissent une droite avec une certaine pente qui dépend de P et de Q et que nous allons noter : $\text{pente}(P, Q)$.

Imaginons que le point Q se rapproche du point P sur la courbe (mais reste distinct de P). Alors, la $\text{pente}(P, Q)$ de la droite qui passe par P et Q devrait se rapprocher de la pente (inconnue) de la droite tangente (inconnue elle aussi !).



Si la limite de la pente(P, Q) existe lorsque Q se rapproche de P, alors cette limite devrait être considérée comme étant la pente de la courbe elle-même en P. D'où la définition :

Définition : Soit une courbe $y = f(x)$, et soit P un point sur cette courbe. La *pente* de la courbe en P est la limite des pentes des droites entre P et Q à mesure que Q se rapproche de P.

1.2 Exemples

— L'exemple le plus simple survient lorsque la courbe étudiée est elle-même une droite définie par l'équation $y = ax + b$. Dans ce cas, la pente de la droite entre deux points distincts sur la courbe est toujours la même, et c'est la pente de la droite (a).

— Regardons maintenant un autre exemple : $y = x^2$. On veut trouver la pente de cette courbe au point $(1, 1)$.

On regarde un point proche de $(1, 1)$, par exemple un point dont la coordonnée en x est 1.1. Alors $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$. Donc le point (1.1, 1.21) est sur la courbe. La pente de la droite entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

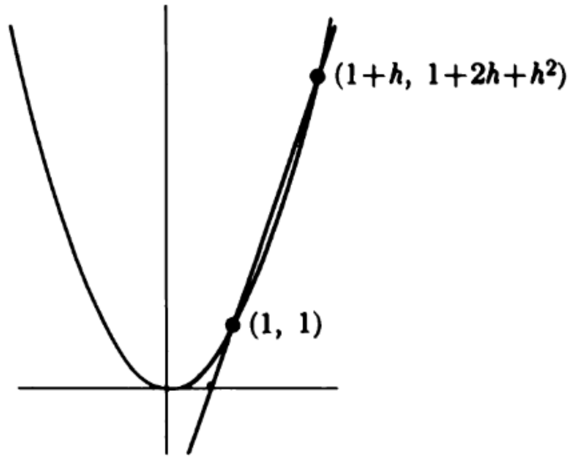
Donc la pente de la droite entre $(1, 1)$ et $(1.1, 1.21)$ est :

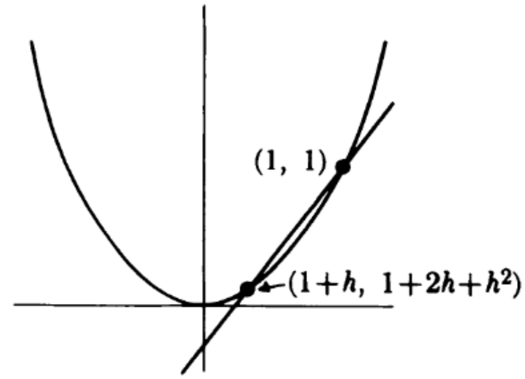
$$\frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

Plus généralement, la coordonnée en x d'un point proche de $(1, 1)$ peut être écrite $1 + h$, où h est un petit nombre, positif ou négatif, mais différent de 0. On a :

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

Donc le point $(1 + h, 1 + 2h + h^2)$ est sur la courbe.





Dans la figure de gauche, h est positif ; dans celle de droite, h est négatif.

La pente de la droite entre nos deux points est donc :

$$\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1}$$

qui est égal à :

$$\frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Lorsque le point dont la coordonnée en x vaut $1+h$ approche notre point $(1,1)$, le nombre h s'approche de 0. À mesure que h s'approche de 0, le pente de la droite entre nos deux points s'approche de 2, qui est donc la pente de la courbe au point $(1,1)$.

— Prenons un autre exemple très similaire. On veut trouver la pente de la même courbe, $f(x) = x^2$, au point $(-2,4)$. À nouveau nous considérons un point dont la coordonnée en x est $-2+h$ pour un petit $h \neq 0$. La coordonnée en y de ce point est :

$$f(-2+h) = (-2+h)^2 = 4-4h+h^2$$

La pente de la droite entre les deux points est donc :

$$\frac{4-4h+h^2-4}{-2+h-(-2)} = \frac{-4h+h^2}{h} = -4+h$$

À mesure que h s'approche de 0, l'autre point s'approche de $(-2,4)$ et nous voyons que la pente approche -4.

1.3 Exercices

Trouver les pentes des courbes suivantes aux points indiqués :

1. $y = 2x^2$ au point $(1,2)$
2. $y = 2x-7$ au point $(2,-3)$

3. $y = x^2 + 1$ au point $(-1, 2)$
4. $y = x^3$ au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
5. $y = 1/x$ au point $(2, \frac{1}{2})$
6. $y = x^2 + 2x$ au point $(-1, -1)$
7. $y = x^2$ au point $(2, 4)$
8. $y = x^2$ au point $(3, 9)$
9. $y = x^3$ au point $(1, 1)$
10. $y = x^3$ au point $(2, 8)$
11. $y = 2x + 3$ au point dont la coordonnée en x est 2
12. $y = 3x - 5$ au point dont la coordonnée en x est 1
13. $y = ax + b$ en un point arbitraire

2 La dérivée

2.1 Premier exemple

Nous continuons d'étudier la fonction $y = x^2$. Au lieu de choisir une valeur numérique fixe pour la coordonnée en x d'un point, nous pourrions travailler avec un point arbitraire de la courbe. Ses coordonnées sont alors (x, x^2). Nous écrivons la coordonnée en x d'un point proche comme étant $x+h$ pour un petit h (positif ou négatif mais toujours différent de 0). La coordonnée en y de ce point voisin est alors :

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Donc la pente de la droite entre ces deux points est :

$$\begin{aligned}
\frac{(x+h^2) - x^2}{(x+h) - x} =& \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{x+h-x} \\
=& \frac{2xh + h^2}{h} \\
=& 2x + h
\end{aligned}$$

Lorsque h s'approche de 0, $2x + h$ s'approche de $2x$. En conséquence, la pente de la courbe $y = x^2$ en un point arbitraire (x, y) est $2x$. En particulier, quand $x = 1$ la pente est 2, et quand $x = -2$ la pente est -4, ce qui confirme le résultat que l'on avait obtenu avec les calculs de la partie précédente.

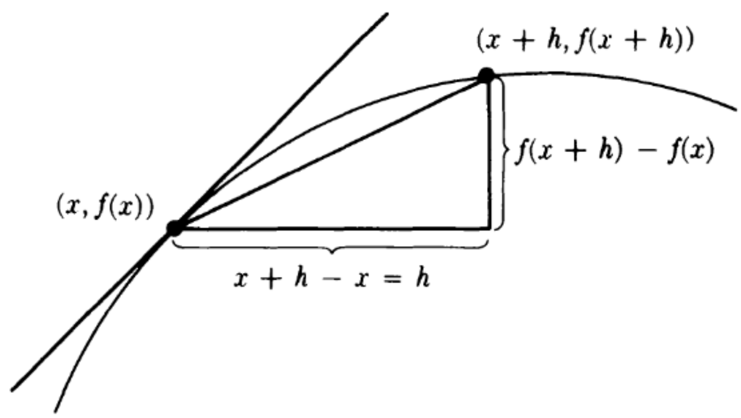
Cependant, contrairement à la partie précédente, nous avons trouvé une formule générale qui nous donne la pente de la courbe en n'importe quel point. Ainsi quand $x = 3$ la pente est 6 et quand $x = -10$ la pente est -20.

2.2 Taux d'accroissement et définition générale

L'exemple que nous venons de traiter nous donne une méthode pour gérer des fonctions plus générales. Étant donnée une fonction f, on définit le *taux d'accroissement* par :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ce quotient est la pente entre les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$. Il est illustré sur cette figure :



Définition : Si le taux d'accroissement approche une limite lorsque h tend vers 0, alors on définie la *dérivée* de f en x comme étant cette limite, c'est-à-dire :

$$\text{dérivée de } f \text{ en } x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La dérivée de f en x sera notée par une des notations suivantes : $f'(x)$, df/dx ou $df(x)/dx$. Ainsi par définition :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La dérivée peut donc être vue comme une fonction f', qui est définie sur tous les nombres x pour lesquels le taux d'accroissement tend vers une limite lorsque h tend vers 0. Remarquez que lorsque l'on prend la limite, le numérateur $f(x+h) - f(x)$ et le dénominateur h tendent tous les deux vers 0. Cependant, leur quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tend vers la pente de la courbe au point $(x, f(x))$.

Une fonction est dite *dérivable* si elle a une dérivée pour tous les points où elle est définie.

2.3 D'autres exemples

- La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable et sa dérivée est $2x$. Ainsi nous avons dans ce cas :

$$f'(x) = 2x$$

Nous avons systématiquement utilisé la lettre x, mais on peut utiliser n'importe quelle autre lettre de l'alphabet. Ainsi, si $f(u) = u^2$, alors :

$$f'(u) = 2u$$

Ce qui est important ici, c'est que la même lettre u doit apparaître de part et d'autre de l'équation, et qu'elle doit être différente de la lettre f.

- Soit $f(x) = 2x + 1$. Trouvons la dérivée $f'(x)$. Commençons par écrire le taux d'accroissement. Nous avons $f(x+h) = 2(x+h) + 1$, donc :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x + 2h + 1 - (2x+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

Lorsque h tend vers 0 (ce que l'on écrit aussi $h \to 0$), ce taux d'accroissement tend vers 2. Donc :

$$f'(x) = 2$$

pour toutes les valeurs de x. La dérivée est constante.

- Trouvons la pente de la fonction $f(x) = 2x^2$ au point dont la coordonnée en x est 3, et trouvons l'équation de la tangente en ce point.

Nous pouvons tout aussi bien trouver la pente à un point arbitraire de la courbe. Il s'agit de la dérivée $f'(x)$. Nous avons :

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 = 2(x^2 + 2xh + h^2)$$

Le taux d'accroissement est :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2}{h} \\
&= \frac{4xh + 2h^2}{h} \\
&= 4x + 2h
\end{aligned}$$

Donc par définition :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x$$

Donc $f'(x) = 4x$. Au point $x = 3$ on obtient :

$$f'(3) = 12$$

ce qui est la pente recherchée.

Pour ce qui est de l'équation de la tangente, nous avons $x = 3$ et $f(x) = 18$. Nous devons donc trouver l'équation d'une droite qui passe par le point $(3, 18)$ et dont la pente vaut 12. Cette équation est :

$$y = 12(x - 3) + 18$$

- Trouvons la dérivée de $f(x) = x^3$. Nous écrivons le taux d'accroissement. Commençons par le numérateur :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) =& (x+h)^3 - x^3 \\ =& x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ =& 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \end{aligned}$$

Et donc :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

Lorsque h tend vers 0, le côté droit de l'équation ci-dessus tend vers $3x^2$ donc :

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$$

- En définissant le taux d'accroissement, on peut prendre h positif ou négatif. Il est parfois pratique de regarder la limite en ne prenant que des valeurs de h qui sont positives. On ne regarde alors que des points sur la courbe qui tendent vers le point donné depuis la droite. On obtient de cette manière ce qu'on appelle la *dérivée à droite*. Si on ne prenait que des valeurs négatives de h en calculant la limite du taux d'accroissement, on obtiendrait ce qu'on appelle la *dérivée à gauche*.
Soit $f(x) = |x|$. Trouvons sa dérivée à droite et dérivée à gauche lorsque $x = 0$. La dérivée à droite est la limite :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Quand $h > 0$, nous avons :

$$f(0+h) = f(h) = h$$

et $f(0) = 0$. Donc :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

La limite lorsque $h \to 0$ et $h > 0$ est donc 1.
La dérivée à gauche est la limite :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Quand $h < 0$ on a :

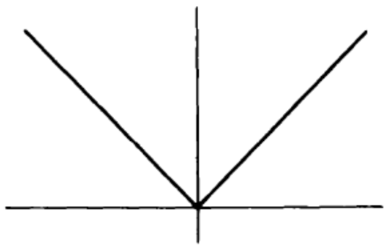
$$f(0+h) = f(h) = -h$$

Donc :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

La limite lorsque $h \to 0$ et $h < 0$ est donc -1.

Nous voyons donc que la dérivée à droite en 0 vaut 1 et la dérivée à gauche vaut -1. Cela se voit sur la courbe de la fonction $f(x) = |x|$:



On peut reformuler notre définition de la dérivée et dire que la dérivée d'une fonction $f(x)$ est définie lorsque la dérivée à droite et la dérivée à gauche existent et sont égales, auquel cas leur valeur commune est appelée la dérivée.

Donc la dérivée de $f(x) = |x|$ n'est pas définie en $x = 0$.

2.4 Exercices

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouver (a) sa dérivée et (b) la pente de la courbe au point dont la coordonnée en x vaut 2, ainsi que l'équation de la tangente en ce point.

1. $x^2 + 1$
2. x^3
3. $2x^3$
4. $3x^2$
5. $x^2 - 5$
6. $2x^2 + x$
7. $2x^2 - 3x$
8. $\frac{1}{2}x^3 + 2x$
9. $\frac{1}{x+1}$
10. $\frac{2}{x+1}$

3 Dérivées usuelles : puissances, sommes, produits et quotients

3.1 Dérivée de x^a

Soit a un nombre et soit $f(x) = x^a$. Alors $f(x)$ a une dérivée, qui est :

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

3.2 Multiplication par une constante

Soit c un nombre et $f(x)$ une fonction. Nous pouvons multiplier f par la constante c pour obtenir une nouvelle fonction cf dont la valeur en x est $cf(x)$. La dérivée de cette nouvelle fonction est :

$$(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$$

En d'autres termes, la dérivée d'une constante fois une fonction est la constante fois la dérivée de la fonction. Écrit avec l'autre notation, cela donne :

$$\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$$

3.3 Somme de fonctions

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions qui ont pour dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$. Alors la somme $f(x) + g(x)$ a une dérivée et :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

En d'autres termes : la dérivée de la somme est la somme des dérivées. Dans l'autre notation :

$$\frac{d(f + g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

3.4 Produit de fonctions

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions qui ont pour dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$. Alors la fonction produit $f(x)g(x)$ a une dérivée qui est donnée par la formule :

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Avec l'autre notation :

$$\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g(x)$$

3.5 Quotient de fonctions

Soit $g(x)$ une fonction ayant pour dérivée $g'(x)$ et telle que $g(x) \neq 0$. Alors la dérivée du quotient $1/g(x)$ existe, et est égale à :

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions ayant pour dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$, et telles que $g(x) \neq 0$. Alors $f(x)/g(x)$ a une dérivée qui est donnée par la formule :

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Avec l'autre notation, cela donne :

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g(x)df/dx - f(x)dg/dx}{g(x)^2}$$

4 Exercices

Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

1. $2x^{1/3}$
2. $3x^{3/4}$
3. $\frac{1}{2}x^2$
4. $\frac{3}{4}x^2$
5. $5x^{11}$
6. $4x^{-2}$
7. $\frac{1}{3}x^4 - 5x^3 + x^2 - 2$
8. $\frac{1}{2}x{-}3/4$
9. $3x - 2x^3$
10. $4x^5 - 7x^3 + 2x - 1$
11. $7x^3 + 4x^2$
12. $4x^{2/3} + 5x^4 - x^3 + 3x$
13. $25x^{-1} + 12x^{1/2}$
14. $2x^3 + 5x^7$
15. $4x^4 - 7x^3 + x - 12$
16. $\frac{3}{5}x^2 - 2x^8$
17. $(x^3)(x - 1)$
18. $(2x^2 - 1)(x^4 + 1)$
19. $(x + 1)(x^2 + 5x^{3/2})$
20. $(2x - 5)(3x^4 + 5x + 2)$
21. $\frac{2x}{x^3+3x+1}$
22. $\frac{t^2-2t-1}{(t+1)(t-1)}$
23. $\frac{t^{-5/4}}{t^2+t-1}$