Tutorat 1 de Mathématiques (2ème année)

Etienne Reyssat

Équations aux dérivées partielles

N'hésitez pas à me contacter (etienne.reyssat@espci.fr) si au cours de la préparation vous rencontriez des difficultés, aviez besoin de précisions...

1 Équation de diffusion à une dimension

(A) Considérons l'équation de diffusion à une dimension spatiale,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\Delta\phi \tag{1}$$

Quelle est la solution "standard" ? Quelles sont les hypothèses utilisées pour son obtention ?

(B) Transformation en une EDO : Quelle est la variable s qui apparaît naturellement dans l'équation de diffusion, i.e. quelle combinaison de x et t apparaît dans les solutions ? Y a-t-il plusieurs choix possible pour s ? Écrivez l'équation pour F telle que

$$\phi(x,t) = t^{\alpha} F(s) \tag{2}$$

et trouvez une équation différentielle ordinaire pour F. Cherchez une solution de la forme suivante : $F(s) = Ae^{-Bs}$. Quelle solution retrouvez -vous ?

(C) Cherchez des solutions de la forme

$$\phi(x,t) = f(x-\beta t) \tag{3}$$

Pourquoi n'avez vous pas trouvé cette solution par la méthode standard ?

2 Nivellement d'un film mince

Nous discutons ici l'évolution du profil d'épaisseur d'un mince film de liquide déposé sur une surface solide. La viscosité du liquide est notée η, sa tension de surface γ. L'épaisseur $h(x,t)$ du film dépend de la position et du temps. Sous l'influence de la capillarité, le film tend à s'aplanir.

(A) L'évolution du profil $h(x,t)$ est régie par l'équation des films minces :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\gamma}{3\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{4}$$

Expliquer comment on obtient cette équation.

(B) En divisant les longueurs par h_0, adimensionner l'équation d'évolution de h. On notera l'épaisseur adimensionnée $H(X,T)$. Comment s'exprime le temps adimensionné T ?

(C) Nous supposons ici que le profil est faiblement perturbé, c'est-à-dire qu'on peut écrire l'épaisseur du film sous la forme suivante :

$$H(X,T) = 1 + \Delta(X,T) \tag{5}$$

où $\Delta \ll 1$ est une petite perturbation à la surface d'un film très étendu d'épaisseur 1. Dans cette limite, que devient l'équation des films minces ? Voyez-vous des similarités avec une autre équation courante de la physique ?

(D) En utilisant un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'opérateur de diffusion, montrer que la fonction de Green du problème s'écrit :

$$\mathcal{G}(X,T) = \frac{\Theta(T)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K^4 T} e^{iKX} \mathrm{d}K \tag{6}$$

où $X = x/h_0$ et T sont la position et le temps adimensionnés, et Θ est la fonction de Heaviside.

(E) Quelle variable autosimilaire naturelle S apparaît ici ? Vérifier que la fonction de Green est autosimilaire, c'est-à-dire qu'elle s'exprime sous la forme $\mathcal{G}(X,T) = T^\alpha G(S)$.

(F) On cherche des solutions de l'équation des films minces sous la forme $\Delta(X,T) = T^\alpha F(S)$. De quelle équation différentielle ordinaire F est-elle solution ?

(G) On considère une condition initiale sommable $\Delta(X,0) = \Delta_0(X)$, d'intégrale non-nulle $\mathcal{I}_0$. Donner la solution formelle générale $\Delta(X,T)$.

(H) À temps long, vers quelle fonction semble tendre la fonction $f(X,T) = T^{1/4}\Delta(X,T)/\mathcal{I}_0$? Connaissez-vous un comportement semblable dans un autre problème de physique ?

3 Équation de Burgers

(A) Discutez les solutions de l'équation de transport convectif :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

où c est un champ $c(x,t)$.

(B) Qu'arrive-t-il si on considère $c = v$? Les singularités peuvent être lissées par ajout d'un petit terme diffusif. Celui-ci change la nature de l'EDP, qui d'hyperbolique devient parabolique. On obtient l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Expliquez qualitativement pourquoi l'ajout du terme d'ordre 2 permet de lisser les singularités.

(C) Chose inhabituelle pour une équation aux dérivées partielles non-linéaire, l'équation de Burgers admet des solutions analytiques. Construisez la solution générale en introduisant ϕ tel que

$$v = -2\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi \tag{9}$$

(transformation de Hopf et Cole). Écrivez l'équation de Burgers en fonction de ϕ. La substitution se fait en trois étapes :(1) $v = -2\epsilon\partial_x\psi$, (2) Intégrer l'équation obtenue, (3) $\psi = \ln\phi$.