ESPCI PARIS | PSL

Travaux dirigés de Mathématiques

2ème année (2025-2026)

1 Équations aux dérivées partielles (EDP)

1.1 Méthode des caractéristiques

1 Donner la solution générale de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y). \tag{1}$$

Déterminer l'équation des courbes caractéristiques pour cette équation et en représenter quelques-unes graphiquement.

Dans le cas où $f(x, y) = 0$, trouver la ou les solutions satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

(a) $u(x = 0, y) = y^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}$;

(b) $u = 2$ sur la parabole $y = x^2$.

Supposons maintenant que $f(x, y) = x$. Trouver la solution de l'EDP avec la condition limite $\forall y \in \mathbb{R} \quad u(x = 0, y) = \phi(y)$.

2 On considère l'EDP suivante :

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha^2 x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

où $\alpha > 0$. Déterminer l'équation des courbes caractéristiques et les représenter graphiquement.

Trouver la ou les solutions satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

(a) $u(x, y = 0) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $u(x, y = 0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1.2 Méthode des fonctions de Green

On considère un problème de diffusion, dont l'équation (de la chaleur, ou de la diffusion) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right] T(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \tag{3}$$

où Δ est l'opérateur Laplacien pour la dimension d'espace considérée.

3 <u>Cas des domaines infinis</u>. On se place tout d'abord dans un milieu à une dimension d'espace (c'est-à-dire $(x, t) \in \mathbb{R}^2$).

(a) On considère comme conditions aux limites à l'infini les conditions de DIRICHLET homogènes, c'est-à-dire $G(x,t) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$. Calculer la fonction de GREEN $G(x,t)$ de l'opérateur de diffusion en prenant la transformée de FOURIER de l'EDP qui définit la fonction de GREEN. Pour le calcul de la transformée de FOURIER inverse, on inversera d'abord en temps, puis en espace. Que peut-on dire en terme de causalité ?

(b) Calculer la limite de $G(x,t)$ lorsque $t \to 0^+$.

(c) Donner l'expression intégrale de la solution du problème de la diffusion avec terme source.

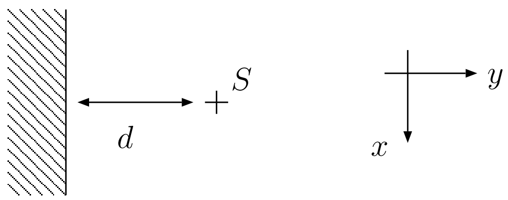
4 Application à un problème avec condition initiale. On souhaite à présent résoudre un problème avec condition initiale, c'est-à-dire trouver $T(x,t)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tel que

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right] T(x,t) = 0 \quad \text{avec} \quad T(x,t=0) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(a) On va transformer le problème à valeur initiale en un problème à terme source pour t quelconque. Pour cela, poser $T_H(x,t) = H(t)T(x,t)$ et appliquer l'opérateur à $T_H(x,t)$ au sens des distributions. En déduire la solution cherchée $T(x,t)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

(b) Vérifier que la solution précédente satisfait à la condition initiale.

5 Cas d'un espace semi infini On se place maintenant dans un système bidimensionnel et on souhaite calculer la fonction de Green de l'équation de la chaleur pour $(x,y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec comme conditions aux limites $G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}_0,t_0) \to 0$ quand $\|\mathbf{r}\| \to \infty$ où $\mathbf{r} = (x,y)$, et $G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}_0,t_0) = 0$ en $y = 0$ (interface). La source ponctuelle est placée en $\mathbf{r}_0 = (0,d)$ à l'instant t_0. La situation est décrite sur la figure.



(a) On s'intéresse tout d'abord au cas du milieu infini. Rappeler la fonction de Green $G_0(\mathbf{r},t,\mathbf{r}_0,t_0)$ dans ce cas. Elle se déduit simplement du cas 1D vu précédemment.

(b) On considère maintenant le problème avec l'interface. Montrer que le problème proposé est équivalent au cas du milieu infini dans lequel on place deux sources ponctuelles (méthode des images). Préciser les positions de ces sources et déterminer la fonction de Green du problème.

1.3 Méthode de séparation des variables

On considère l'équation de Laplace à l'extérieur du disque ouvert de rayon $R > 0$ centré à l'origine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r > R, 0 \le \theta < 2\pi) \tag{5}$$

avec les conditions suivantes sur la frontière du disque

$$u(R,\theta) = f(\theta) \quad (0 \le \theta < 2\pi) \tag{6}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $[0,2\pi]$ et 2π-périodique. On va utiliser la méthode de séparation des variables en cherchant une solution de la forme

$$u(r,\theta) = P(r)Q(\theta). \tag{7}$$

6 Établir à partir de l'Éq. (5), les équations différentielles ordinaires satisfaites par les fonctions $P(r)$ et $Q(\theta)$.

7 Résoudre l'équation satisfaite par $Q(\theta)$ en imposant que $Q(\theta)$ soit 2π-périodique.

8 Soit l'équation différentielle ordinaire suivante, dite équation d'Euler :

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 P(r)}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} - k^2 P(r) = 0 \tag{8}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et r est supposé positif. Afin de résoudre cette équation, on introduit la nouvelle fonction $v(\alpha) = P(e^\alpha)$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par la fonction $v(\alpha)$ et en déduire la solution générale de l'Éq. (8). On distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$.

9 Résoudre l'équation satisfaite par $P(r)$ en supposant cette fonction bornée sur $r > R$.

10 En déduire la solution $u(r, \theta)$ qui satisfait l'Éq. (5) munie de la condition aux limites donnée par l'Éq. (6).

11 Montrer que cette solution peut se réécrire sous la forme

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)(r^2 - R^2)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\mathrm{d}\varphi. \tag{9}$$

12 Que se passe-t-il lorsqu'on se place très loin du disque (i.e. $r \gg R$) ?

1.4 Méthode modale

On considère une barre homogène, de longueur L, dont les deux extrémités sont maintenues à une température constante T_0. La diffusion de la chaleur dans la barre est donc décrite par l'équation suivante :

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \text{pour} \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \tag{10}$$

où $T(x,t)$ représente la température à l'abscisse x et à l'instant t, et D le coefficient de diffusion. Les conditions aux limites associées sont $T(0,t) = T(L,t) = T_0$.

On s'intéresse à une version adimensionnée du problème, dans lequel l'équation devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \text{pour} \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \tag{11}$$

et les conditions aux limites associées sont $u(0,t) = u(1,t) = 0$ pour $t > 0$ et $u(x, 0) = f(x)$, avec f une fonction arbitraire, correspondant au profil de température initial de la barre.

13 On cherche la décomposition en modes propres de $u(x,t)$ sous la forme $u(x,t) = \sum_k a_k(t)u_k(x)$. Donner la forme des fonctions u_k, et les valeurs propres associées.

14 La solution est-elle unique ?

2 Calcul variationnel

15 Euler-Lagrange.

(a) Démontrer l'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par la fonction $u(t)$ qui rend extrémale l'intégrale

$$J[u] = \int_a^b L(t, u(t), u'(t))\mathrm{d}t \tag{12}$$

pour un Lagrangien L arbitraire, les valeurs aux bords $u(a)$ et $u(b)$ étant fixées.

(b) Appliquer le résultat précédent pour déterminer l'équation différentielle ordinaire sur u associée à la minimisation de

$$J[u] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}u'^2(t) + e^t u(t)\right) \mathrm{d}t \tag{13}$$

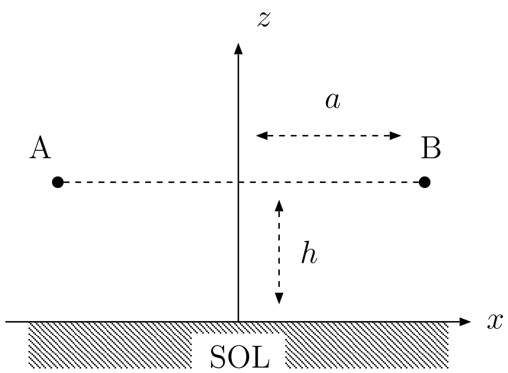
où $u \in C^2([0,1])$. Préciser les conditions de bord requises en $t = 0$ et $t = 1$ pour que u minimise J.

(c) Déterminer la fonction $u \in C^2([0,1])$ qui minimise $J[u]$ et telle que $u(t = 0) = 0$ et $u(t = 1) = 1$.

(d) Déterminer la fonction $u \in C^2([0,1])$ qui minimise $J[u]$ et telle que $u(t = 0) = 0$.

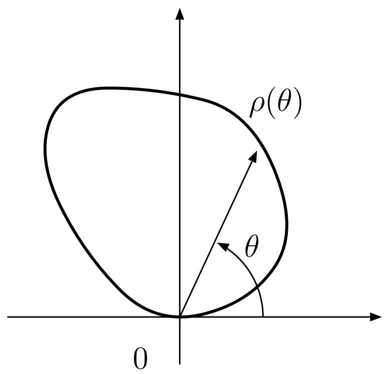
16 Effet mirage. Quel est le trajet d'un rayon lumineux entre les points A et B de coordonnées respectives $(-a, h)$ et $(+a, h)$ quand l'indice optique de l'air varie en fonction de l'altitude selon la loi suivante :

$$n(z) = n_0\sqrt{1 + \frac{z}{z_0}}, \quad z_0 > 0. \tag{14}$$



On développera le lagrangien à l'ordre le plus bas en z/z_0 et en z'. On précisera les conditions d'existence d'un tel trajet.

17 Goutte sans gravité. On souhaite déterminer la forme d'une goutte d'eau non soumise à la gravité. On se place dans un cas simplifié à deux dimensions où la forme de la goutte est décrite en coordonnées polaires par la fonction $\rho(\theta)$. On suppose que le repère de coordonnées est tel que $\rho(0) = 0$ et $\theta \in [0, \pi]$ de sorte que la goutte est dans le demi-plan supérieur (voir figure). On a donc également $\rho(\pi) = 0$. On suppose enfin que $\rho'(\{0, \pi\}) \neq 0$ ce qui pourra être vérifié à postériori.



On cherche à minimiser l'énergie de surface de la goutte à volume V donné.

(a) En notant γ la tension superficielle à la surface de la goutte, écrire l'énergie de surface puis la fonctionnelle à minimiser. On commencera par déterminer l'expression du déplacement élémentaire ds en fonction de ρ, ρ' et dθ.

(b) En déduire une équation différentielle sur ρ.

(c) Montrer à partir des conditions aux limites que ρ vérifie $\rho^2+\rho'^2 = \alpha^2$ où α est une constante positive. En déduire la seule solution qui vérifie $\rho > 0$ sur la plage angulaire considérée.

(d) Montrer que cette solution correspond à un cercle de rayon $\alpha/2$ centré au point de coordonnées cartésiennes $(0, \alpha/2)$. Que vaut α ?

3 Probabilités

3.1 Variables aléatoires discrètes

18 Soit $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires réelles de Bernoulli indépendantes où $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_{X_i}(X_i = 0) = q$ et $P_{X_i}(X_i = 1) = p$ tel que $p + q = 1$. Si $X_i = 0$ (respectivement $X_i = 1$), on dira qu'au temps i, le résultat de l'épreuve est un échec (respectivement un succès).

Déterminer la distribution de probabilité, l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire réelle T_n représentant le temps qu'il faut attendre pour que le résultat de l'épreuve soit le $n^{\text{ème}}$ succès. Montrer que T_n est la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que T_1.

Indication : $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ pour $x < 1$.

19 On considère un faisceau laser incident sur un photodétecteur. Pendant un temps de mesure fixé Δt, le nombre $N(\Delta t)$ de photons détectés est une variable aléatoire, dont on se propose de déterminer quelques propriétés.

Soit un nombre $M(T)$ donné de photons aléatoirement et uniformément répartis dans un intervalle de temps T donné, et un intervalle de temps de durée Δt inclus dans T. On note $N(\Delta t)$ le nombre de photons qui sont détectés dans l'intervalle de temps de durée Δt.

Calculer $P(N(\Delta t) = k)$ pour $0 \le k \le M(T)$, et déterminer la limite de $P(N(\Delta t) = k)$ lorsque $T \to +\infty$, $M(T) \to \infty$ et $M(T)/T \to \lambda$. Quel est le sens de la limite λ ?

20 Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que X suit une loi géométrique, c'est-à-dire qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = (1-p)p^{n-1}. \tag{15}$$

(a) Calculer $P(X > m)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que X est sans mémoire, c'est-à-dire que

$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \qquad P(X > n + k \,|\, X > k) = P(X > n). \tag{16}$$

Réciproquement, soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant (16). On pose $P(X > 1) = p$.

(c) Calculer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra procéder par récurrence sur n.

(d) En déduire la loi de X. Conclure.

21 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et suivant la même loi donnée par

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer $P(U \le k)$ pour tout k. En déduire la loi de U.

3.2 Variables aléatoires continues

22 Quelle est la densité de probabilité de la v.a.r. $Y = e^X$ sachant que X est une v.a.r. normale centrée réduite ?

23 Déterminer la densité de probabilité de la v.a.r. $Z = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont deux v.a.r. indépendantes normales de moyennes m_1 et m_2 et d'écart-types σ_1 et σ_2 respectivement.

24 Soient X et Y deux v.a.r. normales centrées réduites indépendantes. On pose $R^2 = X^2 + Y^2$ et $\tan\theta = Y/X$. X et Y peuvent être interprétées comme les coordonnées cartésiennes d'un point aléatoire et R et θ comme ses coordonnées polaires.

Montrer que R et θ sont deux v.a.r. indépendantes, dont on déterminera les distributions.

25 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On pose $Z = aX + bY$. Calculer l'espérance de Z en fonction des espérances de X et de Y. Qu'en est-il de la variance de Z si X et Y sont indépendantes ?

3.3 Suites de variables aléatoires

26 On se propose en préambule de démontrer les inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et de Jensen.

(a) Soit $a > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer l'inégalité de Markov

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}\left(|X|^p\right)}{a^p}. \tag{18}$$

(b) En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}. \tag{19}$$

(c) Soit $f(x)$ une fonction convexe, montrer l'inégalité de Jensen

$$\mathrm{E}(f(X)) \geq f(\mathrm{E}(X)). \tag{20}$$

On notera que les fonctions convexes vérifient

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq f(a) + \lambda(x - a). \tag{21}$$

27 On considère ici une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi. On note $\mathrm{E}[X_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_n] = \sigma^2$.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \tag{22}$$

et de la moyenne $M_n = S_n/n$.

(b) Montrer que M_n tend vers la variable aléatoire certaine égale à μ en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. De quel type de convergence s'agit-il ?

(c) Peut-on montrer que M_n tend vers μ en moyenne, par exemple en utilisant une autre inégalité ?

28 On souhaite déterminer la loi des fluctuations de M_n autour de μ.

(a) On définit la transformation affine $Y_n = a_n M_n + b_n$. Déterminer a_n et b_n pour que Y_n soit d'espérance nulle et de variance unité.
(b) Calculer la fonction caractéristique de Y_n en fonction de celle de Y_1.
(c) Déterminer sa limite quand $n \to \infty$. Conclure en utilisant le théorème de Lévy.

29 On lance une pièce à pile ou face. En supposant une infinité de lancers, la proportion de « pile » est de 50 %. On suppose maintenant qu'on n'effectue que 100 lancers. Quel est l'intervalle de confiance à 95 % sur ces lancers ?