Introduction à la dynamique
Partie 2

Licence 1

Vincent Démery

2025–2026

Version du 19 janvier 2026

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

1.1 Description du mouvement

On considère le mouvement d'un objet de masse m et situé au point M. Si on dispose d'un référentiel d'origine O et de trois axes, on peut considérer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, que l'on notera plus simplement $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Nous utiliseront le plus souvent les coordonnées cartésiennes, pour lesquelles nous noterons les composantes du vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$, ou, en colonne,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

On peut aussi utiliser les coordonnées polaires (en deux dimensions), cylindriques, ou sphériques. Dans tous les cas, deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales. Si l'objet considéré est en mouvement, sa position et ses coordonnées dépendent du temps t ; on écrira

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

À partir d'une position dépendante du temps, on définit la *vitesse* $\vec{v}(t)$ et l'*accélération* $\vec{a}(t)$ de l'objet par des dérivées successives :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.4}$$

Il s'agit ici de la dérivée de *vecteurs* par rapport à une variable *scalaire*. Le résultat est un vecteur dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur de départ :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

et

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

Exemple : considérons le mouvement d'équation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ 0 \\ v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

La vitesse et l'accélérations sont obtenues en dérivant successivement chaque composante :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Exemple 1.1. considérons le mouvement d'équation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ 0 \\ v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

La vitesse et l'accélérations sont obtenues en dérivant successivement chaque composante :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

1.2 Deuxième loi de Newton

La deuxième loi de Newton, ou *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD), indique comment le mouvement d'un objet est affecté par les forces qui s'appliquent sur cet objet. Ces forces sont décrites par des vecteurs et peuvent dépendre du temps ou de la position de l'objet. Leur effet est additif : il est équivalent de dire qu'on objet est soumis aux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et qu'il est soumis à la force $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Nous noterons donc simplement $\vec{F}$ la force totale à laquelle est soumise un objet.

D'après la deuxième loi de Newton, l'accélération d'un objet dans un référentiel galiléen est donnée par la force qu'il ressent, via sa masse m :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t). \tag{1.13}$$

En particulier, un objet qui n'est soumis à aucune force, c'est à dire $\vec{F}(t) = 0$, a une accélération nulle et donc, par intégration, une vitesse constante.

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1.14}$$

Exemple : reprenons l'exemple du mouvement décrit par l'équation (1.10), donc l'accélération est donnée par l'équation (1.12) : $\vec{a}(t) = (0, 0, -g) = -g\vec{k} = \vec{g}$. Cela signifie que l'objet est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$: on reconnaît l'accélération gravitationnelle.

Exemple 1.2. Reprenons l'exemple 1.1. L'accélération est donnée par l'équation (1.12) : $\vec{a}(t) = (0, 0, -g) = -g\vec{k} = \vec{g}$. Cela signifie que l'objet est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$: on reconnaît l'accélération gravitationnelle.

1.3 Énergies

1.3.1 Énergie cinétique

On définit l'*énergie cinétique* par

$$E_\mathrm{c}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2, \tag{1.15}$$

où

$$v(t)^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\|^2 . \tag{1.16}$$

Pour calculer la dérivée temporelle, il faut calculer la dérivée d'un produit scalaire :

$$\frac{\mathrm{d}\left[v(t)^2\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}(t) = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t). \tag{1.17}$$

Pour l'énergie cinétique, on a donc

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t). \tag{1.18}$$

En utilisant la deuxième loi de Newton (Eq. (1.13)), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = P_{\vec{F}}(t), \tag{1.19}$$

où le dernier terme est la *puissance* des forces extérieures. Cette relation est le *théorème de l'énergie cinétique* ; c'est en fait une reformulation de la deuxième loi de Newton. Intégré entre deux temps t_1 et t_2, on obtient

$$E_\mathrm{c}(t_2) - E_\mathrm{c}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{r}(t) = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \mathrm{d}W_{\vec{F}}(t) = W_{\vec{F}}, \tag{1.20}$$

où $W_{\vec{F}}$ est le *travail* des forces extérieures.

Exemple 1.3. Reprenons l'exemple 1.1 et calculons l'énergie cinétique à partir de la vitesse $\vec{v}(t) = (v_{0x}, 0, v_{0z} - gt)$ (equation (1.5)). On obtient

$$E_\mathrm{c}(t) = \frac{m}{2}\left[v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2\right] \ ; \tag{1.21}$$

l'énergie cinétique décroît et atteint son minimum pour $t = v_{0z}/g$ puis augmente. La dérivée de l'énergie cinétique est

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = mg(gt - v_{0z}). \tag{1.22}$$

Calculons la puissance de la force extérieure identifiée précédemment, $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$:

$$P_{\vec{F}}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix} = mg(gt - v_{0z}). \tag{1.23}$$

Comme attendu, on retrouve la dérivée de l'énergie cinétique.

1.3.2 Énergie potentielle

On distingue les *forces conservatives*, qui dérivent d'une énergie potentielle. Pour les définir, on commence par se donner une énergie potentielle, qui est une fonction de la position : $E_\mathrm{p}(\vec{r}) = E(x, y, z)$. Ici, $\vec{r} = (x, y, z)$ peut être n'importe quel point de l'espace, pas nécessairement la position de l'objet considéré. On dit parfois que l'énergie potentielle définit un "paysage" énergétique. On peut définir le *gradient* de l'énergie potentielle, qui est le vecteur donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

On dit qu'un *champ de force* $\vec{F}(\vec{r})$, qui associe un vecteur force à tout point de l'espace, dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p}(\vec{r})$ si

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}(\vec{r}). \tag{1.25}$$

Une force, ou un champ de force, qui dérive d'une énergie potentielle est dite *conservative*. Si on se donne une énergie potentielle, on peut toujours en déduire une force conservative. Si on se donne une force, il n'est pas toujours possible de trouver l'énergie potentielle correspondante ; par exemple, les forces de frottement visqueuses, de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

Exemple 1.4. Dans l'exemple 1.1, la force gravitationnelle $\vec{F} = -mg\vec{k}$ dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_\mathrm{p}(x, y, z) = mgz$.

La puissance d'une force conservative $\vec{F}_\mathrm{c}$ peut s'exprimer avec l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} P_{\vec{F}_\mathrm{c}}(t) &= \vec{F}_\mathrm{c}(t) \cdot \vec{v}(t) &(1.26)\\ &= -\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}(\vec{r}(t))\right] \cdot \vec{v}(t) &(1.27)\\ &= -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} &(1.28)\\ &= -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} &(1.29) \end{aligned}$$

où nous avons noté E_p au lieu de $E_\mathrm{p}(x(t), y(t), z(t))$ par souci de concision. La dernière égalité s'obtient par la règle de la chaîne, qui s'écrit pour une fonction d'une variable :

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = f'(x(t))\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}; \tag{1.30}$$

et, pour une fonction de deux variables,

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.31}$$

1.3.3 Énergie mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique quand l'objet est soumis à une force conservative $\vec{F}_\mathrm{c}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_p :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = P_{\vec{F}_\mathrm{c}}(t) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.32}$$

En faisant passer l'énergie potentielle à gauche, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E_\mathrm{c}(t) + E_\mathrm{p}(t)\right] = 0. \tag{1.33}$$

La somme des énergies cinétique est potentielle est constante, c'est l'énergie mécanique :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}. \tag{1.34}$$

Exemple 1.5. Dans l'exemple, l'énergie mécanique est donc

$$E_\mathrm{m}(t) = E_\mathrm{c}(t) + E_\mathrm{p}(t) = \frac{m}{2}\left[v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2\right] + mg\left(v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right) \tag{1.35}$$

$$= \frac{mv_{0x}^2}{2} + m\left(\frac{1}{2}v_{0z}^2 - v_{0z}gt + \frac{1}{2}g^2t^2\right) + mg\left(v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right) \tag{1.36}$$

$$= \frac{m}{2}\left(v_{0x}^2 + v_{0z}^2\right). \tag{1.37}$$

L'énergie mécanique est donc constante et, en particulier, égale à l'énergie mécanique à $t = 0$ qui est obtenue dans la dernière expression.

En présence d'une force non-conservative $\vec{F}_\mathrm{nc}(t)$, on peut décomposer la force comme $\vec{F}(t) = \vec{F}_\mathrm{c}(t) + \vec{F}_\mathrm{nc}(t)$. La puissance est additive, donc $P_{\vec{F}}(t) = P_{\vec{F}_\mathrm{c}}(t) + P_{\vec{F}_\mathrm{nc}}(t)$ et la variation de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = P_{\vec{F}_\mathrm{c}}(t) + P_{\vec{F}_\mathrm{nc}}(t) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(t)}{\mathrm{d}t} + P_{\vec{F}_\mathrm{nc}}(t). \tag{1.38}$$

Ainsi, la variation d'énergie mécanique est donnée seulement par la puissance de la force non-conservative :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}(t)}{\mathrm{d}t} = P_{\vec{F}_\mathrm{nc}}(t). \tag{1.39}$$

1.4 Quantités conservées

Nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie mécanique d'un objet soumis à une force conservative était conservée. Les quantités conservées aident parfois à résoudre des problèmes en mécanique et en physique en général. Nous introduisons ici deux quantités vectorielles qui peuvent être conservées.

1.4.1 Quantité de mouvement

La première est la *quantité de mouvement* $\vec{p}$, définie par

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t). \tag{1.40}$$

D'après la seconde loi de Newton, l'évolution de la quantité de mouvement est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(t). \tag{1.41}$$

La quantité de mouvement est conservée si la force est nulle. S'agissant d'une égalité vectorielle, elle fournit une égalité par composante, et une composante de la quantité de mouvement est conservée si cette composante de la force est nulle.

Exemple 1.6. Dans l'exemple, la force est $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, donc $F_x = 0$, et en conséquence $p_x = mv_x$ est conservée.

1.4.2 Moment cinétique

La deuxième quantité vectorielle que nous allons considérer est le *moment cinétique* $\vec{L}$:

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t); \tag{1.42}$$

cette définition utilise le produit vectoriel. Contrairement à la quantité de mouvement, elle fait intervenir l'origine du repère O via la position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. En composantes,

$$\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

On voit d'après cette expression que le produit vectoriel est antisymétrique, c'est à dire que, pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ quelconques, $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$; en particulier, $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$. Le moment cinétique est parfois projeté selon un axe ; par exemple, si le mouvement a lieu dans le plan (O, x, y), seule la composante selon z, c'est à dire perpendiculaire à ce plan, est non nulle.

Pour calculer l'évolution du moment cinétique, il faut dériver un produit ; le produit vectoriel se dérive comme tout produit :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t)\right] && (1.44)\\
&= m\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \wedge m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} && (1.45)\\
&= m\vec{v}(t) \wedge \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \wedge m\vec{a}(t) && (1.46)\\
&= \vec{r}(t) \wedge \vec{F}(t). && (1.47)
\end{aligned}$$

Pour passer de l'équation (1.46) à la suivante, on a utilisé l'antisymétrie du produit vectoriel.

La condition de conservation du moment cinétique apparaît dans l'équation (1.47) : il faut que la force $\vec{F}$ à laquelle est soumis l'objet soit alignée avec sa position $\vec{r}$. Une force alignée avec la position est une *force centrale*.

Par exemple, dans le référentiel terrestre, l'*attraction gravitationnelle* est une force centrale :

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r, \tag{1.48}$$

où G est la constante gravitationnelle, M est la masse de la Terre, m la masse de l'objet, $r = \|\vec{r}\|$ est la distance au centre de la terre, et $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ est le vecteur unitaire (de norme 1) qui “pointe” dans la direction de l'objet. Nous verrons dans le chapitre 3 que la conservation du moment cinétique simplifie beaucoup l'étude des orbites autour du Soleil ou de la Terre.

Chapitre 2

Oscillations

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les outils rappelés au chapitre précédent pour décrire des mouvements oscillatoires. Notre étude se basera sur deux systèmes physiques : un système masse-ressort, dans lequel un objet est connecté à un point fixe via un ressort, et un pendule pesant. Dans les deux cas, nous commencerons par établir les équations du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique ou d'une de ses variantes, puis nous résoudrons ces équations pour aboutir à une description complète du mouvement. Nous étudierons aussi l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique au cours du mouvement et verrons qu'elles permettent de comprendre la nature du mouvement même quand on ne sait pas résoudre explicitement les équations du mouvement.

2.1 Système masse-ressort

2.1.1 Équation du mouvement

On considère un objet de masse m suspendu à un point fixe via un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. La force exercée par le ressort est d'amplitude $K(\ell - \ell_0)$, où ℓ est la longueur du ressort étiré ou comprimé, et elle s'exerce dans la direction du ressort. Si l'objet est est aligné avec le point d'attache et est à la hauteur $z = 0$ quand le ressort a sa longueur à vide (ou longueur de repos), alors la force du ressort est donnée par

$$\vec{F}_{\text{ressort}} = -Kz\vec{k}. \tag{2.1}$$

L'objet est aussi soumis à la gravité ; la force est

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\vec{k}. \tag{2.2}$$

Nous supposons que le mouvement a lieu selon la verticale. Cette hypothèse n'est pas vérifiée si la position initiale de l'objet est décalée par rapport au point d'attache ou si sa vitesse initiale a une composante horizontale. Avec cette hypothèse, la position de l'objet est donnée par $\vec{r}(t) = (0, 0, z(t)) = z(t)\vec{k}$, sa vitesse et son accélération sont données par

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}, \tag{2.3}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}. \tag{2.4}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique, $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$ selon la verticale donne donc

$$m\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mg - Kz(t). \tag{2.5}$$

Quand $-mg-Kz=0$, la force du ressort compense celle de la gravité et le système est à l'équilibre ; cela arrive quand la masse est à la hauteur

$$z_{\text{eq}} = -\frac{mg}{K}. \tag{2.6}$$

Il est plus pratique d'utiliser la position d'équilibre comme point de référence ; pour cela, on introduit la nouvelle variable

$$u(t) = z(t) - z_{\text{eq}} = z(t) + \frac{mg}{K}. \tag{2.7}$$

En dérivant deux fois cette expression, on trouve que

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.8}$$

On peut maintenant utiliser $u(t)$ dans le PFD (équation (2.5)) :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -K\left[z(t) - \frac{mg}{K}\right] = -Ku(t). \tag{2.9}$$

En introduisant la pulsation caractéristique

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \tag{2.10}$$

on peut écrire l'équation finale est donc

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 u(t). \tag{2.11}$$

Cette équation est l'équation de l'*oscillateur harmonique*.

Remarque 2.1. Nous pouvons vérifier que ω_0 définie dans l'équation (2.10) est bien une pulsation, c'est à dire l'inverse d'un temps. On note F les forces, L les longueurs et T les temps ; ils s'expriment respectivement en Newtons, mètres, et secondes. D'après l'expression (2.1), la dimension de la raideur K est $[K] = F/L$. D'après l'expression (2.2), comme g est une accélération, $[g] = L/T^2$ et $[m] = F/[g] = FT^2/L$. Donc, la dimension du ration K/m est $[K/m] = 1/T^2$, donc $[\omega_0] = 1/T$.

2.1.2 Résolution

Nous cherchons maintenant à résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique (2.11). Du point de vue mathématique, c'est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 (car elle contient une dérivée seconde) à coefficients constant (seule la fonction inconnue $u(t)$ dépend du temps).

La solution générale à l'équation (2.11) est

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t). \tag{2.12}$$

Les coefficients A et B peuvent changer d'une solution à l'autre et dépendent des conditions initiales. Pour montrer que cette solution convient, il faut utiliser que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. On peut alors calculer

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t), \tag{2.13}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0(t)) - B\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 u(t). \tag{2.14}$$

Une méthode plus systématique pour arriver à la solution (2.12) et que nous utiliserons plus tard est de chercher la solution à l'équation (2.11) sous la forme d'une exponentielle, $u(t) = \mathrm{e}^{at}$. La dérivée seconde vaut

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a\mathrm{e}^{at}\right] = a^2\mathrm{e}^{at}. \tag{2.15}$$

En injectant cette expression dans l'équation (2.11), on obtient

$$a^2\mathrm{e}^{at} = -\omega_0^2\mathrm{e}^{at}, \tag{2.16}$$

il faut donc que

$$a^2 = -\omega_0^2. \tag{2.17}$$

Il s'agit d'une équation pour le paramètre a qui a deux solutions imaginaires pures, $a = \mathrm{i}\omega_0$ et $a = -\mathrm{i}\omega_0$. La solution générale à l'équation (2.11) s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces deux solutions,

$$u(t) = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{2.18}$$

Séparons maintetant les parties réelle et imaginaire de cette expression en écrivant $\alpha = \alpha' + \mathrm{i}\alpha''$ et $\beta = \beta' + \mathrm{i}\beta''$, où α', α'', β' et β'' sont des nombres réels :

$$\begin{aligned} u(t) &= (\alpha' + \mathrm{i}\alpha'')\left[\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)\right] + (\beta' + \mathrm{i}\beta'')\left[\cos(\omega_0 t) - \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)\right] && (2.19)\\ &= (\alpha' + \beta')\cos(\omega_0 t) + (\beta'' - \alpha'')\sin(\omega_0 t) + \mathrm{i}\left[(\alpha'' + \beta'')\cos(\omega_0 t) + (\alpha' - \beta')\sin(\omega_0 t)\right]. && (2.20)\end{aligned}$$

La solution devant être réelle, le terme imaginaire doit être nul pour tout temps t, ce qui implique que $\alpha' = \beta'$ et $\alpha'' = -\beta''$, c'est à dire que α et β sont complexes conjugués. Avec ces relations, la solution s'écrit

$$u(t) = 2\alpha'\cos(\omega_0 t) - 2\alpha''\sin(\omega_0 t). \tag{2.21}$$

α' et α'' étant des coefficients quelconques, on retrouve la solution générale (2.12).

Pour déterminer les deux coefficients A et B de la solution générale (2.12), il faut deux conditions initiales. Le plus souvent, celles-ci sont obtenues en fixant la position initiale, $u(0) = u_0$, et la vitesse initiale, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$.

$$u(0) = u_0 = A, \tag{2.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 = B\omega_0. \tag{2.23}$$

La solution est donc

$$u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{2.24}$$

2.1.3 Approche énergétique

2.1.4 Frottements

Frottements visqueux et résolution.

2.2 Pendule pesant

2.2.1 Équation du mouvement

- PFD
- Moment cinétique
- Limite de faible amplitude

2.2.2 Approche énergétique

- énergies
- on peut retrouver les équations du mouvement
- limite de faible amplitude, on retrouve l'énergie du ressort
- dans le cas général, on peut déterminer la nature du mouvement, portrait de phase.

- Exemples physiques : ressort (horizontal et vertical), pendule pesant.
- Frottements visqueux.
- PFD, thm du moment cinétique, approche énergétique.
- Résolution des équations sans frottement
- Résolution avec frottement.

Chapitre 3

Mouvements à force centrale

Chapitre 4

Collisions