

# CALCUL DES VARIATIONS

## TUTORAT 2 DE MATHÉMATIQUES (2ÈME ANNÉE)

Etienne Reyssat

**N'hésitez pas à me contacter ([etienne.reyssat@espci.fr](mailto:etienne.reyssat@espci.fr)) si au cours de la préparation vous rencontrez des difficultés, aviez besoin de précisions. . .**

## 1 Equations d'Euler-Lagrange

1. On cherche les chemins  $z(x)$  qui rendent extrémale la quantité

$$I[z(x)] = \int_a^b \mathcal{L}(x, z, z', z'') dx \quad (1)$$

avec les conditions aux limites  $z(a) = z_a$ ,  $z(b) = z_b$ ,  $z'(a) = z'_a$ ,  $z'(b) = z'_b$ . En suivant une démarche analogue à celle utilisée dans votre cours, dérivez l'équation d'Euler-Lagrange dont  $z$  doit être solution.

2. Généralisez ce résultat au cas d'un Lagrangien dépendant des dérivées d'ordre supérieur de  $z$  :

$$I[z(x)] = \int_a^b \mathcal{L}(x, z, z', z'', \dots, z^{(n)}) dx \quad (2)$$

## 2 Ménisques liquides

On cherche à déterminer la forme  $z(r)$  du ménisque liquide se formant autour d'une fibre cylindrique plongée dans un liquide (figure 1). On note  $r_0$  le rayon de la fibre,  $\rho$  la densité du liquide,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\gamma$  la tension de surface du liquide. Les énergies par unité de surface solide/air et solide/liquide sont respectivement notées  $\gamma_{SA}$  et  $\gamma_{SL}$ . Le liquide se raccorde au solide en faisant un angle  $\theta$ .

### 2.1 Ménisque sur un plan

On s'intéresse d'abord au cas du ménisque bidimensionnel qui se forme sur un plan vertical. On utilise alors un système de coordonnées cartésiennes. Dans ce cas,  $r = x$ .

3. Montrer que l'énergie du système peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{E}[z(x)] = \int_a^b \mathcal{L}(x, z, z') dx + z(0) \Delta\gamma \quad (3)$$

où  $\Delta\gamma = \gamma_{SL} - \gamma_{SA}$  et où le Lagrangien  $\mathcal{L}$  s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, z, z') = \frac{1}{2} \rho g z^2 + \gamma \left( \sqrt{1 + z'^2} - 1 \right) \quad (4)$$

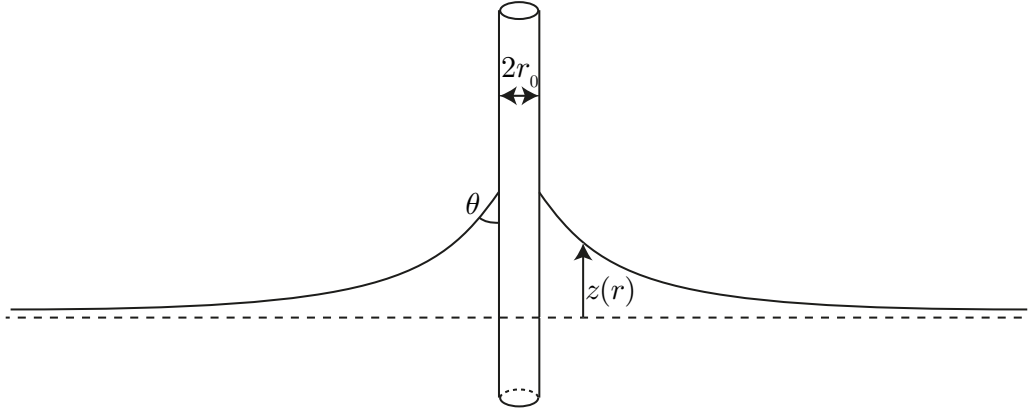


FIGURE 1 – Fibre plongée dans un liquide.

En minimisant l'énergie, exprimer  $\cos \theta$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\gamma_{SA}$  et  $\gamma_{SL}$ . Établir également une équation différentielle non-linéaire faisant intervenir  $z$ ,  $z'$ ,  $z''$  ainsi que la longueur capillaire  $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ . Des solutions analytiques sont connues pour cette équation. Dans le cas où  $\theta = 0$ , déterminer la hauteur du ménisque, c'est-à-dire  $z(x = 0)$ . Déterminer la forme de  $z(x)$  loin de la paroi.

## 2.2 Ménisque sur une fibre

Nous passons maintenant au cas du ménisque 3D autour d'une fibre décrit plus haut.

4. En suivant le raisonnement de la question 3, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la forme du ménisque  $z(r)$  devient :

$$\frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{r(1 + z'^2)^{1/2}} = \kappa^2 z \quad (5)$$

5. Vérifier que les conditions aux limites pour  $z(r)$  s'écrivent :

$$z(r \rightarrow +\infty) = 0 \quad (6)$$

$$z'(r = r_0) = -\cotan \theta \quad (7)$$

Il n'y a pas à ce jour de solution analytique connue pour l'équation 5 avec ces conditions aux limites. Nous allons ici chercher des solutions approchées en utilisant la technique du raccordement asymptotique.

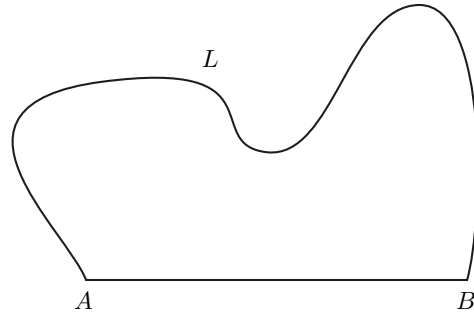
6. Adimensionner le problème par le rayon de la fibre  $r_0$ . On introduira  $Z = z/r_0$ ,  $R = r/r_0$  et le nombre de Bond  $\mathcal{B} = \kappa r_0$ .

7. Loin de la fibre, montrer que l'équation 5 devient :

$$Z'' + \frac{Z'}{R} - \mathcal{B}^2 Z = 0 \quad (8)$$



(a)



(b)

FIGURE 2 – (*gauche*) Didon achète un terrain pour fonder Carthage. Gravure de Matthäus Merian l'Ancien, 1630. (*droite*) Quelle est la plus grande surface englobée par une courbe de longueur  $L$  s'appuyant sur les extrémités  $A$  et  $B$  d'un segment ?

8. Chercher les solutions de l'équation 8 avec la condition 6. Vous utiliserez pour cela la documentation annexe sur les fonctions de Bessel. Vous pourrez aussi utiliser un logiciel de calcul formel. On notera  $Z_{far}(R)$  la solution et  $\mathcal{C}_1$  la constante multiplicative qui reste indéterminée à ce stade.

9. Dans la limite des petits nombres de Bond ( $\mathcal{B} \ll 1$ ) et proche de la fibre, montrer que l'équation 5 devient :

$$Z'' + \frac{Z'}{R} (1 + Z'^2) = 0 \quad (9)$$

10. Vérifier que cette équation avec la condition 7 admet des solutions du type caténoïde :

$$Z_{close}(R) = \mathcal{C}_2 - \cos \theta \ln \left[ R + (R^2 - \cos^2 \theta)^{1/2} \right] \quad (10)$$

11. En utilisant la documentation jointe (ou toute autre source d'information) déterminer le développement limité de  $Z_{far}(R)$  pour  $R$  petit et de  $Z_{close}(R)$  pour  $R$  grand. En égalisant les deux résultats, déterminer les constantes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . En déduire l'expression de la hauteur du ménisque dans ce cas.

12. À l'aide du logiciel de votre choix, représentez les solutions asymptotiques. Résoudre numériquement l'équation 5 sous sa forme adimensionnée et estimer la qualité de la solution approchée.

### 3 Problème de Didon

La ville de Carthage fut fondée en 814 av. J.-C. par des colons phéniciens. D'après la légende, la princesse Elyssa, ou Didon, fille du roi de Tyr, aurait demandé au souverain local Hiarbas l'autorisation de fonder un royaume. Celui-ci lui aurait accordé un terrain pouvant être contenu dans la peau d'une vache. Rusée, Didon fait découper la peau de l'animal en une longue lanière, afin de pouvoir englober la plus grande surface possible (figure 2a).

13. Montrer que l'aire  $\mathcal{A}$  englobée par une courbe fermée paramétrée par  $x(t)$ ,  $y(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int xy'dt = - \int yx'dt = \frac{1}{2} \int (xy' - yx')dt \quad (11)$$

14. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, déterminer parmi les courbes de longueur  $L$  reliant les deux extrémités d'un segment  $[AB]$ , celle qui englobe l'aire maximale (figure 2b).