Introduction à la dynamique
Partie 2

Licence 1

Vincent Démery

2025–2026

Version du 22 janvier 2026

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "CC0 1.0 Universel".

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

1.1 Description du mouvement

On considère le mouvement d'un objet de masse m et situé au point M. Si on dispose d'un référentiel d'origine O et de trois axes, on peut considérer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, que l'on notera plus simplement $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Nous utiliseront le plus souvent les coordonnées cartésiennes, pour lesquelles nous noterons les composantes du vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$, ou, en colonne,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

On peut aussi utiliser les coordonnées polaires (en deux dimensions), cylindriques, ou sphériques. Dans tous les cas, deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales. Si l'objet considéré est en mouvement, sa position et ses coordonnées dépendent du temps t ; on écrira

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

À partir d'une position dépendante du temps, on définit la *vitesse* $\vec{v}(t)$ et l'*accélération* $\vec{a}(t)$ de l'objet par des dérivées successives :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t), \tag{1.3}$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.4}$$

Il s'agit ici de la dérivée de *vecteurs* par rapport à une variable *scalaire*. Le résultat est un vecteur dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur de départ :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

et

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

Exemple : considérons le mouvement d'équation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ 0 \\ v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

La vitesse et l'accélérations sont obtenues en dérivant successivement chaque composante :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Exemple 1.1. considérons le mouvement d'équation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ 0 \\ v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

La vitesse et l'accélérations sont obtenues en dérivant successivement chaque composante :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

1.2 Deuxième loi de Newton

La deuxième loi de Newton, ou *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD), indique comment le mouvement d'un objet est affecté par les forces qui s'appliquent sur cet objet. Ces forces sont décrites par des vecteurs et peuvent dépendre du temps ou de la position de l'objet. Leur effet est additif : il est équivalent de dire qu'on objet est soumis aux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et qu'il est soumis à la force $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Nous noterons donc simplement $\vec{F}$ la force totale à laquelle est soumise un objet.

D'après la deuxième loi de Newton, l'accélération d'un objet dans un référentiel galiléen est donnée par la force qu'il ressent, via sa masse m :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t). \tag{1.13}$$

En particulier, un objet qui n'est soumis à aucune force, c'est à dire $\vec{F}(t) = 0$, a une accélération nulle et donc, par intégration, une vitesse constante.

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1.14}$$

Exemple : reprenons l'exemple du mouvement décrit par l'équation (1.10), donc l'accélération est donnée par l'équation (1.12) : $\vec{a}(t) = (0, 0, -g) = -g\vec{k} = \vec{g}$. Cela signifie que l'objet est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$: on reconnaît l'accélération gravitationnelle.

Exemple 1.2. Reprenons l'exemple 1.1. L'accélération est donnée par l'équation (1.12) : $\vec{a}(t) = (0, 0, -g) = -g\vec{k} = \vec{g}$. Cela signifie que l'objet est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$: on reconnaît l'accélération gravitationnelle.

1.3 Énergies

1.3.1 Énergie cinétique

On définit l'*énergie cinétique* par

$$E_\mathrm{c}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2, \tag{1.15}$$

où

$$v(t)^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\|^2 . \tag{1.16}$$

Pour calculer la dérivée temporelle, il faut calculer la dérivée d'un produit scalaire :

$$\frac{\mathrm{d}\left[v(t)^2\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}(t) = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t). \tag{1.17}$$

Pour l'énergie cinétique, on a donc

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t). \tag{1.18}$$

En utilisant la deuxième loi de Newton (Eq. (1.13)), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = P_{\vec{F}}(t), \tag{1.19}$$

où le dernier terme est la *puissance* des forces extérieures. Cette relation est le *théorème de l'énergie cinétique* ; c'est en fait une reformulation de la deuxième loi de Newton. Intégré entre deux temps t_1 et t_2, on obtient

$$E_\mathrm{c}(t_2) - E_\mathrm{c}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{r}(t) = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \mathrm{d}W_{\vec{F}}(t) = W_{\vec{F}}, \tag{1.20}$$

où $W_{\vec{F}}$ est le *travail* des forces extérieures.

Exemple 1.3. Reprenons l'exemple 1.1 et calculons l'énergie cinétique à partir de la vitesse $\vec{v}(t) = (v_{0x}, 0, v_{0z} - gt)$ (equation (1.5)). On obtient

$$E_\mathrm{c}(t) = \frac{m}{2}\left[v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2\right] ; \tag{1.21}$$

l'énergie cinétique décroît et atteint son minimum pour $t = v_{0z}/g$ puis augmente. La dérivée de l'énergie cinétique est

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = mg(gt - v_{0z}). \tag{1.22}$$

Calculons la puissance de la force extérieure identifiée précédemment, $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$:

$$P_{\vec{F}}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix} = mg(gt - v_{0z}). \tag{1.23}$$

Comme attendu, on retrouve la dérivée de l'énergie cinétique.

1.3.2 Énergie potentielle

On distingue les *forces conservatives*, qui dérivent d'une énergie potentielle. Pour les définir, on commence par se donner une énergie potentielle, qui est une fonction de la position : $E_\mathrm{p}(\vec{r}) = E(x, y, z)$. Ici, $\vec{r} = (x, y, z)$ peut être n'importe quel point de l'espace, pas nécessairement la position de l'objet considéré. On dit parfois que l'énergie potentielle définit un "paysage" énergétique. On peut définir le *gradient* de l'énergie potentielle, qui est le vecteur donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

On dit qu'un *champ de force* $\vec{F}(\vec{r})$, qui associe un vecteur force à tout point de l'espace, dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p}(\vec{r})$ si

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}(\vec{r}). \tag{1.25}$$

Une force, ou un champ de force, qui dérive d'une énergie potentielle est dite *conservative*. Si on se donne une énergie potentielle, on peut toujours en déduire une force conservative. Si on se donne une force, il n'est pas toujours possible de trouver l'énergie potentielle correspondante ; par exemple, les forces de frottement visqueuses, de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

Exemple 1.4. Dans l'exemple 1.1, la force gravitationnelle $\vec{F} = -mg\vec{k}$ dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_\mathrm{p}(x, y, z) = mgz$.

La puissance d'une force conservative $\vec{F}_\mathrm{c}$ peut s'exprimer avec l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} P_{\vec{F}_\mathrm{c}}(t) &= \vec{F}_\mathrm{c}(t) \cdot \vec{v}(t) && (1.26)\\ &= -\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}(\vec{r}(t))\right] \cdot \vec{v}(t) && (1.27)\\ &= -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} && (1.28)\\ &= -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} && (1.29) \end{aligned}$$

où nous avons noté E_p au lieu de $E_\mathrm{p}(x(t), y(t), z(t))$ par souci de concision. La dernière égalité s'obtient par la règle de la chaîne, qui s'écrit pour une fonction d'une variable :

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = f'(x(t))\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}; \tag{1.30}$$

et, pour une fonction de deux variables,

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.31}$$

1.3.3 Énergie mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique quand l'objet est soumis à une force conservative $\vec{F}_\mathrm{c}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_p :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = P_{\vec{F}_\mathrm{c}}(t) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.32}$$

En faisant passer l'énergie potentielle à gauche, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E_{\mathrm{c}}(t)+E_{\mathrm{p}}(t)\right]=0. \tag{1.33}$$

La somme des énergies cinétique est potentielle est constante, c'est l'énergie mécanique :

$$E_{\mathrm{m}}=E_{\mathrm{c}}+E_{\mathrm{p}}. \tag{1.34}$$

Exemple 1.5. Dans l'exemple, l'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{m}}(t)=E_{\mathrm{c}}(t)+E_{\mathrm{p}}(t) &= \frac{m}{2}\left[v_{0x}^2+(v_{0z}-gt)^2\right]+mg\left(v_{0z}t-\frac{1}{2}gt^2\right) &(1.35)\\
&= \frac{mv_{0x}^2}{2}+m\left(\frac{1}{2}v_{0z}^2-v_{0z}gt+\frac{1}{2}g^2t^2\right)+mg\left(v_{0z}t-\frac{1}{2}gt^2\right) &(1.36)\\
&= \frac{m}{2}\left(v_{0x}^2+v_{0z}^2\right). &(1.37)
\end{aligned}$$

L'énergie mécanique est donc constante et, en particulier, égale à l'énergie mécanique à $t=0$ qui est obtenue dans la dernière expression.

En présence d'une force non-conservative $\vec{F}_{\mathrm{nc}}(t)$, on peut décomposer la force comme $\vec{F}(t)=\vec{F}_{\mathrm{c}}(t)+\vec{F}_{\mathrm{nc}}(t)$. La puissance est additive, donc $P_{\vec{F}}(t)=P_{\vec{F}_{\mathrm{c}}}(t)+P_{\vec{F}_{\mathrm{nc}}}(t)$ et la variation de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t}=P_{\vec{F}_{\mathrm{c}}}(t)+P_{\vec{F}_{\mathrm{nc}}}(t)=-\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}(t)}{\mathrm{d}t}+P_{\vec{F}_{\mathrm{nc}}}(t). \tag{1.38}$$

Ainsi, la variation d'énergie mécanique est donnée seulement par la puissance de la force non-conservative :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}(t)}{\mathrm{d}t}=P_{\vec{F}_{\mathrm{nc}}}(t). \tag{1.39}$$

1.4 Quantités conservées

Nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie mécanique d'un objet soumis à une force conservative était conservée. Les quantités conservées aident parfois à résoudre des problèmes en mécanique et en physique en général. Nous introduisons ici deux quantités vectorielles qui peuvent être conservées.

1.4.1 Quantité de mouvement

La première est la *quantité de mouvement* $\vec{p}$, définie par

$$\vec{p}(t)=m\vec{v}(t). \tag{1.40}$$

D'après la seconde loi de Newton, l'évolution de la quantité de mouvement est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{F}(t). \tag{1.41}$$

La quantité de mouvement est conservée si la force est nulle. S'agissant d'une égalité vectorielle, elle fournit une égalité par composante, et une composante de la quantité de mouvement est conservée si cette composante de la force est nulle.

Exemple 1.6. Dans l'exemple, la force est $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, donc $F_x = 0$, et en conséquence $p_x = mv_x$ est conservée.

1.4.2 Moment cinétique

La deuxième quantité vectorielle que nous allons considérer est le *moment cinétique* $\vec{L}$:

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t); \tag{1.42}$$

cette définition utilise le produit vectoriel. Contrairement à la quantité de mouvement, elle fait intervenir l'origine du repère O via la position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. En composantes,

$$\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

On voit d'après cette expression que le produit vectoriel est antisymétrique, c'est à dire que, pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ quelconques, $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$; en particulier, $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$. Le moment cinétique est parfois projeté selon un axe ; par exemple, si le mouvement a lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, seule la composante selon z, c'est à dire perpendiculaire à ce plan, est non nulle.

Pour calculer l'évolution du moment cinétique, il faut dériver un produit ; le produit vectoriel se dérive comme tout produit :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t)\right] && (1.44)\\
&= m\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \wedge m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} && (1.45)\\
&= m\vec{v}(t) \wedge \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \wedge m\vec{a}(t) && (1.46)\\
&= \vec{r}(t) \wedge \vec{F}(t). && (1.47)
\end{aligned}$$

Pour passer de l'équation (1.46) à la suivante, on a utilisé l'antisymétrie du produit vectoriel.

La condition de conservation du moment cinétique apparaît dans l'équation (1.47) : il faut que la force $\vec{F}$ à laquelle est soumis l'objet soit alignée avec sa position $\vec{r}$. Une force alignée avec la position est une *force centrale.*

Par exemple, dans le référentiel terrestre, l'*attraction gravitationnelle* est une force centrale :

$$\vec{F}_\mathrm{g} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r, \tag{1.48}$$

où G est la constante gravitationnelle, M est la masse de la Terre, m la masse de l'objet, $r = \|\vec{r}\|$ est la distance au centre de la terre, et $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ est le vecteur unitaire (de norme 1) qui “pointe” dans la direction de l'objet. Nous verrons dans le chapitre 3 que la conservation du moment cinétique simplifie beaucoup l'étude des orbites autour du Soleil ou de la Terre.

Chapitre 2

Oscillations

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les outils rappelés au chapitre précédent pour décrire des mouvements oscillatoires. Notre étude se basera sur deux systèmes physiques : un système masse-ressort, dans lequel un objet est connecté à un point fixe via un ressort, et un pendule pesant. Dans les deux cas, nous commencerons par établir les équations du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique ou d'une de ses variantes, puis nous résoudrons ces équations pour aboutir à une description complète du mouvement. Nous étudierons aussi l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique au cours du mouvement et verrons qu'elles permettent de comprendre la nature du mouvement même quand on ne sait pas résoudre explicitement les équations du mouvement.

2.1 Système masse-ressort

2.1.1 Équation du mouvement

On considère un objet de masse m suspendu à un point fixe via un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. La force exercée par le ressort est d'amplitude $K(\ell - \ell_0)$, où ℓ est la longueur du ressort étiré ou comprimé, et elle s'exerce dans la direction du ressort. Si l'objet est est aligné avec le point d'attache et est à la hauteur $z = 0$ quand le ressort a sa longueur à vide (ou longueur de repos), alors la force du ressort est donnée par

$$\vec{F}_{\text{ressort}} = -Kz\vec{k}. \tag{2.1}$$

L'objet est aussi soumis à la gravité ; la force est

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\vec{k}. \tag{2.2}$$

Nous supposons que le mouvement a lieu selon la verticale. Cette hypothèse n'est pas vérifiée si la position initiale de l'objet est décalée par rapport au point d'attache ou si sa vitesse initiale a une composante horizontale. Avec cette hypothèse, la position de l'objet est donnée par $\vec{r}(t) = (0, 0, z(t)) = z(t)\vec{k}$, sa vitesse et son accélération sont données par

$$\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\vec{k}, \tag{2.3}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\vec{k}. \tag{2.4}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique, $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$ selon la verticale donne donc

$$m\ddot{z}(t) = -mg - Kz(t). \tag{2.5}$$

Quand $-mg-Kz=0$, la force du ressort compense celle de la gravité et le système est à l'équilibre ; cela arrive quand la masse est à la hauteur

$$z_{\text{eq}} = -\frac{mg}{K}. \tag{2.6}$$

Il est plus pratique d'utiliser la position d'équilibre comme point de référence ; pour cela, on introduit la nouvelle variable

$$u(t) = z(t) - z_{\text{eq}} = z(t) + \frac{mg}{K}. \tag{2.7}$$

En dérivant deux fois cette expression, on trouve que

$$\ddot{u}(t) = \ddot{z}(t). \tag{2.8}$$

On peut maintenant utiliser $x(t)$ dans le PFD (équation (2.5)) :

$$m\ddot{u}(t) = m\ddot{z}(t) = -K\left[z(t) - \frac{mg}{K}\right] = -Ku(t). \tag{2.9}$$

En introduisant la pulsation caractéristique

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \tag{2.10}$$

on peut écrire l'équation finale est donc

$$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 u(t). \tag{2.11}$$

Cette équation est l'équation de l'*oscillateur harmonique*.

Remarque 2.1. Nous pouvons vérifier que ω_0 définie dans l'équation (2.10) est bien une pulsation, c'est à dire l'inverse d'un temps. On note F les forces, L les longueurs et T les temps ; ils s'expriment respectivement en Newtons, mètres, et secondes. D'après l'expression (2.1), la dimension de la raideur K est $[K] = F/L$. D'après l'expression (2.2), comme g est une accélération, $[g] = L/T^2$ et $[m] = F/[g] = FT^2/L$. Donc, la dimension du ration K/m est $[K/m] = 1/T^2$, donc $[\omega_0] = 1/T$.

2.1.2 Résolution

Nous cherchons maintenant à résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique (2.11). Du point de vue mathématique, c'est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 (car elle contient une dérivée seconde) à coefficients constant (seule la fonction inconnue $u(t)$ dépend du temps).

La solution générale à l'équation (2.11) est

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t). \tag{2.12}$$

Les coefficients A et B peuvent changer d'une solution à l'autre et dépendent des conditions initiales. Pour montrer que cette solution convient, il faut utiliser que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. On peut alors calculer

$$\dot{u}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t), \tag{2.13}$$

et

$$\ddot{u}(t) = -A\omega_0^2\cos(\omega_0(t)) - B\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 u(t). \tag{2.14}$$

La solution générale (2.12) est une solution oscillante à la *pulsation* ω_0. On définit aussi sa *période* $T = 2\pi/\omega_0$, c'est à dire, par exemple, le temps entre deux maxima de la fonction. Par définition, la période est le plus petit temps τ tel que $u(t+\tau) = u(t)$ pour tout temps t. On définit aussi sa *fréquence* $\nu = 1/T = \omega_0/(2\pi)$. Finalement, l'*amplitude* de la solution est donnée par $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Une méthode plus systématique pour arriver à la solution (2.12) et que nous utiliserons plus tard est de chercher la solution à l'équation (2.11) sous la forme d'une exponentielle, $u(t) = \mathrm{e}^{at}$. La dérivée seconde vaut

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a\mathrm{e}^{at}\right] = a^2\mathrm{e}^{at}. \tag{2.15}$$

En injectant cette expression dans l'équation (2.11), on obtient

$$a^2\mathrm{e}^{at} = -\omega_0^2\mathrm{e}^{at}, \tag{2.16}$$

il faut donc que

$$a^2 = -\omega_0^2. \tag{2.17}$$

Il s'agit d'une équation pour le paramètre a qui a deux solutions imaginaires pures, $a = \mathrm{i}\omega_0$ et $a = -\mathrm{i}\omega_0$. La solution générale à l'équation (2.11) s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces deux solutions,

$$u(t) = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{2.18}$$

Séparons maintetant les parties réelle et imaginaire de cette expression en écrivant $\alpha = \alpha' + \mathrm{i}\alpha''$ et $\beta = \beta' + \mathrm{i}\beta''$, où α', α'', β' et β'' sont des nombres réels :

$$u(t) = (\alpha' + \mathrm{i}\alpha'')\left[\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)\right] + (\beta' + \mathrm{i}\beta'')\left[\cos(\omega_0 t) - \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)\right] \tag{2.19}$$

$$= (\alpha' + \beta')\cos(\omega_0 t) + (\beta'' - \alpha'')\sin(\omega_0 t) + \mathrm{i}\left[(\alpha'' + \beta'')\cos(\omega_0 t) + (\alpha' - \beta')\sin(\omega_0 t)\right]. \tag{2.20}$$

La solution devant être réelle, le terme imaginaire doit être nul pour tout temps t, ce qui implique que $\alpha' = \beta'$ et $\alpha'' = -\beta''$, c'est à dire que α et β sont complexes conjugués. Avec ces relations, la solution s'écrit

$$u(t) = 2\alpha'\cos(\omega_0 t) - 2\alpha''\sin(\omega_0 t). \tag{2.21}$$

α' et α'' étant des coefficients quelconques, on retrouve la solution générale (2.12).

Pour déterminer les deux coefficients A et B de la solution générale (2.12), il faut deux conditions initiales. Le plus souvent, celles-ci sont obtenues en fixant la position initiale, $u(0) = u_0$, et la vitesse initiale, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$.

$$u(0) = u_0 = A, \tag{2.22}$$

$$\dot{u}(0) = v_0 = B\omega_0. \tag{2.23}$$

La solution est donc

$$u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{2.24}$$

2.1.3 Approche énergétique

L'énergie cinétique E_c est donnée par le carré de la vitesse $\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\vec{k}$, c'est à dire

$$E_\mathrm{c}(t) = \frac{m}{2}\dot{z}(t)^2. \tag{2.25}$$

La force exercée par le ressort, $\vec{F}_\mathrm{ressort} = -Kz\vec{k}$ (équation (2.1)), dérivée de l'énergie potentielle

$$E_\mathrm{p,ressort} = \frac{K}{2}z^2. \tag{2.26}$$

Elle ne dépend que de la hauteur z, donc son gradient est un vecteur orienté selon $\vec{k}$. La force gravitationnelle dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{\mathrm{p,grav}} = mgz. \tag{2.27}$$

Toutes les forces auxquelles est soumis l'objet dérivant d'une énergie potentielle, son énergie mécanique E_{m} est conservée, avec

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p,ressort}} + E_{\mathrm{p,grav}} = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{K}{2}z^2 + mgz. \tag{2.28}$$

En utilisant plutôt la variable $z(t) = u(t) - \frac{mg}{K}$, on peut réexprimer l'énergie mécanique

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{m}} &= \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{K}{2}\left(u - \frac{mg}{K}\right)^2 + mg\left(u - \frac{mg}{K}\right) && (2.29)\\
&= \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{K}{2}\left[u^2 - \frac{2mg}{K}u + \left(\frac{mg}{K}\right)^2\right] + mg\left(u - \frac{mg}{K}\right) && (2.30)\\
&= \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{K}{2}u^2 - \frac{m^2g^2}{2K} && (2.31)
\end{aligned}$$

Le dernier terme est une constante et peut être éliminé car l'énergie est définie à une constante près. Par exemple, ajouter une constante à une énergie potentielle ne change pas la force qui en dérive. On retiendra donc pour l'énergie mécanique :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \frac{K}{2}u^2 = m\left(\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}u^2\right). \tag{2.32}$$

Avec cette définition, l'énergie mécanique est nulle si l'objet est au point d'équilibre à vitesse nulle.

On peut vérifier que la solution générale (2.12) a une énergie mécanique constante :

$$\begin{aligned}
\frac{E_{\mathrm{m}}}{m} &= \frac{1}{2}\left[-A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)\right]^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\left[A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right]^2 && (2.33)\\
&= \frac{\omega_0^2}{2}\left[A^2 \sin(\omega_0 t)^2 - 2AB\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + B^2\cos(\omega_0 t)^2\right] \\
&\quad + \frac{\omega_0^2}{2}\left[A^2 \cos(\omega_0 t)^2 + 2AB\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + B^2\sin(\omega_0 t)^2\right] && (2.34)\\
&= \frac{\omega_0^2}{2}\left(A^2 + B^2\right)\left[\cos(\omega_0 t)^2 + \sin(\omega_0 t)^2\right] && (2.35)\\
&= \frac{\omega_0^2}{2}\left(A^2 + B^2\right). && (2.36)
\end{aligned}$$

Comme on peut le voir en prenant par exemple $B = 0$, les composantes cinétique et potentielle de l'énergie oscillent en opposition de phase et leur somme est constante.

Au chapitre 1, nous avons utilisé le PFD pour montrer que l'énergie mécanique était constante quand l'objet étudié n'était soumis qu'à des forces conservatives. Réciproquement, dans un problème particulier, on peut utiliser l'invariance de l'énergie mécanique pour obtenir une équation du mouvement. Faisons le calcul :

$$0 = \dot{E}_{\mathrm{m}} = m\left(\dot{u}\ddot{u} + \omega_0^2 u\dot{u}\right) = m\dot{u}\left(\ddot{u} + \omega_0^2 u\right). \tag{2.37}$$

En simplifiant par la masse et la vitesse, on obtient

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \tag{2.38}$$

ce qui correspond bien à l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique (2.11). Rigoureusement, on ne peut simplifier par la vitesse $\dot{u}(t)$ que quand celle-ci est non-nulle ; cependant, on voit ici que le résultat est toujours vrai.

2.2 Oscillateur harmonique amorti

2.2.1 Équation du mouvement

En pratique, l'amplitude des oscillations d'un système masse-ressort diminue avec le temps et l'objet finit par s'arrêter. Si l'énergie mécanique diminue, c'est que des forces de frottement doivent être à l'œuvre. Ces frottements sont parfois recherchés pour *amortir* le mouvement, comme dans un amortisseur de voiture.

Le modèle de frottement le plus simple est le frottement visqueux, dont la force est proportionnelle à la vitesse et de direction opposée :

$$\vec{F}_{\text{visc}} = -k_{\text{visc}}\vec{v} = -k_{\text{visc}}\dot{u}(t)\vec{k}. \tag{2.39}$$

Cette force ajoute un terme à l'équation du mouvement (2.9) :

$$m\ddot{u}(t) = -k_{\text{visc}}\dot{u}(t) - Ku(t). \tag{2.40}$$

En définissant le coefficient de frottement réduit

$$\alpha = \frac{k_{\text{visc}}}{2m}, \tag{2.41}$$

l'équation du mouvement se réécrit

$$\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0. \tag{2.42}$$

C'est l'équation de l'*oscillateur harmonique amorti*. Le coefficient α est l'inverse d'un temps ; il s'agit du temps qu'il faudrait à la masse seule pour s'arrêter avec une vitesse initiale et en l'absence de ressort.

2.2.2 Résolution

Avant de résoudre l'équation complète, considérons le problème sans ressort pour nous échauffer :

$$\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) = 0. \tag{2.43}$$

Il s'agit en fait d'une équation du premier ordre pour la vitesse $v(t) = \dot{u}(t)$:

$$\dot{v}(t) + 2\alpha v(t) = 0. \tag{2.44}$$

En cherchant la solution sous la forme d'une exponentielle, $v(t) = \mathrm{e}^{at}$, on obtient l'équation $a + 2\alpha = 0$, et donc

$$v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-2\alpha t}. \tag{2.45}$$

On voit que le coefficient α correspond au taux de décroissance de la vitesse.

Passons maintenant à l'équation générale (2.42), qui est toujours une équation différentielle ordinaire d'ordre 2. En cherchant encore la solution sous la forme d'une exponentielle, l'équation pour le coefficient a de l'exponentielle est

$$a^2 + 2\alpha a + \omega_0^2 = 0. \tag{2.46}$$

Il s'agit de l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle. Il s'agit d'une équation du second degré. Cette équation peut être visualisée graphiquement : en traçant le côté gauche de l'équation en fonction de la variable a, on obtient une parabole. Résoudre l'équation revient à déterminer les points d'intersection entre cette courbe et l'axe des abscisses. Il peut y en avoir deux, en seul, ou aucun ; dans ce dernier cas, l'équation admet des solutions complexes. Pour savoir dans quel cas on est, il faut calculer le discriminant :

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2 = 4(\alpha^2 - \omega_0^2). \tag{2.47}$$

Amortissement fort, régime apériodique. Si $\Delta > 0$, c'est à dire si $\alpha > \omega_0$, le système est dans le régime d'amortissement fort. les deux solutions réelles sont a_+ et a_- :

$$a_\pm = -\alpha \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha \pm \beta, \tag{2.48}$$

où nous avons défini

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha. \tag{2.49}$$

D'après cette inégalité, les deux solutions $a_\pm$ sont négatives. La solution à l'équation (2.42) est donc une somme d'exponentielles décroissantes :

$$u(t) = A_+ \mathrm{e}^{a_+ t} + A_- \mathrm{e}^{a_- t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_+ \mathrm{e}^{\beta t} + A_- \mathrm{e}^{-\beta t}\right). \tag{2.50}$$

Ce comportement correspond au *régime apériodique*. On note que le temps de relaxation est donné par l'exponentielle qui décroit le plus lentement, c'est à dire celle correspondant à $a_+ = \beta - \alpha$; le temps de relaxation est donné par

$$\tau_{\mathrm{relax}} = \frac{1}{|a_+|} = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}. \tag{2.51}$$

Avec la solution générale, la vitesse est donnée par

$$\dot{u}(t) = a_+ A_+ \mathrm{e}^{a_+ t} + a_- A_- \mathrm{e}^{a_- t}. \tag{2.52}$$

Pour obtenir la solution avec condition initiale $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$, il faut donc résoudre le système

$$u_0 = u(0) = A_+ + A_-, \tag{2.53}$$
$$0 = \dot{u}(0) = a_+ A_+ + a_- A_-. \tag{2.54}$$

Pour le résoudre, il suffit de diviser la deuxième équation par a_+ ou a_- et de la soustraire à la première, ainsi :

$$u_0 = \left(1 - \frac{a_+}{a_-}\right) A_+, \tag{2.55}$$
$$u_0 = \left(1 - \frac{a_-}{a_+}\right) A_-. \tag{2.56}$$

Finalement, on obtient

$$A_+ = \frac{a_-}{a_- - a_+} u_0 = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} u_0, \tag{2.57}$$
$$A_- = \frac{a_+}{a_+ - a_-} u_0 = -\frac{\alpha - \beta}{2\beta} u_0. \tag{2.58}$$

La solution complète s'écrit donc

$$u(t) = \frac{u_0}{2\beta}\left[(\alpha + \beta)\mathrm{e}^{a_+ t} - (\alpha - \beta)\mathrm{e}^{a_- t}\right] \tag{2.59}$$
$$= \frac{u_0}{2\beta}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[(\alpha + \beta)\mathrm{e}^{\beta t} - (\alpha - \beta)\mathrm{e}^{-\beta t}\right] \tag{2.60}$$
$$= u_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\mathrm{ch}(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{sh}(\beta t)\right]. \tag{2.61}$$

Amortissement faible, régime pseudo-périodique. Si $\Delta < 0$, c'est à dire si $\alpha < \omega_0$, le système est dans le régime d'amortissement faible. Dans ce cas les solutions sont complexes conjuguées :

$$a_{\pm} = -\alpha \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{|\Delta|} = -\alpha \pm \mathrm{i}\omega, \tag{2.62}$$

où nous avons défini

$$\omega = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \tag{2.63}$$

La solution à l'équation (2.42) est alors

$$u(t) = A_+ \mathrm{e}^{a_+ t} + A_- \mathrm{e}^{a_- t} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right). \tag{2.64}$$

Tout est en fait comme avant, en remplaçant β par $\mathrm{i}\omega$. La complication supplémentaire vient du fait que la solution (2.64) contient des exponentielles complexes et des coefficients qui peuvent être complexes, mais qu'elle doit malgré tout être réelle.

Pour voir comment aboutir à une expression explicitement réelle, commençons par résoudre le problème avec les conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = 0$. Pour cela, reprenons l'expression (2.60) en remplaçant β par $\mathrm{i}\omega$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{u_0}{2\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[(\alpha + \mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - (\alpha - \mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] && (2.65) \\ &= u_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right]. && (2.66) \end{aligned}$$

On voit apparaître une forme *pseudo-périodique*, ou *sous-amorti*, avec des oscillations de pulsation ω (équation (2.63)), décalée de la pulsation de l'oscillateur harmonique non amorti, multipliées par une exponentielle décroissante avec un temps caractéristique

$$\tau_{\mathrm{relax}} = \frac{1}{\alpha}. \tag{2.67}$$

La forme de la solution (2.66), peut être généralisée pour toute solution de la forme (2.64), sur le modèle de ce que nous avons fait sans frottements (section 2.1.2). Écrivons explicitement les parties réelle et imaginaire des coefficients $A_{\pm}$ de l'équation :

$$A_{\pm} = A'_{\pm} + \mathrm{i}A''_{\pm}. \tag{2.68}$$

La solution générale (2.66) s'écrit alors

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), && (2.69) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(A'_+ + \mathrm{i}A''_+\right)\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right) + \left(A'_- + \mathrm{i}A''_-\right)\left(\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)\right)\right] && (2.70) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(A'_+ + A'_-\right)\cos(\omega t) - \left(A''_+ - A''_-\right)\sin(\omega t)\right] \\ &\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(A''_+ + A''_-\right)\cos(\omega t) + \left(A'_+ - A'_-\right)\sin(\omega t)\right]. && (2.71) \end{aligned}$$

Pour que la solution soit réelle, les coefficients qui apparaissent dans la partie imaginaire doivent être nuls, ce qui impose $A'_+ = A'_-$ et $A''_+ = -A''_-$: comme précédemment, A_+ et A_- sont complexes conjugués. Avec cette propriété, il reste

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right], \tag{2.72}$$

où nous avons introduit, pour simplifier les notations, $A = 2A'_+$ et $B = -2A''_+$; cette solution est bien de la même forme que la solution particulière (2.66).

La solution (2.72) n'est pas périodique. En revanche, elle garde la même forme après une pseudo-période $T = 2\pi/\omega$:

$$u(t+T) = \mathrm{e}^{-\alpha T} u(t). \tag{2.73}$$

Décalée d'une pseudo-période, elle est identique à un coefficient multiplicatif près, que l'on peut aussi exprimer avec le *décrément logarithmique*

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \tag{2.74}$$

En particulier, le décrément logarithmique peut se calculer avec la valeur de la fonction $u(t)$ aux maxima locaux t_k^*, où $k \in \mathbb{Z}$ est un nombre entier qui indique le maximum considéré. D'après la relation (2.73), ces maxima sont séparés de T, c'est à dire que $t_k^* = t_0^* + kT$. On peut donc obtenir le décrément logarithmique en considérant deux maxima successifs :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t_k^*)}{u(t_{k+1}^*)}\right), \tag{2.75}$$

où même deux maxima locaux séparés de n pseudo-périodes,

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t_k^*)}{u(t_{k+n}^*)}\right). \tag{2.76}$$

Régime critique. Intéressons-nous enfin au cas intermédiaire, $\alpha = \omega_0$, appelé *régime critique*. Dans ce cas, le discriminant de l'équation caractéristique est nul, $\Delta = 0$, et celle-ci possède une racine "double",

$$a = -\alpha = -\omega_0. \tag{2.77}$$

La solution à l'équation (2.42) est alors

$$u(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t}. \tag{2.78}$$

Le terme $t\mathrm{e}^{-\alpha t}$ n'est pas de la forme habituel et peut paraître surprenant. Vérifions que la forme (2.78) est bien solution :

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= B\mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha(A+Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t} && (2.79)\\
&= (B - \alpha A - \alpha Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t}, && (2.80)\\
\ddot{u}(t) &= -\alpha B\mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha(B - \alpha A - \alpha Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t} && (2.81)\\
&= (\alpha^2 A - 2\alpha B + \alpha^2 Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t}. && (2.82)
\end{aligned}$$

On peut déjà voir que les dérivées successives sont de la forme $\frac{\mathrm{d}^n u(t)}{\mathrm{d}t^n} = (A_n + B_n t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Regroupons les différents termes :

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) + \alpha^2 u(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[(\alpha^2 A - 2\alpha B + \alpha^2 Bt) + 2\alpha(B - \alpha A - \alpha Bt) + \alpha^2(A+Bt)\right], && (2.83)\\
&= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\alpha^2 A - 2\alpha B + 2\alpha(B - \alpha A) + \alpha^2 A + (\alpha^2 B - 2\alpha^2 B + \alpha^2 B)t\right] && (2.84)\\
&= 0. && (2.85)
\end{aligned}$$

Déterminons les coefficients A et B avec les conditions initiales $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$. Les équations sont

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = A, && (2.86)\\
0 &= \dot{u}(0) = B - \alpha A. && (2.87)
\end{aligned}$$

Donc $A = u_0$ et $B = \alpha A$, donc

$$u(t) = u_0(1 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}. \tag{2.88}$$

Cette expression s'écrit comme le produit d'un terme qui diverge et d'un terme qui tend vers 0 ; c'est l'exponentielle qui gagne et le résultat tend vers 0 avec un temps de relaxation $1/\alpha$. Ce retour se fait sans oscillations ; on voit par exemple que $u(t)$ ne s'annule exactement jamais.

2.2.3 Approche énergétique

Dans la section précédente, nous avons résolu l'équation de l'oscillateur harmonique amorti pour toutes les valeurs des paramètres. Nous allons ici voir comment les énergies cinétique, potentielle et mécanique évoluent au cours du mouvement et les enseignements qu'on peut en tirer.

Nous avons vu dans la section 2.1.3 que l'oscillateur harmonique n'était soumis qu'à des forces conservatives et que, par conséquent, son énergie mécanique E_m était conservée. L'oscillateur harmonique amorti est en plus soumis à la force de friction $\vec{F}_\mathrm{visc} = -k_\mathrm{visc}\vec{v}$, qui n'est pas conservative car elle dépend de la vitesse et ne peut donc pas s'exprimer comme le gradient d'une fonction de la position. La puissance de cette force est

$$P_{\vec{F}_\mathrm{visc}}(t) = -k_\mathrm{visc}\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t) = -k_\mathrm{visc}\vec{v}(t)^2 = -k_\mathrm{visc}\dot{u}(t)^2 \leq 0. \tag{2.89}$$

D'après la dernière inégalité, l'oscillateur harmonique amorti perd de l'énergie, donc son énergie mécanique décroît au cours du temps. On peut aussi noter que la puissance dissipée n'est pas constante puisqu'elle est associée à la vitesse de l'objet. Dans les solutions que nous avons obtenues, la vitesse n'est pas constante. En particulier, dans le régime pseudo-périodique, la vitesse oscille : elle est nulle quand la position est localement extrêmale (maximale ou minimale), positions dans lesquelles l'énergie dissipée est nulle, et non-nulle entre les extrêma. On peut aussi remarquer que la puissance dissipée est proportionnelle à l'énergie cinétique :

$$P_{\vec{F}_\mathrm{visc}}(t) = -\frac{2k_\mathrm{visc}}{m}E_\mathrm{c}(t). \tag{2.90}$$

Remarque 2.2. L'énergie "perdue" par le système par frottement est dissipée sous forme de chaleur dans l'environnement. L'énergie du système composé de l'oscillateur et de son environnement est conservée, et les frottements convertissent l'énergie mécanique du système en énergie thermique de l'environnement. On ne cherche pas ici à définir l'énergie thermique, mais c'est tout à fait possible.

Calculons maintenant l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique pour les trois régimes.

Régime apériodique. Pour la solution (2.50), la vitesse est donnée par

$$\dot{u}(t) = a_+A_+\mathrm{e}^{a_+t} + a_-A_-\mathrm{e}^{a_-t}. \tag{2.91}$$

l'énergie cinétique vaut

$$E_\mathrm{c}(t) = \tag{2.92}$$

2.3 Pendule pesant

2.3.1 Équation du mouvement

— PFD

— Moment cinétique
— Limite de faible amplitude

2.3.2 Approche énergétique

— énergies
— on peut retrouver les équations du mouvement
— limite de faible amplitude, on retrouve l'énergie du ressort
— dans le cas général, on peut déterminer la nature du mouvement, portrait de phase.

— Exemples physiques : ressort (horizontal et vertical), pendule pesant.
— Frottements visqueux.
— PFD, thm du moment cinétique, approche énergétique.
— Résolution des équations sans frottement
— Résolution avec frottement.

Chapitre 3

Mouvements à force centrale

Chapitre 4

Collisions