Probabilités

Exemples :

* Maladie qui touche 1 pers / 10^4.
  Test juste avec proba 99 %.
  Test positif, quelle est la probabilité d'être malade.

* Atome radioactif : proba $\delta t / \tau$ de se désintégrer pendant le temps δt.
  Distribution du temps de survie ? Comment la simuler ?

* Echantillon de 2000 personnes. $\begin{cases} 48\% & \text{pour A} \\ 52\% & \text{pour B} \end{cases}$
  Que peut-on dire de l'issue ?

3.3 Événement et proba.

Mesure de probabilité

Ω : espace des états.

$s \in \Omega$: réalisation.

$A \subset \Omega$: événement.

On veut définir la proba $P(A) \in [0,1]$.

Tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$.

Mesure : $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$.

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- A_n famille disjointe 2 à 2 de $\mathcal{A}$:

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$.

$$\mu\Big(\bigsqcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu(A_n).$$

Mesure de probabilité : P

Mesure telle que $P(\Omega) = 1$.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé.

Rq : $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Conditionnement et indépendance

- Proba de "A sachant B" : $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

- Probabilités totales : $(B_n)_n$ partition de Ω

$$P(A) = P\left(\bigcup_n (A\cap B_n)\right) = \sum_n P(A\cap B_n)$$

$$= \sum_n P(A|B_n)\, P(B_n).$$

- $$P(B_n|A) = \frac{P(B_n\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)\, P(B_n)}{\sum_k P(A|B_k)\, P(B_k)}$$

Formule de Bayes.

Indépendance

* A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

  Rq : alors $P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$.

* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendants si $\forall\, I \subset \mathbb{N}$ finie

$$P\left(\bigcap_{n \in I} A_n\right) = \prod_{n \in I} P(A_n).$$

Rq : indépendance 2 à 2 $\not\Rightarrow$ indépendance.

<u>Exemple :</u> événements : M malade | P test $+$

S sain | N test $-$.

$$P(M) = f = 10^{-4} \ll 1$$

$$P(P|M) = j_m = 0{,}99 \simeq 1$$

$$P(N|S) = j_s = 0{,}99 \simeq 1$$

$$P(M|P) = ?$$

$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|M)\,P(M)}{P(P|M)\,P(M) + P(P|S)\,P(S)}$$

$$= \frac{j_m f}{\underbrace{j_m \cdot f}_{\text{malade et test juste}} + \underbrace{(1-j_s)(1-f)}_{\text{sain et test faux}}} \simeq \frac{f}{f + (1-j_s)}$$

$$\simeq 10^{-2}.$$

3.4. Variables aléatoires

Définition : $X : \Omega \longrightarrow F$ $\quad F = \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \dots$

Tribu : $\mathcal{F} = \{ B \subset F \text{ tq } X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$

Proba : $P_X : \begin{cases} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ B \longmapsto P(X^{-1}(B)) \end{cases}$ loi de X.

$$(X \in B) = X^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in B \}.$$

Couple de VA : $X, Y : \Omega \longrightarrow F \times G$

$P_{X,Y}$ proba sur $F \times G$.

Lois marginales : $P_X(B) = P_{X,Y}(B \times G)$.

VA indépendantes : X et Y indépendantes :

$(X \in A)$ et $(Y \in B)$ indépendants $\forall A, B \subset F, G$.

Alors $P_{X,Y}(A \times B) = P((X \in A) \cap (Y \in B))$

$$= P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

$$= P_X(A) \cdot P_Y(B)$$ mesure produit.

$f : F \to G$. Alors $f(X) = f \circ X$ est une

V.A sur G.

VA réelles

$\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$.

Fonction de répartition de X :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto P(X \leq x) \end{cases}$$

Rq : F_X croissante.

Question : comment générer numériquement des tirages de X ?

On peut générer des nombres aléatoires uniformément répartis sur $[0,1]$.

$\rightarrow$ V.A. R. $F_R(x) = P(R \leq x) = x$.
$x \in [0,1]$

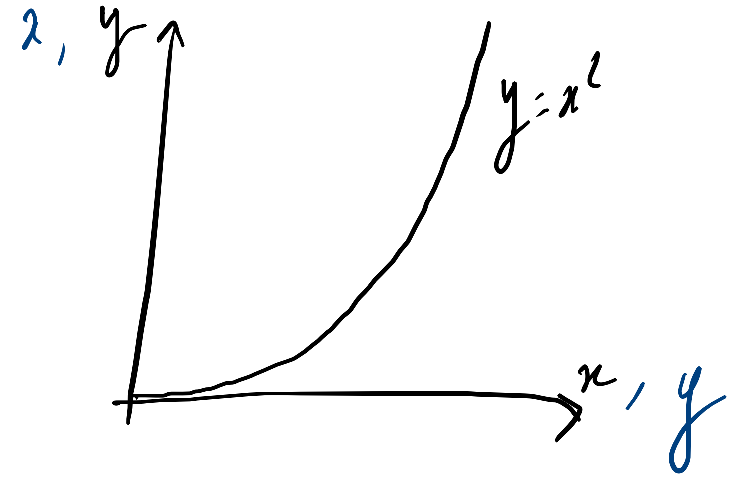
(H) $g \nearrow$ et $\exists\, g^{-1}$.

On cherche $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tq $g(R) = X$.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(g(R) \leq x) = P(R \leq g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$$

$$\boxed{g = F_X^{-1}}$$

Fonction réciproque :



$$f(x) = x^2$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow f^{-1}(y)^2 = y \Rightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y} \text{ si } y > 0.$$

Espérance, Variance ...

Espérance : $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, dP_X(x).$

$$E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} y\, dP_{f(X)}(y).$$

Variance : $Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2.$

$$P(X\in A) = P_X(A) = \int_A dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dP_X(x) = E(\chi_A(X))$$

X et Y indépendantes ssi $\forall\, f, g$

$$E(f(X)\, g(Y)) = E(f(X))\, E(g(Y)).$$

Covariance $\quad \mathrm{Cov}(X,Y) = E([X-E(X)][Y-E(Y)])$

$$= E(XY) - E(X)E(Y).$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Moments de X : $E(X^n)$.

Inégalités

$$|X| \geq a \chi_{|X| \geq a}$$

$$|X|^p \geq a^p \chi_{|X| \geq a}$$

$$E(|X|^p) \geq a^p P(|X| \geq a)$$

Inégalité de Markov : $\boxed{P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^p)}{a^p}}$.

$Y = X - E(X)$ et $p = 2$.

$$\boxed{P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}}.$$ Bienaymé - Tchebychev.

Inégalité de Jensen :

f fonction convexe $\quad Y = f(X)$.

$\forall a, \exists \lambda$ tq $\forall x \quad f(x) \geq f(a) + \lambda(x-a)$

$a = E(X)$: $\quad f(X) \geq f(E(X)) + \lambda(X - E(X))$.

$$\boxed{E(f(X)) \geq f(E(X))}$$

Rq : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Fonction caractéristique

$$\phi_X(k) = E\left(e^{ikX}\right). \qquad \exists\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

TF de la loi de X.

Moments : $\phi_X(0) = 1.$

$$\phi_X^{(n)}(k) = E\left((iX)^n e^{ikX}\right)$$

$$\phi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n)$$

Si X et Y indépendantes

$$\phi_{X+Y}(k) = E\left(e^{ik(X+Y)}\right) = E\left(e^{ikX} e^{ikY}\right)$$

$$= E\left(e^{ikX}\right) E\left(e^{ikY}\right) = \phi_X(k)\phi_Y(k)$$