ESPCI PARIS | PSL

# Maths – Contrôle continu – Test 2

## 2ème année (2022-2023)

**Nom :** ........................ **Prénom :** ........................

1 Considérons la fonctionnelle de $u$ suivante :

$$J[u] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}u'^2(t) + e^t u(t)\right) \mathrm{d}t \tag{1}$$

où $u \in C^2([0,1])$.

(a) Déterminer l'équation différentielle ordinaire sur $u$ associée à la minimisation de $J[u]$. Préciser les conditions de bord requises en $t = 0$ et $t = 1$ pour que $u$ minimise $J$.

(b) Déterminer la fonction $u \in C^2([0,1])$ qui minimise $J[u]$ et telle que $u(t = 0) = 0$ et $u(t = 1) = 1$.

(c) Déterminer la fonction $u \in C^2([0,1])$ qui minimise $J[u]$ et telle que $u(t = 0) = 0$.

**Corrigé :**

(a) Le problème consiste à minimiser

$$J[u] = \int_0^1 \mathcal{L}(u(t), u'(t), t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

où $\mathcal{L}(u, u', t) = \frac{1}{2}u'^2 + e^t u$.
Si $u$ rend $J$ extrémale, $\mathcal{L}$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\right) = 0 \tag{3}$$

soit

$$e^t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'(t)) = 0 \tag{4}$$

ou encore

$$u''(t) = e^t. \tag{5}$$

Dans la minimisation, pour annuler les termes de bord en $t = 0$ et $t = 1$, on peut se donner la valeur de $u$ (conditions de Dirichlet). Si la valeur de $u$ n'est pas donnée, on obtient la condition au bord $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}u'} = 0$. Ici, cette condition se réduit à $u'(t = 0) = 0$ et/ou $u'(t = 1) = 0$.

(b) En intégrant deux fois l'équation vérifiée par $u$, on obtient

$$u(t) = e^t + At + B \tag{6}$$

où $A$ et $B$ sont des constantes à déterminer avec les conditions aux limites. Dans le cas où $u(t=0)=0$ et $u(t=1)=1$, on obtient $A=2-e$ et $B=-1$, d'où

$$u(t) = e^t + (2-e)t - 1. \tag{7}$$

(c) Si on donne seulement la condition de bord $u(t=0)=0$, alors on doit aussi imposer $u'(t=1)=0$. On obtient alors $A=-e$ et $B=-1$, soit

$$u(t) = e^t - et - 1. \tag{8}$$