

Fundamentos de la Física

Mecánica, Fluidos y Elasticidad

Primera Edición

Adolfo Helmut Navarro Rudolf • Vicente C. Gámez

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA

MECÁNICA, FLUIDOS Y ELASTICIDAD

Adolfo Helmut
Navarro Rudolf

Vicente
Chavarría Gámez



México, 2025

DEDICATORIA

Para los estudiantes
de la ESFM

Adolfo Helmut Navarro Rudolf

Para mi madre

Vicente Chavarría Gámez

CONTENIDO

Prefacio v

Capítulo 1 Elasticidad 1

1.1	Conceptos Fundamentales	1
1.2	Comportamiento del Material	2
1.3	Esfuerzos longitudinales	3
1.4	Esfuerzo transversal	5
1.5	Esfuerzo de presión hidrostática	6
1.6	Relaciones esfuerzo-deformación	8
1.7	Relaciones entre coeficientes elásticos	9
1.8	Torsión	11
1.9	Flexión	14

Apéndice A Análisis Vectorial 19

A.1	Conceptos Fundamentales	19
A.2	Suma de vectores	20
A.3	Producto de un escalar por un vector	21
A.4	Producto interno	22
A.5	Producto cruz	23
A.6	Derivada de un vector	25

Apéndice B Geometría Analítica 27

B.1	Secciones cónicas	27
B.2	Otros sistemas coordenados	28
B.3	Transformación de coordenadas	28
B.4	Curvas en el plano	28

Apéndice C Cálculo en varias variables 33

C.1	Diferenciación de funciones escalares y vectoriales	34
C.2	Integración de campos	34
C.3	Teoremas fundamentales	34

PREFACIO

El presente libro es el resultado de un esfuerzo conjunto con el profesor Helmut, cuyo interés compartido en la enseñanza de la física y las matemáticas ha impulsado la elaboración de este material. Nuestro objetivo ha sido proporcionar un texto que no sólo presente los fundamentos de manera rigurosa, sino que también muestre de forma clara cómo los conceptos matemáticos se integran en la comprensión de los fenómenos físicos. Creemos firmemente que el cálculo, la geometría analítica y el álgebra lineal no son meras herramientas auxiliares, sino lenguajes esenciales para la formulación y resolución de problemas en física.

La obra se ha concebido pensando en estudiantes de ciencias e ingeniería que desean adentrarse en la mecánica y extender su formación hacia tres áreas fundamentales: la elasticidad, los fluidos y la termodinámica. Estos campos representan pilares del conocimiento físico, tanto en la teoría como en la práctica, y constituyen un puente entre la física clásica y diversas aplicaciones modernas.

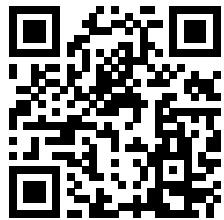
El estudio de la **elasticidad** nos permite comprender el comportamiento de los materiales frente a la acción de fuerzas externas. En este contexto, analizamos la relación entre esfuerzos y deformaciones, explorando modelos que van desde los sistemas discretos hasta los medios continuos. Este enfoque resulta indispensable para el diseño de estructuras, la ingeniería de materiales y la predicción del comportamiento de sólidos bajo condiciones extremas.

La **dinámica de fluidos**, por su parte, nos introduce en un mundo donde las nociones de presión, viscosidad y flujo adquieren un papel central. A través de las ecuaciones de conservación, como las de masa, cantidad de movimiento y energía, es posible describir desde el movimiento de los océanos hasta el transporte de fluidos en sistemas biológicos o industriales. La matemática aplicada a los fluidos revela la riqueza de fenómenos como la turbulencia, la dinámica de capas límite y la propagación de ondas.

En el ámbito de la **termodinámica**, abordamos los principios que gobiernan las transformaciones de la energía y el equilibrio entre sistemas. Lejos de ser un área puramente teórica, la termodinámica establece un marco conceptual indispensable para comprender motores, procesos químicos, ciclos de refrigeración y una amplia gama de aplicaciones tecnológicas. A lo largo del texto se subraya la conexión entre los postulados fundamentales y su traducción a modelos matemáticos capaces de predecir el comportamiento de sistemas reales.

El enfoque adoptado en este libro busca un equilibrio entre el formalismo matemático y la motivación física. Cada capítulo introduce las nociones abstractas con ejemplos concretos y problemas cuidadosamente seleccionados, de modo que el lector pueda apreciar la utilidad práctica de las herramientas presentadas. Asimismo, se han añadido apéndices con recordatorios de cálculo en varias variables, geometría analítica y ecuaciones diferenciales, con el propósito de hacer del libro un recurso autosuficiente y accesible, sin sacrificar el rigor necesario.

La estructura general del texto responde a una progresión natural: partimos de la mecánica, que constituye el fundamento para comprender las leyes de movimiento y el equilibrio, y avanzamos hacia la elasticidad, los fluidos y la termodinámica, mostrando en cada caso cómo los conceptos



matemáticos se convierten en una vía privilegiada para describir los fenómenos de la naturaleza. Con ello, aspiramos a ofrecer al lector una visión unificada, donde las matemáticas y la física se entrelazan en un diálogo constante.

Confiamos en que este material sirva como apoyo tanto para los cursos de licenciatura en física e ingeniería como para el estudio independiente. Nuestro deseo es que los estudiantes encuentren en estas páginas no sólo un manual de consulta, sino también una guía que despierte la curiosidad científica y motive a profundizar en la relación entre las ideas matemáticas y su aplicación en la física.

Vicente C. Gámez
México, 2025.

Capítulo

1

ELASTICIDAD

En las páginas que siguen, exploraremos un concepto central de la mecánica de sólidos: la **elasticidad**. Esta propiedad de los materiales es la base de numerosos campos de la ciencia y la ingeniería, permitiéndonos comprender y predecir cómo se comportan las estructuras bajo la acción de fuerzas externas. En este capítulo aprenderemos que es un cuerpo elástico, sus propiedades fundamentales y como se aplican los esfuerzos y deformaciones en situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Conceptos Fundamentales

Para adentrarnos en este fascinante campo, es esencial comenzar por definir los conceptos básicos que rigen el comportamiento de los materiales bajo carga.

La **elasticidad** es la parte de la estática¹ que estudia cómo se deforman los **cuerpos elásticos**² debido a la aplicación de fuerzas externas que se ejercen sobre ellos.

Definición 1.1.1: Entendemos por **deformación** el cambio en las dimensiones y/o la forma de un cuerpo causado por la aplicación de fuerzas externas ejercidas sobre él.

Un **cuerpo rígido ideal** sería aquel que no sufre deformación alguna al ejercer fuerzas sobre él.

Consideremos un cuerpo de material homogéneo³, sobre el cual se han aplicado fuerzas externas que lo deformaron.

Si al suprimir las fuerzas deformadoras sobre él, éste recupera del todo su forma y dimensiones originales decimos que el material es **perfectamente elástico**. Si las recupera en un alto porcentaje diremos que el material es **elástico**. Si no las recupera en absoluto diremos que el material es **perfectamente plástico** y si las recupera en un pequeño porcentaje diremos que el material es **plástico** y que sufrió una **deformación plástica**.

En el mundo real todos los materiales presentan comportamientos elásticos y también plásticos dependiendo de la magnitud de las fuerzas deformadoras. Si la magnitud de las fuerzas deformadoras es muy pequeña es casi seguro que el comportamiento de la mayoría de los materiales es

Contenido	
1.1	Conceptos Fundamentales 1
1.2	Comportamiento del Material 2
1.3	Esfuerzos longitudinales 3
1.4	Esfuerzo transversal 5
1.5	Esfuerzo de presión hidrostática 6
1.6	Relaciones esfuerzo-deformación 8
1.7	Relaciones entre coeficientes elásticos 9
1.8	Torsión 11
1.9	Flexión 14

¹ La estática es la rama de la mecánica que estudia los cuerpos en equilibrio.

² La definición se muestra en la página.

³ Un material homogéneo es aquel que tiene la misma densidad en todas partes.

elástico; pero si las magnitudes de esas fuerzas son grandes entonces tendremos deformaciones plásticas hasta llegar a la ruptura del material. Los materiales elásticos almacenan energía mecánica al ser deformados, mientras que los materiales plásticos convierten la energía mecánica de la deformación en energía interna al incrementar su temperatura. Una aplicación muy importante del estudio de las propiedades mecánicas de los materiales, como son las propiedades elásticas, es la deformación progresiva de los materiales que rodean el habitáculo de los pasajeros en un automóvil, con la finalidad de proteger la integridad física de los mismos.

Para explicar el fenómeno de la deformación de los cuerpos elásticos usamos una cantidad física escalar denominada **esfuerzo**.

Definición 1.1.2: El esfuerzo es el cociente de la magnitud de la fuerza deformadora entre el área de alguna sección del cuerpo deformado. Es decir,

$$\text{Esfuerzo} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Área}}.$$

Además, la unidad física del esfuerzo en el Sistema Internacional de Unidades es el **Pascal**:

$$1 \text{ Pascal} = \frac{1 \text{ Newton}}{m^2}$$

1.2 Comportamiento del Material

La mayoría de los elementos que integran una máquina como son los engranes, los ejes, las poleas, pernos, tornillos, remaches, baleros y otras piezas, son sometidos a esfuerzos longitudinales (**tensión o compresión**) o **transversales** (esfuerzo cortante) o en algunos casos menos frecuentes a **esfuerzos de presión hidrostática**. La mayoría de estos elementos mecánicos están hechos de metales como el acero, el aluminio o aleaciones. Cuando los esfuerzos a los que se someten los metales no son muy grandes, éstos se comportan de manera elástica. En la Figura 1.1 se muestra la gráfica del esfuerzo de tensión E (expresado en Mega Pascales), al que se somete un alambre de acero, contra la deformación unitaria Du (adimensional) que éste experimenta. El alambre de un metro de longitud y de un milímetro de diámetro, en posición vertical, está sujeto firmemente en su extremo superior a un soporte rígido. Se le van colgando pesas de diferente masa y a partir de los 3.45 kg se empieza a deformar de manera plástica. Esto significa que el comportamiento lineal (**comportamiento elástico**) entre esfuerzo y deformación unitaria dejó de cumplirse. El alambre ya no obedece la ley de Hooke porque se rebasó el **límite elástico** y a partir de ese momento comienza la deformación acelerada hasta llegar a la **ruptura** del alambre.

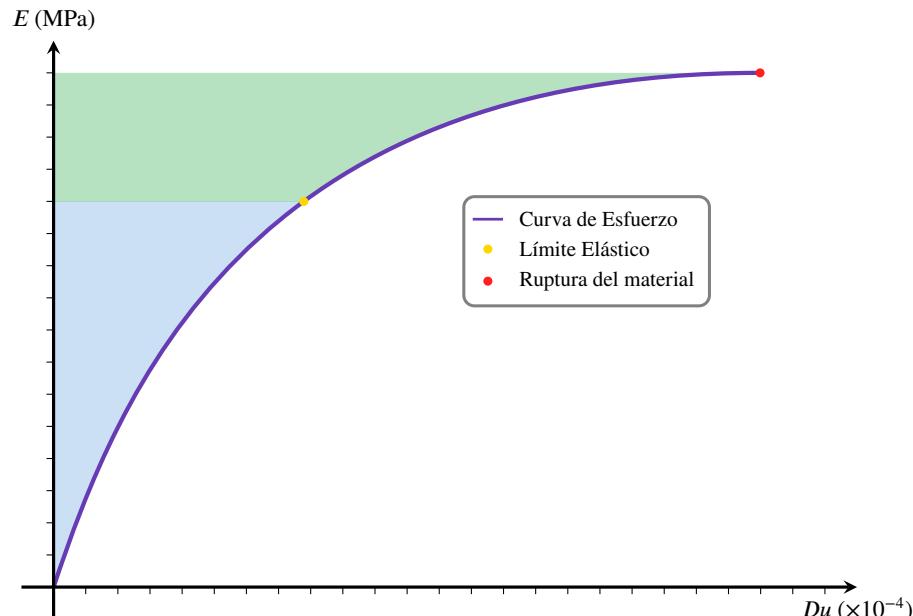


Figura 1.1: Gráfica del Esfuerzo E contra la deformación unitaria Du .

Este comportamiento es típico de los metales, piense por ejemplo en los cables de acero que mueven la cabina de un ascensor, por seguridad los esfuerzos de tensión sobre ellos no pueden rebasar el límite elástico. A la gráfica anterior también se la conoce como **diagrama esfuerzo-deformación**.

Si aumentamos el esfuerzo más allá del límite elástico, el material entra en la etapa de deformación plástica y ya no recuperará su forma y dimensiones originales. Si estando en esta etapa de deformación dejamos que de manera gradual el material se relaje disminuyendo poco a poco el esfuerzo, veremos que la trayectoria que se sigue en el diagrama esfuerzo-deformación (**curva de relajación**) ya no será igual a la inicial (**curva de carga**), y finalmente al suprimir el esfuerzo el material quedará deformado (ver Figura 1.2).

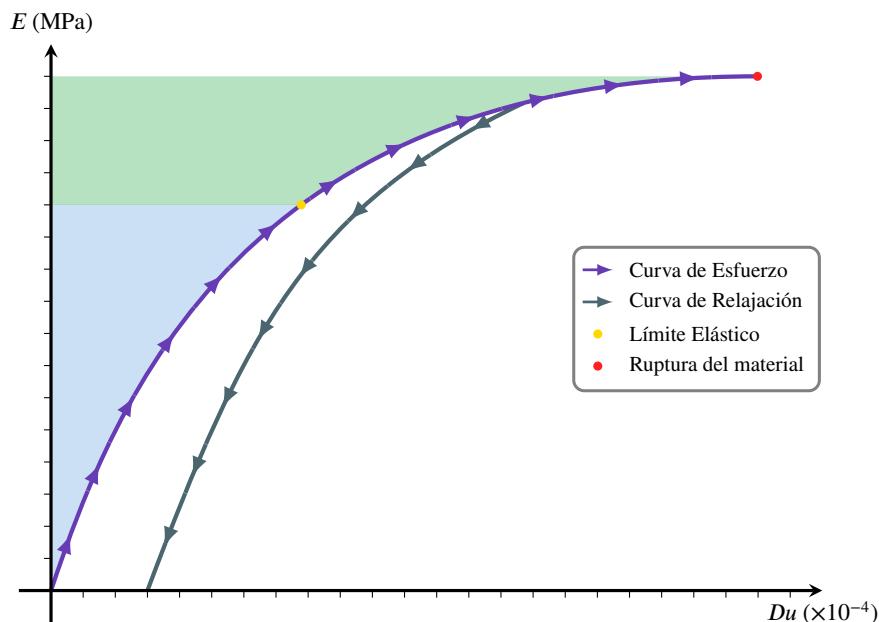


Figura 1.2: Ilustración del comportamiento plástico de un material. Al superar el límite elástico, si el esfuerzo se retira, el material no regresa por la curva de carga original, sino que sigue la curva de relajación, lo que ocasiona una deformación permanente.

Si la etapa de comportamiento plástico, antes de llegar a la ruptura, es duradera, diremos que el material es **dúctil**. En caso contrario, si la ruptura se da poco después de rebasar el límite elástico diremos que el material es **frágil**. Existen materiales anómalos como el caucho vulcanizado en los que se pierde el comportamiento lineal llegando a superar sus dimensiones originales hasta por siete veces, sin embargo, la curva de relajación termina en el origen y por lo tanto ¡es un material elástico! a este comportamiento se le llama **histéresis elástica**.

1.3 Esfuerzos longitudinales

Ahora que hemos explorado el comportamiento general de los materiales, podemos clasificar los esfuerzos según cómo se aplican las fuerzas. Los más comunes son los **esfuerzos longitudinales** y los **transversales**, aunque también existe el **esfuerzo de presión hidrostática** cuando un cuerpo es sometido a la presión de un fluido.

1.3.1 Esfuerzo de tensión

Consideremos una barra recta de sección transversal rectangular uniforme⁴, de longitud L_0 , colocada sobre una mesa horizontal. A continuación, aplicamos un par de fuerzas externas $\vec{F}, -\vec{F}$ de igual magnitud, pero de sentido opuesto, en los extremos de la barra de manera que la estiran véase la Figura 1.3

•••

⁴ La sección transversal es la superficie que resulta de la intersección de un plano imaginario, perpendicular a la barra, con la barra misma. Cuando decimos que es uniforme significa que esta superficie es igual en toda la longitud de la barra.

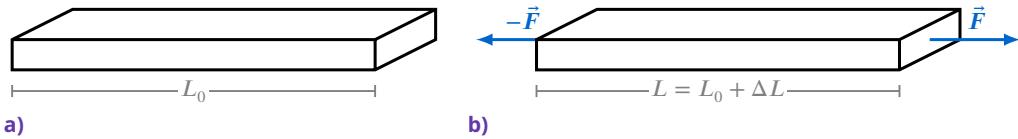


Figura 1.3

De este modo, la barra de sección rectangular que reposa sobre la mesa se mantiene en equilibrio pues la suma de las fuerzas externas es igual a cero. Como resultado de la aplicación del par de fuerzas deformadoras en los extremos de la barra, tenemos un incremento ΔL en su longitud original L_0 .

Definición 1.3.1: Llamamos **deformación** al incremento de la longitud, expresado por

$$\Delta L = L - L_0.$$

Definición 1.3.2: Denominamos **deformación unitaria** o **deformación relativa** al cociente

$$D_U = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Para este caso definimos el esfuerzo de tensión como

$$E_T = \frac{F}{A}$$

donde F es la magnitud común de las fuerzas que producen la tensión de la barra y A es el área de la sección transversal uniforme de la barra.

Experimentalmente se verifica que existe una correlación lineal entre el esfuerzo de tensión y la deformación unitaria. Es decir

$$E_T = Y \frac{\Delta L}{L_0}$$

donde la constante de proporcionalidad Y conocida como **Módulo de Young** es una característica del material, la cual también llamaremos **constante elástica**.

Si bien hemos considerado una barra de sección transversal rectangular, el mismo resultado se obtiene para cualquier otro tipo de sección transversal: circular, cuadrada, hexagonal, etc.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores del Módulo de Young en Pascales.

Material	Módulo de Young (1×10^{10} Pa)
Aluminio	7.0
Latón	9.0
Cobre	11.0
Hierro	21.0
Plomo	1.6
Níquel	21.0
Acero	20.0

Tabla 1.1: Módulo de Young de algunos materiales.

El **Módulo de Young** no solo cuantifica la resistencia de un material a ser estirado, sino también su resistencia a ser acortado. De manera análoga al esfuerzo de tensión, podemos analizar el caso opuesto, donde las fuerzas externas actúan para comprimir el objeto en lugar de alargarlo.

1.3.2 Esfuerzo de compresión

Considerando la misma barra del caso anterior con la diferencia de que ahora las fuerzas externas tienen sentidos contrarios, de modo que comprimen la barra (ver Figura 1.4).

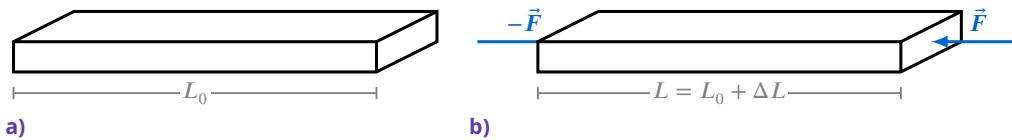


Figura 1.4

En este caso la deformación ΔL es negativa pues $L < L_0$ y el **esfuerzo de compresión**

$$E_C = \frac{F}{A}$$

que es una cantidad positiva, es directamente proporcional al valor absoluto de la deformación unitaria. Es decir

$$E_C = -Y \frac{\Delta L}{L_0}$$

donde la constante de proporcionalidad sigue siendo el Módulo de Young. Para la mayoría de los materiales el Módulo de Young del esfuerzo de tensión es igual al del esfuerzo de compresión. En el caso de los huesos esto no se cumple. A los esfuerzos de tensión y compresión se les conoce como también como esfuerzos longitudinales, ya que el esfuerzo (fuerza/área) se mantiene a lo largo de cualquier sección transversal de la barra.

Mientras que los esfuerzos longitudinales estiran o comprimen un material, existe otro tipo de esfuerzo que no busca cambiar la longitud del objeto, sino deformar su forma deslizando unas capas del material sobre otras. Este fenómeno, conocido como **esfuerzo transversal**, el cual es fundamental para entender la torsión y el cizallamiento en estructuras.

1.4 Esfuerzo transversal

Por simplicidad, consideremos ahora un bloque rectangular al cual se le han soldado dos placas: Una en la cara superior y otra en la inferior como se muestra en la figura (a). El bloque descansa firmemente sobre una mesa lisa y horizontal. A continuación, aplicamos sobre las placas un par de fuerzas externas horizontales F y $-F$ de igual magnitud, pero opuestas en dirección, de manera que se alejan entre sí, ver figura (b). Como consecuencia de la aplicación de estas fuerzas, el bloque sufre una inclinación (deformación) que puede medirse por el ángulo ϕ , en radianes, respecto a la vertical, o bien por la tangente del ángulo ya que el ángulo es muy pequeño si estamos dentro del comportamiento elástico del material. A diferencia de los esfuerzos longitudinales de tensión y compresión, en donde las fuerzas externas producen pares de fuerzas F y $-F$ **perpendiculares** a cualquier sección transversal A en todo lo largo de la barra; en el **esfuerzo cortante** se producen pares de fuerzas F y $-F$ **paralelas** a cualquier sección transversal A en todo lo alto del bloque.

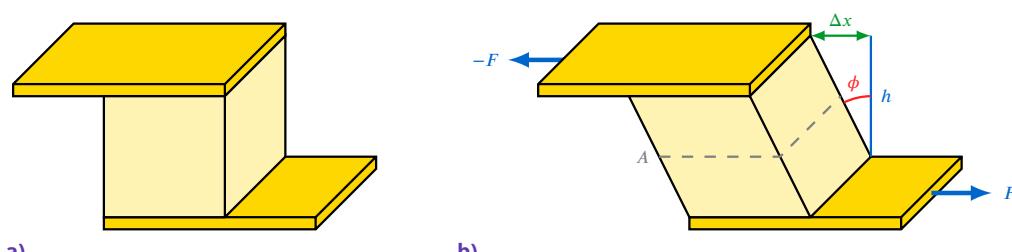


Figura 1.5: Caption

Definición 1.4.1: Definimos el **esfuerzo cortante** o **esfuerzo de cizalla** como

$$E_Z = \frac{F}{A}.$$

Además, la deformación unitaria, en este caso, una cantidad adimensional, es la tangente del ángulo de inclinación

$$D_U = \frac{\Delta x}{h} = \tan \phi \cong \phi$$

La relación de proporcionalidad directa entre el esfuerzo cortante y la deformación unitaria causada, la cual se verifica experimentalmente, es

$$\frac{F}{A} = \mu \phi$$

donde la constante de proporcionalidad μ llamada **módulo de rigidez** es una característica del material.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores del módulo de rigidez en Pascales.

Material	Módulo de rigidez μ (1×10^{10} Pa)
Aluminio	2.5
Latón	3.5
Cobre	4.4
Hierro	7.7
Plomo	0.6
Níquel	7.8
Acero	7.5

Tabla 1.2: Módulo de Young de algunos materiales.

Ya hemos analizado cómo responden los sólidos a fuerzas aplicadas en una sola dirección, ya sean perpendiculares (tensión/compresión) o paralelas (cortante) a una superficie. Ahora, consideremos un caso más general: ¿qué sucede cuando un cuerpo es sometido a fuerzas uniformes en *todas* sus caras simultáneamente, como ocurre al sumergirlo en un fluido a presión? Este escenario nos introduce al concepto de esfuerzo volumétrico.

1.5 Esfuerzo de presión hidrostática

El **esfuerzo de presión hidrostática** es igual al incremento de la presión que ejerce un líquido sobre la superficie de un cuerpo sumergido en él. En la figura se muestra un recipiente cilíndrico provisto de un émbolo que cubre la superficie del líquido dentro de él, en el cual se encuentra sumergido un objeto, en nuestro caso un bloque. Dado que los líquidos son prácticamente incompresibles al aplicar una fuerza F sobre el émbolo de área A se produce un incremento Δp en la presión de cada punto del interior del líquido (principio de Pascal).

$$\Delta p = \frac{F}{A}.$$

Este esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria que experimenta el volumen inicial V_0 del cuerpo

$$D_U = \frac{\Delta V}{V_0}$$

Dado que un incremento positivo de la presión hidrostática produce una reducción del volumen del cuerpo sumergido, la deformación unitaria es negativa, por lo tanto, la relación de proporcionalidad directa entre el esfuerzo de presión hidrostática y la deformación unitaria del volumen se escribe

como

$$\Delta p = \frac{F}{A} = -B \frac{F}{A}$$

donde B es el **módulo de compresibilidad volumétrico** que es una característica del material sumergido.

El inverso del módulo de compresibilidad volumétrico se llama **coeficiente de compresibilidad**

$$k = \frac{1}{B} = \frac{\Delta V}{\Delta p V_0}.$$

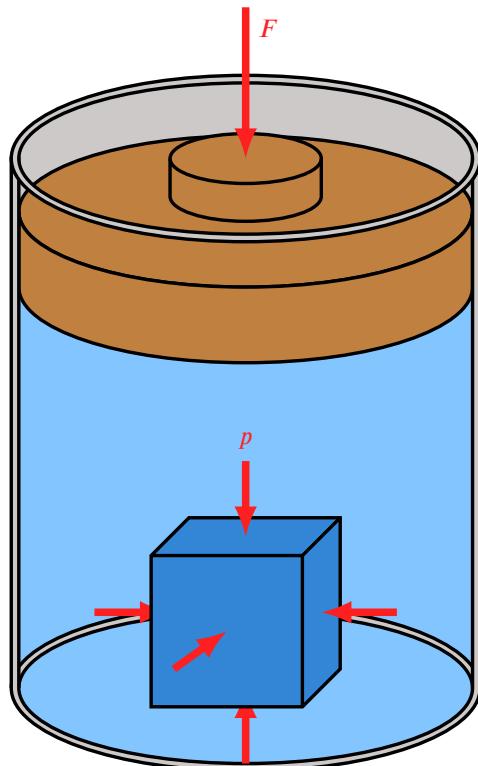


Figura 1.6: Caption

En la siguiente tabla se muestran algunos valores del módulo de compresibilidad volumétrico en Pascales.

Material	Módulo de compresibilidad volumétrico B (1×10^{10} Pa)
Aluminio	7.5
Latón	6.0
Cobre	14.0
Hierro	16.0
Plomo	4.1
Níquel	17.0
Acero	16.0

Tabla 1.3: Módulo de Young de algunos materiales.

Hemos visto que, dentro del límite elástico, todos los tipos de esfuerzo (longitudinal, cortante y volumétrico) guardan una relación de proporcionalidad directa con la deformación que producen. Esta observación fundamental se puede generalizar en una de las leyes más importantes de la mecánica de sólidos.

1.6 Relaciones esfuerzo-deformación

El principio fundamental que gobierna la relación lineal entre el esfuerzo y la deformación en la zona elástica es conocido como la **Ley de Hooke**. Para presentar esta ley, comenzaremos con su aplicación más clásica: la deformación de un resorte.

1.6.1 Ley de Hooke

La **ley de Hooke**, como comúnmente se le conoce en los libros de texto de física, hace referencia a la relación de proporcionalidad directa entre la **fuerza externa** que deforma a un resorte, ya sea estirándolo o comprimiéndolo, y la deformación x que sufre el resorte

$$F_{\text{ext}} = kx$$

o bien, a la **fuerza de restitución** o **resistencia** (la fuerza de reacción a la fuerza externa) que opone el resorte a la deformación

$$F_{\text{res}} = -kx$$

donde la deformación se mide desde la posición del extremo libre relajado (cuando no hay fuerza) del resorte; el otro extremo del resorte está fijo a la pared (ver figura). A la constante de proporcionalidad k se le llama **constante elástica del resorte**.

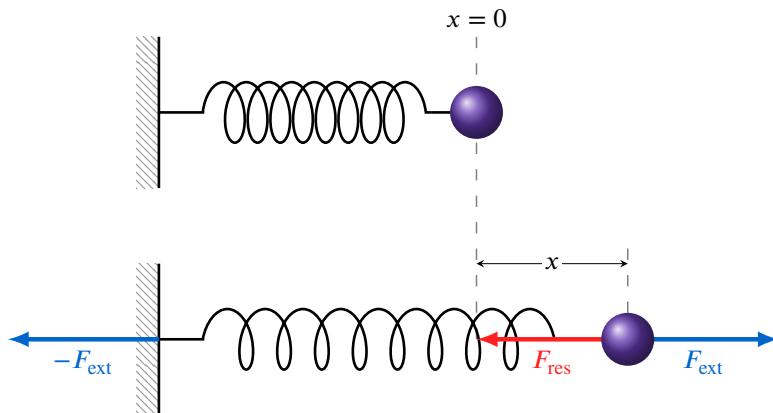


Figura 1.7: Representación de un resorte en su estado de equilibrio ($x = 0$, arriba) y al ser estirado una distancia x por una fuerza externa F_{ext} (abajo). La fuerza de restitución del resorte, F_{res} , se opone a la deformación.

A la relación de proporcionalidad directa entre el esfuerzo de tensión o compresión y la deformación unitaria

$$E_T = \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{o} \quad E_C = \frac{F}{A} = -Y \frac{\Delta L}{L_0}$$

también se le conoce como ley de Hooke. Si despejemos a la fuerza F deformadora en ambas expresiones tenemos

$$F = \left(\frac{YA}{L_0} \right) \Delta L \quad \text{o} \quad \left(\frac{YA}{L_0} \right) (-\Delta L)$$

Que son expresiones similares a la ley de Hooke donde F es la fuerza externa, ΔL es la deformación y

$$k = \frac{YA}{L_0}$$

es la “constante elástica” tipo resorte. Aquí estamos suponiendo que el área de la sección transversal no cambia al ser deformada la barra. Sabemos que un resorte estirado o comprimido almacena una energía mecánica potencial

$$U = \frac{1}{2} kx^2.$$

Por lo tanto, una barra sometida a esfuerzo de tensión o compresión también almacenará una

energía mecánica potencial

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{YA}{L_0} \right) (\Delta L)^2$$

O bien en función de la fuerza deformadora

$$U = \frac{1}{2} F(\Delta L)$$

En otras palabras, ésta es la cantidad de energía que se requiere para deformar una barra al aplicar un esfuerzo de tipo longitudinal (tensión o compresión).

La Ley de Hooke, aplicada a sólidos, describe perfectamente la deformación en la misma dirección de la fuerza aplicada (el estiramiento ΔL). Sin embargo, la deformación de un material rara vez ocurre en una sola dimensión. Intuitivamente, si estiramos una liga, notamos que no solo se alarga, sino que también se vuelve más delgada. El **Coeficiente de Poisson** es la medida que cuantifica este efecto secundario en las dimensiones transversales.

1.6.2 Coeficiente de Poisson

Cuando una barra rectangular se somete a un esfuerzo de tensión, causado por un par de fuerzas externas, la longitud de la barra aumenta una cantidad ΔL ; pero sus dimensiones transversales disminuyen en las cantidades Δh y $\Delta \omega$ (ver figura).

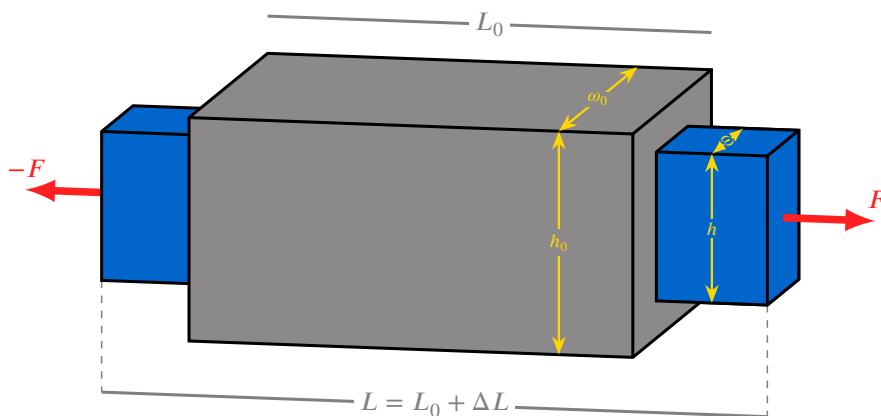


Figura 1.8: Caption

Si el esfuerzo longitudinal es de compresión entonces $\Delta L < 0$ y Δh y $\Delta \omega$ son positivos. Experimentalmente se encuentra que existe una relación de proporcionalidad directa entre la deformación unitaria transversal negativa y la deformación unitaria longitudinal; esto es

$$-\frac{\Delta h}{h_0} = \sigma \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{o} \quad -\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \sigma \frac{\Delta L}{L_0}$$

donde la constante de proporcionalidad σ se conoce como **coeficiente de Poisson**. Para la mayoría de los metales $\sigma \approx 0.3$.

Hasta ahora, hemos presentado cuatro constantes elásticas que caracterizan la respuesta de un material: el Módulo de Young (Y), el Módulo de Rigidez (μ), el Módulo de Compresibilidad (B) y el Coeficiente de Poisson (σ). Aunque parecen independientes, estas propiedades están intrínsecamente relacionadas, ya que describen diferentes facetas del mismo comportamiento elástico subyacente de un material. En esta sección, demostraremos cómo se pueden derivar relaciones matemáticas que las vinculan.

1.7 Relaciones entre coeficientes elásticos

Consideremos un bloque homogéneo sometido a un esfuerzo de presión hidrostática. Se trata de un paralelepípedo recto rectangular (ortoedro), cuyas dimensiones originales son a_0, b_0, c_0 . Una vez sumergido el bloque dentro de un líquido, un aceite, por ejemplo, producimos un incremento

considerable en la presión del líquido ejerciendo una fuerza sobre el émbolo que sella la superficie superior del líquido en el recipiente cilíndrico. El incremento de presión Δp sobre las caras del bloque puede verse como la aplicación de tres esfuerzos de compresión dirigidos a lo largo de los ejes x , y y z , véase la siguiente figura.

Figura 1.9: Caption

Sean $A - x = ac$, $A_y = bc$ t $A_z = ab$ las áreas de las caras del bloque perpendiculares a los ejes cartesianos x , y y z respectivamente. Entonces

$$\Delta p = \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z}$$

A continuación, haremos un análisis para ver cual es el cambio relativo de volumen ΔV_y del bloque debido al esfuerzo de compresión a lo largo del eje y .

De acuerdo con la relación esfuerzo deformación unitaria, el cambio relativo que sufre la arista de longitud original a_0 , debido al esfuerzo de compresión en la dirección del eje y es

$$\frac{\Delta a}{a_0} = -\frac{F_y}{YA_y}.$$

Considerando el coeficiente de Poisson, podemos escribir las deformaciones unitarias consecuentes en las aristas b_0 y c_0 como

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\sigma \frac{\Delta a}{a_0} = \sigma \frac{F_y}{YA_y}$$

y

$$\frac{\Delta c}{c_0} = -\sigma \frac{\Delta a}{a_0} = \sigma \frac{F_y}{YA_y}$$

Como era de esperarse, las cantidades Δb y Δc son positivas, aumentaron las dimensiones transversales al comprimir el bloque a lo largo del eje y .

El volumen final del bloque debido a este esfuerzo de compresión en la dirección del eje y es

$$\begin{aligned} V_y &= abc = (a_0 + \Delta a)(b_0 + \Delta b)(c_0 + \Delta c) \\ &= a_0 b_0 c_0 + a_0 b_0 \Delta c + a_0 c_0 \Delta b + a_0 \Delta b \Delta c + b_0 c_0 \Delta a + b_0 \Delta a \Delta c + c_0 \Delta a \Delta b + \Delta a \Delta b \Delta c \end{aligned}$$

Considerando que Δa , Δb y Δc son cantidades muy pequeñas, mucho menores a la unidad, entonces el producto de dos o tres de ellas es una cantidad despreciable. Despreciando esos términos nos queda que

$$V_y = a_0 b_0 c_0 + a_0 b_0 \Delta c + a_0 c_0 \Delta b + b_0 c_0 \Delta a.$$

De este modo el cambio en el volumen es

$$\Delta V_y = V_y - V_0 = a_0 b_0 \Delta c + a_0 c_0 \Delta b + b_0 c_0 \Delta a.$$

Por tanto, la deformación unitaria es

$$\frac{\Delta V_y}{V_0} = \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0} + \frac{\Delta c}{c_0}$$

o bien

$$\frac{\Delta V_y}{V_0} = \frac{\Delta a}{a_0} - 2\sigma \frac{\Delta a}{a_0} = (2\sigma - 1) \frac{F_y}{YA_y}$$

o bien

$$\frac{\Delta V_y}{V_0} = (2\sigma - 1) \frac{\Delta p}{Y}.$$

De manera análoga, haciendo el desarrollo para los esfuerzos de compresión a lo largo de los ejes x y z , obtendríamos

$$\frac{\Delta V_x}{V_0} = \frac{\Delta V_z}{V_0} = (2\sigma - 1) \frac{\Delta p}{Y}.$$

El cambio total del volumen debido a los tres esfuerzos de compresión es

$$\Delta V = \Delta V_x + \Delta V_y + \Delta V_z$$

Entonces

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3(2\sigma - 1) \frac{\Delta p}{Y}.$$

Pero por otra parte sabemos que

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

Por lo tanto,

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}.$$

De esta expresión podemos ver que el valor del coeficiente de Poisson σ siempre será estrictamente menor a 1/2, pues de lo contrario B sería negativo o infinito. Ya habíamos dicho que para los metales $\sigma \approx 0.3$.

Habiendo establecido las relaciones fundamentales entre los distintos coeficientes elásticos, ahora aplicaremos estos principios para analizar un tipo de deformación compuesta de gran importancia en ingeniería. Dejaremos atrás los esfuerzos uniformes para estudiar el fenómeno de la **torsión**, que describe el torcimiento de un objeto, como un eje o una barra, debido a la aplicación de un par de torcas. Este análisis es una aplicación directa y crucial del **esfuerzo cortante** que vimos previamente.

1.8 Torsión

Se le llama **torsión** a la deformación que experimenta una barra o un eje cuando en sus extremos se aplica un par de torcas opuestas, de tal manera que un extremo de la barra sufre un desplazamiento angular respecto al extremo opuesto. Las flechas o arboles de propulsión que transmiten la potencia y la torca desde el motor de un camión hasta el eje de las ruedas traseras, son barras de acero sometidas a torsión; en un extremo de la flecha se aplica la torca del motor y por el otro la torca de resistencia al movimiento de las ruedas traseras que está en función de la carga que transporta el vehículo.

Figura 1.10: Caption

En la figura se muestra una barra cilíndrica homogénea, de longitud L y radio R , sobre la cual se aplican un par de torcas $\vec{\tau}$ y $-\vec{\tau}$ debidas a las fuerzas \vec{F} y $-\vec{F}$ respectivamente aplicadas en cada extremo de la barra.

Como resultado de la aplicación del par de torcas, la línea AB trazada a lo largo de la barra se inclina pues el extremo inferior se desplaza un ángulo $\theta/2$ en el sentido de las manecillas del reloj, viendo la barra desde arriba; mientras que el extremo superior de la barra sufre el mismo desplazamiento angular, pero en sentido opuesto al de las manecillas. De tal manera que el desplazamiento angular neto del extremo superior de la barra, respecto al extremo inferior, es igual a θ . A este ángulo se le llama **ángulo de torsión**.

Ahora consideraremos que la barra cilíndrica está formada por capas tubulares concéntricas de radio r , con $0 \leq r \leq R$, y de espesor diferencial dr , véase la figura (a).

Figura 1.11: Caption

En la figura (a) se muestra la barra torcida, se han eliminado, para una mejor apreciación, las torcas y fuerzas de la figura. Aquí se muestra una capa tubular de radio r y espesor dr , la cual al ser extraída hacia arriba y después recortada longitudinalmente en la dirección de la línea AB y finalmente aplana, nos queda la lámina delgada de espesor diferencial mostrada en la figura (b).

Su base tiene una longitud igual a $2\pi r$, y su altura sigue siendo L ; el área de la base diferencial es

$$dA = 2\pi r dr$$

Antes de ser aplicadas las torcas en los extremos de la barra, esta lámina diferencial tenía la forma de un paralelepípedo recto rectangular de la misma base; después de la torsión se inclina respecto de la vertical formando el ángulo ϕ , pues este ángulo es la deformación unitaria de la lámina causada por un esfuerzo cortante. ¿Cómo es esto posible?

Las fuerzas \vec{F} y $-\vec{F}$ aplicadas en los extremos de la barra en realidad se distribuyen uniformemente, debido a la rigidez de la barra, sobre las caras circulares, de manera circular, paralelas a la sección transversal. Imagínese que la barra fuera ligeramente comprimida por dos discos rígidos colocados en sus extremos y que existe una fuerza de fricción estática muy grande entre las superficies en contacto, y que hacemos girar los discos en sentidos opuestos. El resultado sería la torsión de la barra circular. Pues bien, en este caso la fuerza está distribuida sobre las caras circulares de la barra. En realidad, no necesitamos esos discos, para la torsión bastaría sujetar los extremos de la barra con unas mordazas, unas pinzas tal vez y los “discos” son parte de la misma barra. Por lo tanto, la fuerza se distribuye de manera circular o rotacional sobre cada micra cuadrada de las caras circulares en los extremos de la barra. En la figura (b) el par de fuerzas diferenciales dF y $-dF$, es la parte proporcional de las fuerzas \vec{F} y $-\vec{F}$ que corresponde al área diferencial dA .

Por lo tanto, la expresión matemática para el esfuerzo cortante sobre esta lámina diferencial es

$$\frac{dF}{dA} = \mu\phi = \mu \tan \phi = \mu \frac{r\theta}{L}.$$

De aquí la magnitud de la fuerza diferencial sobre las caras superior o inferior de la lámina diferencial es

$$dF = \mu\phi dA = \mu \frac{r\theta}{L} (2\pi r) dr = \frac{2\pi\mu\theta}{L} r^2 dr,$$

y la torca correspondiente a esta fuerza diferencial, respecto al eje de rotación de la barra, es

$$d\tau = r dF = \frac{2\pi\mu\theta}{L} r^3 dr$$

Esta es la torca diferencial que produjo la torsión de la capa tubular diferencial. Si ahora integramos la expresión anterior obtenemos

$$\tau = \int d\tau = \int_0^R \frac{2\pi\mu\theta}{L} r^3 dr = \left(\frac{\pi\mu R^4}{2L} \right) \theta,$$

o bien

$$\tau = k\theta$$

donde $k = \frac{\pi\mu R^4}{2L}$ es la constante de torsión de la barra.

Si la barra fuera un tubo de longitud L , radio interior R_1 y radio exterior R_2 , entonces integramos de R_1 a R_2 y obtenemos

$$\tau = \frac{\pi\mu}{2L} (R_2^4 - R_1^4) \theta$$

En este caso la constante de torsión es

$$k = \frac{\pi\mu}{2L} (R_2^4 - R_1^4).$$

Como podemos observar, el ángulo de torsión θ es proporcional a la torca externa aplicada a la barra; es decir, esto nos lleva a otra expresión similar a la de la ley de Hooke pero ahora para la torsión; la barra torcida opone una torca de restitución dada por

$$\tau_{\text{res}} = -k\theta.$$

La relación $\tau_{\text{res}} = -k\theta$ es, en efecto, una versión rotacional de la Ley de Hooke. Así como la fuerza de restitución de un resorte da lugar al movimiento armónico simple, la torca de restitución en una barra torcida es la base de sistemas oscilatorios rotacionales. Un ejemplo clásico y elegante de este principio es el péndulo de torsión.

1.8.1 Péndulo de torsión

Un péndulo de torsión, ver figura, es un sistema oscilatorio, en el cual el elemento elástico es una barra o varilla cilíndrica delgada, de radio r , en posición vertical, fija firmemente en su extremo superior a un soporte rígido; mientras que el extremo inferior de la varilla está acoplado a un disco concéntrico, de radio R mucho mayor a r .

Se aplica una torca externa

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{R} \times \vec{F}_{\text{ext}}$$

respecto al centro del disco, mediante la aplicación de una fuerza externa \vec{F}_{ext} tangente al disco, lo cual produce un desplazamiento angular del disco y del extremo inferior de la varilla igual a θ . Se produce entonces la torsión de la varilla, θ es el ángulo de torsión, y se mantiene el equilibrio del sistema varilla-disco, debido a la torca de reacción o restitución

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = -\vec{\tau}_{\text{ext}}$$

que ejerce la varilla torcida sobre el disco. Al suprimir la torca externa, la torca de restitución de la varilla produce la aceleración angular del disco y la ecuación de movimiento de rotación del disco es

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = -k\theta = I\alpha$$

donde

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

es el momento de inercia del disco respecto el eje de rotación vertical, que pasa por su centro de masa, y

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

es la relación angular del disco. Entonces

$$-k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

o bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

La cual es la ecuación del oscilador armónico simple, donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi\mu r^4}{2L}}{\frac{1}{2}MR^2}} = \frac{r^2}{R}\sqrt{\frac{\pi\mu}{ML}}$$

es la frecuencia del oscilador, para este caso el disco, y su periodo de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{R}{r^2} \sqrt{\frac{\pi ML}{\mu}}.$$

Ejemplo 1.8.1: Se quiere construir un reloj mecánico con un péndulo de torsión, usando una varilla de acero de 3.0 mm de radio y un disco de 25 cm de radio y 8.6 kg de masa. ¿Cuál debe ser la longitud que debe tener la varilla, para producir un periodo de oscilación de un segundo?

Solución. Sea

$$T = \frac{2R}{r^2} \sqrt{\frac{\pi ML}{\mu}}.$$

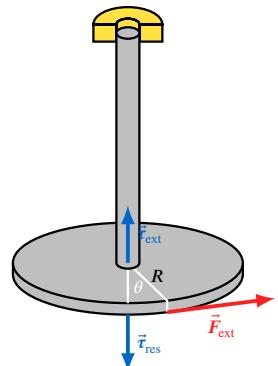


Figura 1.12: Esquema de un péndulo de torsión con las torcas externa y de restitución indicadas.

Entonces

$$L = \frac{\mu T^2 r^4}{4\pi R^2 M}.$$

Sabemos que para el acero, el módulo de rigidez es

$$\mu = 7.5 \times 10^{10} \text{ Pa.}$$

Entonces

$$L = \frac{(7.5 \times 10^{10} \text{ Pa})(1 \text{ s}^2)(3 \times 10^{-3} \text{ m})^4}{4\pi(0.25 \text{ m})^2(8.6 \text{ kg})} = 0.9 \text{ m.}$$

Por tanto, la varilla debe de medir 90 cm. □

El movimiento oscilatorio del péndulo de torsión es un claro ejemplo de la conservación de la energía, donde la energía cinética de rotación del disco se transforma continuamente en energía potencial elástica almacenada en la varilla, y viceversa. A continuación, cuantificaremos esta energía almacenada.

1.8.2 Energía almacenada en una barra, eje o varilla torcida

Las barras, ejes o varillas sometidas a torcas de torsión, también almacenan energía como lo hace un resorte comprimido. La energía necesaria para torcer una barra es

$$U = \frac{1}{2}k\theta^2$$

donde θ es el ángulo de torsión en radianes. Esta sería también la energía potencial almacenada en la barra si ésta fuera perfectamente elástica.

1.9 Flexión

Tras haber analizado la torsión como una aplicación del esfuerzo cortante, abordaremos ahora otro tipo de deformación fundamental en ingeniería: la **flexión**. A diferencia de la torsión, la flexión es un fenómeno más complejo que involucra simultáneamente **esfuerzos de tensión y de compresión** dentro del mismo material, como ocurre cuando una viga se dobla bajo su propio peso o por la acción de una carga.

1.9.1 Flexión de una barra o una viga

Consideraremos ahora el problema de calcular la deformación (**flexión**) de una barra o una viga. Empezaremos con una barra homogénea de longitud L y de sección circular, de radio r . En la figura siguiente se muestra esa barra, originalmente recta, la cual se tomó con las manos por los extremos y aplicando fuerzas se logró flexionar; supondremos que adoptó la forma de un arco circular.

Figura 1.13: Caption

El análisis que haremos a continuación será válido cuando el radio de curvatura R de la barra flexionada, mostrado en la figura, sea muchísimo mayor al radio r de su sección circular. Imaginemos que esta barra, originalmente recta y horizontal, está formada de laminillas rectangulares de espesor muy delgado como se muestra en la siguiente figura.

Figura 1.14: Caption

Cuando la barra es flexionada, las laminillas superiores, del centro de la barra hacia arriba, sufren un incremento en su longitud causado por esfuerzos de tensión, mientras que las laminillas inferiores serán sometidas a esfuerzo de compresión y disminuirán su longitud.

Entre estas dos zonas opuestas, debe existir una superficie intermedia que no experimenta ningún cambio en su longitud. A esta superficie se le conoce como la **superficie neutra**, y es nuestra referencia para medir las deformaciones.

Consideremos un segmento de arco, de longitud l , de la barra flexionada, el cual fue cortado en sus extremos por dos líneas radiales que vienen del centro de curvatura, véase la siguiente figura. El incremento Δl de las laminillas superiores del segmento aumenta con la distancia y a la superficie neutra; mientras en las laminillas inferiores, ocurre al revés, Δl disminuye al aumentar y . Observamos en la figura, haciendo un acercamiento a la imagen, que la laminilla superior, localizada a una distancia y de la superficie neutra, experimentó un incremento de longitud Δl , creciendo $\Delta l/2$ tanto el extremo derecho como el extremo izquierdo; formando dos pequeños triángulos rectángulos de catetos $\Delta l/2$ e y . El ángulo θ , en radianes, de estos triángulos se puede calcular como

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\frac{\Delta l}{2}}{y} = \frac{\Delta l}{2y}.$$

Figura 1.15: Caption

Pero también, en el triángulo grande, semejante a los pequeños, que tiene un vértice, no mostrado, en el centro de curvatura, tenemos

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\frac{l}{2}}{R} = \frac{l}{2R}.$$

Igualando ambas expresiones obtenemos que

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}.$$

Por lo tanto, el esfuerzo longitudinal de tensión sobre las laminillas superiores se puede escribir como

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y \frac{\Delta l}{l} = Y \frac{y}{R}$$

donde ΔA es el área de la sección transversal de la laminilla. El valor de y es positivo si se mide por arriba de la superficie neutra y será negativo si se mide por debajo de la superficie neutra; pues el valor de Δl es positivo para las laminillas superiores y negativo para las inferiores.

Para las laminillas inferiores sometidas a esfuerzo de compresión tendremos

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = -Y \frac{\Delta l}{l} = -Y \frac{y}{R}.$$

Veamos ahora que pasa con las fuerzas ΔF que deforman las laminillas. Si despejamos a ΔF de la ecuación anterior obtenemos

$$\Delta F = \left(\frac{Y}{R} \right) y \Delta A$$

El área ΔA , es la base por la altura de la sección casi rectangular de la laminilla, es decir

$$\Delta A = b_y \Delta y$$

donde la base b_y es función de y . Entonces

$$\Delta F = \left(\frac{Y}{R} \right) y b_y \Delta y.$$

Estas fuerzas, que dependen de la posición y , actúan sobre cualquier sección transversal de la barra estirando a las laminillas superiores y comprimiendo a las laminillas inferiores. Estas fuerzas también producen torcas $\Delta \tau$ en el centro de la sección transversal, donde se encuentra la superficie neutra

$$\Delta \tau = y \Delta F = \left(\frac{Y}{R} \right) y^2 b_y dy.$$

Si hacemos el límite cuando Δy tiende a cero obtenemos la expresión diferencial

$$d\tau = y dF = \left(\frac{Y}{R} \right) y^2 b_y dy$$

válida tanto para las fuerzas diferenciales dF que actúan sobre de las laminillas superiores como en las inferiores, pues al tener el factor y^2 ya no importa el signo de y .

Integrando obtendremos la **torca total** τ respecto al centro de la sección transversal, la cual es un vector que se encuentra en la intersección del plano de la sección transversal con el plano de la superficie neutra, y apunta hacia adentro de la página. A esta torca le llamaremos **momento de flexión**.

$$\tau = \int d\tau = \int y dF = \left(\frac{Y}{R} \right) \int y^2 b_y dy$$

A la integral

$$I = \int y^2 b_y dy = \int y^2 dA$$

donde $dA = b_y dy$ es el área de la sección transversal de la laminilla de espesor diferencial dy , se le conoce como el **“momento de inercia” del área A de la sección transversal de la barra**, por su parecido a la integral del momento de inercia de la dinámica de la rotación.

Es crucial no confundirlo con el momento de inercia de la dinámica ($I = \int r^2 dm$), ya que este depende de la distribución de la masa, mientras que el **momento de inercia del área** (o **segundo momento de área**) depende únicamente de la **geometría** de la sección transversal.

Por lo tanto, podemos escribir el momento de inercia como

$$\tau = \frac{YI}{R}.$$

Ejemplo 1.9.1: Calcule el “momento de inercia” del área de sección transversal de una barra de sección circular de radio r . véase la Figura

Figura 1.16: Caption

Regresando a la expresión del momento de flexión; también conocida como ecuación de la viga

$$\tau = \frac{YI}{R}.$$

La torca va a depender de las fuerzas externas aplicadas a la barra, esto incluye el propio peso de la barra, por ejemplo, en el caso de una barra voladiza. Vemos que la “rigidez” de la barra depende del producto YI que es proporcional al radio de curvatura R , si consideramos una torca fija. A mayor “momento de inercia” del área de la sección, mayor será la curvatura y la flexión menor. Por esta razón las vigas utilizadas en la construcción de edificios tienen perfiles o secciones del área transversal, en forma de H girada a 90° , ver figura.

Figura 1.17: Caption

Ejemplo 1.9.2 (La viga voladiza):

Figura 1.18: Caption

Hasta ahora, hemos analizado la flexión causada por torcas o fuerzas transversales. Sin embargo, una barra esbelta también puede flexionarse bajo un tipo de carga completamente diferente: la compresión axial. Cuando la fuerza de compresión supera un valor crítico, la barra se vuelve inestable y se dobla lateralmente de forma súbita. A este fenómeno de falla estructural se le conoce como **pandeo** (o *buckling* en inglés), y su análisis es vital para el diseño de columnas y soportes.

1.9.2 Flexión lateral de una barra

Consideremos ahora, el caso de una barra de longitud L , flexionada por la acción de un par de fuerzas de compresión, las cuales además de producir una ligera compresión, mantienen flexionada la barra. Ver figura.

Figura 1.19: Caption

Queremos encontrar la expresión matemática de la función $y = y(x)$ que es la forma adoptada por la barra flexionada; además de la magnitud de las fuerzas que producen la flexión lateral.

En este caso la deflexión $y = y(x)$ se mide desde la línea horizontal que pasa por los extremos de la barra a un punto P de esta en la posición (x, y) . El momento de flexión de la barra respecto al punto P , en el centro de la sección transversal es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin \theta \hat{k},$$

donde \vec{r} es el vector de posición que va del punto P al extremo izquierdo de la barra que es donde se aplica la fuerza \vec{F} . El eje z es ortogonal a la página y su dirección positiva es hacia afuera. La longitud de \vec{r} es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos x y y . Por lo tanto, $y = r \sin \theta$ y tenemos

$$\tau = yF.$$

Usando la ecuación de la viga

$$\tau = \frac{YI}{R}$$

tenemos

$$yF = \frac{YI}{R}$$

pero para deflexiones pequeñas

$$\frac{1}{R} \approx -\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

A diferencia del caso de la viga voladiza donde la deflexión $z = z(x)$ era una curva monótona creciente. Es decir, cóncava hacia arriba; aquí la deflexión $y = y(x)$ es una curva cóncava hacia abajo. Por esta razón, la segunda derivada, que es negativa, lleva un signo menos pues R es positivo. Entonces

$$yF = -YI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

o bien

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$$

que es la ecuación de un oscilador armónico, donde

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{YI}}$$

Las soluciones de esta ecuación son funciones seno o coseno; en este caso se trata de la función seno pues en $x = 0$, $y = 0$. Así tenemos

$$y = A \sin \omega x$$

donde A es la deflexión máxima, en el centro de la barra $x = L/2$, lo cual se cumple para $\omega x = \pi/2$, que es donde la función seno toma su valor máximo igual a uno. Entonces

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{\frac{F}{YI}} = \frac{\pi}{L}$$

Ahora, despejando a la fuerza tenemos

$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2}$$

Como podemos ver, la fuerza F , responsable de producir una flexión pequeña de la barra, es independiente de la deflexión y . A esta fuerza se le conoce como **fuerza de Euler**. Podemos ver a esta fuerza como una fuerza crítica, valores menores a ella prácticamente no flexionarían la barra, solo la comprimen; pero, rebasar la fuerza de Euler, podría producir una gran flexión de la barra los cual puede ocasionar, por ejemplo, la deformación plástica de las columnas de un edificio en donde se colocó una carga excesiva en los pisos superiores; ocasionando con esto el colapso del edificio en durante un sismo.

Apéndice

A

ANÁLISIS VECTORIAL

En el estudio de la física, muchas magnitudes —como la velocidad, la fuerza o la aceleración— requieren no solo un valor numérico, sino también una dirección y un sentido. Para describirlas rigurosamente utilizamos vectores, y el álgebra vectorial nos brinda las herramientas para operar con ellos de manera precisa.

A.1 Conceptos Fundamentales

Estas operaciones son fundamentales para describir y analizar el movimiento de los cuerpos, comprender las interacciones de las fuerzas y resolver problemas en el espacio tridimensional. En este contexto, los vectores juegan un papel clave, ya que permiten representar cantidades físicas mediante sus componentes en cada dirección del espacio.

Para formalizar esta idea, introducimos la siguiente definición:

Definición A.1.1: Sea el vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, entonces se les denomina **componentes** del vector \vec{a} a los coordenadas a_x, a_y, a_z que lo definen.

La siguiente figura ilustra esta definición, mostrando un vector en el espacio tridimensional junto con sus componentes y sus proyecciones sobre los planos coordinados.

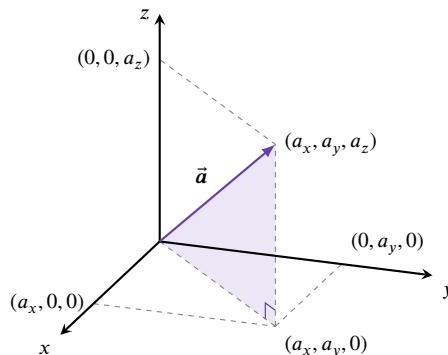


Figura A.1: Representación geométrica del vector \vec{a} .

Contenido

A.1	Conceptos Fundamentales	19
A.2	Suma de vectores	20
A.3	Producto de un escalar por un vector	21
A.4	Producto interno	22
A.5	Producto cruz	23
A.6	Derivada de un vector	25

Además de sus componentes, un vector posee una magnitud o módulo, la cual se define de la siguiente manera:

Definición A.1.2: Definimos la **magnitud** del vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ como el escalar:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Un caso particular de gran utilidad en diversas aplicaciones es el de los vectores unitarios, los cuales se definen como sigue:

Definición A.1.3: Llamamos **unitario** a un vector que tiene magnitud igual a uno. A los vectores unitarios los podemos denotar con el símbolo circunflejo en lugar de la flecha arriba. Es decir, si \vec{a} es un vector unitario $|\vec{a}| = 1$, entonces podemos escribirlo como \hat{a} .

A.2 Suma de vectores

Con la noción de componentes y magnitud establecida, se fundamenta la operación de la suma de vectores en \mathbb{R}^3 , la cual se define a continuación.

Definición A.2.1: Sean $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ dos vectores en \mathbb{R}^3 , donde $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R}$. La **suma de vectores** $\vec{a} + \vec{b}$ se define como el vector

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Es decir, la suma de los vectores es el vector cuyas componentes son la suma de las correspondientes componentes de \vec{a} y \vec{b} .

Las propiedades básicas de la suma en \mathbb{R} se trasladan naturalmente a la suma de vectores, lo que nos permite afirmar y demostrar el siguiente:

Teorema A.2.1: Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ vectores. Entonces, la suma de vectores es comutativa y asociativa. Es decir,

- i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Demostración.

- i) Por las Definiciones A.1.1 y A.2.1, se sigue que

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Debido a que la suma en \mathbb{R} es comutativa, se tiene que

$$\begin{aligned} &= (b_x + a_x, b_y + a_y, b_z + a_z) \\ &= (b_x, b_y, b_z) + (a_x, a_y, a_z) \\ &= \vec{b} + \vec{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

- ii) Análogamente al inciso anterior, consideramos ahora el lado izquierdo de la ecuación de la asociatividad:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= ((a_x + b_x) + c_x, (a_y + b_y) + c_y, (a_z + b_z) + c_z) \\ &= (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y, a_z + b_z + c_z) \\ &= (a_x + (b_x + c_x), a_y + (b_y + c_y), a_z + (b_z + c_z)) \\ &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

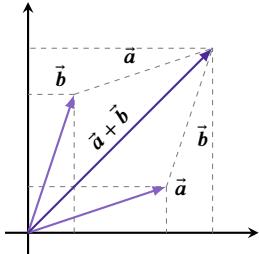


Figura A.2: Representación geométrica de la propiedad conmutativa.

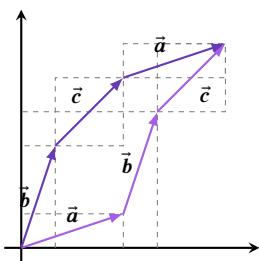


Figura A.3: Representación geométrica de la propiedad asociativa.

Por lo tanto, se cumple que $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Por lo tanto, queda demostrado así que la suma de vectores en \mathbb{R}^3 conserva las propiedades conmutativa y asociativa, heredadas directamente de las propiedades de la suma en \mathbb{R} . ■

En particular, además de la suma de vectores, otra operación fundamental en \mathbb{R}^3 es el producto de un escalar por un vector, el cual exploraremos a continuación.

A.3 Producto de un escalar por un vector

Habiendo establecido que la suma de vectores en \mathbb{R}^3 cumple las propiedades conmutativa y asociativa, podemos introducir una nueva operación fundamental en este espacio: el producto de un escalar por un vector.

Definición A.3.1: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar y $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$ un vector. Se define el **producto de un escalar por un vector** como la operación que asigna a λ y \vec{a} el vector:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Esta operación cumple una serie de propiedades fundamentales, que se enuncian en el siguiente resultado.

Teorema A.3.1: Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- i) **Comutatividad:** $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$.
- ii) **Asociatividad respecto al producto de escalares:** $(\lambda \cdot \mu)\vec{a} = \lambda(\mu \cdot \vec{a})$.
- iii) **Distributividad respecto a la suma de escalares:** $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
- iv) **Distributividad respecto a la suma de vectores:** $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Demarcación. Los incisos ii) y iv) se dejan como ejercicios para el lector.

- i) Por la A.3.1 en \mathbb{R}^3 , se tiene:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Usando la propiedad comutativa del producto en \mathbb{R} , se sigue que:

$$\lambda\vec{a} = (a_x\lambda, a_y\lambda, a_z\lambda) = \vec{a}\lambda.$$

Por lo tanto, se cumple la comutatividad del producto escalar por un vector.

- iii) Por la A.3.1 se sigue:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = ((\lambda + \mu)a_x, (\lambda + \mu)a_y, (\lambda + \mu)a_z).$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma en \mathbb{R} , se tiene que:

$$\begin{aligned} &= (\lambda a_x + \mu a_x, \lambda a_y + \mu a_y, \lambda a_z + \mu a_z) \\ &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) + (\mu a_x, \mu a_y, \mu a_z) \\ &= \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la distributividad respecto a la suma de escalares. ■

La demostración anterior nos permitió establecer propiedades fundamentales del producto de un escalar por un vector, como la comutatividad y la distributividad respecto a la suma de escalares. Estas propiedades son esenciales en el desarrollo del álgebra vectorial, ya que describen con precisión la interacción entre vectores y escalares en \mathbb{R}^3 .

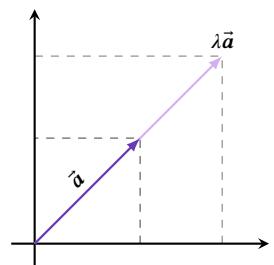


Figura A.4: Representación geométrica del producto de un escalar por un vector.

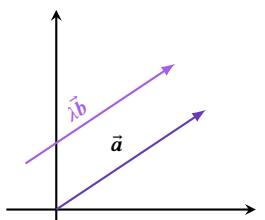


Figura A.5: Interpretación geométrica del paralelismo de dos vectores.

En este contexto, es útil introducir una relación geométrica clave entre los vectores: el concepto de paralelismo.

Definición A.3.2: Se dice que dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ son **paralelos** si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

Geométricamente, esto significa que ambos vectores tienen la misma dirección o direcciones opuestas, dependiendo del signo de λ . Si $\lambda > 0$, los vectores apuntan en la misma dirección; si $\lambda < 0$, en direcciones opuestas (véase la Figura A.5).

El concepto de paralelismo es fundamental en numerosas aplicaciones de la física y la geometría, especialmente en el estudio de fuerzas, velocidades y líneas en el espacio. Por ejemplo, en el análisis del movimiento rectilíneo uniforme, las velocidades de diferentes partículas pueden representarse mediante vectores paralelos cuando todas se desplazan en la misma dirección, aunque con magnitudes distintas.

Para describir con precisión cualquier vector en \mathbb{R}^3 , resulta conveniente introducir un sistema de referencia basado en una base ortonormal:

Definición A.3.3: En el sistema de coordenadas cartesianas, los **vectores canónicos**, también llamados **vectores de la base estándar**, se definen como

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1).$$

Estos vectores poseen propiedades fundamentales:

- Son **unitarios**, es decir, su norma es 1.
- Son **mutuamente perpendiculares**, formando así una **base ortonormal** en \mathbb{R}^3 .
- Permiten expresar cualquier vector como una combinación lineal sencilla.

Definición A.3.4: Dado un vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, podemos expresarlo en términos de los vectores canónicos como

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Esta descomposición es especialmente útil para realizar cálculos algebraicos y geométricos de manera estructurada.

Ahora que disponemos de una forma clara y sistemática de representar los vectores en \mathbb{R}^3 , podemos introducir una de las operaciones más fundamentales en el álgebra vectorial: el **producto interno**, herramienta clave para definir conceptos como la perpendicularidad y la proyección de vectores.

A.4 Producto interno o producto escalar

El producto interno, también conocido como producto escalar, es una operación que no solo nos permite calcular el ángulo entre dos vectores, sino también determinar la longitud de la proyección de un vector sobre otro. Además, esta operación tiene aplicaciones esenciales en diversas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería, ya que establece una forma natural de medir la “relación” entre dos vectores. Al calcular el producto interno, podemos determinar si dos vectores son ortogonales y usar este criterio para diversos análisis.

Gracias a esta propiedad geométrica, el producto interno facilita la resolución de problemas relacionados con la dirección y el ángulo entre vectores, como los utilizados en la teoría de proyecciones y en el análisis de sistemas lineales.

Definición A.4.1: El **producto interno** de dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ se define como el número real dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo formado entre los vectores \vec{a} y \vec{b} . Se toma como referencia el menor de los dos ángulos suplementarios determinados por los vectores.

El producto interno se puede calcular sin necesidad de conocer el ángulo explícitamente. Para ello, utilizamos una fórmula alternativa que expresa el producto interno directamente en términos de las coordenadas de los vectores. Esta fórmula se obtiene del uso del sistema de coordenadas cartesianas y proporciona una forma algebraica de calcular el producto interno sin recurrir al ángulo entre los vectores. Dicha fórmula, se demuestra del siguiente:

Teorema A.4.1: Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ vectores. Entonces su producto interno puede expresarse como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Demostración. Consideremos el producto interno de los vectores \vec{a} y \vec{b} , el cual, según la A.4.1, está dado por la expresión

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores \vec{a} y \vec{b} .

Ahora, examinamos la magnitud del vector diferencia $\vec{b} - \vec{a}$. La magnitud al cuadrado de este vector se puede escribir como

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2,$$

lo que se puede expandir utilizando la identidad algebraica para el cuadrado de la diferencia. Al desarrollar los términos, obtenemos

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \sum_{i=x,y,z} (b_i^2 - 2a_i b_i + a_i^2) = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Por otro lado, la magnitud del vector diferencia también puede expresarse tomando como cierta la ley de los cosenos para vectores. La cual, establece que

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

Al igualar ambas expresiones obtenidas para $\|\vec{b} - \vec{a}\|^2$, se tiene

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

Cancelando los términos comunes de ambos lados de la ecuación y multiplicando por $-\frac{1}{2}$, se obtiene

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

Finalmente, utilizando la A.3.1 del producto interno, se concluye que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Después de haber discutido el producto interno, es relevante abordar el concepto de otro tipo de operación entre vectores, el **producto cruz** o **producto vectorial**. Mientras que el producto interno da como resultado un número escalar, el producto cruz genera un vector que tiene una dirección perpendicular al plano determinado por los vectores involucrados, y cuya magnitud está relacionada con el área del paralelogramo que estos vectores definen.

A.5 Producto cruz o producto vectorial

A continuación, presentaremos la definición del producto cruz en \mathbb{R}^3 , que es una operación fundamental para el análisis geométrico y físico, especialmente cuando se trata de calcular momentos de fuerza, áreas de superficies y otros conceptos vectoriales.

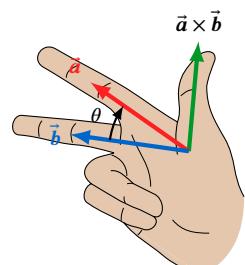


Figura A.6: Muestra la “regla de la mano derecha”, utilizada para determinar la dirección del vector resultante en un producto cruz. Al extender los dedos de la mano derecha en la dirección de los vectores multiplicados, el pulgar apunta en la dirección del vector resultante. Figura adaptada del sitio.

Definición A.5.1: Definimos el **producto cruz** de dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ como el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ que cumple:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} . La dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano determinado por estos vectores y su sentido se establece mediante la **regla de la mano derecha** (véase la Figura A.6). Formalmente, se expresa como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \theta \hat{u},$$

siendo \hat{u} el vector unitario perpendicular a \vec{a} y \vec{b} de acuerdo con dicha orientación.

A continuación, se demuestra que la expresión del determinante es totalmente equivalente a la definición geométrica presentada anteriormente.

Teorema A.5.1: Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ vectores. Entonces su producto vectorial se expresa mediante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}.$$

Demostración. Definimos el producto vectorial como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

y al expandir por cofactores en la primera fila, obtenemos:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}.$$

Denotando $\vec{a} \times \vec{b} = (c_1, c_2, c_3)$, donde

$$c_1 = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_2 = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_3 = a_x b_y - a_y b_x,$$

verificamos su ortogonalidad con respecto a \vec{a} :

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_x c_1 + a_y c_2 + a_z c_3 = 0,$$

ya que al sustituir y agrupar los términos, se anulan simétricamente. De manera análoga, se cumple

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0,$$

lo que confirma que $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a ambos vectores.

Finalmente, su magnitud se calcula como

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

aplicando el teorema de Lagrange:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2,$$

y sustituyendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$, se obtiene:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta).$$

Usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se concluye que:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} . Esta magnitud corresponde al área del paralelogramo determinado por ambos vectores, otorgando una interpretación geométrica al producto vectorial.

En conclusión, la definición mediante determinantes proporciona un vector perpendicular a \vec{a} y \vec{b} , cuya magnitud representa el área del paralelogramo que forman. ■

Posteriormente, se dan en el siguiente teorema las propiedades fundamentales del producto vectorial, las cuales lo convierten en una herramienta esencial en el estudio algebraico y geométrico de los vectores.

Teorema A.5.2: Para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifican:

- i) **Anticomutatividad:** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- ii) **Asociatividad:** $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.
- iii) **Distributividad:** $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- iv) **Producto de Vectores Unitarios:** $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$, $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$.

Demostración. Los incisos ii), iii) y iv) se dejan como ejercicio al lector.

- i) Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, con componentes

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

Usando la A.5.1, el producto cruz de \vec{a} con \vec{b} se define como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}.$$

Análogamente, el producto cruz de \vec{b} con \vec{a} es:

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (b_2 a_3 - b_3 a_2) \hat{i} - (b_1 a_3 - b_3 a_1) \hat{j} + (b_1 a_2 - b_2 a_1) \hat{k}.$$

Observamos que:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -((a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}) = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Por lo tanto, producto cruz es anticomutativo. Es decir,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$
 ■

A.6 Derivada de un vector

Si el vector $\vec{r}(t)$ representa la **posición** de una partícula en el tiempo t , su derivada, $\frac{d\vec{r}}{dt}$, define su vector **velocidad** $\vec{v}(t)$. Esta conexión es la piedra angular de la cinemática.

Cuando las componentes de un vector son funciones diferenciables de una variable independiente t , podemos definir la derivada de dicho vector de forma coherente con el cálculo diferencial.

Definición A.6.1: Sea $\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$ un vector cuyas componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones diferenciables de t . La derivada de $\vec{r}(t)$ con respecto a t se define por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}.$$

Esta definición preserva la estructura del cálculo diferencial escalar y permite establecer las siguientes propiedades básicas de la derivada vectorial:

Teorema A.6.1: Sean $\vec{a}(t)$ y $\vec{b}(t)$ funciones vectoriales diferenciables de t , y sea $\phi(t)$ una función escalar diferenciable. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) Linealidad:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) = \frac{d}{dt}\vec{a}(t) + \frac{d}{dt}\vec{b}(t).$$

ii) Derivada del Producto Escalar:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt}.$$

iii) Derivada del Producto Vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt}.$$

iv) Derivada del Producto Escalar-Vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\phi(t) \vec{a}(t)) = \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{a}(t) + \phi(t) \frac{d\vec{a}(t)}{dt}.$$

Demostración. A continuación, se demuestra la propiedad de linealidad **i)**. Las demostraciones para los incisos **ii)**, **iii)** y **iv)** se proponen como ejercicio para el lector.

Aplicando la definición de la derivada y reordenando los términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{a}(t + \Delta t) + \vec{b}(t + \Delta t)) - (\vec{a}(t) + \vec{b}(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)) + (\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \frac{d\vec{b}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $\frac{d}{dt}(\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) = \frac{d}{dt}\vec{a}(t) + \frac{d}{dt}\vec{b}(t)$.

Estas propiedades constituyen la base del cálculo diferencial aplicado a funciones vectoriales. Al preservar la estructura del cálculo escalar, nos permiten extender de forma natural las técnicas de diferenciación a trayectorias y campos en el espacio, lo cual resulta fundamental para el estudio del movimiento.

Apéndice

B

GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica proporciona el vínculo entre las ideas geométricas y sus representaciones algebraicas. En física, este lenguaje resulta indispensable para describir trayectorias de partículas, la forma de superficies y las transformaciones de coordenadas que simplifican la resolución de problemas.

En este apéndice se reúnen los conceptos fundamentales de geometría analítica que servirán como herramientas a lo largo del libro. No se pretende desarrollar una exposición exhaustiva del tema, sino presentar de manera clara y concisa los elementos necesarios para su aplicación en mecánica, fluidos y elasticidad.

B.1 Secciones cónicas

Comenzaremos con el estudio de las **secciones cónicas**, que aparecen en contextos como el análisis de órbitas planetarias, la trayectoria de proyectiles o la propagación de ondas.

Definición B.1.1: Una **sección cónica**, o simplemente **cónica**, es el conjunto de todos los puntos P en un plano tales que la razón de su distancia a un punto fijo F —llamado **foco**—y su distancia a una recta fija L —llamada **directriz**—es una constante positiva e . Esta razón constante se conoce como la **excentricidad** de la cónica:

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L)}.$$

Las cónicas se clasifican en tres categorías de acuerdo con el valor de la excentricidad e :

- Si $e < 1$, la cónica se llama **elipse**.
- Si $e = 1$, la cónica se llama **parábola**.
- Si $e > 1$, la cónica se llama **hipérbola**.

Contenido

B.1	Secciones cónicas	27
B.2	Otros sistemas coordenados	28
B.3	Transformación de coordenadas	28
B.4	Curvas en el plano	28

En las siguientes subsecciones estudiaremos cada caso por separado, comenzando con la parábola.

B.1.1 Parábola

Definición B.1.2: Una **parábola** es la sección cónica que se obtiene cuando la excentricidad es igual a 1. En otras palabras, la parábola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano que **equidistan** de un punto fijo —el **foco** F — y de una recta fija —la **directriz** L —:

$$d(P, F) = d(P, L).$$

Para deducir su ecuación canónica, se coloca el **vértice** —el punto de la parábola más cercano a la directriz— en el origen $(0, 0)$ y se alinea su eje de simetría con el eje y . En esta disposición, el foco se ubica en $F(0, p)$ y la directriz es la recta horizontal $y = -p$.

La distancia de un punto cualquiera $P(x, y)$ al foco es $d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$, mientras que su distancia a la directriz es $d(P, L) = |y + p|$. Al igualar ambas expresiones y simplificar, se obtiene la **ecuación canónica de la parábola** con eje vertical:

$$x^2 = 4py.$$

El parámetro p representa la distancia del vértice al foco (y también del vértice a la directriz). Su signo determina la orientación de la parábola: si $p > 0$, se abre hacia arriba; si $p < 0$, se abre hacia abajo.

Las parábolas aparecen en numerosos fenómenos físicos: describen la trayectoria de un proyectil bajo un campo gravitatorio uniforme (sin resistencia del aire) y son la base en el diseño de superficies reflectoras, como espejos parabólicos y antenas.

B.1.2 Elipse

B.1.3 Hipérbola

B.2 Otros sistemas coordenados

B.2.1 Coordenadas polares

B.2.2 Coordenadas cilíndricas

B.2.3 Coordenadas esféricas

B.3 Transformación de coordenadas

B.3.1 Traslación de ejes

B.3.2 Rotación de ejes

B.4 Curvas en el plano

B.4.1 Tangente

B.4.2 Normal

B.4.3 Radio de curvatura

En el estudio de las curvas planas no basta con conocer su ecuación cartesiana. También es de interés determinar cómo se dobla la curva en cada uno de sus puntos. Esta propiedad recibe el

nombre de **curvatura** y mide el grado en que la tangente cambia de dirección al desplazarse a lo largo de la curva.

En un punto dado P , existe siempre una circunferencia que se ajusta de manera más exacta a la curva: además de pasar por el punto y compartir la recta tangente, coincide con la curva en la forma en que ésta se curva. A dicha circunferencia se le denomina **círculo osculador**, y el radio de esta circunferencia se llama **radio de curvatura** de la curva en P .

Para calcular este radio a partir de la ecuación de la curva, es necesario relacionar el giro de la tangente con las derivadas de la función: la primera derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ proporciona la pendiente de la tangente, mientras que la segunda derivada $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ describe la rapidez con que dicha pendiente varía, es decir, el cambio en la dirección de la tangente.

Estas observaciones conducen a la siguiente proposición, que da una fórmula práctica del radio de curvatura en coordenadas cartesianas.

Proposición B.4.1: Sea $y = f(x)$ una curva plana con $f \in C^2$ en un entorno de x_0 . Denotemos $P = (x_0, y_0)$ con $y_0 = f(x_0)$. Si la tangente está bien definida en P , entonces el radio de curvatura en P viene dado por

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}.$$

Demostración. Sea una circunferencia de radio R y centro (h, k) tangente a la curva en P . La ecuación de la circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2,$$

donde $h, k, R \in \mathbb{R}$ son constantes. Derivando implícitamente respecto a x y evaluando en P obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(x - h)^2 + (y - k)^2] &= \frac{d}{dx}R^2 \\ 2(x - h) + 2(y - k)\frac{dy}{dx} &= 0 && \text{(multiplicando por } \frac{1}{2} \text{)} \\ (x - h) + (y - k)\frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, derivando implícitamente respecto a x la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x - h) + (y - k)\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}0 \\ 1 + (y - k)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 1 + (y - k)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2, \tag{B.1}$$

$$(x - h) + (y - k)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{B.2}$$

$$1 + (y - k)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0. \tag{B.3}$$

De la ecuación (B.3) se sigue

$$(y - k) \frac{d^2y}{dx^2} = - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$$y - k = - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

y de la ecuación (B.2) obtenemos

$$x - h = -(y - k) \frac{dy}{dx}$$

sustituyendo el valor de $y - k$ en lo anterior se tiene

$$x - h = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}.$$

Luego, sustituyendo los valores de $x - h$ y $y - k$ en la ecuación (B.1)

$$\left[\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} \right]^2 + \left[- \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right]^2 = R^2$$

$$\left[\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right]^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = R^2$$

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2} = R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2}}$$

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}.$$

$$\text{Por lo tanto, queda demostrado que } R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}.$$



Demostración. Sabemos por identidades trigonométricas que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, entonces

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ ds^2 &= dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) \\ ds &= \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)} \\ ds &= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \end{aligned}$$

Además, sabemos que por los cursos de Geometría Analítica y Cálculo I que la longitud de arco de una circunferencia está dada por

$$s = R\theta$$

lo cual implica que

$$ds = R d\theta,$$

o bien

$$R = \frac{ds}{d\theta}.$$

Luego, para θ sabemos que

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{dy}{dx} \\ \theta &= \arctan \left(\frac{dy}{dx} \right). \end{aligned}$$

Sea $v = \frac{dy}{dx}$, entonces derivando implícitamente y aplicando regla de cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2} \\ d\theta &= \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\ d\theta &= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $d\theta$ y ds en R se sigue

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx}{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx} \\ R &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{d^2y}{dx^2}$ nos da la concavidad de la función, para simplificar el análisis aplicaremos valor

absoluto. Por lo tanto, queda demostrado que el radio de curvatura es de la forma

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}.$$

■



Apéndice

C

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

Contenido

- C.1 Diferenciación de funciones escalares y vectoriales . 34
- C.2 Integración de campos . 34
- C.3 Teoremas fundamentales 34

C.1 Diferenciación de funciones escalares y vectoriales

- C.1.1 Derivadas parciales
- C.1.2 Derivadas direccionales
- C.1.3 Gradiente
- C.1.4 Matriz Jacobiana
- C.1.5 Matriz Hessiana
- C.1.6 Divergencia
- C.1.7 Rotacional

C.2 Integración de campos

- C.2.1 Integral de línea
- C.2.2 Integrales múltiples
- C.2.3 Teorema de Fubini

C.3 Teoremas fundamentales

- C.3.1 Teorema fundamental de las integrales de línea
- C.3.2 Teorema de la divergencia
- C.3.3 Teorema de Stokes