

Rats : A normal hierarchical model

Vincent Guitteny, Freddie Joly, Tom Léchappé et Elyes Zribi

01 avril 2022

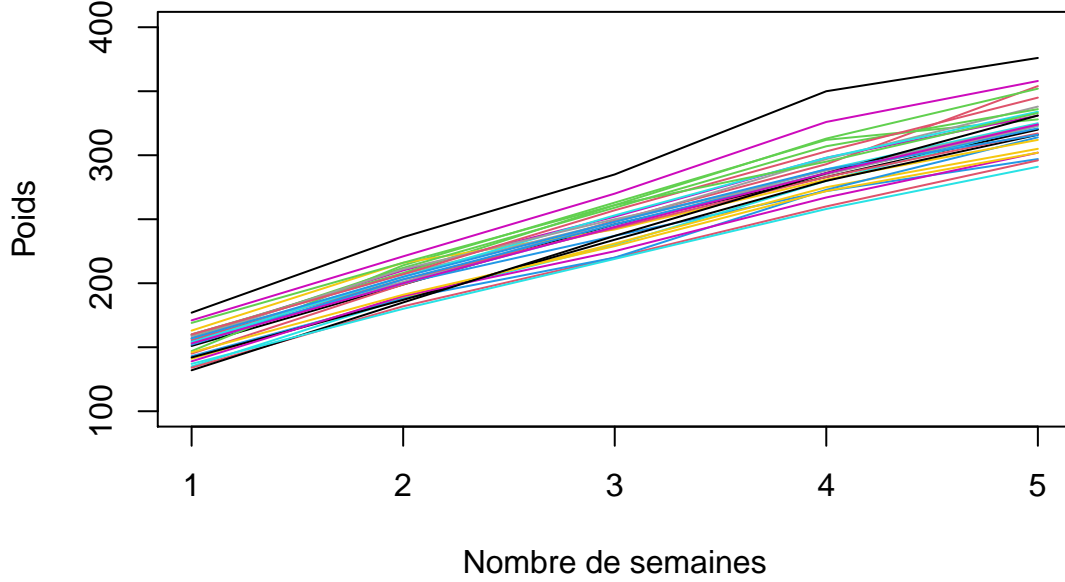
Table des matières

1	Présentation du jeu de données	3
2	Présentation du modèle	3
3	Calculs des lois conditionnelles pleines	4
3.1	Exemple de calcul avec des lois gaussiennes	4
3.2	Exemple de calcul avec des lois inverses gamma	5
4	Implémentation et résultats	5
5	Annexes	7
5.1	Loi conditionnelle pleine du paramètre β_c	7
5.2	Loi conditionnelle pleine du paramètre α_i	7
5.3	Loi conditionnelle pleine du paramètre β_i	8
5.4	Loi conditionnelle pleine du paramètre σ_β^2	8
5.5	Loi conditionnelle pleine du paramètre σ_c^2	8

1 Présentation du jeu de données

Nous disposons des poids de 30 jeunes rats, mesurés chaque semaine pendant 5 semaines. La dimension de notre jeu de données est donc de 30 par 5. Nos variables $x_j, j = 1, \dots, 5$ correspondent aux différents âges des rats, en jour ($x_j = 8, 15, 22, 29, 36$), et nos données Y_{ij} correspondent au poids du rat i à l'âge x_j .

Un tracé des 30 courbes de croissance suggère des signes de courbure vers le bas :



2 Présentation du modèle

Le modèle est essentiellement une courbe de croissance linéaire à effets aléatoires :

$Y_{ij} \sim \mathcal{N}(\alpha_i + \beta_i(x_j - \bar{x}), \sigma_c^2)$ où $\bar{x} = 22$ et $\sigma_c^2 \sim \text{InvGamma}(a_c, b_c)$ (σ_c^2 a une loi a priori non informative)

$\alpha_i \sim \mathcal{N}(\alpha_c, \sigma_\alpha^2)$

$\beta_i \sim \mathcal{N}(\beta_c, \sigma_\beta^2)$.

On note l'absence de paramètre représentant la corrélation entre α_i et β_i . Pour l'instant, nous standardisons les x_j autour de leur moyenne pour réduire la dépendance entre α_i et β_i dans leur vraisemblance : en fait, pour les données entièrement équilibrées (centrées et réduites), une indépendance complète est atteinte (notons qu'en général, l'indépendance a priori n'oblige pas les distributions a posteriori à être indépendantes).

Les paramètres $\alpha_c, \sigma_\alpha^2, \beta_c, \sigma_\beta^2$ ont des loi a priori « non informatives » et indépendantes :

$\alpha_c \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$

$\sigma_\alpha^2 \sim \text{InvGamma}(a_\alpha, b_\alpha)$

$\beta_c \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$

$\sigma_\beta^2 \sim \text{InvGamma}(a_\beta, b_\beta)$.

L'utilisation d'un tel modèle hiérarchique dans ce cas peut s'expliquer par le fait que le poids d'un rat dépend de plusieurs facteurs. En effet on peut imaginer que le poids du rat varie en fonction du rat lui-même (par exemple en fonction de son sexe), en fonction de son alimentation ou encore en fonction de son environnement. Plus de détails sur l'expérience aurait pu nous indiquer les informations exactes pour ce modèle hiérarchique. Ci-dessous le modèle obtenu sous forme de graphes.

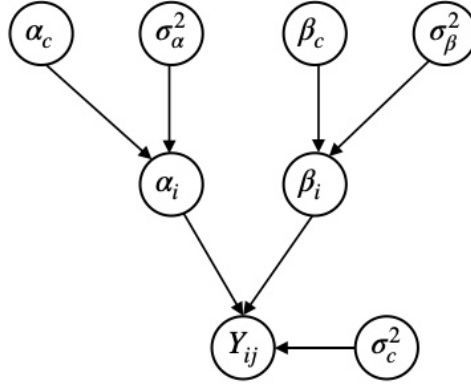


Figure 1: Modèle hiérarchique

3 Calculs des lois conditionnelles pleines

Afin de mettre en oeuvre un algorithme MCMC (Monte Carlo Markov Chain), à l'aide de la fonction `mcmc` du package `coda`, sur une chaîne de Markov obtenue par un échantillonneur de Gibbs, nous avons eu la nécessité de calculer les lois conditionnelles pleines (loi conditionnellement aux autres paramètres) des paramètres α_c , β_c , σ_α^2 , σ_β^2 , σ_c^2 , α_i et β_i (et de voir si celles-ci étaient identifiables). Les paramètres α_c , β_c , α_i et β_i ont des lois a priori gaussiennes et les paramètres σ_α^2 , σ_β^2 et σ_c^2 ont des lois a priori inverses gamma. Nous donnons ci-dessous un exemple de calcul pour une loi gaussienne et un exemple pour une loi inverse gamma (le reste des démonstrations se trouve en annexe).

3.1 Exemple de calcul avec des lois gaussiennes

Dans cet exemple, on cherche à calculer la loi conditionnelle pleine du paramètre α_c . Pour cela, nous avons besoin de la loi a priori de $\alpha_c \sim \mathcal{N}(O, \sigma_a^2)$ et de la loi de $\alpha_i \sim \mathcal{N}(\alpha_c, \sigma_\alpha^2)$.

$$\begin{aligned}
\Pi(\alpha_c | \dots) &\propto \Pi(\alpha_c) \prod_{i=1}^{n_i} \Pi(\alpha_i | \alpha_c, \sigma_\alpha^2) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2}{2\sigma_a^2}\right) \prod_{i=1}^{n_i} \exp\left(\frac{-(\alpha_i - \alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2}{2\sigma_a^2}\right) \prod_{i=1}^{n_i} \exp\left(\frac{-(\alpha_c^2 - 2\alpha_i\alpha_c)}{2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2}{2\sigma_a^2}\right) \exp\left(\frac{-n_i\alpha_c^2 + 2\alpha_c \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i}{2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2(\sigma_a^2 + n_i\sigma_\alpha^2) + 2\alpha_c\sigma_a^2 \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i}{2\sigma_a^2\sigma_\alpha^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on identifie une loi gaussienne :

$$\Pi(\alpha_c|\dots) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_a^2 \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i}{\sigma_\alpha^2 + n_i \sigma_a^2}, \frac{\sigma_a^2 \sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + n_i \sigma_a^2}\right)$$

3.2 Exemple de calcul avec des lois inverses gamma

Ici nous calculons la loi conditionnelle pleine du paramètre σ_α^2 . Pour cela, nous avons besoin de la loi a priori de $\sigma_\alpha^2 \sim \text{InvGamma}(a_\alpha, b_\alpha)$ et de la loi de $\alpha_i \sim \mathcal{N}(\alpha_c, \sigma_\alpha^2)$.

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_\alpha^2|\dots) &\propto \Pi(\sigma_\alpha^2) \prod_{i=1}^{n_i} \Pi(\alpha_i|\alpha_c, \sigma_\alpha^2) \\ &\propto \exp^{\frac{-b_\alpha}{\sigma_\alpha^2}} (\sigma_\alpha^2)^{-a_\alpha-1} \prod_{i=1}^{n_i} \exp\left(\frac{-(\alpha_i - \alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\propto (\sigma_\alpha^2)^{-a_\alpha-1-\frac{n_i}{2}} \exp\left(\frac{-2b_\alpha - \sum_{i=1}^{n_i} (\alpha_i - \alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on identifie une loi inverse gamma :

$$\Pi(\sigma_\alpha^2|\dots) \sim \text{InvGamma}\left(\frac{n_i}{2} + a_\alpha, \frac{2b_\alpha + \sum_{i=1}^{n_i} (\alpha_i - \alpha_c)^2}{2}\right)$$

4 Implémentation et résultats

Maintenant que nous avons obtenues et identifiées toutes nos lois conditionnelles pleines de nos paramètres, nous avons pu implémenter un échantillonneur de Gibbs et utiliser un algorithme MCMC sur la chaîne de Markov obtenue par cet échantillonneur.

Afin de comparer nos résultats avec ceux de l'expérience, nous avons utilisé un "burnin" de 1000 sur la chaîne de Markov de taille totale 10 000 qui est retourné par notre fonction simulant un échantillonneur de Gibbs.

On observe que l'on retrouve la même moyenne que ceux obtenus par les auteurs pour les paramètres α_0 (défini par $\alpha_0 = \alpha_c - \bar{x}\beta_c$) et β_c dont on donne les valeurs dans le tableau ci-dessous.

	Moyenne
α_0	106.568
β_c	6.186
σ_c^2	0.003

Table 1 : Moyenne des paramètres α_0 , β_c et σ_c^2 .

Enfin, nous avons voulu comparer nos résultats en faisant une prédiction du poids du rat 26 et en comparant nos résultats avec ceux du jeu de données initial.

	Valeurs prédites	Valeurs réelles
Semaine 2	207	207
Semaine 3	254	257
Semaine 4	300	303
Semaine 5	347	345

Table 2 : Valeurs prédites et réelles du poids du rat 26.

On retrouve bien dans ce tableau que nos valeurs prédites sont très proches des valeurs réelles pour les différents poids de ce rat.

5 Annexes

5.1 Loi conditionnelle pleine du paramètre β_c

$$\begin{aligned}
\Pi(\beta_c|\dots) &\propto \Pi(\beta_c) \prod_{i=1}^{n_i} \Pi(\beta_i|\beta_c, \sigma_\beta^2) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\beta_c^2}{2\sigma_b^2}\right) \prod_{i=1}^{n_i} \exp\left(\frac{-(\beta_i - \beta_c)^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\beta_c^2}{2\sigma_b^2}\right) \prod_{i=1}^{n_i} \exp\left(\frac{-(\beta_c^2 - 2\beta_i\beta_c)}{2\sigma_\beta^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\beta_c^2}{2\sigma_b^2}\right) \exp\left(\frac{-n_i\beta_c^2 + 2\beta_c \sum_{i=1}^{n_i} \beta_i}{2\sigma_\beta^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\beta_c^2(\sigma_\beta^2 + n_i\sigma_b^2) + 2\beta_c\sigma_b^2 \sum_{i=1}^{n_i} \beta_i}{2\sigma_b^2\sigma_\beta^2}\right) \\
&\sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_b^2 \sum_{i=1}^{n_i} \beta_i}{\sigma_\beta^2 + n_i\sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2\sigma_\beta^2}{\sigma_\beta^2 + n_i\sigma_b^2}\right)
\end{aligned}$$

5.2 Loi conditionnelle pleine du paramètre α_i

$$\begin{aligned}
\Pi(\alpha_i|\dots) &\propto \Pi(\alpha_i|\alpha_c, \sigma_\alpha^2) \prod_{j=1}^{n_j} \Pi(Y_{ij}|\alpha_i, \beta_i, \sigma_c^2) \\
&\propto \exp\left(\frac{-(\alpha_i - \alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i(x_j - \bar{x}))^2}{2\sigma_c^2}\right)
\end{aligned}$$

En posant $\mu_{ij} = y_{ij} - \beta_i(x_j - \bar{x})$, on a

$$\begin{aligned}
\Pi(\alpha_i|\dots) &\propto \exp\left(\frac{-\alpha_i^2 + 2\alpha_i\alpha_c}{2\sigma_\alpha^2}\right) \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-(\alpha_i - \mu_{ij})^2}{2\sigma_c^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_i^2 + 2\alpha_i\alpha_c}{2\sigma_\alpha^2}\right) \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-\alpha_i^2 + 2\alpha_i\mu_{ij}}{2\sigma_c^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_i^2(\sigma_c^2 + n_j\sigma_\alpha^2) + 2\alpha_i(\alpha_c\sigma_c^2 + \sigma_\alpha^2 \sum_{j=1}^{n_j} \mu_{ij})}{2\sigma_\alpha^2\sigma_c^2}\right) \\
&\sim \mathcal{N}\left(\frac{\alpha_c\sigma_c^2 + \sigma_\alpha^2 \sum_{j=1}^{n_j} \mu_{ij}}{\sigma_c^2 + n_j\sigma_\alpha^2}, \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_c^2}{\sigma_c^2 + n_j\sigma_\alpha^2}\right)
\end{aligned}$$

5.3 Loi conditionnelle pleine du paramètre β_i

$$\begin{aligned}\Pi(\beta_i|\dots) &\propto \Pi(\beta_i|\beta_c, \sigma_\beta^2) \prod_{j=1}^{n_j} \Pi(Y_{ij}|\alpha_i, \beta_i, \sigma_c^2) \\ &\propto \exp\left(\frac{-(\beta_i - \beta_c)^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i(x_j - \bar{x}))^2}{2\sigma_c^2}\right)\end{aligned}$$

En posant $\mu_{ij} = y_{ij} - \alpha_i$, on a

$$\begin{aligned}\Pi(\beta_i|\dots) &\propto \exp\left(\frac{-\beta_i^2 + 2\beta_i\beta_c}{2\sigma_\beta^2}\right) \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-(\beta_i(x_j - \bar{x}) - \mu_{ij})^2}{2\sigma_c^2}\right) \\ &\propto \exp\left(\frac{-\beta_i^2 + 2\beta_i\beta_c}{2\sigma_\beta^2}\right) \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-\beta_i^2(x_j - \bar{x})^2 + 2\beta_i(x_j - \bar{x})\mu_{ij}}{2\sigma_c^2}\right) \\ &\propto \exp\left(\frac{-\beta_i^2(\sigma_c^2 + \sigma_\beta^2 \sum_{j=1}^{n_j} (x_j - \bar{x})^2) + 2\beta_i(\beta_c\sigma_c^2 + \sigma_\beta^2 \sum_{j=1}^{n_j} (x_j - \bar{x})\mu_{ij})}{2\sigma_\beta^2\sigma_c^2}\right) \\ &\sim \mathcal{N}\left(\frac{\beta_c\sigma_c^2 + \sigma_\beta^2 \sum_{j=1}^{n_j} (x_j - \bar{x})\mu_{ij}}{\sigma_c^2 + \sigma_\beta^2 \sum_{j=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2}, \frac{\sigma_\beta^2\sigma_c^2}{\sigma_c^2 + \sigma_\beta^2 \sum_{j=1}^{n_j} (x_j - \bar{x})^2}\right)\end{aligned}$$

5.4 Loi conditionnelle pleine du paramètre σ_β^2

$$\begin{aligned}\Pi(\sigma_\beta^2|\dots) &\propto \Pi(\sigma_\beta^2) \prod_{i=1}^{n_i} \Pi(\beta_i|\beta_c, \sigma_\beta^2) \\ &\propto \exp^{\frac{-b_\beta}{\sigma_\beta^2}} (\sigma_\beta^2)^{-a_\beta-1} \prod_{i=1}^{n_i} \exp\left(\frac{-(\beta_i - \beta_c)^2}{2\sigma_\beta^2}\right) (\sigma_\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\propto (\sigma_\beta^2)^{-a_\beta-1-\frac{n_i}{2}} \exp\left(\frac{-2b_\beta - \sum_{i=1}^{n_i} (\beta_i - \beta_c)^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \\ &\sim \text{InvGamma}\left(\frac{n_i}{2} + a_\beta, \frac{2b_\beta + \sum_{i=1}^{n_i} (\beta_i - \beta_c)^2}{2}\right)\end{aligned}$$

5.5 Loi conditionnelle pleine du paramètre σ_c^2

$$\Pi(\sigma_c^2|\dots) \propto \Pi(\sigma_c^2) \prod_{i=1}^{n_i} \prod_{j=1}^{n_j} \Pi(Y_{ij}|\alpha_i, \beta_i, \sigma_c^2)$$

En posant $\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_i(x_j - \bar{x})$, on a

$$\begin{aligned}
\Pi(\sigma_c^2|\dots) &\propto \exp^{\frac{-b_c}{\sigma_c^2}} (\sigma_c^2)^{-a_c-1} \prod_{i=1}^{n_i} \prod_{j=1}^{n_j} \exp\left(\frac{-(y_{ij} - \mu_{ij})^2}{2\sigma_c^2}\right) (\sigma_c^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\propto (\sigma_c^2)^{-a_c-1-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-2b_c - \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} (y_{ij} - \mu_{ij})^2}{2\sigma_c^2}\right) \\
&\sim \text{InvGamma}\left(\frac{n}{2} + a_c, \frac{2b_c + \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} (y_{ij} - \mu_{ij})^2}{2}\right)
\end{aligned}$$