Rats : A normal hierarchical model

Vincent Guitteny, Freddie Joly, Tom Léchappé et Elyes Zribi

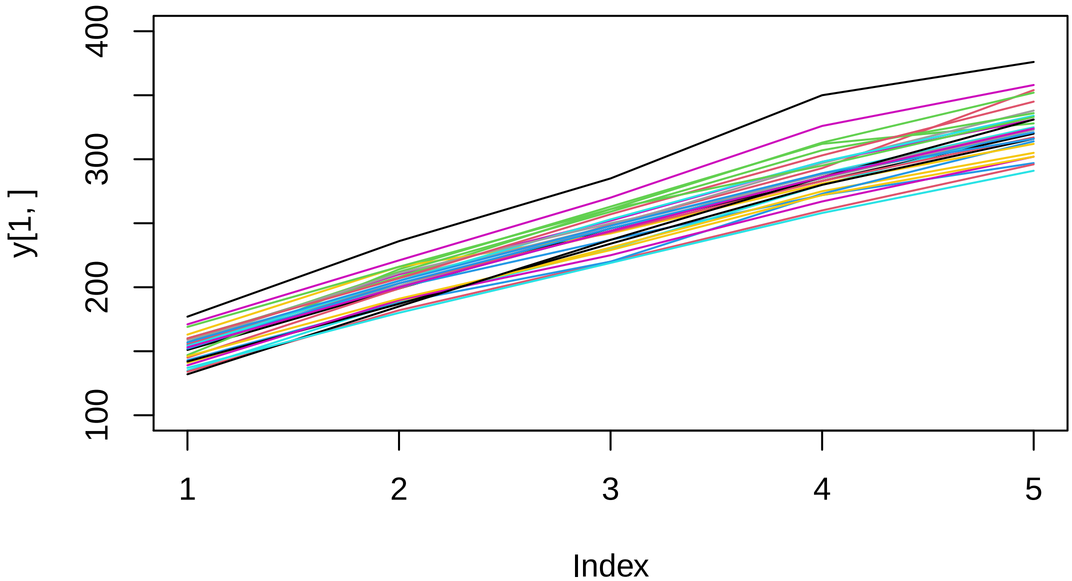
29 mars, 2022

Table des matières

1 Présentation du jeu de données

Nous disposons des poids de 30 jeunes rats, mesurés chaque semaine pendant 5 semaines. La dimension de notre jeu de données est donc de 30 par 5. Nos variables $x_j, j = 1, \ldots, 5$ correspondent aux différents âges des rats, en jour ($x_j = 8, 15, 22, 29, 36$), et nos données Y_{ij} correspondent au poids du rat i à l'âge x_j.

Un tracé des 30 courbes de croissance suggère des signes de courbure vers le bas :



2 Présentation du modèle

Le modèle est essentiellement une courbe de croissance linéaire à effets aléatoires :

$Y_{ij} \sim \mathcal{N}(\alpha_i + \beta_i(x_j - \bar{x}), \sigma_c^2)$ où $\bar{x} = 22$ et $\sigma_c^2 \sim InvGamma(a_c, b_c)$

$\alpha_i \sim \mathcal{N}(\alpha_c, \sigma_\alpha^2)$

$\beta_i \sim \mathcal{N}(\beta_c, \sigma_\beta^2)$

On note l'absence de paramètre représentant la corrélation entre α_i et β_i. Pour l'instant, nous standardisons les x_j autour de leur moyenne pour réduire la dépendance entre α_i et β_i dans leur vraisemblance : en fait, pour les données entièrement équilibrées (centrées et réduites), une indépendance complète est atteinte (notons qu'en général, l'indépendance a priori n'oblige pas les distributions a posteriori à être indépendantes).

Les paramètres $\alpha_c, \sigma_\alpha^2, \beta_c, \sigma_\beta^2$ ont des loi a priori « non informatives » et indépendantes :

$\alpha_c \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$

$\sigma_\alpha^2 \sim InvGamma(a_\alpha, b_\alpha)$

$\beta_c \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$

$\sigma_\beta^2 \sim InvGamma(a_\beta, b_\beta)$.

3 Calculs des lois a posteriori

$\alpha_c \sim \mathcal{N}(O,\, \sigma_a^2)$; $\alpha_i \sim \mathcal{N}(\alpha_c,\, \sigma_\alpha^2)$

$$
\begin{aligned}
\Pi(\alpha_c|...) &\propto \Pi(\alpha_c)\prod_{i=1}^{n_i}\Pi(\alpha_i|\alpha_c,\sigma_\alpha^2) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2}{2\sigma_a^2}\right)\prod_{i=1}^{n_i}\exp\left(\frac{-(\alpha_i-\alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2}{2\sigma_a^2}\right)\prod_{i=1}^{n_i}\exp\left(\frac{-(\alpha_c^2-2\alpha_i\alpha_c)}{2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2}{2\sigma_a^2}\right)\prod_{i=1}^{n_i}\exp\left(\frac{-ni\alpha_c^2+2\alpha_c\sum\limits_{i=1}^{n_i}\alpha_i}{2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha_c^2(\sigma_\alpha^2+ni\sigma_a^2)+2\alpha_c\sigma_a^2\sum\limits_{i=1}^{n_i}\alpha_i}{2\sigma_a^2\sigma_\alpha^2}\right) \\
&\sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_a^2\sum\limits_{i=1}^{n_i}\alpha_i}{\sigma_\alpha^2+n_i\sigma_a^2},\frac{\sigma_a^2\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2+n_i\sigma_a^2}\right)
\end{aligned}
$$

$\sigma_\alpha^2 \sim InvGamma(a_\alpha, b_\alpha)$

$$
\begin{aligned}
\Pi(\sigma_\alpha^2|...) &\propto \Pi(\sigma_\alpha^2)\prod_{i=1}^{n_i}\Pi(\alpha_i|\alpha c,\sigma_\alpha^2) && (1)\\
&\propto \exp^{\frac{-b_\alpha}{\sigma_\alpha^2}}(\sigma_\alpha^2)^{-a_\alpha-1}\prod_{i=1}^{n_i}\exp\left(\frac{-(\alpha_i-\alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)(\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} && (2)\\
&\propto (\sigma_\alpha^2)^{-a_\alpha-1-\frac{n_i}{2}}\exp\left(\frac{-2b_\alpha-\sum\limits_{i=1}^{n_i}(\alpha_i-\alpha_c)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) && (3)\\
&\sim InvGamma(\frac{n_i}{2}+a_\alpha,\frac{+2b_\alpha+\sum\limits_{i=1}^{n_i}(\alpha_i-\alpha_c)^2}{2}) && (4)
\end{aligned}
$$