

---

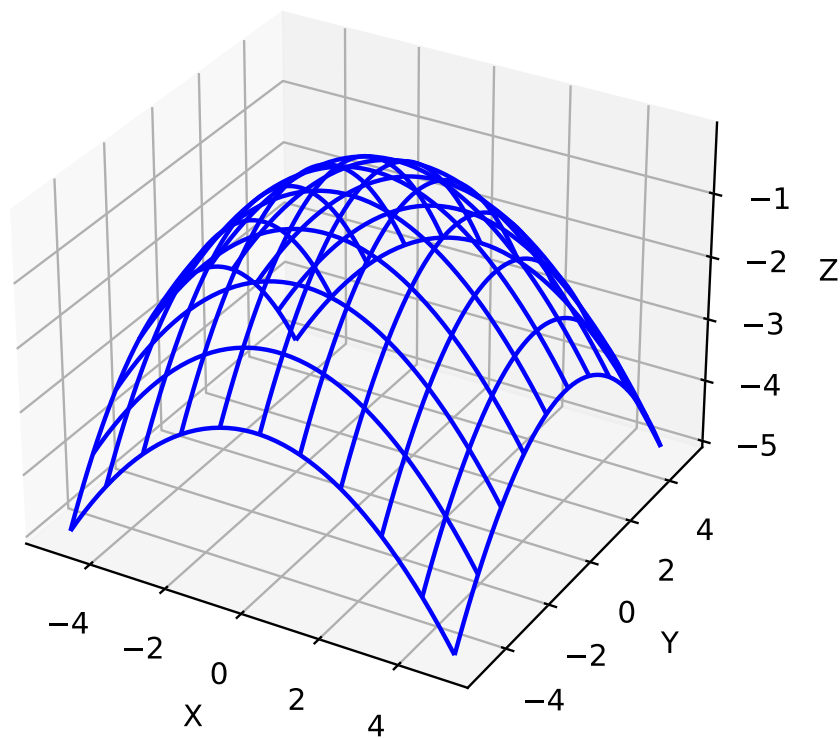
# TP1 : Méthode des volumes finis

---

*Auteurs :*

Vincent MARAIS

Clément BOSSÉ



## Notations

Soit le problème de l'ailette de refroidissement, illustré dans la Figure 1, pour lequel nous formulons les hypothèses suivantes :

- $T_c = 100^\circ\text{C}$  ;
- $T_a = 20^\circ\text{C}$  ;
- Ailette de longueur  $L = 1\text{m}$  et de rayon  $R = 4\text{mm}$  ;
- $k = 200\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , la conductivité thermique de l'ailette ;
- $h = 10\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , le coefficient de transfert convectif entre l'ailette et l'extérieur ;
- $P = 2\pi R$  : le périmètre de l'ailette ;
- $S = \pi R^2$  : la section de l'ailette.
- Soit  $f$  une fonction, nous noterons  $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$  et  $\frac{d^2f}{dx^2}(x) = f''(x)$  ;
- $\sigma = \frac{Ph}{kS} = 25\text{m}^{-2}$  ;
- $1/a = \sqrt{\sigma}$  donc  $a = 0.2\text{m}$  ;
- $H^{1/2}(\Omega)$  : Espace de Sobolev d'ordre fractionnaire et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

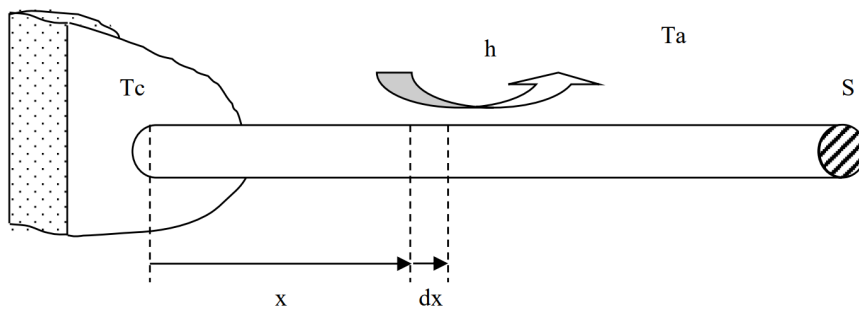


FIGURE 1 – Problème de l'ailette de refroidissement

En supposant que le système est en régime permanent, nous obtenons l'équation différentielle suivante pour la température  $T$  le long de l'ailette :

$$\forall x \in [0, L], \quad T''(x) - \sigma(T(x) - T_a) = 0 \quad (1)$$

**Programme :** [Lien programme](#)

## Question 1

Méthode des éléments finis :

- $(x_i)_{i \in [[1,5]]}$  une subdivision régulière de  $[0, L]$  de pas  $\delta x = 0.2\text{m}$
- $K_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  :  $i$ -ème volume de contrôle,  $i \in [[1, 5]]$
- $\forall i \in [[1, 5]]$ ,  $x_i = \frac{1}{2} [x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}]$
- Soit  $f$  une fonction,  $\tilde{f}_i \approx f(x_i)$  : approximation numérique de  $f$  en  $x_i$

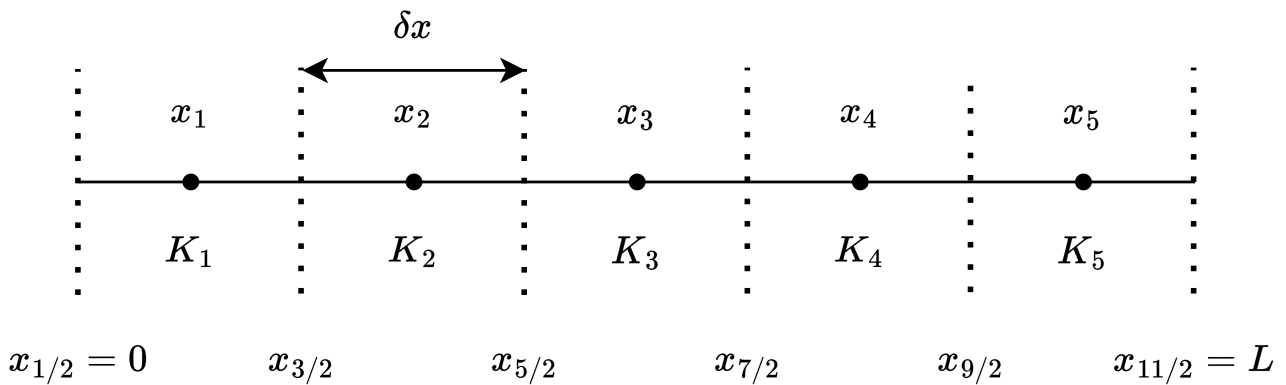


FIGURE 2 – Maillage de l'ailette de refroidissement

## Question 1.1

Dans un premier temps on travail les  $K_i$  où  $i \in \{2, 3, 4\}$ , on intègre l'équation (1) sur  $K_i$  :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} T''(x) dx = \sigma \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} T(x) dx - \sigma \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} T_a dx \quad (2)$$

**Théorème : théorème fondamental de l'analyse**

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $(a, b) \in I^2$  où  $a < b$

- (i) La fonction  $x \mapsto \int_a^b f$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .
- (ii) Pour toute primitive  $F$  de  $f$  :  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

D'après le théorème fondamental de l'analyse on a :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} T''(x) dx = T'(x_{i+\frac{1}{2}}) - T'(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (3)$$

**Théorème : Méthode des rectangles médians**

Soient  $I = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de classe  $C^2$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $M = \sup_{t \in I} |f''(t)|$

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) \quad (4)$$

On a l'inégalité suivant :

$$\left| \int_a^b f(t) dx - I_n(f) \right| \leq M \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (5)$$

D'après la Méthode des rectangles médians (4) sur  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ , on a :

$$\forall i \in \{2, 3, 4\}, \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} T(x) dx \approx \delta x \tilde{T}_i \quad (6)$$

car :

- $n = 1$  nous sommes sur une subdivision de l'intervalle  $[0, 1] : [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$
- $x_i$  est le point milieu de  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  (cf notation)
- $\tilde{T}_i$  approximation numérique de  $T(x_i)$

On obtient donc :

$$T'(x_{i+\frac{1}{2}}) - T'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \sigma \delta x \tilde{T}_i + \sigma \delta x T_a \quad (7)$$

**Définition : Différence centrée autour de  $x$**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$  le pas.

Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  alors on a pour  $x \in I$  :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (8)$$

On approxime  $T'(x_{i-\frac{1}{2}})$  (resp.  $T'(x_{i+\frac{1}{2}})$ ) par la différence centrée autour de  $x_{i-\frac{1}{2}}$  (resp.  $x_{i+\frac{1}{2}}$ ) (8) :

$$\forall i \in \{2, 3, 4\}, \begin{cases} T'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i}{\delta x} \\ T'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{\tilde{T}_i - \tilde{T}_{i-1}}{\delta x} \end{cases} \quad (9)$$

Donc d'après (9), pour tout  $i \in [[2, 4]]$  l'équation (7) devient :

$$\frac{\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i}{\delta x} - \frac{\tilde{T}_i - \tilde{T}_{i-1}}{\delta x} = \sigma \delta x \tilde{T}_i - \sigma \delta x T_a \quad (10)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall i \in [[2, 4]], \tilde{T}_i (2 + \sigma(\delta x)^2) - \tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_{i-1} = \sigma(\delta x)^2 T_a} \quad (11)$$

## Question 1.2

Étude dans  $K_1$

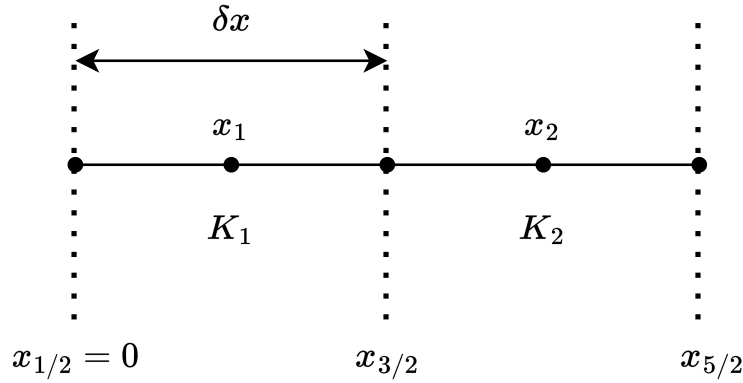


FIGURE 3 – Maillage de l'ailette de refroidissement zoomé sur  $K_1$

On sait d'après l'énoncé que notre ailette est en contact en  $x = 0 = x_{1/2}$  avec un thermostat de température  $T_c$ , on en déduit l'égalité suivante :

$$T(x_{1/2}) = T_c \quad (12)$$

L'équation (1) intégrée sur  $K_1$  devient :

$$\int_{x_{1/2}}^{x_{3/2}} T'' dx = \sigma \int_{x_{1/2}}^{x_{3/2}} T(x) dx - \sigma \int_{x_{1/2}}^{x_{3/2}} T_a dx \quad (13)$$

Or d'après le théorème fondamental de l'analyse et la méthode des rectangles médians, on a :

$$T'(x_{3/2}) - T'(x_{1/2}) \approx \sigma \delta x \tilde{T}_1 + \sigma \delta x T_a \quad (14)$$

De plus, avec la différence différence centrée (8), on a :

$$T'(x_{3/2}) \approx \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{\delta x} \quad (15)$$

**Définition : Différence décentrée à gauche (différence finie rétrograde)**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$  le pas.  
Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  alors on a pour  $x \in I$  :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (16)$$

Et d'après la différence décentrée à gauche (16)

$$T'(x_{1/2}) \approx \frac{\tilde{T}_1 - \tilde{T}_{1/2}}{\delta x/2} \quad (17)$$

Donc on obtient dans le volume  $K_1$ , d'après (12) et (14) :

$$\frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{\delta x} - \frac{\tilde{T}_1 - T_c}{\delta x/2} = \sigma \delta x \tilde{T}_1 - \sigma \delta x T_a \quad (18)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tilde{T}_1 (\sigma (\delta x)^2 + 3) - \tilde{T}_2 = 2T_c + \sigma (\delta x)^2 T_a \quad (19)$$

Étude dans  $K_5$  :

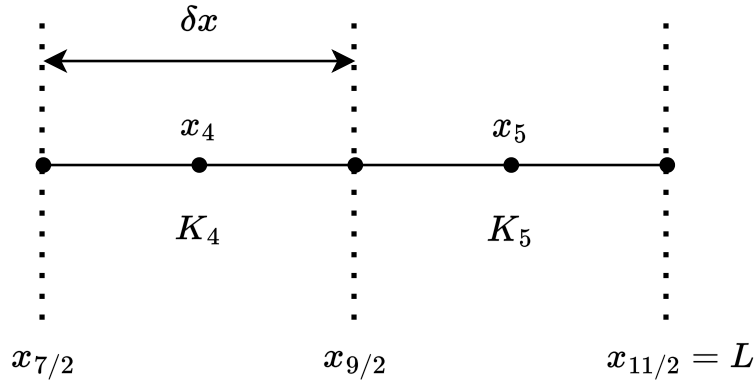


FIGURE 4 – Maillage de l'ailette de refroidissement zoomé sur  $K_5$

On sait d'après l'énoncé on a  $T(x = L) = T_a$  (**cette approximation qui n'est pas exacte cela est expliqué annexe**) :

$$T(x_{11/2}) = T_a \quad (20)$$

L'équation (1) intégrée sur  $K_5$  devient :

$$\int_{x_{9/2}}^{x_{11/2}} T'' dx = \sigma \int_{x_{9/2}}^{x_{11/2}} T(x) dx - \sigma \int_{x_{9/2}}^{x_{11/2}} T_a dx \quad (21)$$

Or d'après le théorème fondamental de l'analyse et la méthode des rectangles médians (4), on a :

$$T'(x_{11/2}) - T'(x_{9/2}) \approx \sigma \delta x \tilde{T}_5 + \sigma \delta x T_a \quad (22)$$

De plus, avec la différence centrée, on a :

$$T'(x_{9/2}) \approx \frac{\tilde{T}_5 - \tilde{T}_4}{\delta x} \quad (23)$$

Et d'après la différence décentrée à gauche (16)

$$T'(x_{11/2}) \approx \frac{\tilde{T}_{11/2} - \tilde{T}_5}{\delta x/2} \quad (24)$$

Donc on obtient dans le volume  $K_5$ , d'après (20) :

$$\frac{T_a - \tilde{T}_5}{\delta x/2} - \frac{\tilde{T}_5 - \tilde{T}_4}{\delta x} = \sigma \delta x \tilde{T}_5 - \sigma \delta x T_a \quad (25)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\tilde{T}_5 (\sigma (\delta x)^2 + 3) - \tilde{T}_4 = (2 + \sigma (\delta x)^2) T_a} \quad (26)$$

### Question 1.3

Le système à résoudre est de la forme d'après (11), (19), (26) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_1 (\sigma (\delta x)^2 + 3) - \tilde{T}_2 = 2T_c + \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \tilde{T}_2 (2 + \sigma (\delta x)^2) - \tilde{T}_3 - \tilde{T}_1 = \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \tilde{T}_3 (2 + \sigma (\delta x)^2) - \tilde{T}_4 - \tilde{T}_2 = \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \tilde{T}_4 (2 + \sigma (\delta x)^2) - \tilde{T}_5 - \tilde{T}_3 = \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \tilde{T}_5 (\sigma (\delta x)^2 + 3) - \tilde{T}_4 = (2 + \sigma (\delta x)^2) T_a \end{array} \right. \quad (27)$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sigma (\delta x)^2 + 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 + \sigma (\delta x)^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \sigma (\delta x)^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 + \sigma (\delta x)^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sigma (\delta x)^2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_4 \\ \tilde{T}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T_c + \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \sigma (\delta x)^2 T_a \\ \sigma (\delta x)^2 T_a \\ (2 + \sigma (\delta x)^2) T_a \end{bmatrix} \quad (28)$$

Application numérique :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_4 \\ \tilde{T}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 60 \end{bmatrix} \quad (29)$$



**Question 2**

Dans un premier temps, nous cherchons à trouver  $T \in H^{1/2}([0, L])$  solution du problème de Dirichlet non homogène :

$$\begin{cases} T'' - \sigma(T - T_a) = 0 \text{ dans } [0, L] \\ T(x=0) = T_c / T(x=L) = T_a \end{cases} \quad (30)$$

**N. B. :** L'annexe (1.2) nous justifie l'existence et l'unicité de la solution faible à notre problème (30).

Pour simplifier la résolution, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\forall x \in ]0, L[, \quad u(x) = T(x) - T_a \quad (31)$$

Ce qui transforme l'équation (1) en :

$$\forall x \in ]0, L[, \quad u''(x) = \sigma u(x) \quad (32)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (32) est donnée par :

$$\forall r \in \mathbb{C}, \quad r^2 = \sigma \quad (33)$$

Cependant, puisque  $\sigma = 25m^{-2}$ , nous pouvons conclure que  $r \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, les solutions de l'équation (32) sont de la forme suivante :

$$\forall x \in ]0, L[, \quad u(x) = Ae^{x/a} + Be^{-x/a} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad (34)$$

En revenant à la fonction  $T$ , nous obtenons finalement :

$$\forall x \in ]0, L[ \text{ et } (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad T(x) = Ae^{x/a} + Be^{-x/a} + T_a \quad (35)$$

En appliquant les conditions aux limites (30) on obtient :

$$\begin{cases} T(x=0) = A + B + T_a = T_c \quad (1) \\ T(x=L) = Ae^{L/a} + Be^{-L/a} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (36)$$

On a d'après (36 (2)) :

$$A = -Be^{-2L/a} \quad (37)$$

Ensuite on a d'après (36 (1)) et (37) :

$$\begin{cases} B = \frac{(T_c - T_a)}{1 - e^{-2L/a}} \quad (1) \\ A = -\frac{(T_c - T_a)e^{-2L/a}}{1 - e^{-2L/a}} \quad (2) \end{cases} \quad (38)$$

## Application numérique

$$\begin{cases} A = -0.0036321593 \text{ }^{\circ}\text{C} & (1) \\ B = 80.00363216 \text{ }^{\circ}\text{C} & (2) \end{cases} \quad (39)$$

Finalement on obtient :

$$\forall x \in [0, L], \quad T(x) = -0.0036321593e^{x/a} + 80.00363216e^{-x/a} + 20 \quad (40)$$

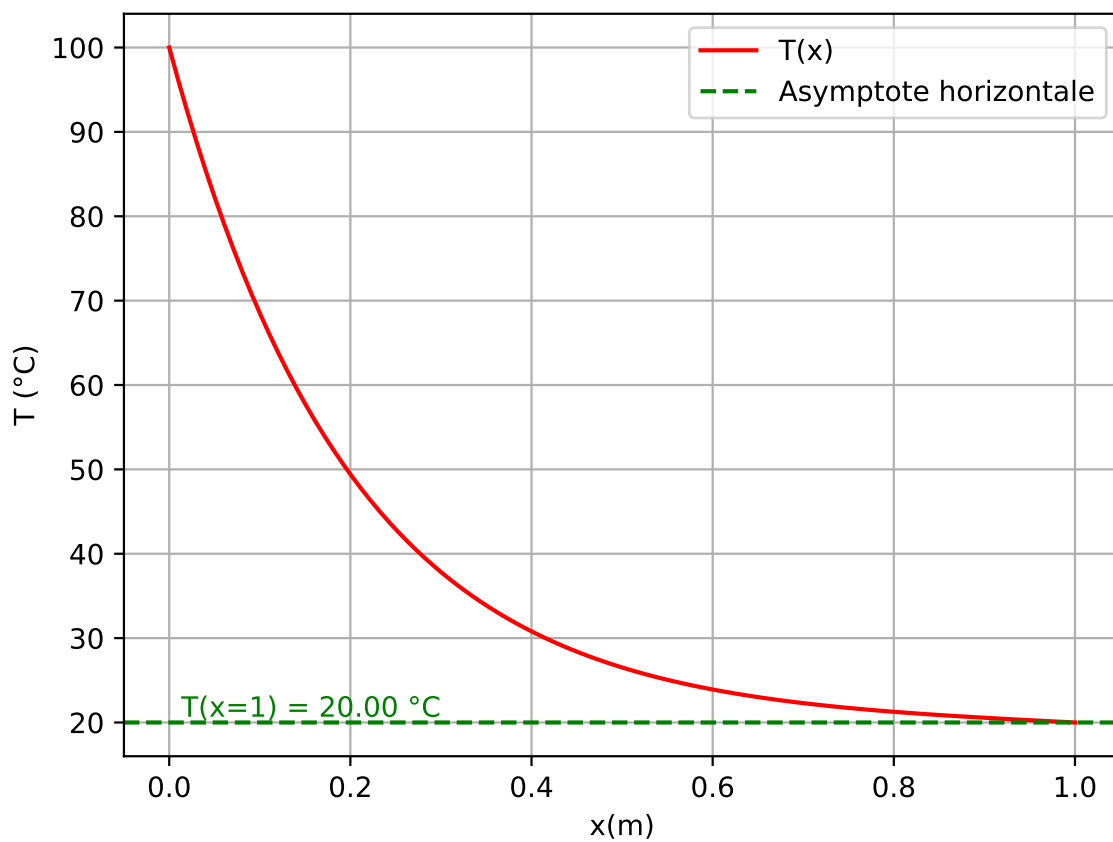


FIGURE 5 – Courbe de la solution du problème (30)

### Question 3

On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Comme nous avons une matrice tridiagonale nous allons programmer l'algorithme de Thomas car il a une complexité en  $O(n)$ , cependant nous devons vérifier que la matrice  $A$  est inversible pour que l'algorithme converge.

**Théorème : lemme d'Hadamard**

Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$  (l'ensemble des matrices carrée à coefficients complexes),  $n \in \mathbb{N}^*$   
Si  $A$  est à diagonale strictement dominante alors  $A$  est inversible

**Définition : Matrice à diagonale strictement dominante**

Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  à coefficient réels ou complexes avec  $n \in \mathbb{N}^*$

(i)  $A$  est à diagonale strictement dominante si et seulement si :

$$\forall i \in [[1, n]], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$$

Pour chaque ligne  $i$ , vérifions si la condition suivante est satisfaite :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$$

Première ligne :

$$|4| > |-1| + |0| + |0| + |0| = 1$$

Deuxième ligne :

$$|3| > |-1| + |-1| + |0| + |0| = 2$$

Troisième ligne :

$$|3| > |0| + |-1| + |-1| + |0| = 2$$

Quatrième ligne :

$$|3| > |0| + |0| + |-1| + |-1| = 2$$

Cinquième ligne :

$$|4| > |0| + |0| + |0| + |-1| = 1$$

Dans tous les cas, l'élément diagonal est supérieur en valeur absolue à la somme des valeurs absolues des autres éléments de la ligne. Donc,  $A$  est à diagonale strictement dominante. Nous pouvons implémenter en Python l'algorithme de Thomas d'après le lemme de Hadamard.

## Algorithme de Thomas

On considère le cas particulier où la matrice  $A$  est matrice inversible (ou régulière ou encore non singulière) et tridiagonale, donnée par

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & & & \\ 0 & b_3 & a_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, les matrices  $L$  et  $U$  de la factorisation LU de  $A$  sont des matrices bidiagonales de la forme :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  peuvent être calculés par les relations :

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_2 \alpha_1 = b_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{b_2}{\alpha_1}, \quad \beta_2 c_1 + \alpha_2 = a_2 \Rightarrow \alpha_2 = a_2 - \beta_2 c_1, \quad \dots$$

Donc, on a

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme de Thomas, et le nombre d'opérations effectuées est de l'ordre de  $n$ .

Avec l'algorithme de Thomas, résoudre un système tridiagonal  $Ax = f$  revient à résoudre 2 systèmes bidiagonaux  $Ly = f$  et  $Ux = y$  avec

$$Ly = f \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{y_n}{\alpha_n} \\ x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Le coût de calcul ici est de  $3(n - 1)$  opérations pour la factorisation et de  $5n - 4$  opérations pour la substitution, pour une totale de  $8n - 7$  opérations.

En implémentant l'algorithme de Thomas sur python pour résoudre 28 on obtient :

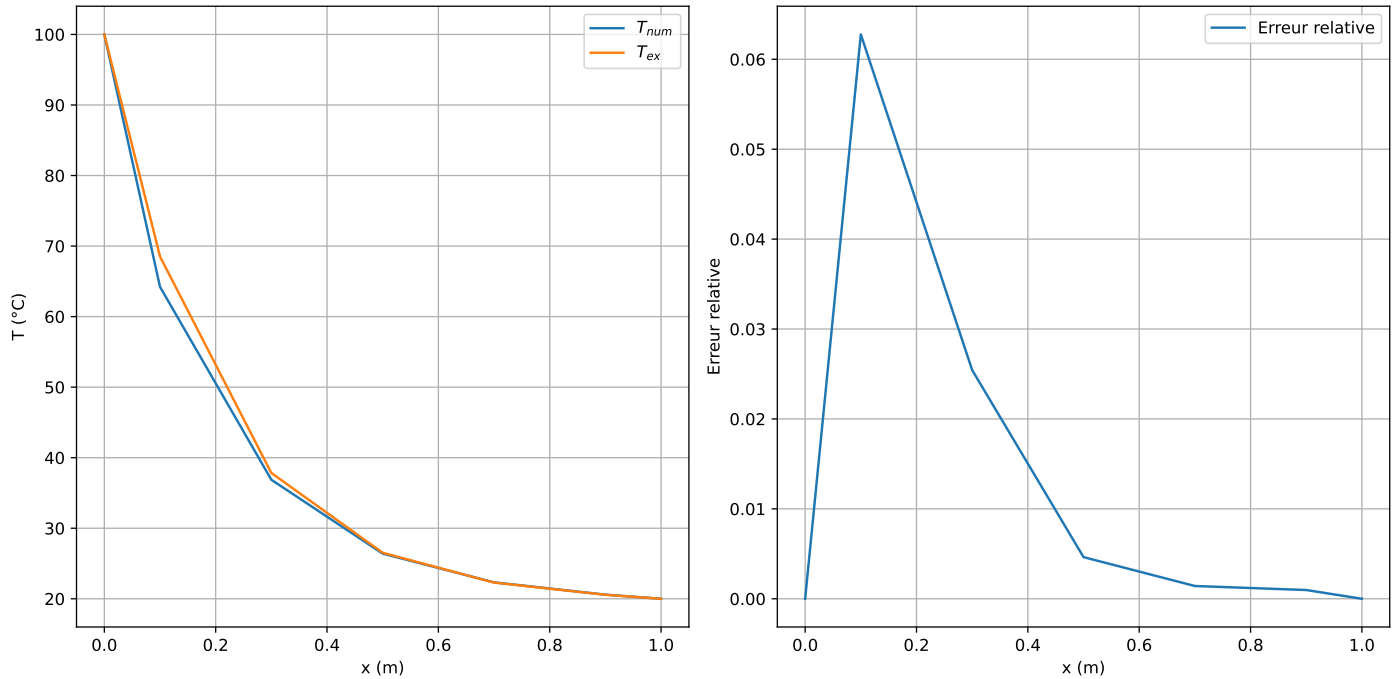


FIGURE 6 –  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  et l'erreur relative entre  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  pour  $n = 5$

## Définition : Erreur relative

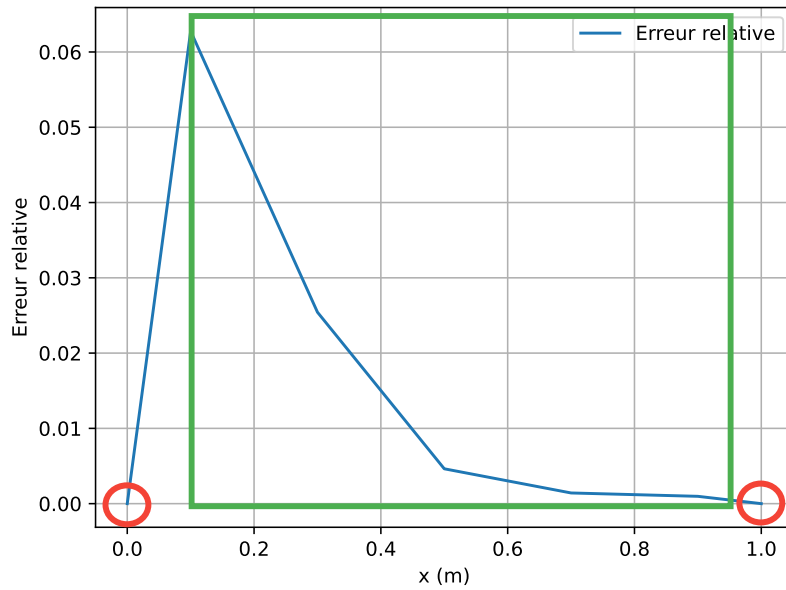
On appelle erreur relative  $E_r$  :

$$E_r = \left| \frac{V_{\text{exacte}} - V_{\text{approximative}}}{V_{\text{exacte}}} \right| \quad (42)$$

- $V_{\text{exacte}}$  est la valeur exacte,
- $V_{\text{approximative}}$  est la valeur approximative.

x (m)	$T_{num}$ (°C)	$T_{ex}$ (°C)	Erreur relative
0.0	100	100.00	6.99e-12
0.1	64.22	68.52	6.27e-02
0.3	36.87	37.83	2.54e-02
0.5	26.40	26.52	4.63e-03
0.7	22.33	22.29	1.42e-03
0.9	20.58	20.56	9.73e-04
1	20	20.00	1.42e-10

TABLE 1 – Comparaison des Températures et Erreur relative,  $n = 5$

FIGURE 7 – Interprétation de l'erreur relative pour  $n = 5$ 

### Interprétation de l'erreur :

Tout d'abord, pour les cercles orange, on a une erreur quasi nulle car nous connaissons les températures en  $x = 0m$  et  $x = 1m$  d'après l'équation (30).

Ensuite, nous devons démontrer que les erreurs liées à l'approximation de l'intégrale (5), à la dérivée centrée et à la dérivée à gauche ont bien la même allure que la courbe encadrée en vert.

### Calcul de l'erreur sur l'intégrale :

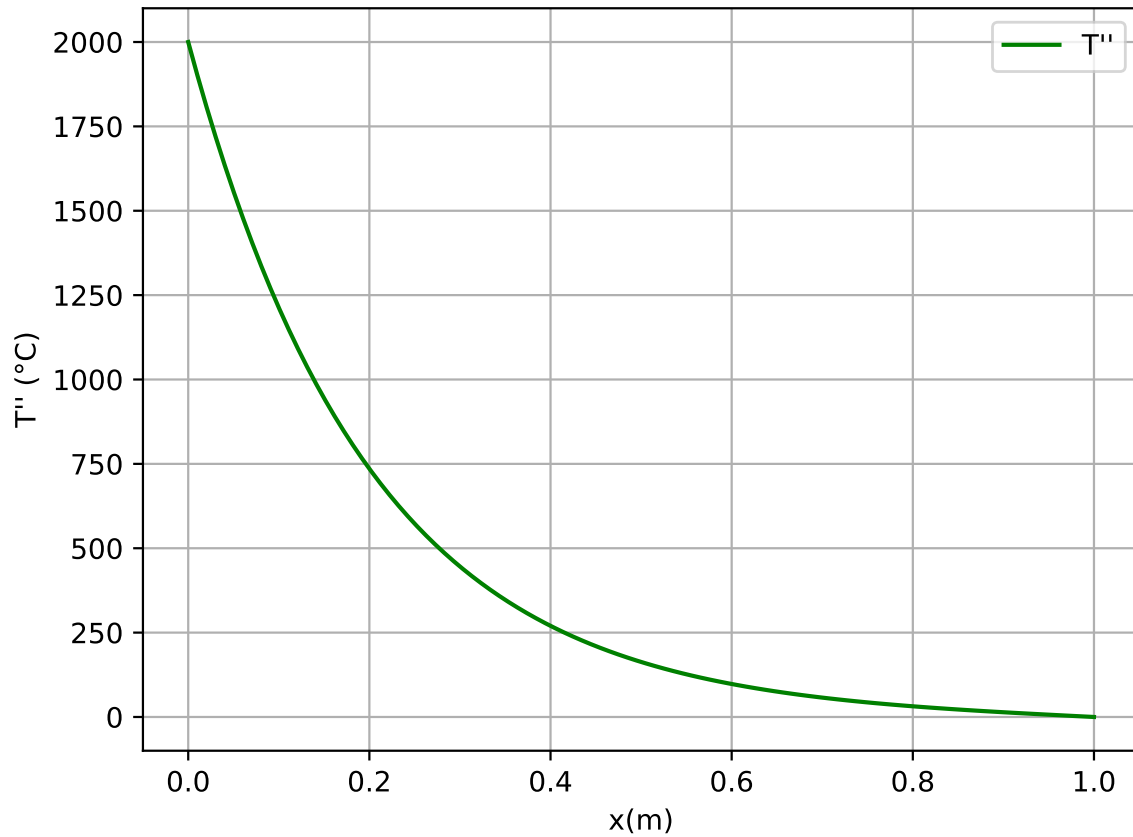
**Rappel :** D'après le résultat (40), on peut dire que  $T$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ , car la fonction  $x \mapsto e^x$  est  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$  et en vertu du théorème d'addition de fonctions  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ .

L'inégalité (5) nous permet de caractériser l'erreur sur l'intégrale, pour commencer nous allons calculer :

$$M = \sup_{t \in I} |T''(t)| \quad (43)$$

En utilisant (40) et comme  $T$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$  on a :

$$\forall x \in [0, L], T''(x) = \frac{-0.0036321593}{a^2} e^{x/a} + \frac{80.00363216}{a^2} e^{-x/a} \quad (44)$$

FIGURE 8 – Courbe de  $T''$ 

D'après (6) et (13) et (21) on applique la méthode des rectangles aux points médians sur toute les subdivisions de l'intervalle de  $[0, 1]$  donc on doit calculer la valeur de  $M$  sur les  $[0, 0.2]$ ,  $\dots$ ,  $[0.8, 1]$ .

D'après le théorème de la limite monotone (62) il suffit de calculer la limite à droite de  $T''$  pour avoir  $M$  sur chaque subdivision :

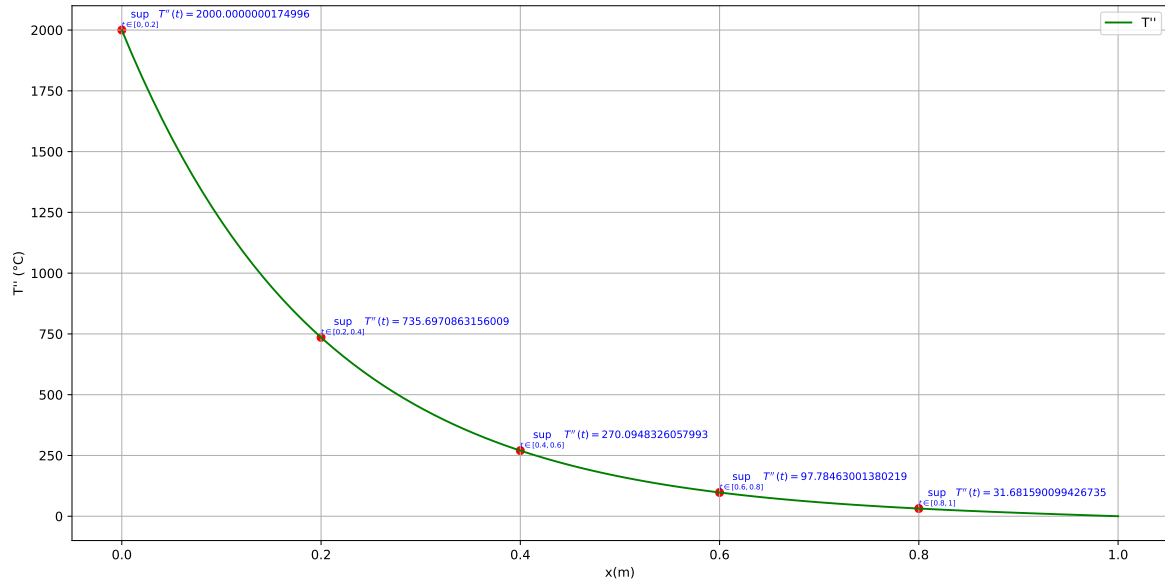


FIGURE 9 –  $T''$  avec les valeurs de  $\sup_{t \in [a, b]} T''(t)$  pour chaque intervalle

On déduit donc dans notre cas que l'erreur intégrale vaut :

$$M \frac{\delta x^3}{24n^2} \quad (45)$$

où  $\delta x = 0.2$  et  $n = 5$

Donc on obtient le tableau 2 :

Intervalles	$\sup_{t \in [a, b]} T''(t)$	Erreur sur l'intégrale
$[0, 0.2]$	2000.0000000174996	0.0266666666666900003
$[0.2, 0.4]$	735.6970863156009	0.009809294484208015
$[0.4, 0.6]$	270.0948326057993	0.0036012644347439915
$[0.6, 0.8]$	97.78463001380219	0.0013037950668506962
$[0.8, 1]$	31.681590099426735	0.0004224212013256899

TABLE 2 – Valeurs de  $\sup_{t \in [a, b]} T''(t)$  pour chaque intervalle



On peut remarquer que l'allure de la courbe intégrale correspond allure de la courbe d'erreur (figure 6)

### Calcul de l'erreur sur la différence centré autour de $x$

On applique l'approximation sur la dérivée avec différence centrée autour de  $x$ , 6 fois dans les volumes  $K_1, K_2, K_3$  et 2 fois dans les volumes  $K_4, K_5$  donc l'erreur total  $e_{total}$  :

$$e_{total} = 8e_{deri\grave{v}ee} \quad (46)$$

où  $e_{deri\grave{v}ee} = \frac{h^2}{6} \sup_{y \in I} |T'''(y)|$  d'après (59)

En utilisant (40) et comme  $T$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ , on calcul  $T'''$  :

$$\forall x \in [0, L], T'''(x) = \frac{-0.0036321593}{a^3} e^{x/a} + \frac{-80.00363216}{a^3} e^{-x/a} \quad (47)$$

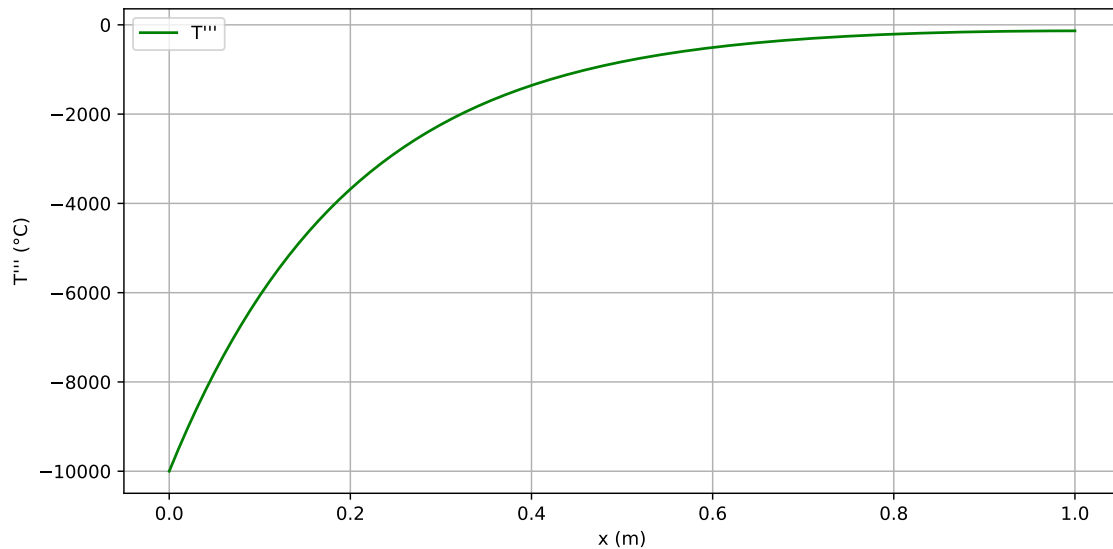


FIGURE 10 – Courbe de  $T'''$

Même raisonnement que pour le calcul sur l'erreur de l'intégrale on calcul des bornes supérieures sur chaque intervalle en appliquant le théorème de la limite monotone (62) pour une fonction croissante, on obtient donc :

Intervalles	$\sup_{t \in [a,b]} T'''(t)$	Erreur sur la dérivée décentrée
$[0, 0.2]$	-3680.95423838629	24.539666666666667
$[0.2, 0.4]$	-1357.1857671793443	9.047933333333335
$[0.4, 0.6]$	-507.16721926670385	3.381133333333334
$[0.6, 0.8]$	-207.9954651983405	1.386666666666667
$[0.8, 1]$	-134.76505866315156	0.8984666666666669

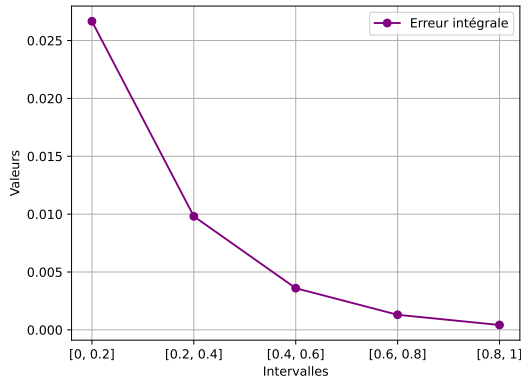
TABLE 3 – Valeurs de  $\sup_{t \in [a,b]} T'''(t)$  pour chaque intervalle**Erreur sur la dérivée à gauche**

Ensuite sur  $K_1$  et  $K_5$  on applique 2 fois l'approximation sur la dérivée avec la différence décentrée à gauche. Du calcul des bornes supérieur de  $T''$  effectué exprimé dans le tableau 2 sur chaque intervalle et l'inégalité (60), on en déduit que :

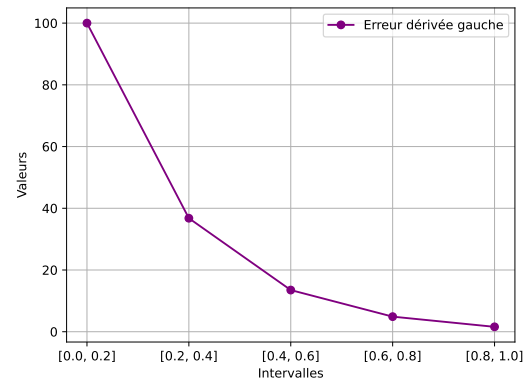
Intervalles	$\sup_{t \in [a,b]} T''(t)$	Erreur sur la dérivée gauche
$[0, 0.2]$	2000.0000000174996	100.0
$[0.2, 0.4]$	735.6970863156009	36.7775
$[0.4, 0.6]$	270.0948326057993	13.5005
$[0.6, 0.8]$	97.78463001380219	4.888
$[0.8, 1]$	31.681590099426735	1.584

TABLE 4 – Valeurs de  $\sup_{t \in [a,b]} T''(t)$  pour chaque intervalle

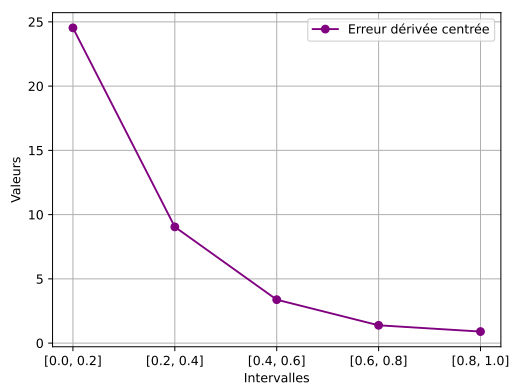
En traçant l'ensemble des courbes d'erreur on obtient :



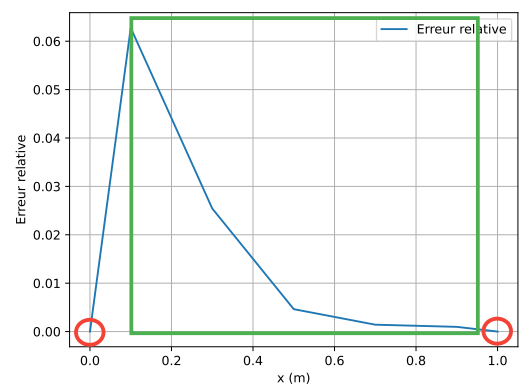
(a) Erreur intégrale pour chaque intervalle



(b) Erreur sur la dérivée à gauche sur chaque intervalle



(c) Erreur sur la dérivée centrée autour de  $x$  sur chaque intervalle



(d) Interprétation de l'erreur relative pour  $n = 5$

FIGURE 11 – L'ensemble des erreurs

**Conclusion :** En observant la figure 11 on voit que l'ensemble des courbes d'erreur sur nos calculs pour la méthode des volumes finis (figure 11c , 11b et 11a ) on la même allure ce qui confirme l'impact de chaque approximation sur la courbe d'erreur final (figure 11d).

## Question 5

Nous prenons désormais  $n = 10$  dans notre programme, on obtient le tableau 5 et la figure 12

$x(m)$	$T_{num}$ (°C)	$T_{ex}$ (°C)	Erreur
0.00	100.00	100.00	6.99998282e-12
0.05	80.60	82.30	2.07409619e-02
0.15	56.93	57.78	1.46919471e-02
0.25	42.51	42.91	9.35812691e-03
0.35	33.71	33.88	5.16039257e-03
0.45	28.33	28.40	2.28030425e-03
0.55	25.04	25.06	5.97137009e-04
0.65	23.01	23.01	1.96752357e-04
0.75	21.74	21.73	4.30273501e-04
0.85	20.89	20.89	3.56063335e-04
0.95	20.28	20.27	1.34587095e-04
1.00	20.00	20.00	1.42419765e-10

TABLE 5 – Comparaison des Températures et Erreur relative,  $n=10$

Courbe solution pour  $n = 10$  et Erreur pour  $n = 10$

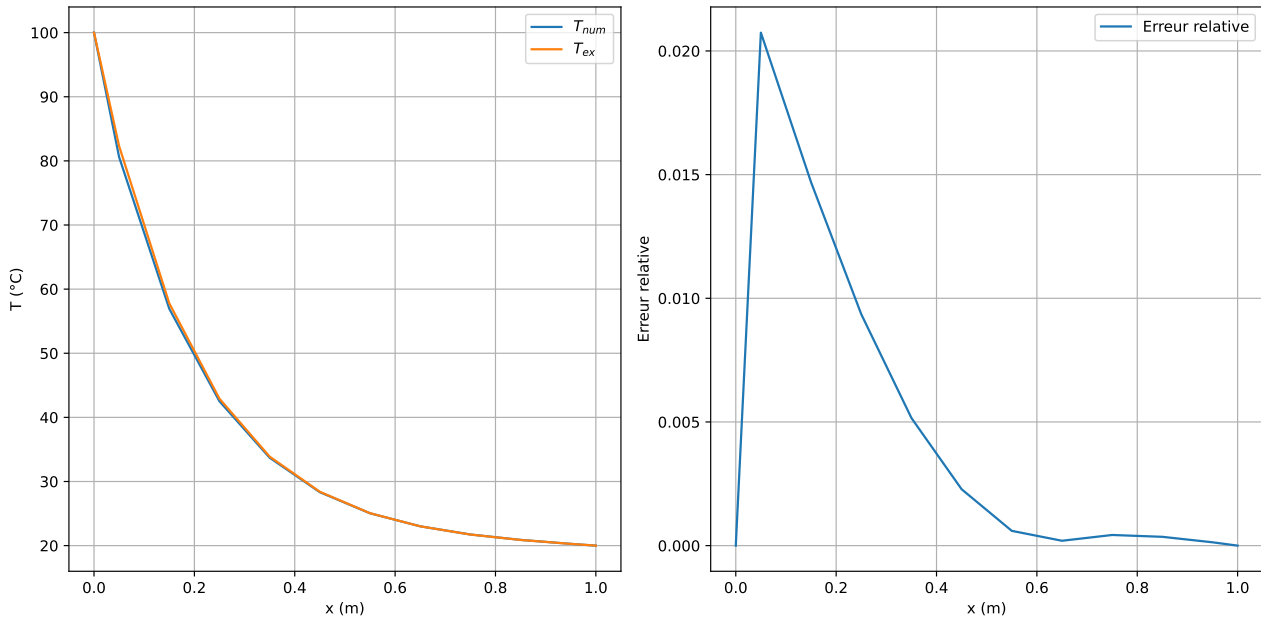


FIGURE 12 –  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  et l'erreur relative entre  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  pour  $n = 10$

Ensuite, nous prenons  $n = 50$  et nous traçons les mêmes courbes que pour  $n = 10$  reliant températures et distance ainsi que erreur relative et distance.

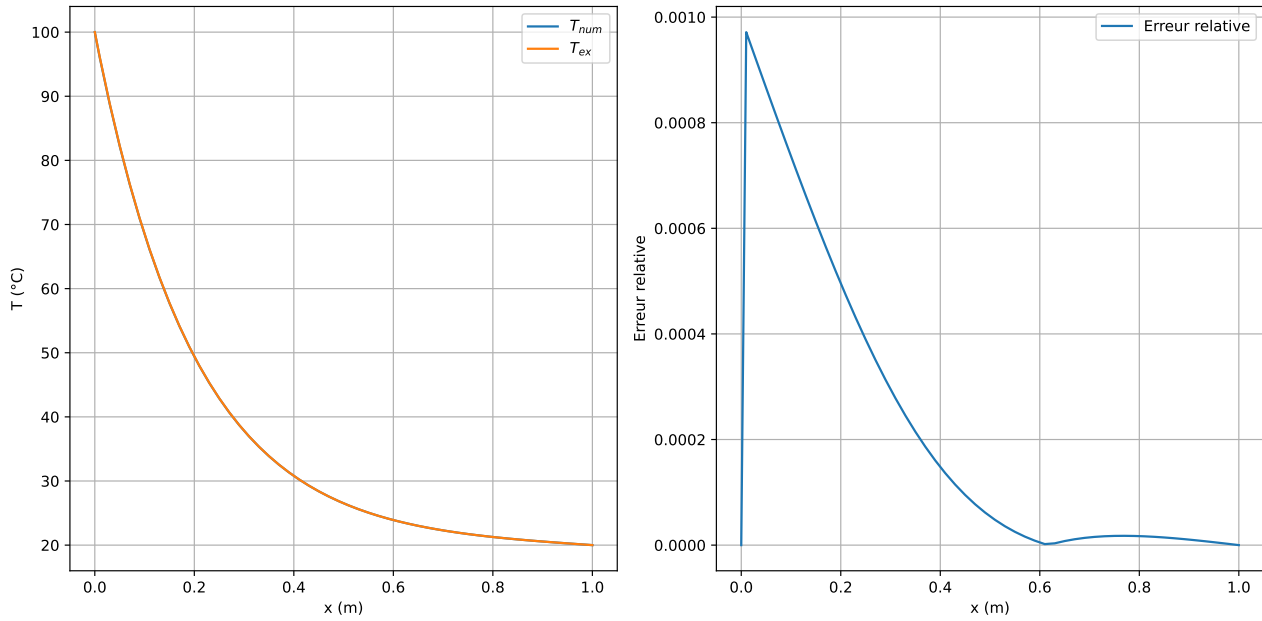


FIGURE 13 –  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  et l'erreur relative entre  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  pour  $n = 50$

Enfin nous procédons à la même chose pour  $n = 300$ .

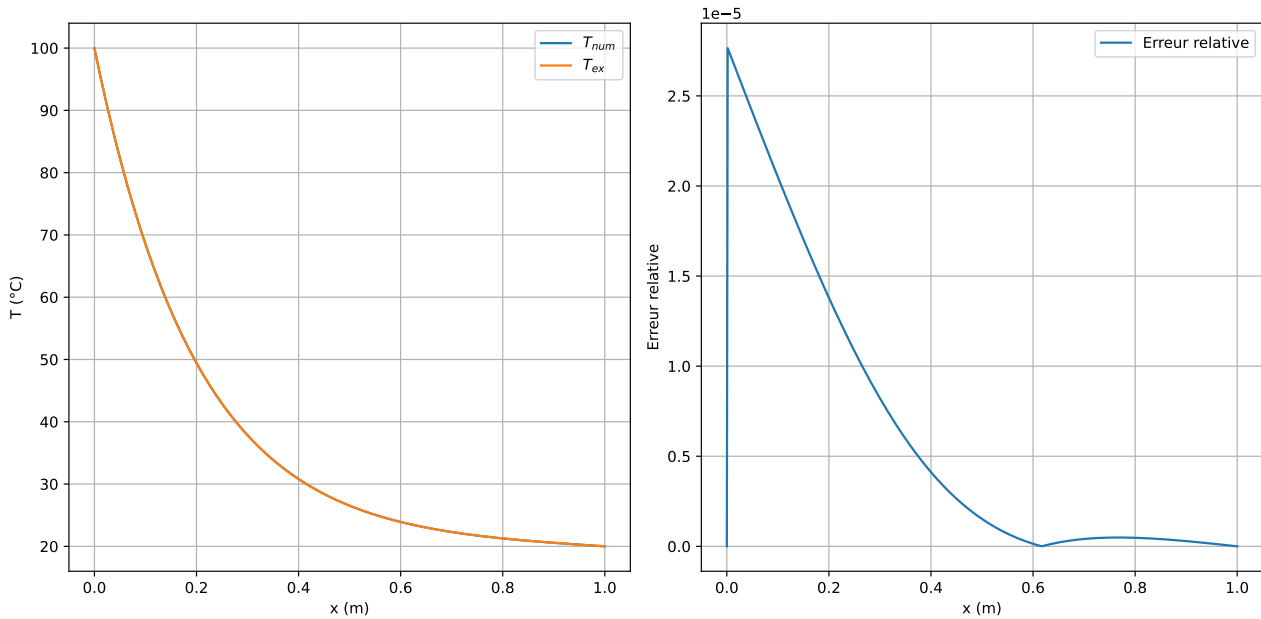


FIGURE 14 –  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  et l'erreur relative entre  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  pour  $n = 300$

**Encadrement  $N_{maxi}$**  Pour trouver notre  $N_{maxi}$ , nous commençons à  $n = 1$  en ajoutant un facteur 10 à chaque nouvel essai. Au final nous arrivons à un  $N_{maxi} = 10.000.000$

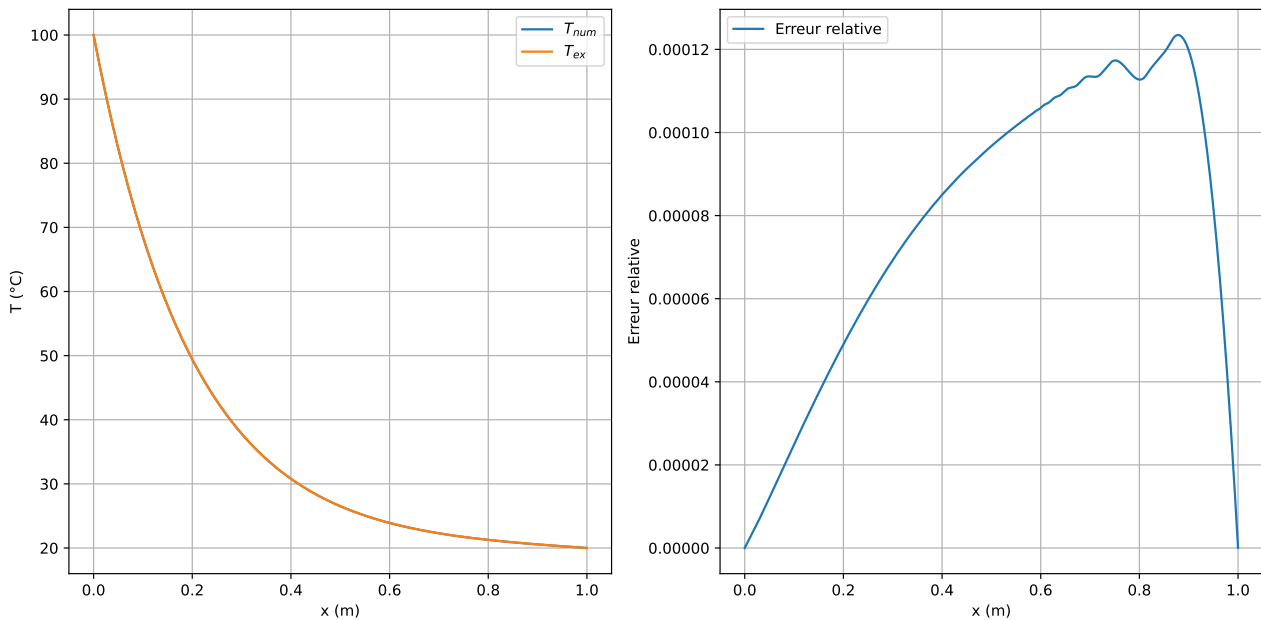


FIGURE 15 –  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  et l'erreur relative entre  $T_{num}$ ,  $T_{ex}$  pour  $n = 10.000.000$

Enfin la courbe (figure 16) de l'erreur quadratique moyenne en fonction de la taille des volumes de contrôles  $\delta x \mapsto E(\delta x)$

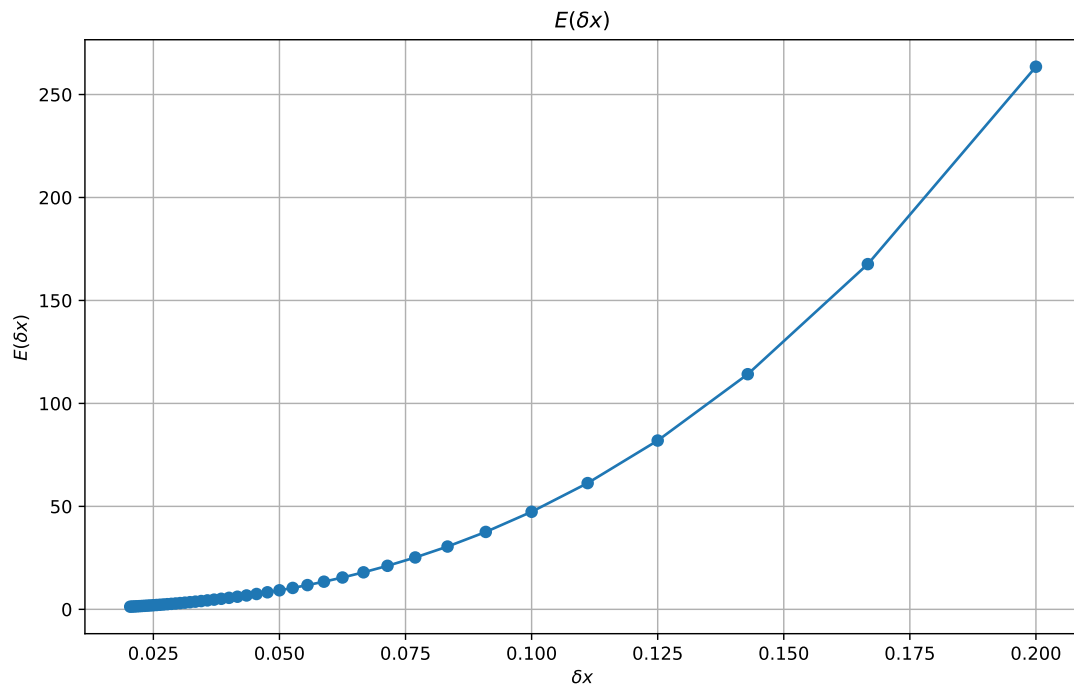


FIGURE 16 – Erreur quadratique moyenne de  $T$  en fonction de  $\delta x$  pour  $n \in [[5, 50]]$

### Question 7

En faisant varier  $k$  entre 16 et 420  $\text{W.m}^{-1}.\text{Km}^{-1}$  nous déduisons que plus  $k$  est faible plus la température diminue rapidement en s'éloignant de la source de chaleur à  $x = 0$

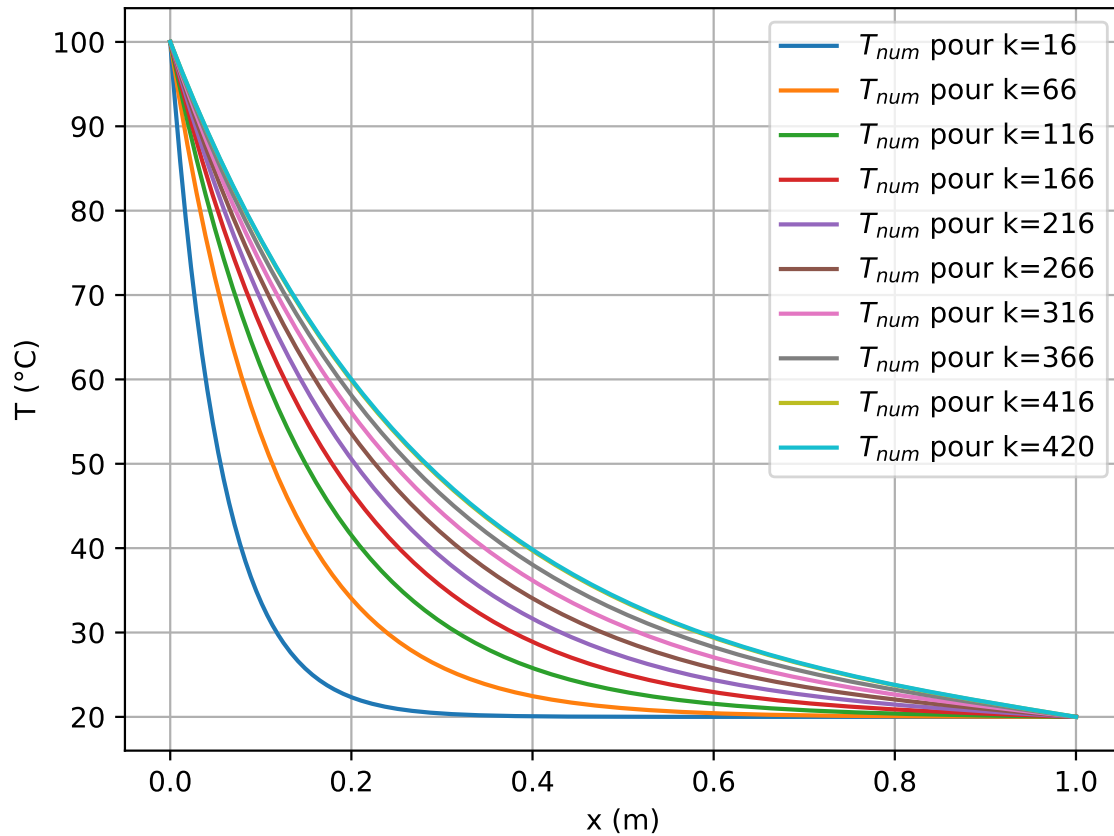


FIGURE 17 – Évolution du profil de température  $T$  avec la variation de la conductivité  $k$



## 1. Annexes

### 1.1 Conducto-convection

**Arguments physique :** La conducto-convection induit nécessairement une discontinuité de la température à l'interface entre l'ailette et l'air qui s'écoule.

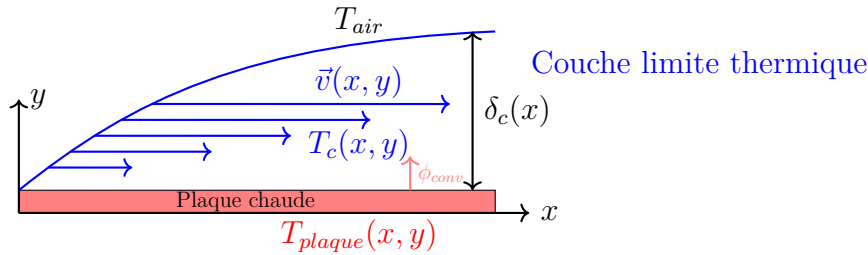


FIGURE 18 – Représentation de la couche limite thermique sur la plaque,  $\delta_c(x)$  : épaisseur de la couche limite en  $x$ ,  $T_c(x, y)$  température de la couche limite en  $(x, y)$ ,  $\vec{v}(x, y)$  : vitesse de la particule de fluide en  $(x, y)$ ,  $\phi_{conv}$  : flux convectif [1]

Donc en  $x = L$  on a :

$$T(x = L) \neq T_a ! \quad (48)$$

#### Conditions aux limites :

En considérant les conditions aux limites, nous avons deux contraintes à satisfaire. La première condition aux limites stipule que la base de l'ailette est soumise à une température  $T_c$ , ce qui se traduit mathématiquement comme suit :

$$T(x = 0) = T_c \quad (49)$$

La deuxième condition aux limites découle de l'équation (1) qui implique la continuité du flux thermique à l'extrémité de l'ailette ( $x = L$ ) entre la conduction thermique ( $-kT'(x = L)$ ) et la convection thermique ( $h(T(x = L) - T_a)$ ). Ceci se traduit :

$$-kT'(x = L) = h(T(x = L) - T_a) \quad (50)$$

où :

- $-kT'(x = L)$  : Loi de Fourier en L (flux de conduction thermique)
- $h(T(x = L) - T_a)$  : Loi de Newton en L (flux de convection thermique)

En utilisant les conditions aux limites (49) et (50) sur l'équation (35), nous pouvons établir le système d'équations suivant pour les inconnues A et B :

$$\begin{cases} A + B + T_a = T_c & (1) \\ \frac{A}{a}e^{L/a} - \frac{B}{a}e^{-L/a} = \frac{-h}{k} \left( Ae^{L/a} + Be^{-L/a} \right) & (2) \end{cases} \quad (51)$$

On exprime A et B avec (51 (2)) :

$$\begin{aligned}
 Ae^{L/a} \left( \frac{1}{a} + \frac{h}{k} \right) &= Be^{-L/a} \left( \frac{1}{a} - \frac{h}{k} \right) \\
 \Leftrightarrow Ae^{L/a} \left[ \frac{k+ha}{ak} \right] &= Be^{-L/a} \left[ \frac{k-ha}{ak} \right] \\
 \Leftrightarrow Ae^{L/a} [k+ha] &= Be^{-L/a} [k-ha]
 \end{aligned} \tag{52}$$

en utilisant (51 (1)) et (52) on a :

$$\begin{cases} A + A \frac{e^{L/a}[k+ha]}{e^{-L/a}[k-ha]} = T_c - T_a \\ B + B \frac{e^{-L/a}[k-ha]}{e^{L/a}[k+ha]} = T_c - T_a \end{cases} \tag{53}$$

Finalement nous obtenons les expressions de A et B en fonction de  $T_c$ ,  $T_a$ ,  $a$ ,  $h$ , et  $k$  :

$$\begin{cases} A = \frac{(T_c - T_a)(k-ha)e^{-L/a}}{(k+ha)e^{L/a} + (k-ha)e^{-L/a}} \\ B = \frac{(T_c - T_a)(k+ha)e^{L/a}}{(k+ha)e^{L/a} + (k-ha)e^{-L/a}} \end{cases} \tag{54}$$

Application numérique :

$$A = 0.0035599153 \text{ } ^\circ\text{C} / B = 79.99644008 \text{ } ^\circ\text{C} \tag{55}$$

Donc la solution de l'équation 1 est de la forme :

$$\boxed{\forall x \in [0, L], T(x) = 0.0035599153e^{x/a} + 79.99644008e^{-x/a} + 20} \tag{56}$$

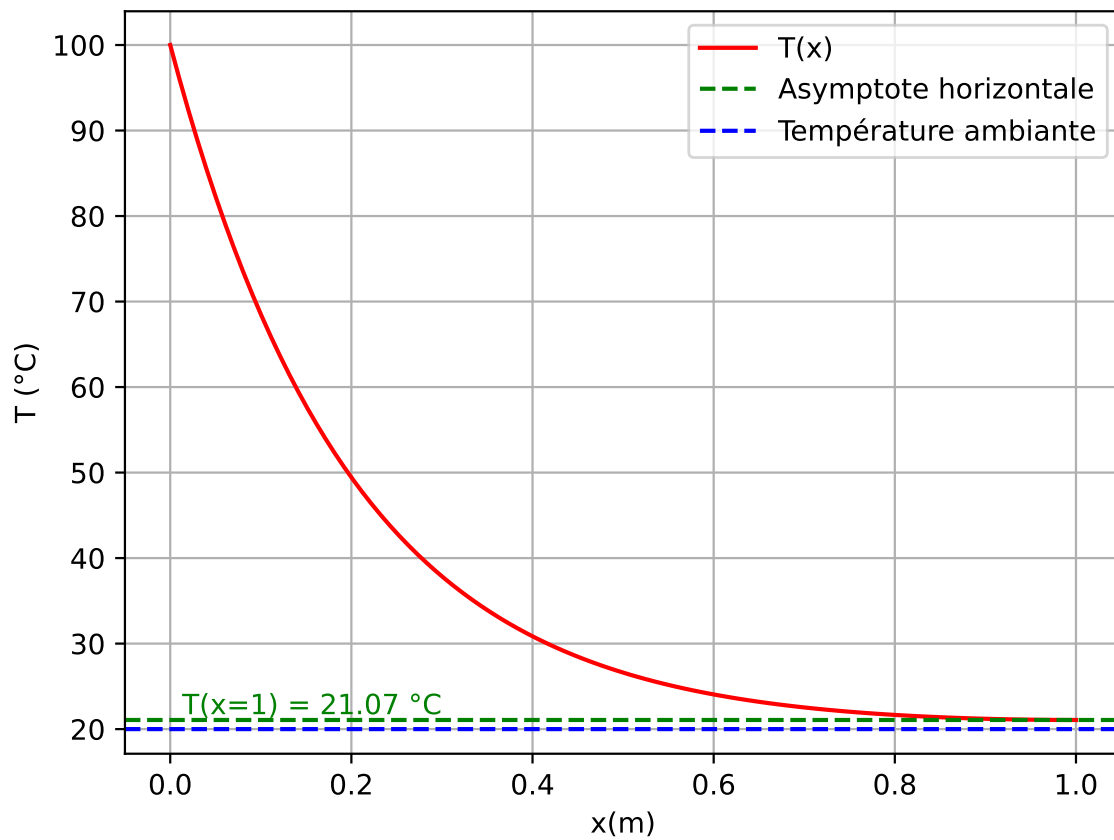


FIGURE 19 – Courbe de la solution (30) avec la bonne condition aux limites

**Conditions aux limites :**

Pour établir les conditions aux limites numériques nous allons simplement regarder les valeurs de  $T$  en  $x = 0$  et en  $x = L$ , donc directement on obtient les conditions aux limites numérique suivante :

$$\begin{cases} T(x = 0) = T_c \\ T(x = L) = 21.07^\circ\text{C} \end{cases} \quad (57)$$

## 1.2 Problème de Dirichlet non homogène

### **Théorème : Existence et unicité pour le problème de Dirichlet non homogène**

On suppose que  $\Omega$  est borné ou  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Omega)$  alors il existe une unique solution faible au problème de Dirichlet non homogène :

Trouver  $u \in H^{1/2}(\Omega)$  telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

-  $\partial\Omega$  : bord de  $\Omega$

- Notion de solution faible [1] p.11-12

-  $H^{1/2}(\Omega)$  : espace de Sobolev d'ordre fractionnaire

cf [1] p.61

Comme  $T_a$  et  $T_c$  sont des constantes on a bien :

$$(T_a, T_c) \in (H^{1/2}(]0, L[)) ^2 \quad (58)$$

Enfin  $f = \sigma(T - T_a)$  appartient bien à  $L^2(]0, L[)$  car on a supposé que  $T \in H^{1/2}(]0, L[)$  et que  $\sigma$  et  $T_a$  sont des constantes finies.

Donc en vertu du Théorème 1 il existe une unique solution faible à notre problème.

### 1.3 Approximation numérique de la dérivée

**Théorème : Erreur de troncature différence centrée autour de  $x$** 

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$  le pas.

Si  $f$  est de classe  $C^3$  sur  $I$  et de dérivées bornées jusqu'à l'ordre 3, alors on a pour  $x \in I$  :

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} \sup_{y \in I} |f'''(y)| \quad (59)$$

**Théorème : Erreur de troncature différence décentrée à gauche**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$  le pas.

Si  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $I$  et de dérivées bornées jusqu'à l'ordre 2, alors on a pour  $x \in I$  :

$$\left| f'(x) - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{y \in I} |f''(y)| \quad (60)$$

**Nota :** On peut démontrer ces théorèmes grâce à la formule de Formule de Taylor-Lagrange et Inégalité de Taylor-Lagrange

## 1.4 Outil pour calculer la borne supérieure d'une fonction

### Théorème : théorème de la limite monotone

Soient  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une application décroissante, et  $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Si  $a$  est un point adhérent à  $D \cap ]-\infty, a[$ , alors

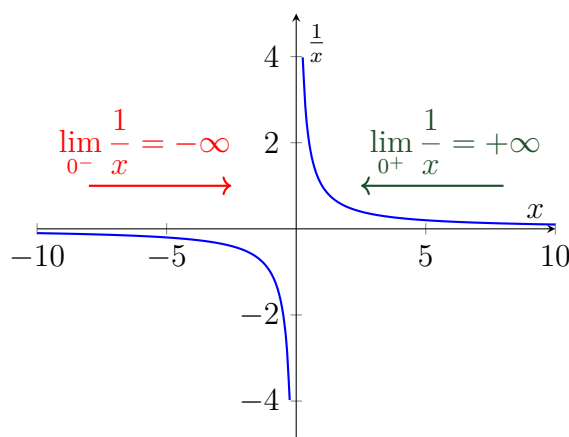
$$\lim_{a^-} f = \inf (f(D \cap ]-\infty, a[)). \quad (61)$$

Si  $a$  est un point adhérent à  $D \cap ]a, +\infty[$ , alors

$$\lim_{a^+} f = \sup (f(D \cap ]a, +\infty[)). \quad (62)$$

**Notation :**

- $\lim_{a^+} f$  : limite en  $a$  de  $f$  par valeurs positives (ou limite à droite en  $a$  de  $f$ )
- $\lim_{a^-} f$  : limite en  $a$  de  $f$  par valeurs négatives (ou limite à gauche en  $a$  de  $f$ )



### Définition : Norme sur un espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle norme sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$  (séparation),
- $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$  (homogénéité),
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire).

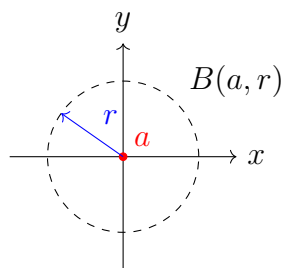
On dit alors que  $(E, N)$  est un **espace vectoriel normé**.

**Définition : Boule ouverte**

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $a \in E$  et  $r \geq 0$  et  $A$  une partie de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$

On appelle boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\} \quad (63)$$

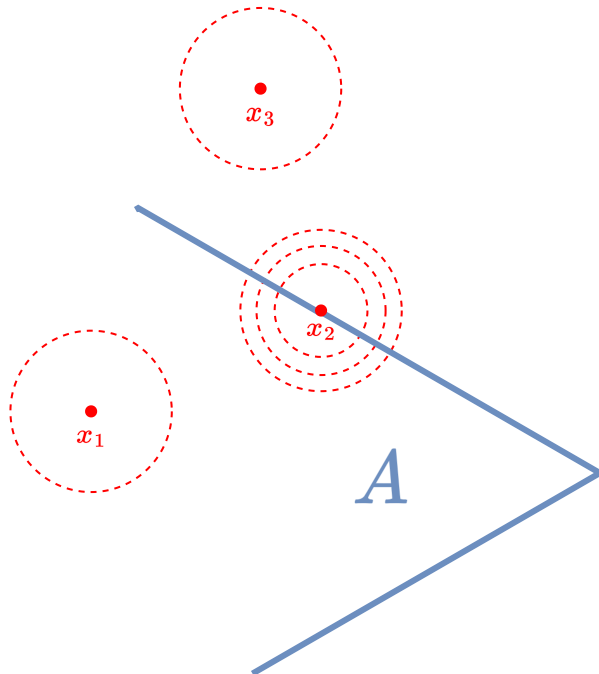


**Figure :** Boule ouverte dans  $\mathbb{R}^2$

**Définition : Point intérieur, point adhérent**

Soient  $A$  une partie de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . On dit que :

- $x$  est un **point intérieur** à  $A$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$  (c'est-à-dire si  $A$  est un voisinage de  $x$ ).
- $x$  est un **point adhérent** à  $A$  si pour tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .



**Figure :**  $x_1$  : point intérieur,  $x_2$  : point adhérent,  $x_3$  : point extérieur

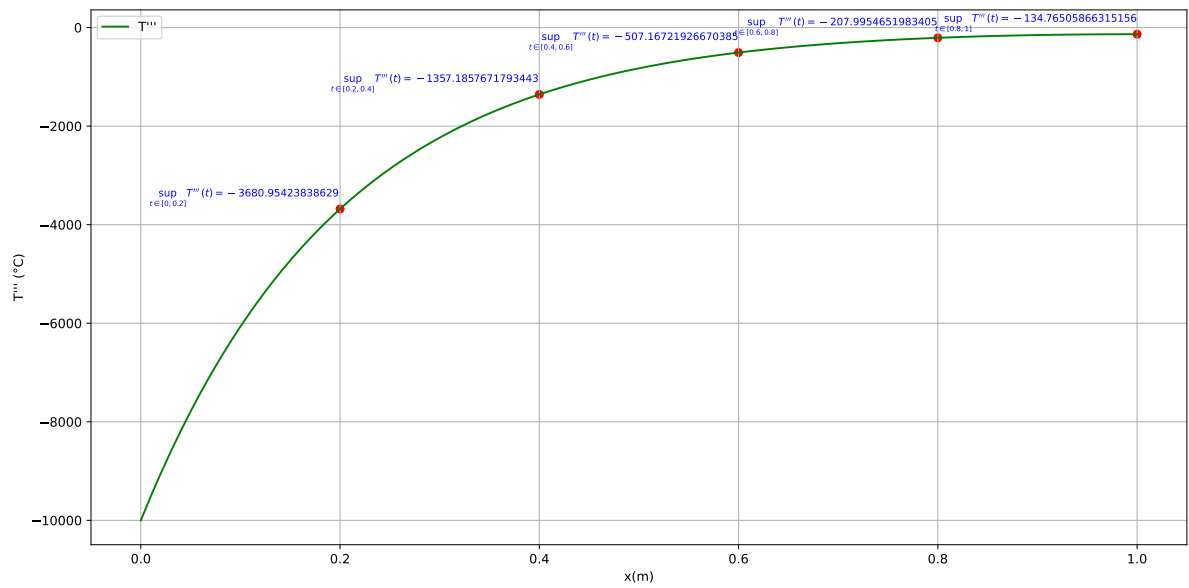


FIGURE 20 –  $T'''$  avec les valeurs de  $\sup_{t \in [a, b]} T'''(t)$  pour chaque intervalle avec  $n = 5$



## Références

- [1] Patrick Ciarlet and Eric Luneville. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique*. ISTE Group, 2022.