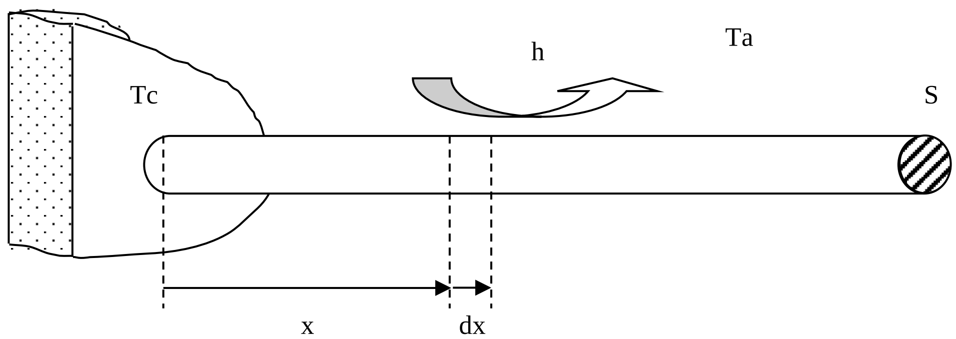
Génie Physique $4^{ème}$ année Année 2023-2024

Méthodes Numériques pour les équations de transport

T.P. n°1 – Méthodes de volumes finis

Diffusion le long d'une ailette de refroidissement

Le refroidissement d'engins comme les moteurs thermiques ou les échangeurs s'effectue par le biais d'ailettes.
Nous considérons une ailette cylindrique de section droite constante, collée à la paroi du corps chaud. Un transfert de chaleur par convection avec l'air ambiant se développe le long de la barre.

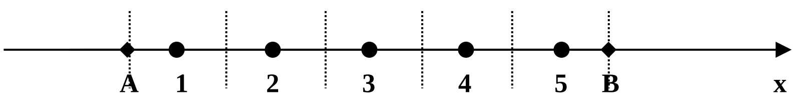


La base de l'ailette est donc soumise à la température Tc=100°C. On se place dans le cas idéal où l'ailette est supposée suffisamment longue pour que l'autre extrémité soit suffisamment refroidie et se retrouve à température ambiante. L'ailette est exposée à une ambiance à température Ta=20°C, sa longueur est L=1m et son rayon R=4mm.
On considère une ailette mince (c'est à dire que l'écart de température à l'intérieur de la barre est supposé faible sur une section droite S).
On prendra $k=200 W.m^{-1}.K^{-1}$ pour la conductivité thermique et $h=10 W.m^{-2}.K^{-1}$ comme coefficient de transfert convectif. On suppose que k et h sont constants.

A l'équilibre, le bilan thermique dans une tranche de l'ailette de longueur dx s'écrit :

$$k\,S\,\frac{d^2T}{dx^2} - h\,P\,(T - Ta) = 0$$

1. On considère le maillage uniforme dessiné ci-dessous, dans lequel le domaine d'intégration est divisé en cinq volumes de contrôle, identiques de longueur $\delta x=0,2$ m (n=5).



1.1. Par la méthode des volumes finis, intégrer l'équation établie à la question 1 sur les volumes de contrôle 2, 3 et 4, puis écrire l'équation discrétisée sous la forme générale habituelle en donnant l'expression de chacun des coefficients.
1.2. Intégrer l'équation sur les volumes de contrôle 1 et 5 adjacents aux frontières du domaine de calcul. Pour cela, les flux conductifs à travers les interfaces confondues avec les frontières seront approchés de manière linéaire par des dérivées décentrées du 1^{er} ordre, si nécessaire. Ecrire les deux équations discrétisées sous la forme générale habituelle en donnant l'expression de chacun des coefficients.
1.3. Expliciter le système à résoudre.

2. Calculer la solution exacte du problème.

3. Programmer avec le langage de votre choix, en choisissant une résolution du système avec une méthode directe. On considèrera le nombre de volumes de contrôle n comme un paramètre du programme.

4. Résolution et validation de la solution pour n=5.
   4.1. Calculer la solution du système établi à la question 1. Comparer avec la solution exacte sur un tableau. Tracer les courbes interpolées $T_{ex}(x)$ et $T_{num}(x)$ pour $x \in [0, L]$ sur le même graphe.
   4.2. Calculer l'erreur relative en tout point ($x \in [0, L]$). Comparer les solutions (tableau).
   4.3. Justifier les courbes (allure, approximations, etc.).

5. Convergence de la solution.
   5.1. Raffiner le maillage (utiliser des maillages de plus en plus fins : n = 10, 50, 300) jusqu'à ce que la solution converge vers une solution unique. Tracer les courbes de comparaison. Pour N=10, remplir le tableau de comparaison des solutions également.
   Encadrer la valeur N_{maxi} calculable avec votre programme.

   5.2. Tracer la courbe d'erreur $E=f(\delta x)$ (ou $E=f(n)$, n étant le nombre de points de calcul)
   avec $E(T) = \mathrm{Max}\left|\dfrac{T - T_{ex}}{T_{ex}}\right|$ et/ou $E(T) = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|T(x_i) - T_{ex}(x_i)\right|^2\right)^{1/2}$.

6. Vectoriser le programme autant que possible (programmation vectorielle).

7. Etudier l'influence de la conductivité de l'ailette en choisissant un maillage adapté : faire varier k entre 16 (acier inoxydable) et 420 $W.m^{-1}.K^{-1}$ (argent).
   Conclure.