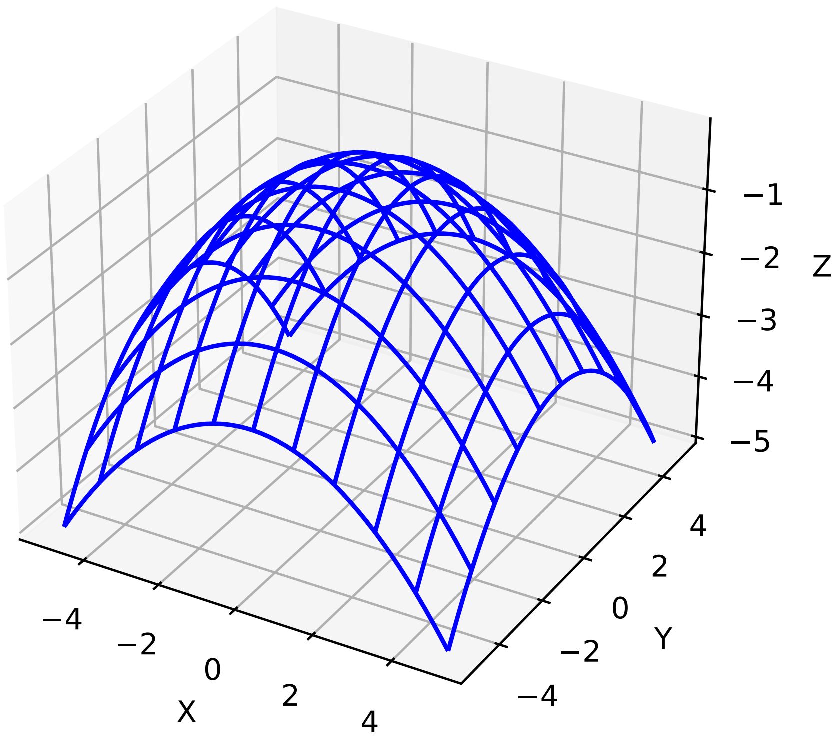
TP2 : Méthode des éléments finis

Auteurs :
Vincent MARAIS
Clément BOSSÉ



Notations et hypothèses :

— $n \in \mathbb{N}^*$
— A chaque nœud, on associe une fonction $(N_i)_{i\in\{0,1,2,\ldots,n\}}$, telle que :

$$\forall x \in \Omega,\ N_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{pour } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{pour } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i \in \{0,1,\ldots,n-1\} \\ \\ 0 & \text{pour } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}, \quad i \in \{0,1,\ldots,n\} \end{cases} \tag{1}$$

où $\frac{1}{n} = h$ est la longueur de l'intervalle entre les nœuds, et x_i sont les positions des nœuds.

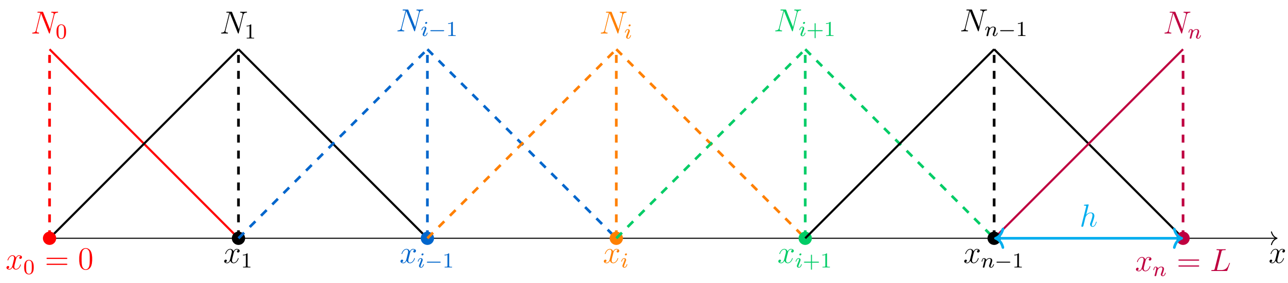


FIGURE 1 – Base de fonctions triangles

— $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$: La dérivée de la fonction f par rapport à x évaluée en $x = 1$
— $[[0, n]] := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
— $\Omega = [0, 1]$
— $C^0(\Omega)$: ensemble des fonctions continues sur Ω
— $\forall i \in [[0, n]],\ x_i = ih$
— $\forall i \in [[0, n]],\ h = x_{i+1} - x_i$
— c_i valeur de la fonction au point x_i
— $\tilde{c} = \sum_{i=0}^{n} c_i N_i$

Programme : Lien du programme

Question 1

Considérons le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, \ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}x}\right|_x\right) = f(x) \\ c(x=0) = c(x=1) = 0 \text{ et } f \in C^0(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

En multipliant chaque côté de l'équation (2) par la fonction N_k, on obtient :

$$\forall \left(x \in [0,1] \text{ et } k \in [[0,n]]\right), \ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}x}\right|_x\right) N_k(x) = f(x)N_k(x) \tag{3}$$

En intégrant l'équation (3) sur Ω :

$$\forall k \in [[0,n]], \ \underbrace{\int_0^1 -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+t)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) N_k(t), dt}_{a} = \underbrace{\int_0^1 f(t)N_k(t), dt}_{b} \tag{4}$$

Théorème : Intégration par partie (IPP)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient u et v deux fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx. \tag{5}$$

où : u' (resp. v') est la dérivée de u (resp. v) par rapport à x.

Appliquons l'IPP (5) à l'intégrale (a) de l'équation (4) en prenant :

$$u'(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+t)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) \quad \text{et} \quad v(t) = N_k(t)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall k \in [[0,n]], -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+t)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) N_k(t)\, dt \\ = -\left[(1+t)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_t N_k(t)\right]_0^1 + \int_0^1 (1+t)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt \\ = -\left(\underbrace{2\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} N_k(1) - \left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} N_k(0)}_{\alpha_k}\right) + \int_0^1 (1+t)\left.\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt \end{aligned} \tag{6}$$

On en déduit :

$$\forall k \in [[0,n]],\ -\alpha_k + \int_0^1 (1+t)\, \left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt = \int_0^1 f(t) N_k(t)\, dt \tag{7}$$

En appliquant l'approximation de Galerkin ($c \approx \tilde{c}$) à l'équation (7) on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall k \in [[0,n]],\ \int_0^1 (1+t)\, \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt = \int_0^1 f(t) N_k(t)\, dt + \alpha_k} \tag{8}$$

Question 2

Calcul de $\alpha_{\mathbf{k}}$

D'après la question 1 on a :

$$\forall k \in [[0,n]], \;\; \alpha_k = 2 \left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} N_k(1) - \left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} N_k(0) \tag{9}$$

Or d'après (1) et la figure 1 de la fonction N_k en déduit que :

$$\forall k \in [[0,n]], N_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases} \tag{10}$$

De même pour :

$$\forall k \in [[0,n]], N_k(1) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = n \\ 0 & \text{pour } k \neq n \end{cases} \tag{11}$$

Par conséquent :

$$\forall k \in [[0,n]], \;\; \alpha_k = \begin{cases} -\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} & \text{pour } k = 0 \\ \\ 2\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} & \text{pour } k = n \\ \\ 0 & \text{pour } k \in [[1, n-1]] \end{cases} \tag{12}$$

On applique la dérivée à droite pour $\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ et la conditions aux limites sur $c(0) = 0$ (2) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \approx \frac{c_1 - c_0}{h} = \frac{c_1}{h} \tag{13}$$

On applique la dérivée à gauche pour $\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$ et la conditions aux limites sur $c(1) = 0$ (2) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} \approx \frac{c_n - c_{n-1}}{h} = \frac{-c_{n-1}}{h} \tag{14}$$

Donc :

$$\boxed{\forall k \in [[0,n]],\ \alpha_k = \begin{cases} \frac{-c_1}{h} & \text{pour } k = 0 \\ \\ \frac{-2c_{n-1}}{h} & \text{pour } k = n \\ \\ 0 & \text{pour } k \in [[1,n-1]] \end{cases}} \tag{15}$$

Calcul de $\int_0^1 \mathbf{f(t)N_k(t)\,dt}$:

On pose $g_k = fN_k$.
Tout d'abord, nous allons définir la fonction g_k pour tout $k \in [[1, n-1]]$ à l'aide de l'équation (1) et de l'hypothèse sur f de l'équation (2) :

$$\forall\,(x \in \Omega \text{ et } k \in [[1, n-1]])\,,\ g_k(x) = \begin{cases} f(x)\frac{x - x_{k-1}}{h} & \text{pour } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \\ f(x)\frac{x_{k+1} - x}{h} & \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ \\ 0 & \text{pour } x \leq x_{k-1} \text{ ou } x \geq x_{k+1} \end{cases} \tag{16}$$

Dans le cas $x \in [x_k, x_{k+1}]$ D'après l'énoncé nous devons utiliser la méthode des trapèzes sur la subdivision $[x_k, x_{k+1}]$ (62) :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(t)\,dt \approx (x_{k+1} - x_i)\frac{g_k(x_{k+1}) + g_k(x_k)}{2} \tag{17}$$

Or d'après les notations $\forall k \in [[0, n]],\ h = x_{k+1} - x_k$:

$$\begin{cases} g_k(x_{k+1}) = f(x_{i+1})\frac{x_{k+1} - x_{k+1}}{h} = 0 \\ \\ g_k(x_k) = f(x_i)\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(x_i) \end{cases} \tag{18}$$

Donc :

$$\int_{x_i}^{x_{k+1}} g_k(t)\,dt \approx \frac{h}{2}f(x_k) \tag{19}$$

Dans le cas $x \in [x_{k-1}, x_k]$ D'après l'énoncé nous devons utiliser la méthode des trapèzes sur la subdivision $[x_{k-1}, x_k]$ (62) :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(t)\,dt \approx (x_{k+1} - k_i)\frac{g_k(x_{k+1}) + g_k(x_k)}{2} \tag{20}$$

Or d'après les notations $\forall i \in [[0, n]],\ h = x_i - x_{i-1}$:

$$\begin{cases} g_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})\frac{x_{k-1} - x_{k-1}}{h} = 0 \\ \\ g_k(x_k) = f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{h} = f(x_k) \end{cases} \tag{21}$$

Donc :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(t)\,dt \approx \frac{h}{2}f(x_k) \tag{22}$$

On en conclue donc d'après (19), (22), (16) :

$$\boxed{\forall k \in [[1, n-1]], \int_0^1 f(t) N_k(t)\, dt \approx h f(x_k)} \tag{23}$$

Cas pour k=0

On a d'après (1) et la méthode des trapèzes :

$$\int_0^1 g_0(t)\, dt = \int_0^{x_1} g_0(t)\, dt = x_1 \frac{g_0(x_1) - g_0(0)}{2} \tag{24}$$

Or :

$$\forall x \in \Omega,\ N_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & \text{pour } x \in [0, x_1] \\ \\ 0 & \text{pour } x \geq x_1 \end{cases} \tag{25}$$

Et d'après les notation $\forall i \in [[0, n]],\ x_i = ih$ donc $x_1 = h$

$$\begin{cases} g_0(x_1) = f(x_1) \frac{x_1 - x_1}{h} = 0 \\ \\ g_0(0) = f(0) \frac{x_1}{h} = f(0) \end{cases} \tag{26}$$

On en conclue donc que :

$$\boxed{\int_0^1 g_0(t)\, dt \approx \frac{h}{2} f(0)} \tag{27}$$

Cas pour k=n

On a d'après (1) et la méthode des trapèzes :

$$\int_0^1 g_n(t)\, dt = \int_{x_{n-1}}^{x_n} g_n(t)\, dt = (x_n - x_{n-1}) \frac{g_n(x_n) - g_n(x_{n-1})}{2} \tag{28}$$

Or :

$$\forall x \in \Omega,\ N_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h} & \text{pour } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ \\ 0 & \text{pour } x \leq x_{n-1} \end{cases} \tag{29}$$

Et d'après les notation $\forall i \in [[0, n]],\ x_i - x_{i-1} = h$ donc $x_n - x_{n-1} = h$

$$\begin{cases} g_0(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-1}}{h} = 0 \\ \\ g_0(x_n) = f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{h} = f(x_n) = f(1) \end{cases} \tag{30}$$

On en conclue donc que :

$$\boxed{\int_0^1 g_n(t)\, dt \approx \frac{h}{2} f(1)} \tag{31}$$

Finalement, on obtient :

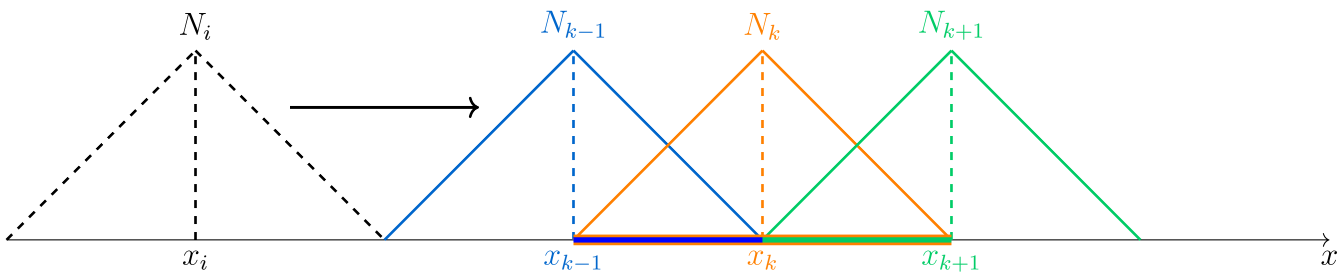
$$\boxed{\forall\,(x \in \Omega \text{ et } k \in [[0,n]])\,,\ \int_0^1 f(t)N_k(t)\,dt \approx \begin{cases} hf(x_k) & \text{pour } k \in [[1,n-1]] \\ \frac{h}{2}f(0) & \text{pour } k = 0 \\ \frac{h}{2}f(1) & \text{pour } k = n \end{cases}} \tag{32}$$

Calcul de $\int_0^1 (1+t)\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t \mathrm{d}t$

En appliquant la linéarité de l'intégrale et la définition de $\tilde{c}$ on obtient :

$$\forall k \in [[0,n]],\ I_k = \int_0^1 (1+t)\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt = \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 (1+t)c_i \left.\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt \tag{33}$$

Cas pour $\mathbf{k} \in [[\mathbf{1}, \mathbf{n}-\mathbf{1}]]$



$$\forall\,(x \in \Omega \text{ et } k \in [[1,n-1]])\,,\ c_i \left.\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x = \begin{cases} c_{k-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x & \text{pour } i = k-1 \\ c_k \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 & \text{pour } i = k \\ c_{k+1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k+1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x & \text{pour } i = k+1 \\ 0 & \text{pour } i \notin \{k-1, k, k+1\} \end{cases} \tag{34}$$

Donc, pour tout $k \in [[1, n-1]]$:

$$I_k = \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_{k-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k-1}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt}_{(d)} + \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_k \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t^2 dt}_{(e)} + \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_{k+1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k+1}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt}_{(f)} \tag{35}$$

Tout d'abord calculons $\left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x$

$$\forall\,(x \in \Omega \text{ et } k \in [[1, n-1]])\,,\ \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{pour } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ -\frac{1}{h} & \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{pour } x \leq x_{k-1} \text{ ou } x \geq x_{k+1} \end{cases} \tag{36}$$

Tout les calculs qui vont suivre sont basés sur :

- $\forall i \in [[0, n]],\ x_i = ih$
- $\forall i \in [[0, n]],\ h = x_{i+1} - x_i$

Calcul de (d) :

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_{k-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x dt &= c_{k-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1+t) \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dt \\
&= -c_{k-1}\frac{1}{h^2}\left(\Big[t\Big]_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x_{k-1}}^{x_k}\right) \\
&= -c_{k-1}\frac{1}{h^2}\left((x_k - x_{k-1}) + \left(\frac{x_k^2}{2} - \frac{x_{k-1}^2}{2}\right)\right) \\
&= -c_{k-1}\frac{1}{h^2}\left((x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1})\right) \\
&= -c_{k-1}\frac{1}{h^2}(x_k - x_{k-1})\left(1 + \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})\right) \\
&= -c_{k-1}\frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{2}(2kh - h)\right) \\
&= -c_{k-1}\left(\frac{1}{h} + k - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in [[1, n-1]]$:

$$\boxed{\int_0^1 (1+t)c_{k-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}x}\right|_x dt = -c_{k-1}\left(\frac{1}{h} + k - \frac{1}{2}\right)} \tag{37}$$

Calcul de (e)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_k \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t^2 dt &= c_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} (1+t) \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t^2 dt \\
&= c_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (1+t) \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1+t) \left(\frac{-1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dt \right) \\
&= c_k \frac{1}{h^2} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (1+t)\, dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1+t)\, dt \right) \\
&= c_k \frac{1}{h^2} \left(\Big[t\Big]_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} \right) + \left(\Big[t\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right) \\
&= c_k \frac{1}{h^2} \left(h + \left(\frac{x_k^2}{2} - \frac{x_{k-1}^2}{2} \right) + h + \left(\frac{x_{k+1}^2}{2} - \frac{x_k^2}{2} \right) \right) \\
&= c_k \frac{1}{h^2} \left(2h + \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k) \right) \\
&= c_k \frac{1}{h} \left(2 + \frac{1}{2}(kh + (k-1)h) + \frac{1}{2}((k+1)h + kh) \right) \\
&= c_k \frac{1}{h} (2 + 2kh) \\
&= c_k \left(\frac{2}{h} + 2k \right)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in [[1, n-1]]$:

$$\boxed{\int_0^1 (1+t)c_k \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t^2 dt = c_k \left(\frac{2}{h} + 2k \right)} \tag{38}$$

Calcul de (f)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_{k+1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{k+1}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt &= c_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1+t) \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{-1}{h}\right) dt \\
&= -c_{k+1} \frac{1}{h^2} \left(\Big[t\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right) dt \\
&= -c_{k+1} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k) \right) \\
&= -c_{k+1} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(2kh + h) \right) \\
&= -c_{k+1} \left(\frac{1}{h} + k + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

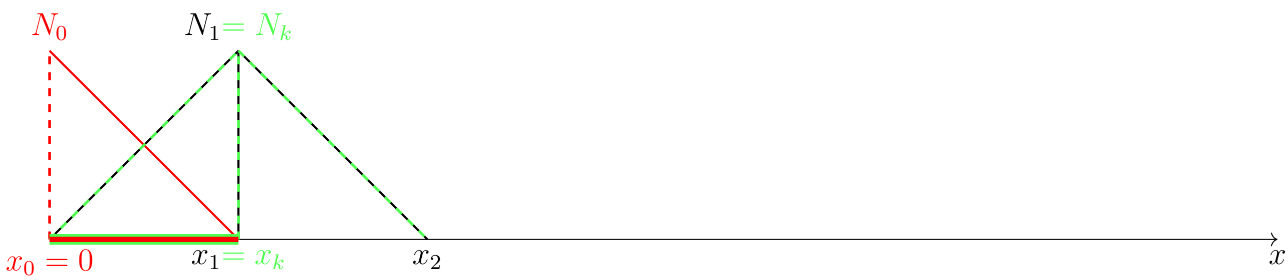
Donc pour tout $k \in [[1, n-1]]$:

$$\boxed{\int_0^1 (1+t)c_{k+1}\left.\frac{\mathrm{d}N_{k+1}}{\mathrm{d}t}\right|_t \left.\frac{\mathrm{d}N_k}{\mathrm{d}t}\right|_t dt = -c_{k+1}\left(\frac{1}{h}+k+\frac{1}{2}\right)} \tag{39}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in [[1, n-1]],\ I_k = c_{k-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-k\right) + c_k\left(\frac{2}{h}+2k\right) + c_{k+1}\left(-\frac{1}{h}-k-\frac{1}{2}\right)} \tag{40}$$

Pour k = 0



$$\forall x \in \Omega,\ c_i \left.\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x = \begin{cases} c_0 \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 & \text{pour } i = 0 \\ c_1 \left.\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x & \text{pour } i = 1 \end{cases} \tag{41}$$

Donc :

$$I_0 = \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_0 \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt}_{(a_0)} + \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_1 \left.\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x dt}_{(b_0)} \tag{42}$$

Calcul $\mathbf{a_0}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_0 \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt &= c_0 \int_0^{x_1} (1+t) \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt \\
&= c_0 \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1} (1+t)\, dt \\
&= c_0 \frac{1}{h^2}\left(x_1 + \frac{x_1^2}{2}\right) \\
&= c_0 \frac{1}{h^2}\left(h + \frac{h^2}{2}\right) \\
&= c_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 (1+t)c_0 \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt = c_0\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right) \tag{43}$$

Calcul de $\mathbf{b_0}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_1 \left.\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x dt &= c_1\int_0^{x_1}(1+t)\left.\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x dt \\
&= -c_1\frac{1}{h^2}\int_0^{x_1}(1+t)\,dt \\
&= -c_1\frac{1}{h^2}\left(x_1+\frac{x_1^2}{2}\right) \\
&= -c_1\frac{1}{h^2}\left(h+\frac{h^2}{2}\right) \\
&= -c_1\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

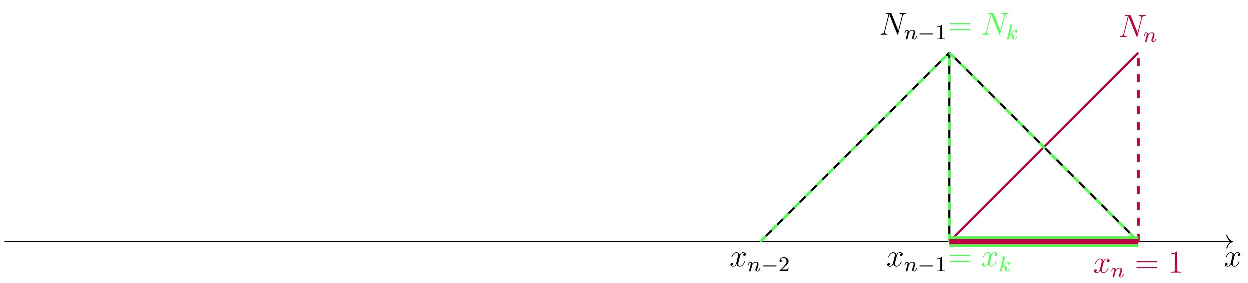
Donc :

$$\int_0^1 (1+t)c_1 \left.\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}x}\right|_x dt = -c_1\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right) \tag{44}$$

D'où :

$$\boxed{I_0 = c_0\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right) + c_1\left(-\frac{1}{h}-\frac{1}{2}\right)} \tag{45}$$

Pour k = n



$$\forall x \in \Omega,\ c_i \left.\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x = \begin{cases} c_n \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 & \text{pour } i = n \\ c_{n-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x & \text{pour } i = n-1 \end{cases} \tag{46}$$

Donc :

$$I_n = \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_{n-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x dt}_{(a_n)} + \underbrace{\int_0^1 (1+t)c_n \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt}_{(b_n)} \tag{47}$$

Calcul de $\mathbf{a_n}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_{n-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x dt &= c_{n-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (1+t) \left.\frac{\mathrm{d}N_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x dt \\
&= -c_{n-1} \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (1+t)\, dt \\
&= -c_{n-1} \frac{1}{h^2} \left((x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) \right) \\
&= -c_{n-1} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \right) \\
&= -c_{n-1} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(nh + (n-1)h) \right) \\
&= -c_{n-1} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}(2n-1) \right) \\
&= -c_{n-1} \left(\frac{1}{h} + n - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 (1+t)c_{n-1} \left.\frac{\mathrm{d}N_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right|_x \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x dt = -c_{n-1} \left(\frac{1}{h} + n - \frac{1}{2} \right) \tag{48}$$

Calcul de $\mathbf{b_n}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t)c_n \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt &= c_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} (1+t) \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt \\
&= c_n \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (1+t)\, dt \\
&= c_n \frac{1}{h^2} \left((x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) \right) \\
&= c_n \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \right) \\
&= c_n \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(nh + (n-1)h) \right) \\
&= c_n \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}(2n-1) \right) \\
&= c_n \left(\frac{1}{h} + n - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 (1+t)c_n \left.\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}x}\right|_x^2 dt = c_n \left(\frac{1}{h} + n - \frac{1}{2} \right) \tag{49}$$

D'où :

$$\boxed{I_n = c_n \left(\frac{1}{h} + n - \frac{1}{2} \right) + c_{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h} - n \right)} \tag{50}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [[0,n]],\ I_k = \begin{cases} c_{k-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h} - k\right) + c_k\left(\frac{2}{h} + 2k\right) + c_{k+1}\left(-\frac{1}{h} - k - \frac{1}{2}\right) & \text{pour } k \in [[1, n-1]] \\ c_0\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right) + c_1\left(-\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\right) & \text{pour } k = 0 \\ c_n\left(\frac{1}{h} + n - \frac{1}{2}\right) + c_{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h} - n\right) & \text{pour } k = n \end{cases}} \tag{51}$$

Système matriciel KC= F

Classiquement on a la matrice **C**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{52}$$

D'après (51), (15), (32) et (8) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} c_0\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)+c_1\left(-\frac{1}{h}-\frac{1}{2}\right) & = \frac{h}{2}f(0)-\frac{c_1}{h} \\ c_0\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-1\right)+c_1\left(\frac{2}{h}+2\right)+c_2\left(-\frac{1}{h}-1-\frac{1}{2}\right) & = hf(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ c_{k-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-k\right)+c_k\left(\frac{2}{h}+2k\right)+c_{k+1}\left(-\frac{1}{h}-k-\frac{1}{2}\right) & = hf(x_k) \\ \vdots & \vdots \\ c_{n-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-(n-1)\right)+c_{n-1}\left(\frac{2}{h}+2(n-1)\right)+c_n\left(-\frac{1}{h}-(n-1)-\frac{1}{2}\right) & = hf(x_{n-1}) \\ c_n\left(\frac{1}{h}+n-\frac{1}{2}\right)+c_{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-n\right) & = \frac{h}{2}f(1)-\frac{2c_{n-1}}{h} \end{cases} \tag{53}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} c_0\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)+c_1\left(-\frac{1}{2}\right) & = \frac{h}{2}f(0) \\ c_0\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-1\right)+c_1\left(\frac{2}{h}+2\right)+c_2\left(-\frac{1}{h}-1-\frac{1}{2}\right) & = hf(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ c_{k-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-k\right)+c_k\left(\frac{2}{h}+2k\right)+c_{k+1}\left(-\frac{1}{h}-k-\frac{1}{2}\right) & = hf(x_k) \\ \vdots & \vdots \\ c_{n-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h}-n-1\right)+c_{n-1}\left(\frac{2}{h}+2(n-1)\right)+c_n\left(-\frac{1}{h}-n-1-\frac{1}{2}\right) & = hf(x_{n-1}) \\ c_n\left(\frac{1}{h}+n-\frac{1}{2}\right)+c_{n-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{h}-n\right) & = \frac{h}{2}f(1) \end{cases} \tag{54}$$

On pose **F** :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2}f(0) \\ hf(x_1) \\ \vdots \\ hf(x_{n-1}) \\ \frac{h}{2}f(1) \end{bmatrix} \tag{55}$$

donc :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{h}-1 & \frac{2}{h}+2 & -\frac{1}{h}-1-\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{1}{2}-\frac{1}{h}-k & \frac{2}{h}+2k & -\frac{1}{h}-k-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}-\frac{1}{h}-(n-1) & \frac{2}{h}+2(n-1) & -\frac{1}{h}-(n-1)-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h}+n-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{h}-n \end{bmatrix} \tag{56}$$

Question 3

D'après l'énoncé on a la solution exacte :

$$\forall x \in \Omega,\ c(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + A + B\ln(1+x) \tag{57}$$

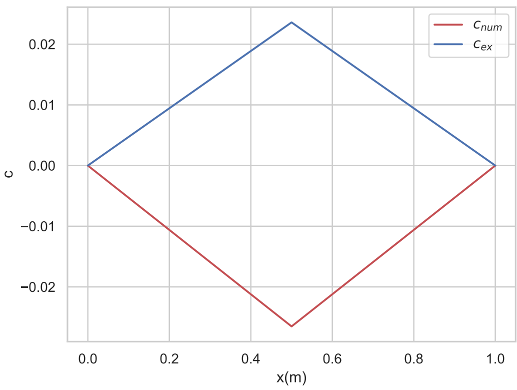
Déterminons (A, B) avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} c(0) = A = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ c(1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + A + B\ln(2) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{5+A}{18\ln(2)} \end{cases} \tag{58}$$

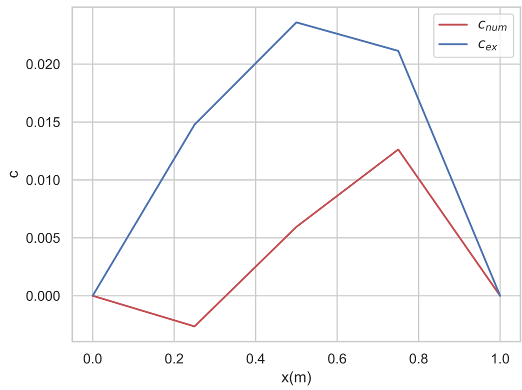
Donc on a :

$$\boxed{\forall x \in \Omega,\ c(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{5}{18\ln(2)}\ln(1+x)} \tag{59}$$

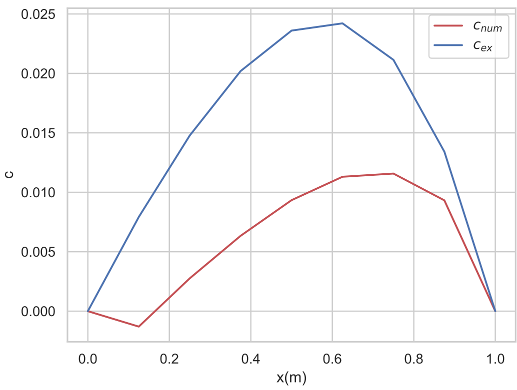
Question 4



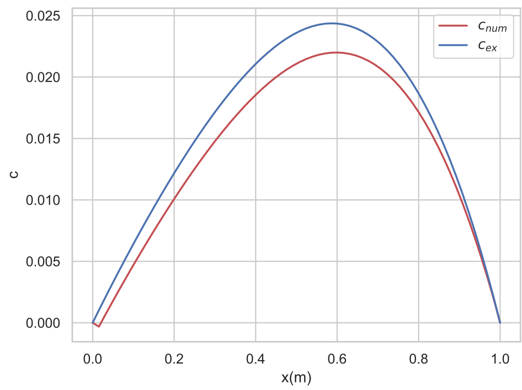
(a) n=2



(b) n=4



(c) n=8



(d) n=65

FIGURE 2 – Courbes de la concentration c pour différente valeur de n

Nombre de points (n)	**Erreur quadratique**
2	0.0289
4	0.0117
8	0.0100
65	0.0020

TABLE 1 – Erreurs quadratiques en fonction du nombre de points.

1. Annexes

1.1 Problème de Dirichlet homogène

Définition : Problème variationnelle du problème de Dirichlet homogène

Soient Ω est borné où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, $\partial\Omega$: bord de Ω, $H^1(\Omega)$: espace de Sobolev enfin la formulation du problème de Dirichlet non homogène :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{60}$$

La formulation variationnelle du problème de Dirichlet homogène dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$:
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \langle \nabla u | \nabla v \rangle \, d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \tag{61}$$

- ∇u : gradient de u
- $\langle . | . \rangle$: produit scalaire sur Ω

$u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie l'équation (60) si et seulement si u vérifie la formulation variationnelle (61)
p.45-47 ([1])

1.2 Approximation de Galerkin

Théorème : Existence et unicité de la solution approchée p.97 ([1])

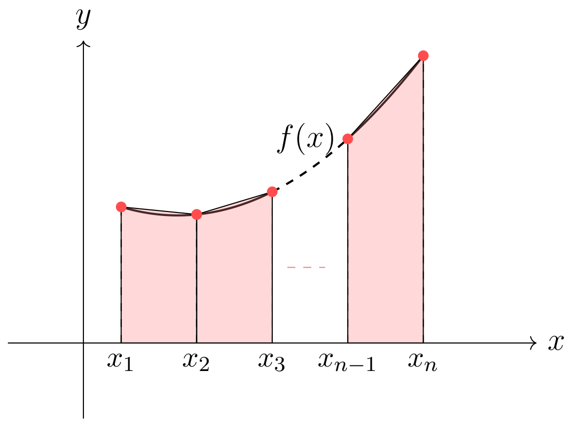
1.3 Méthode des trapèzes

Théorème : Méthode des trapèzes

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceau sur $[a, b]$ à valeur de $\mathbb{C}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \tag{62}$$

où $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$



Théorème : Erreur dans la méthode des trapèzes

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} \tag{63}$$

où $M = \sup\limits_{y \in [a,b]} |f''(y)|$ et $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$

1.4 Calcul exacte de l'intégrale du second membre

D'après l'énoncé $f : x \longmapsto x^2$ donc

$$\begin{aligned}
\forall\,(x \in \Omega \text{ et } k \in [[1, n-1]])\,,\ \int_0^1 f(t)N_k(t)\,dt &= \int_0^1 t^2 N_k(t)\,dt \\
&= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} t^2 N_k(t)\,dt \\
&= \int_{x_{k-1}}^{x_k} t^2 \left(\frac{x - x_{k-1}}{h}\right)\,dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^2 \left(\frac{x_{k+1} - x}{h}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (t^3 - t^2 x_{k-1})\,dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-t^3 + t^2 x_{k+1})\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\left[\frac{t^4}{4}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} - x_{k-1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \left[\frac{t^4}{4}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} + x_{k+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{2x_k^4}{4} - \frac{x_{k+1}^4}{4} - \frac{x_{k-1}^4}{4} + \frac{x_{k+1}^4}{3} + \frac{x_{k-1}^4}{3} - \frac{x_k^3}{3}(x_{k+1} + x_{k-1})\right) \\
&\underset{(*)}{=} \left(\frac{1}{4h} - \frac{1}{3h}\right)\left(2x_k^4 - x_{k+1}^4 - x_{k-1}^4\right) \\
&= \left(\frac{1}{4h} - \frac{1}{3h}\right)\left(2(hk)^4 - (h(k+1))^4 - (h(k-1))^4\right)
\end{aligned}$$

Nota : $(*) : (x_{k+1} + x_{k-1}) = (h(k+1) + h(k-1)) = 2hk = 2x_k$

Donc :

$$\forall\,(x \in \Omega \text{ et } k \in [[1, n-1]])\,,\ \int_0^1 f(t)N_k(t)\,dt = \left(\frac{1}{4h} - \frac{1}{3h}\right)\left(2(hk)^4 - (h(k+1))^4 - (h(k-1))^4\right) \tag{64}$$

Cas pour k=0

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)N_0(t)\,dt &= \int_0^{x_1} t^2 \left(\frac{x_1 - x}{h}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{x_1^4}{3} - \frac{x_1^4}{4}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right) \\
&= \frac{h^3}{12}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 f(t)N_0(t)\,dt = \frac{h^3}{12} \tag{65}$$

Cas pour k=n

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)N_n(t)\,dt &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} t^2\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{x_n^4}{4}-\frac{x_{n-1}^4}{4}-\frac{x_n^3}{3}x_{n-1}+\frac{x_{n-1}^4}{3}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{L^4}{4}-\frac{L^3}{3}x_{n-1}+\frac{x_{n-1}^4}{12}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{L^4}{4}-\frac{L^3}{3}(n-1)h+\frac{((n-1)h)^4}{12}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 f(t)N_n(t)\,dt = \frac{1}{h}\left(\frac{L^4}{4}-\frac{L^3}{3}(n-1)h+\frac{((n-1)h)^4}{12}\right) \tag{66}$$

Finalement la matrice colonne $\mathbf{F}$:

$$\boxed{\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \frac{h^3}{12} \\ \vdots \\ \left(\frac{1}{4h}-\frac{1}{3h}\right)\left(2(hk)^4-(h(k+1))^4-(h(k-1))^4\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{h}\left(\frac{L^4}{4}-\frac{L^3}{3}(n-1)h+\frac{((n-1)h)^4}{12}\right) \end{bmatrix}} \tag{67}$$

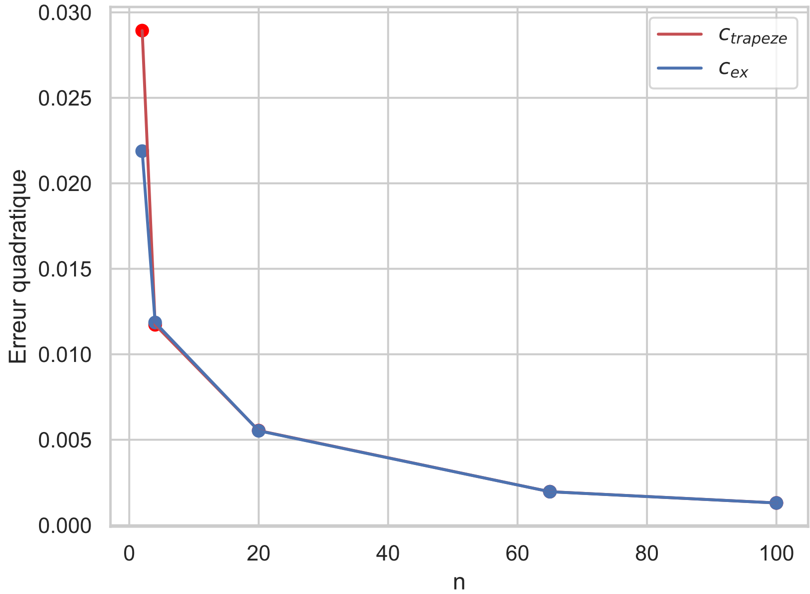


FIGURE 3 – Évolution de l'erreur quadratique moyenne du modèle en fonction de n, que l'on calcule directement l'intégrale du second membre ou que l'on passe par la méthode des trapèzes.

Références

[1] Patrick Ciarlet and Eric Luneville. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique.* ISTE Group, 2022.