Génie Physique 4ème année Année 2023-2024

T.P. n°2 – Méthodes des éléments finis

Diffusion d'électrons dans un semi-conducteur

On considère un semi-conducteur monodimensionnel, $\Omega=[0,1]$, en équilibre (régime permanent), dont les extrémités sont reliées à des fils électriques très conducteurs. Le semi-conducteur est le siège d'une génération d'électrons exprimée par une fonction continue (normalisée) f(x) (pour $x \in \Omega$) et l'on suppose que sa conductivité électrique varie linéairement en x.

On modélise la distribution de concentration (normalisée, c) en électrons dans Ω par le système différentiel suivant :

$$
(S) \quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((1+x)\dfrac{dc}{dx}\right) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ \\ c(0) = 0 \\ c(1) = 0 \end{cases}
$$

On s'intéresse à la discrétisation par la méthode des éléments finis du système différentiel (S). A cet effet on subdivise le domaine Ω en n éléments linéaires (intervalles dans ce cas) de longueur $h=\dfrac{1}{n}$ (n+1 nœuds). On définit les nœuds suivants : $x_i = i \times h$ pour i=0,1, 2, …, n.

A chaque nœud on associe une fonction de forme globale $(N_i)_{i=0,1,2,\dots,n}$, linéaire par morceaux et continue telle que :

$$
N_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & si\ x_{i-1} \le x \le x_i & \text{pour} \quad i = 1,2,\dots,n \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} & si\ x_i \le x \le x_{i+1} & \text{pour} \quad i = 0,1,\dots,n\text{-}1 \\ 0 & si\ x \le x_{i-1}\ ou\ x \ge x_{i+1} & \text{pour} \quad i = 1,2,\dots,n\text{-}1 \end{cases}
$$

On va chercher une approximation $\tilde{c}$ de c sous la forme :

$$
\tilde{c} = \sum_{i=0}^{n} c_i \, N_i \qquad \forall x \in \Omega
$$

c_i est la valeur de l'approximation de c au nœud i

1. Pour simplifier, on « oublie » temporairement les conditions aux limites de c en x=0 et x=1 (on les prendra en compte au moment de la résolution du système global).
   En appliquant la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin au système (S), montrer que la formulation faible peut s'écrire :

$$\int_0^1 (1+x)\frac{d\tilde{c}}{dx}\frac{dN_k}{dx}\,dx = \int_0^1 f(x)\,N_k\,dx + \alpha_k \qquad \forall\, k = 0,1,\ldots,n$$

2. Exprimer le système global, KC=F, à résoudre après la discrétisation par éléments finis du système (S). On calculera **explicitement** la matrice K et on calculera le second membre en utilisant la méthode des trapèzes.
   Détailler la première ligne, la seconde, la ligne de rang i, l'avant dernière et la dernière.

3. Expliciter précisément le système linéaire obtenu à la question 2 lorsque $f(x)=x^2$.

4. Résoudre le système obtenu à la question 3 et comparer avec la solution exacte pour n = 2, 4, 8, 65.
   On exprimera la solution exacte sous la forme :

$$c(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + A + B\ln(1+x)$$

   On utilisera l'erreur quadratique :

$$E(n) = h\left(\sum_{i=1}^{n}\left(c(x_i) - c_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{avec}\quad c_i = \tilde{c}(x_i)$$

   Tracer les courbes et conclure.