

Étude du premier modèle de Hindmarsh-Rose

Vincent Matthys, Maureen Muscat et Mariène Wan

Master 1 BIM
Université Pierre et Marie Curie

17/05/2017

Introduction

- Nous nous intéressons au modèle suivant :

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{w - v^3 + 3v^2 + I_{ap}}{c} = f(v, w) & \text{avec } c \neq 0 \\ w'(t) = 1 - 5v^2 - w = g(v, w) \end{cases} \quad (1)$$

- c et I_{ap} sont des paramètres
- c'est un modèle d'activité neuronale, v représente la tension de la membrane du neurone.

1 Pour $C = 2$

- Recherche des points d'équilibre
- Stabilité des points

2 Pour $C = 1$

3 Passage en 3 dimensions : bursting

- Obtention du bursting
- Pour $c = 2$: Bursting fold/Hopf
- Pour $c = 1$: Bursting Square-Wave
- Entre $c = 1$ et $c = 2$

Recherche des nullclines

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{w - v^3 + 3v^2 + I_{ap}}{c} = f(v, w) & \text{avec } c \neq 0 \\ w'(t) = 1 - 5v^2 - w = g(v, w) \end{cases}$$

$$\text{Nullcline pour } v : v' = 0 \Leftrightarrow w = v^3 - 3v^2 - I_{ap}$$

$$\text{Nullcline pour } w : w' = 0 \Leftrightarrow w = 1 - 5v^2$$

La nullcline de v est de forme **cubique**.

La nullcline de w est une **parabole**.

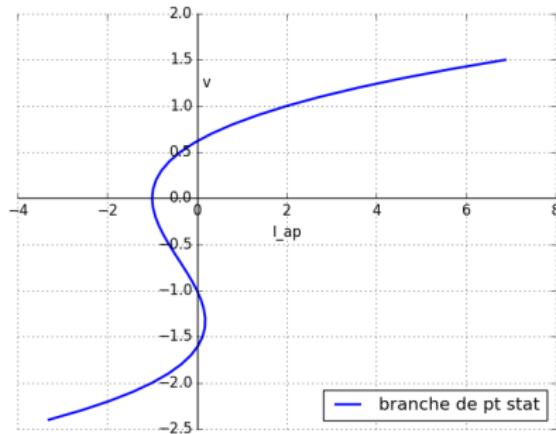
Évolution du nombre de points stationnaires quand I augmente

$I_{ap} < -1$	1
$I_{ap} = -1$	2
$I_{ap} \in] -1, 5/27[$	3
$I_{ap} = 5/27$	2
$I_{ap} > 5/27$	1

Allure du diagramme de bifurcation

Les points d'équilibres vérifient $w = v^3 - 3v^2 - I_{ap}$ et $w = 1 - 5v^2$.

$$v^3 + 2v^2 - 1 = I_{ap}$$



Étude de la jacobienne

$$J(v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(v, w) & \frac{\partial f}{\partial w}(v, w) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(v, w) & \frac{\partial g}{\partial w}(v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3v}{c}(v-2) & \frac{1}{c} \\ -10v & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J(v, w)) = v(3v + 4)/c$$

$$Tr(J(v, w)) = \frac{3v}{c}(v-2) - 1$$

Étude de la jacobienne

$$J(v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(v, w) & \frac{\partial f}{\partial w}(v, w) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(v, w) & \frac{\partial g}{\partial w}(v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3v}{c}(v-2) & \frac{1}{c} \\ -10v & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J(v, w)) = v(3v + 4)/c$$

$$Tr(J(v, w)) = \frac{3v}{c}(v-2) - 1$$

- Si $v \in [-4/3, 0]$, alors $\det(J(v, w)) < 0$
Le point d'équilibre est un **col**.

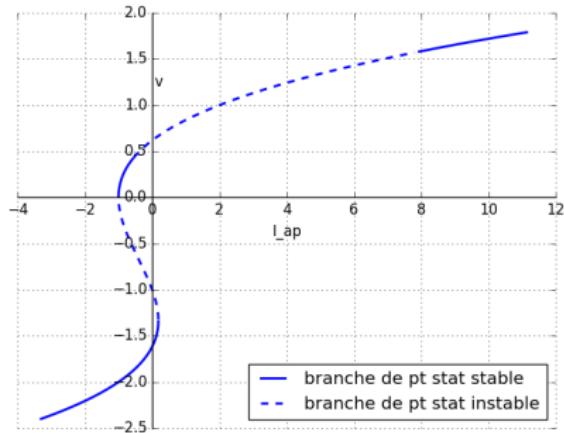
Étude de la jacobienne

$$J(v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(v, w) & \frac{\partial f}{\partial w}(v, w) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(v, w) & \frac{\partial g}{\partial w}(v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3v}{c}(v-2) & \frac{1}{c} \\ -10v & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J(v, w)) = v(3v + 4)/c$$

$$Tr(J(v, w)) = \frac{3v}{c}(v-2) - 1$$

- Si $v \in [-4/3, 0]$, alors $\det(J(v, w)) < 0$
Le point d'équilibre est un **col**.
- Si $v \in [1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}]$, alors $Tr(J(v, w)) > 0$
Le point d'équilibre est **instable**



$$\begin{aligned}\det(J_{(v)} - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} \frac{-3v_0}{c}(v_0 - 2) - \lambda & \frac{1}{c} \\ -10v_0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \left(\frac{3}{c}v_0^2 - \frac{6}{c}v_0 + 1\right)\lambda + \left(\frac{3}{c}v_0^2 + \frac{4}{c}v_0\right) \\ \Delta &= \left(\frac{3v_0}{c}(v_0 - 2) + 1\right)^2 - 4\frac{v_0}{c}(4 + 3v_0) \\ &= \frac{9v_0^4}{c^2} - \frac{36v_0^3}{c^2} + \frac{6}{c}\left(\frac{6}{c} - 1\right)v_0^2 - \frac{28v_0}{c} + 1\end{aligned}$$

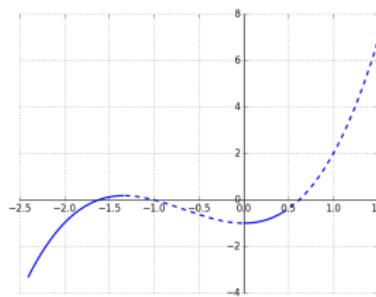
Bifurcation pli (col-nœud)

- Le determinant de la jaconienne s'annule.
- 2 nouvelles branches de points stationnaires apparaissent
Interprétation avec le diagramme de bifurcation $I_{ap} = f(v_0)$

Bifurcation pli (col-nœud)

- Le déterminant de la jacobienne s'annule.
- 2 nouvelles branches de points stationnaires apparaissent
Interprétation avec le diagramme de bifurcation $I_{ap} = f(v_0)$

Dans cette dernière représentation, les points de bifurcation pli correspondent à des extrema locaux de la fonction f .



Bifurcation pli (col-nœud)

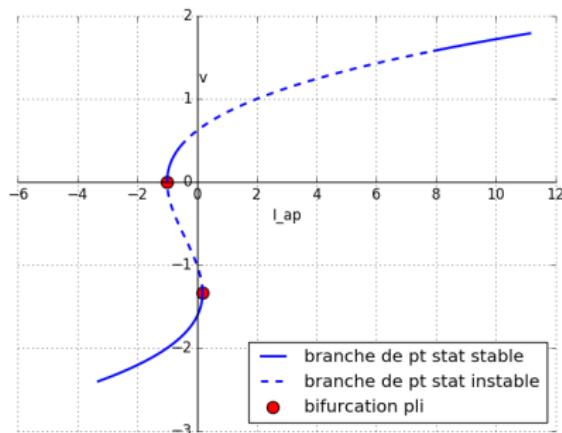
- Le déterminant de la jacobienne s'annule.
- 2 nouvelles branches de points stationnaires apparaissent
Interprétation avec le diagramme de bifurcation $I_{ap} = f(v_0)$

$$\frac{df}{dv_0} = 0$$

$$3v_0^2 + 4v_0 = 0$$

$$v_0(3v_0 + 4) = 0$$

Il y a 2 bifurcations pli: $v = 0$ et $v = -4/3$.

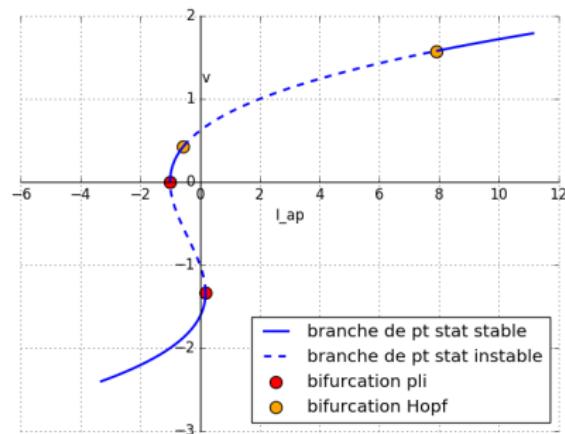


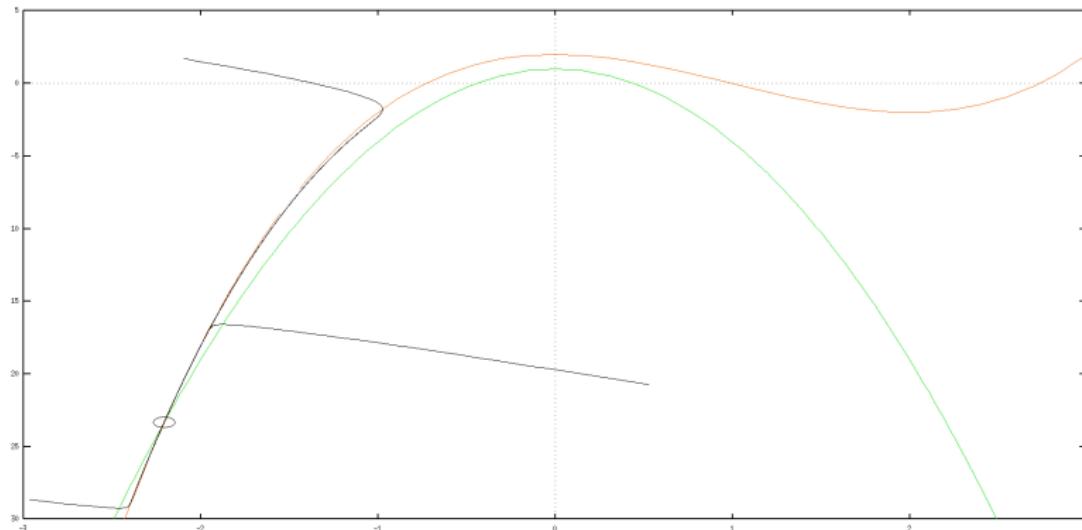
Bifurcation de Hopf

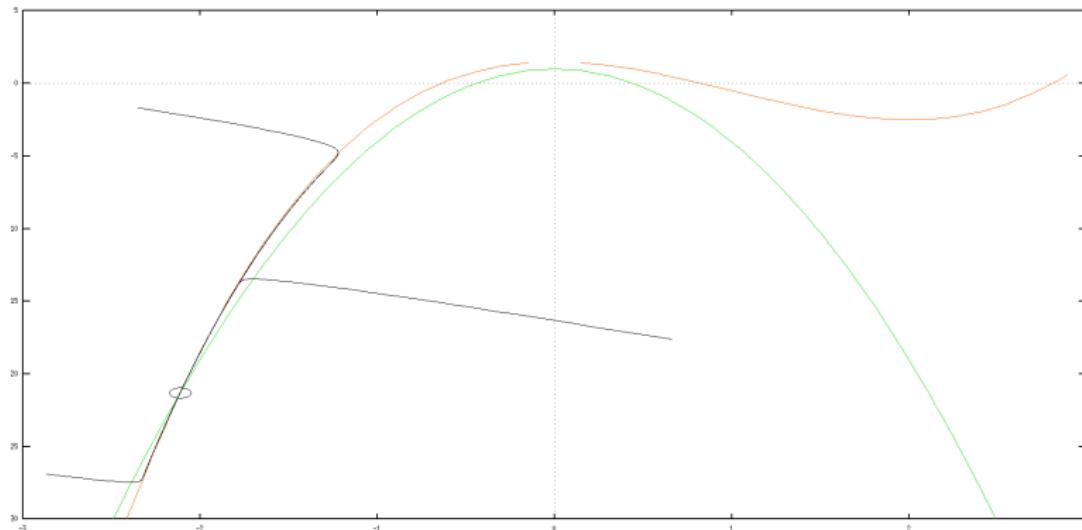
- un foyer stable devient un foyer instable
- un cycle limite stable apparaît
- les conditions à vérifier :
 - $v < v_H$: foyer stable ou instable
 - $v > v_H$: foyer avec la stabilité opposée
 - $\frac{d\text{Re}(\lambda)}{dl_{ap}} \Big|_{v_H} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{3v_0}{2c}((2-v_0)-1)\right)}{dl_{ap}} \Big|_{v_H} \neq 0$

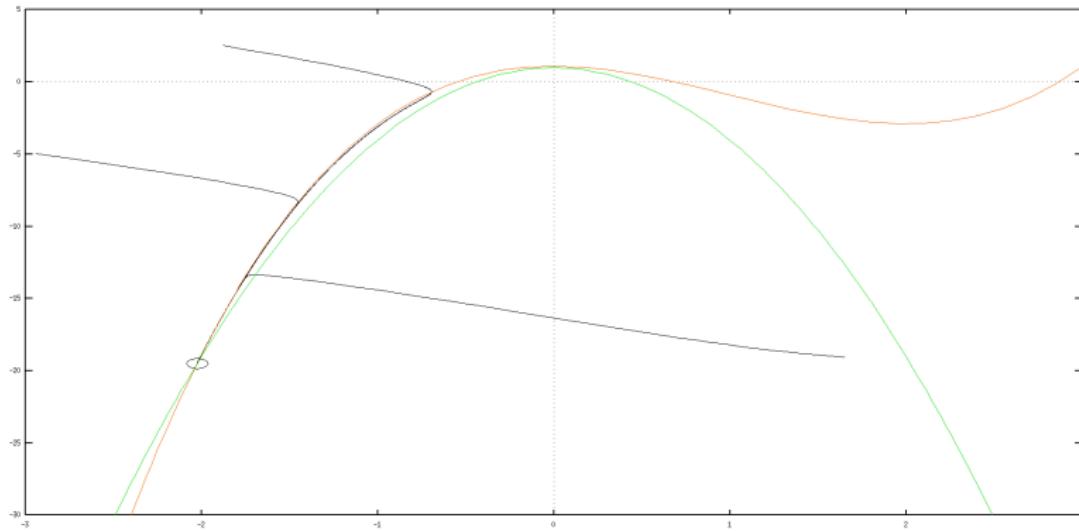
Bifurcation de Hopf

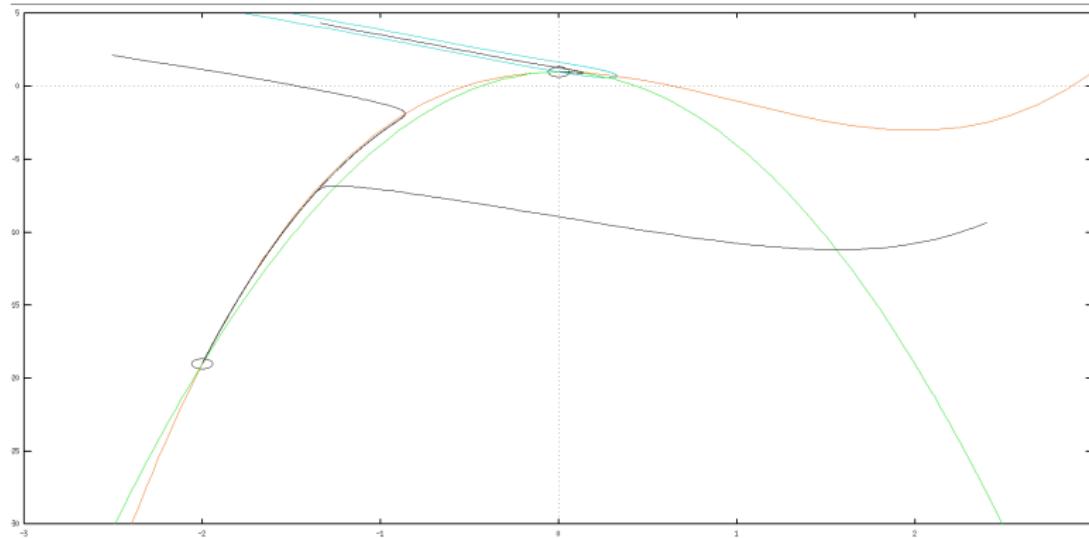
- un foyer stable devient un foyer instable
- un cycle limite stable apparaît
- les conditions à vérifier :
 - $v < v_H$: foyer stable ou instable
 - $v > v_H$: foyer avec la stabilité opposée
 - $\frac{d\text{Re}(\lambda)}{dl_{ap}} \Big|_{v_H} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{3v_0}{2c}((2-v_0)-1)\right)}{dl_{ap}} \Big|_{v_H} \neq 0$
- Il y a 2 bifurcations de Hopf : $v = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $v = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

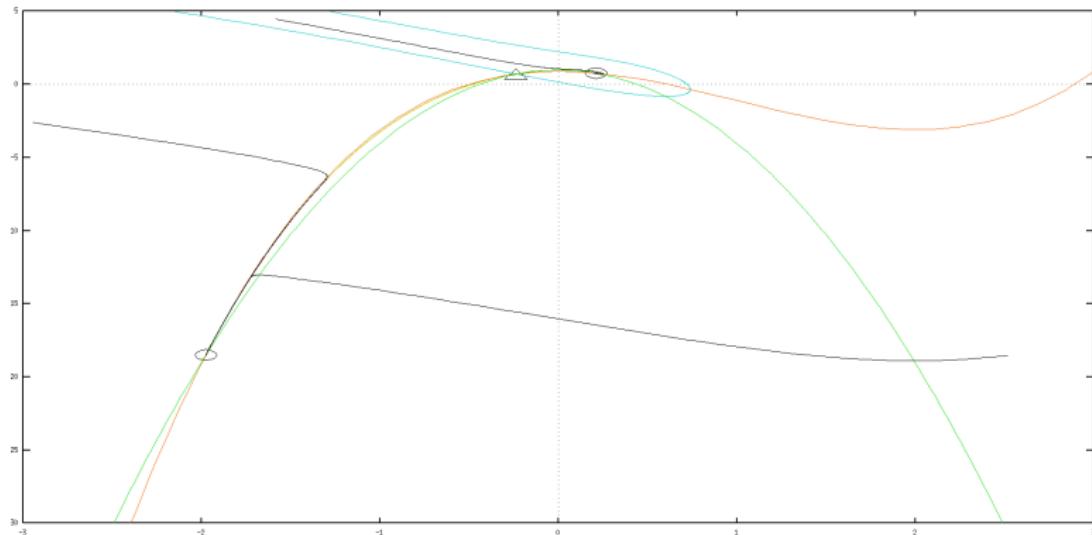


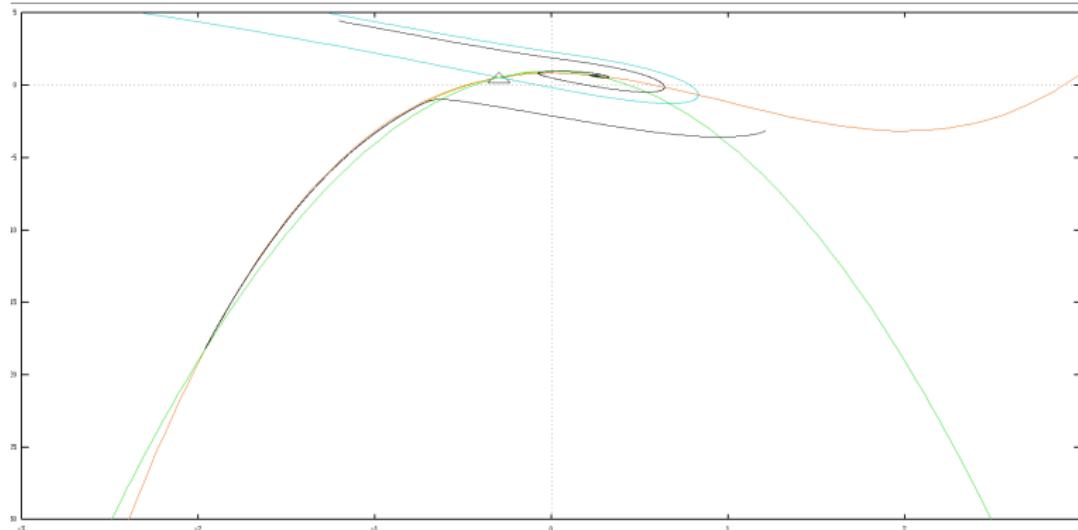


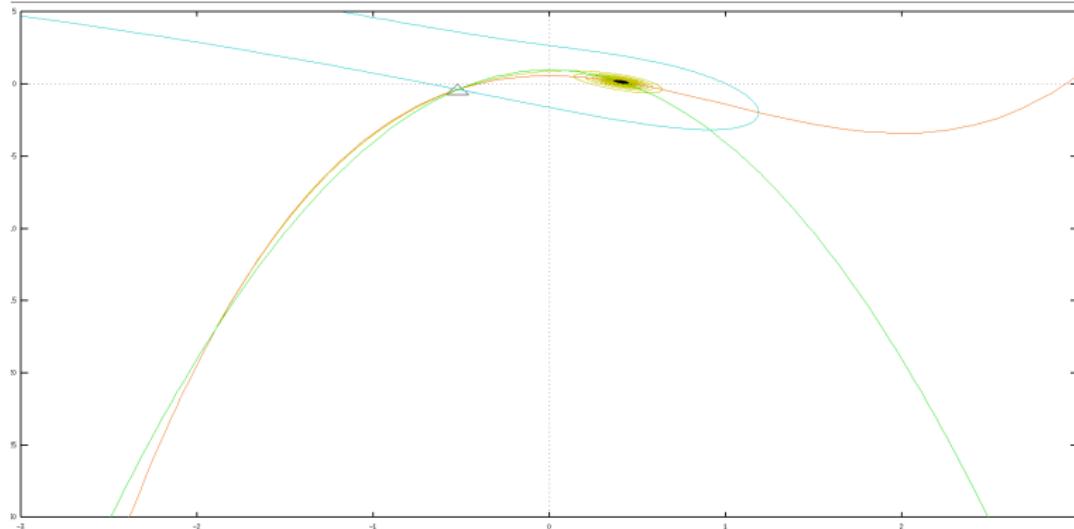


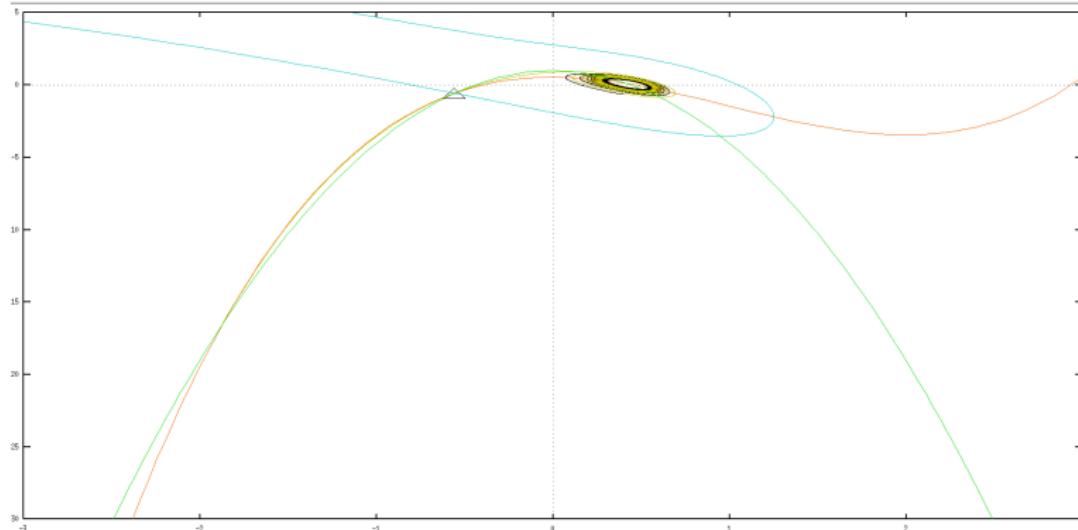


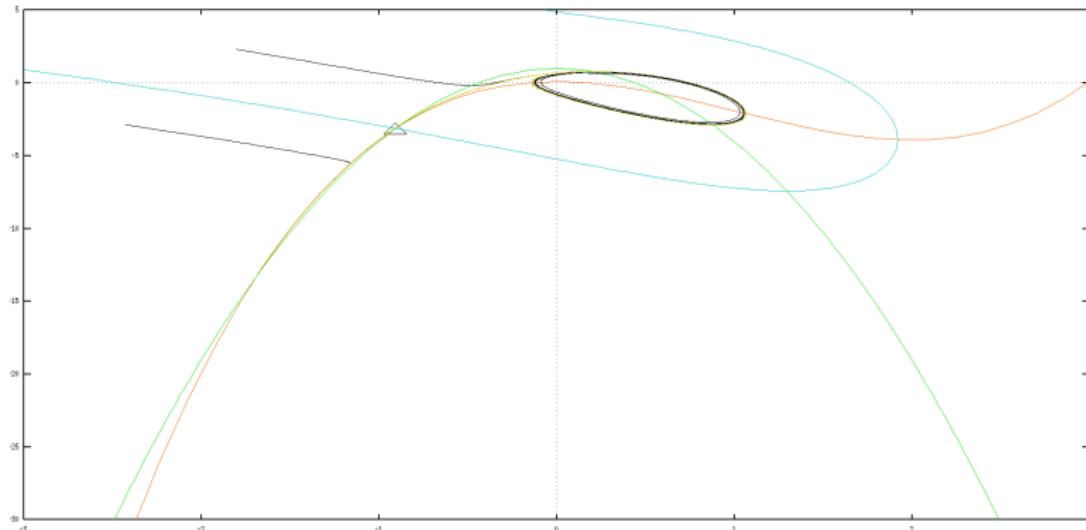


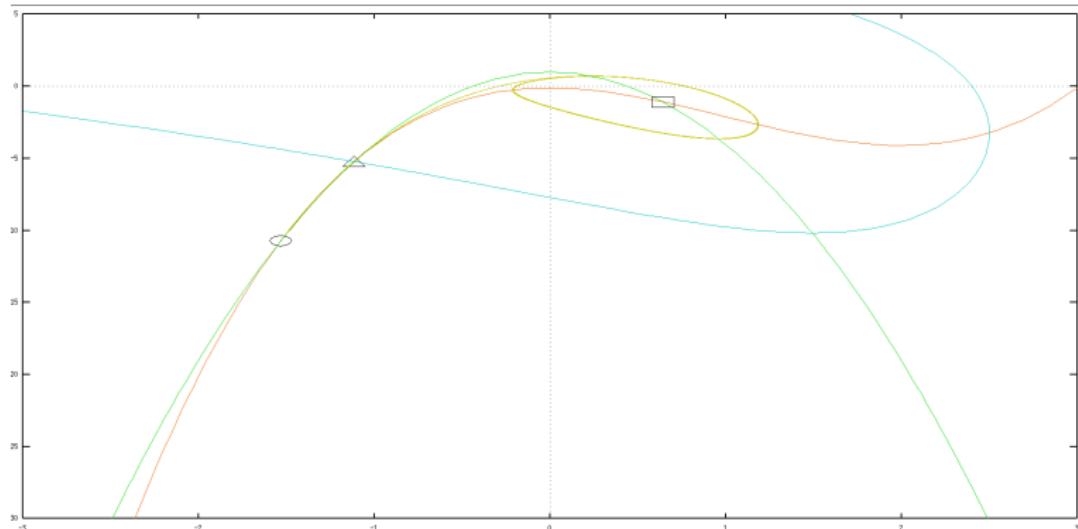


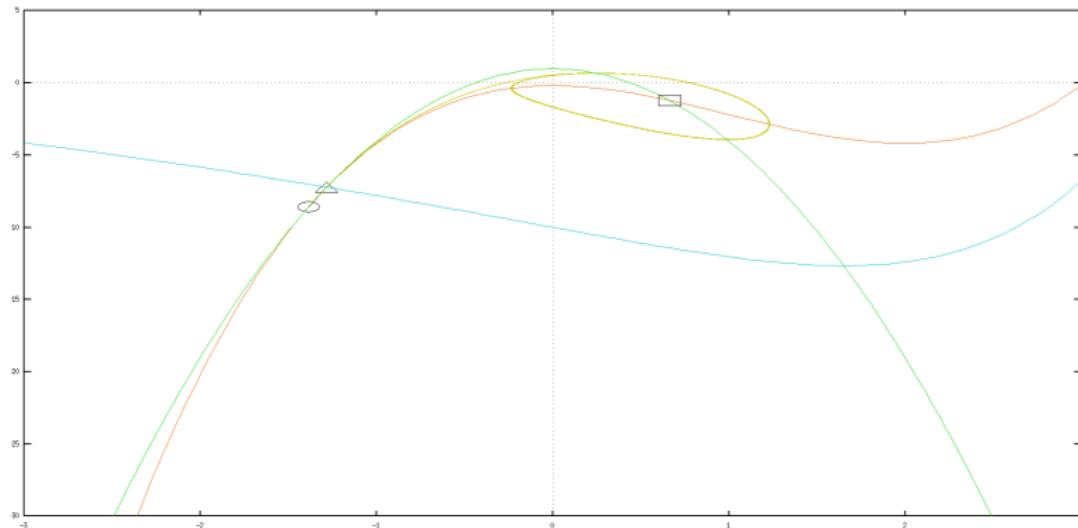


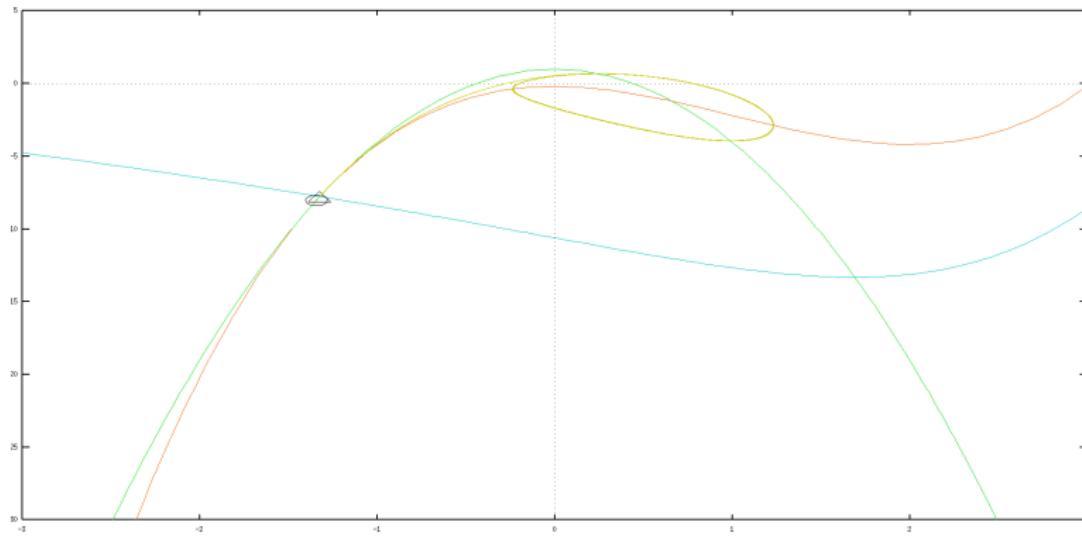


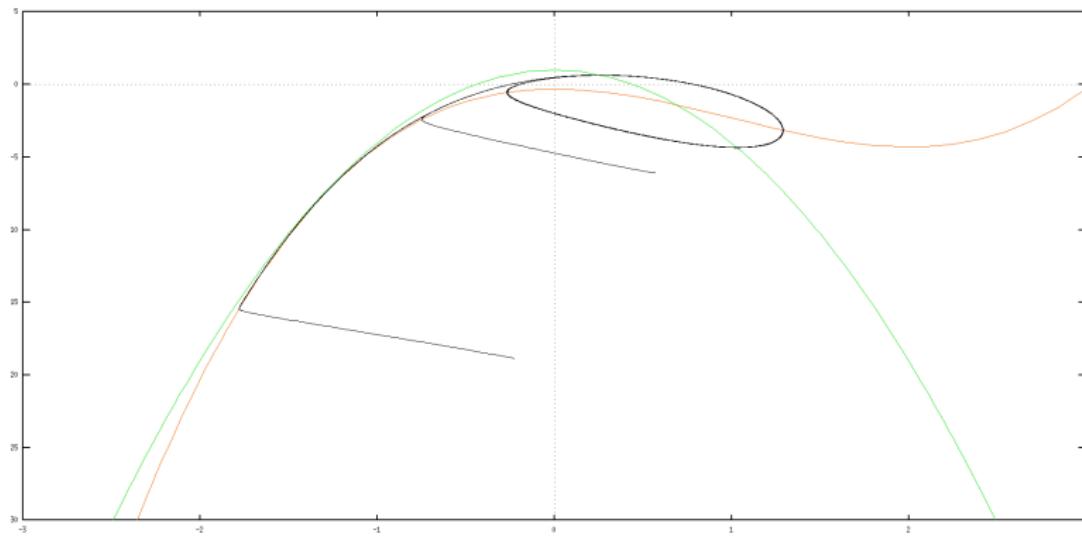


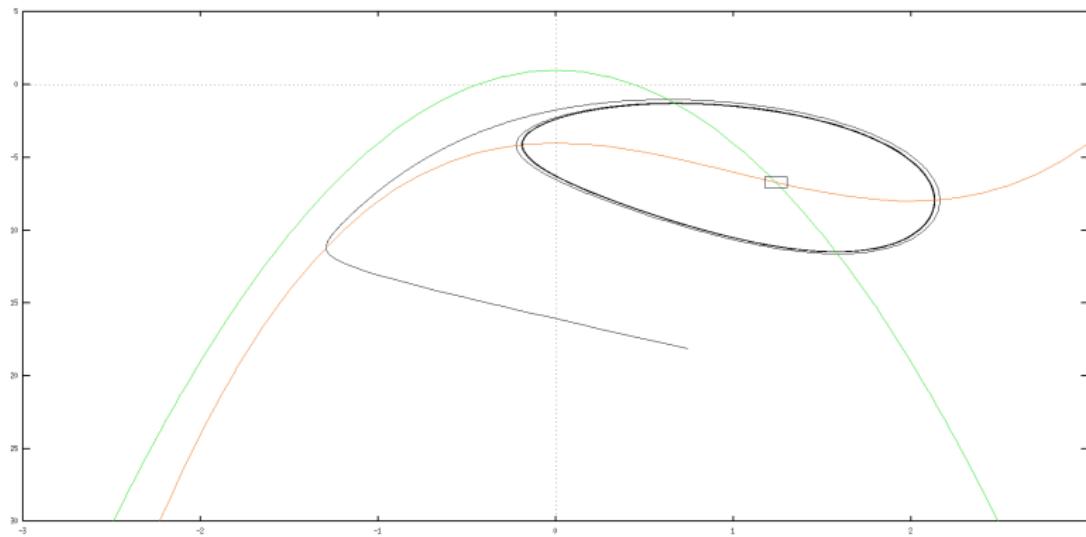


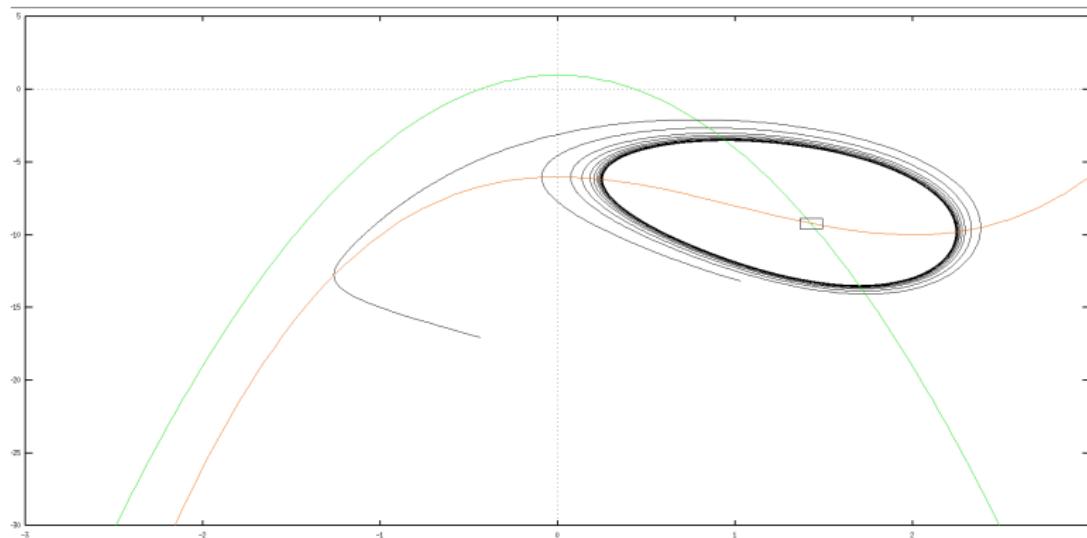


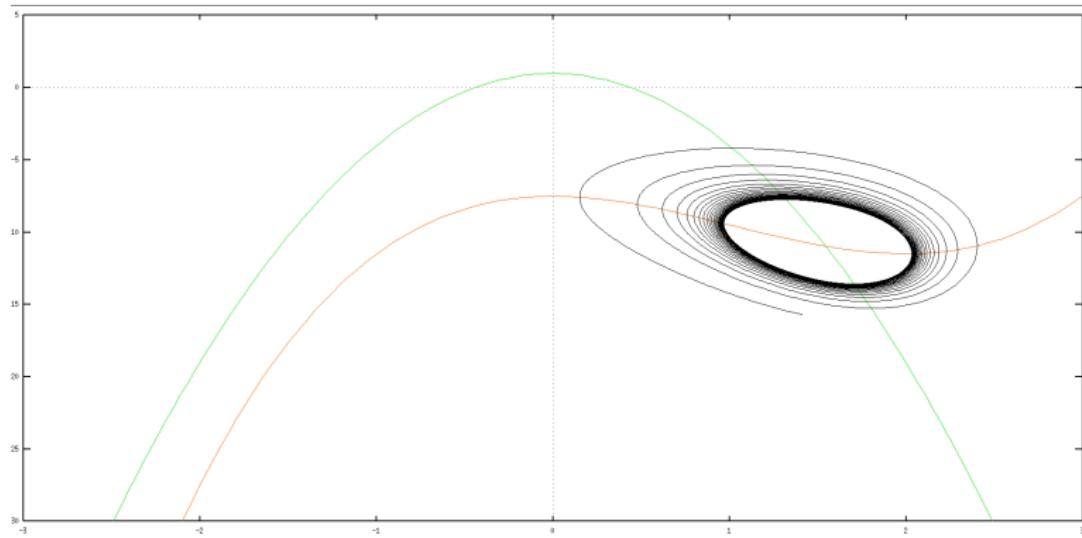


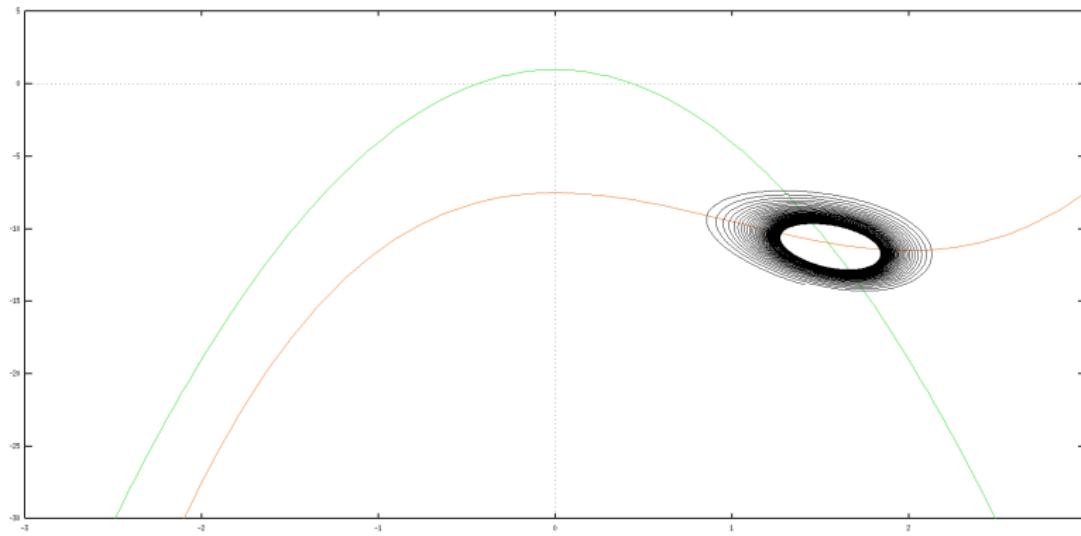


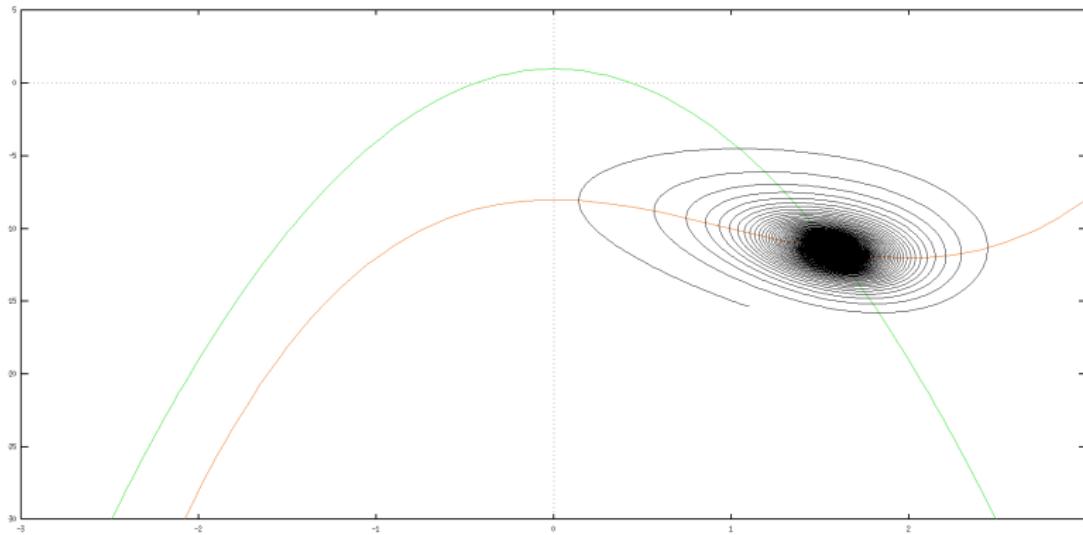


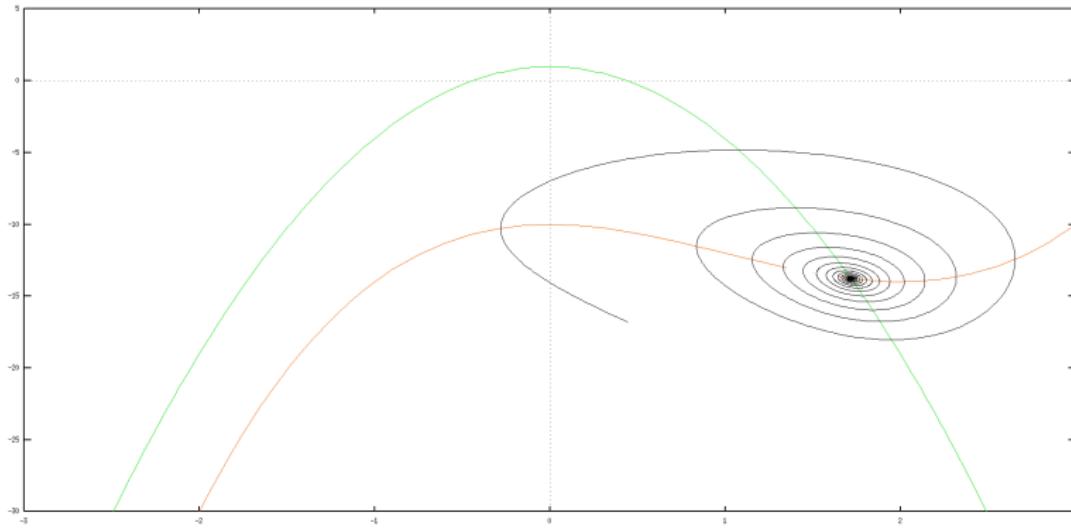


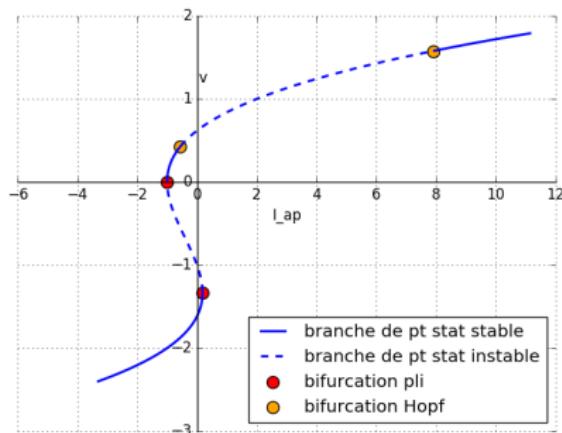












Valeur de I_{ap}	N	Caractérisation des points
$I_{ap} \in [-2, -1[$	1	noeud stable Bifurcation pli
$I_{ap} = -1$	2	noeud stable et col-noeud
$I_{ap} \in [-1, -0.988[$	3	noeud stable, col et noeud stable
$I_{ap} \in [-0.988, -0.567[$	3	noeud stable, col et foyer stable Bifurcation Hopf
$I_{ap} \in [-0.567, 5/27[$	3	noeud stable, col, foyer instable et cycle limite
$I_{ap} = 5/27$	2	col-noeud , foyer instable et cycle limite Bifurcation pli
$I_{ap} \in [5/27, 7.90[$	1	foyer instable et cycle limite Bifurcation Hopf
$I_{ap} \in [7.90, 10[$	1	foyer stable

1 Pour $C = 2$

- Recherche des points d'équilibre
- Stabilité des points

2 Pour $C = 1$

3 Passage en 3 dimensions : bursting

- Obtention du bursting
- Pour $c = 2$: Bursting fold/Hopf
- Pour $c = 1$: Bursting Square-Wave
- Entre $c = 1$ et $c = 2$

Diagramme de bifurcation

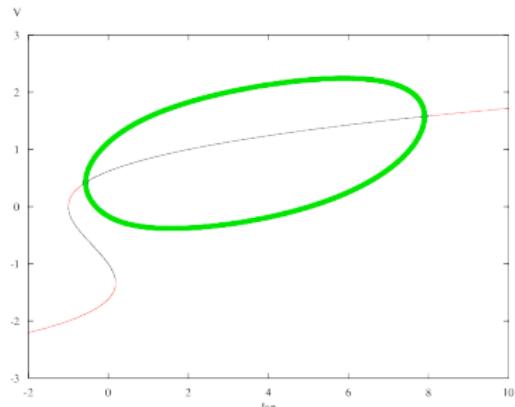
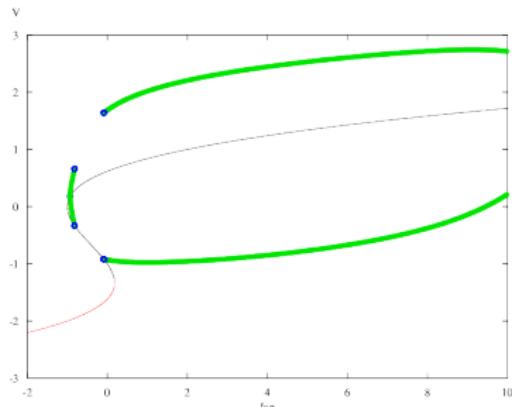
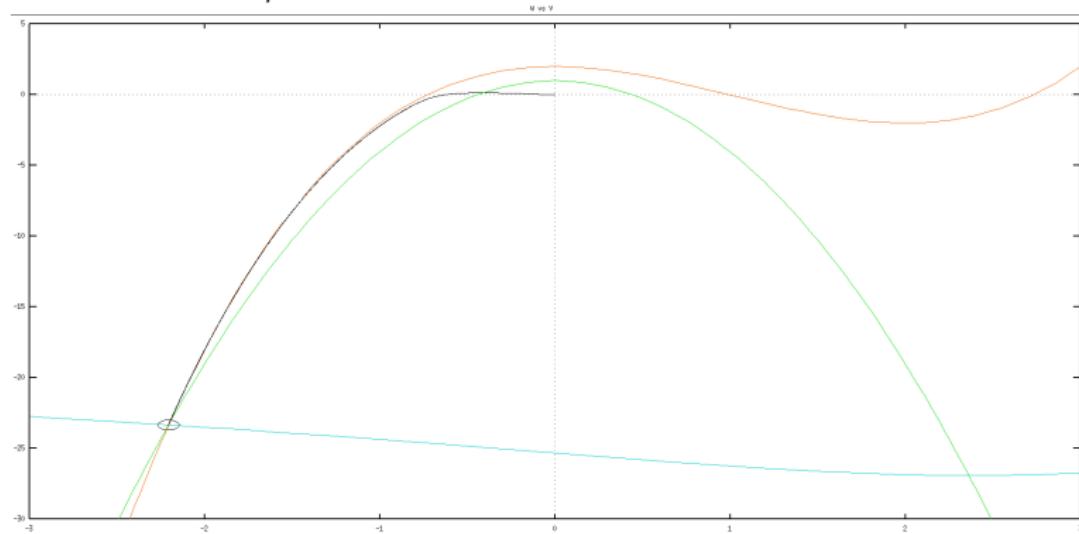


Figure 1: Diagramme de bifurcation pour $c = 1$ (à gauche) et $c = 2$ (à droite)

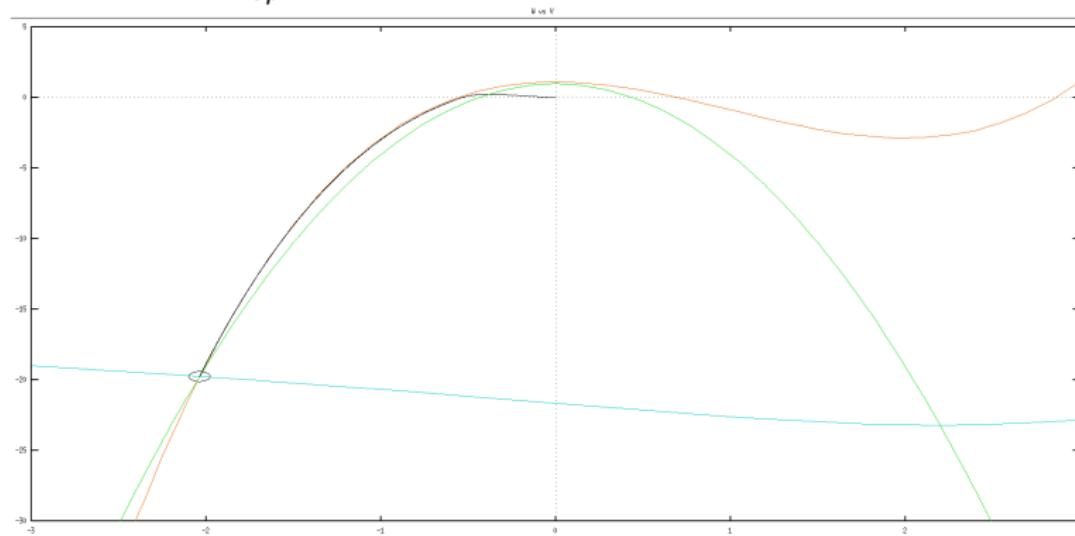
Stabilité et bifurcation

- Mêmes branches de points stationnaires, stabilité qui varie avec c :
 - Les points de bifurcations de Hopf s'éloignent
 - La famille de cycle limite rencontre la branche du col : **bifurcation homocline**
- Bifurcations pli indépendantes de c .

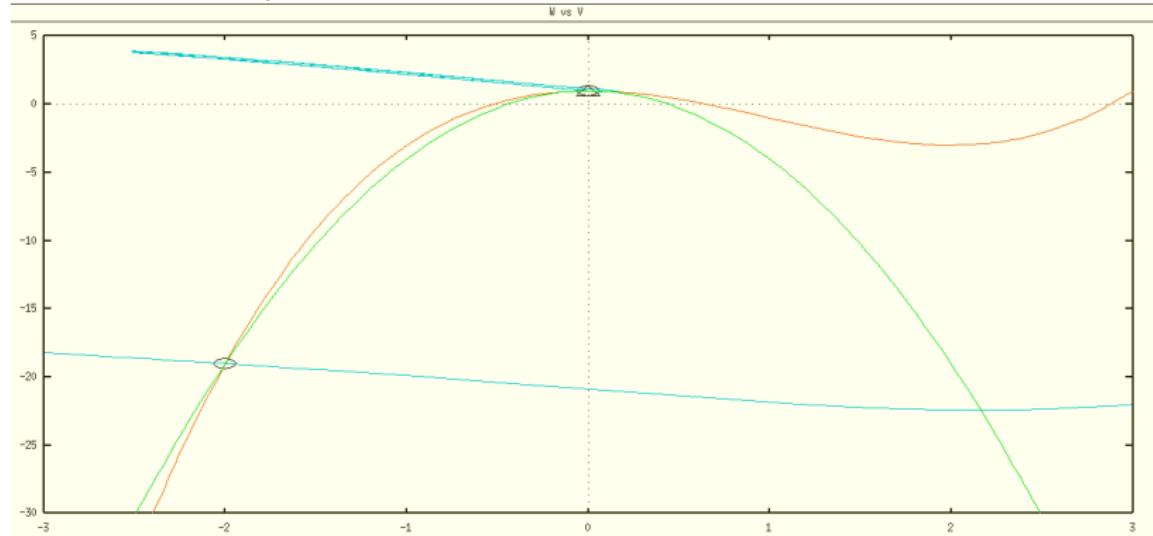
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -2.0$



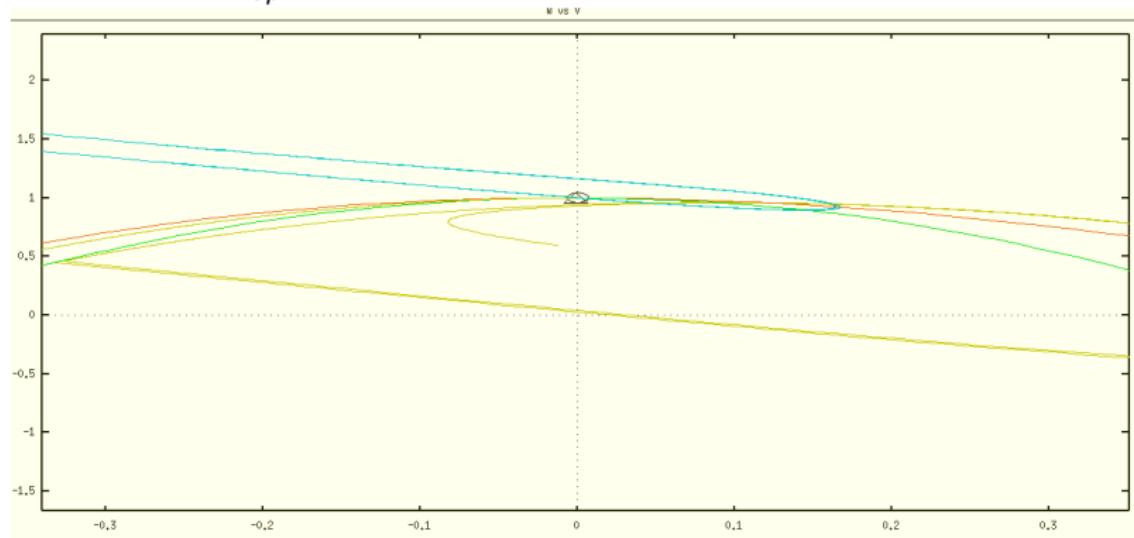
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -1.15$



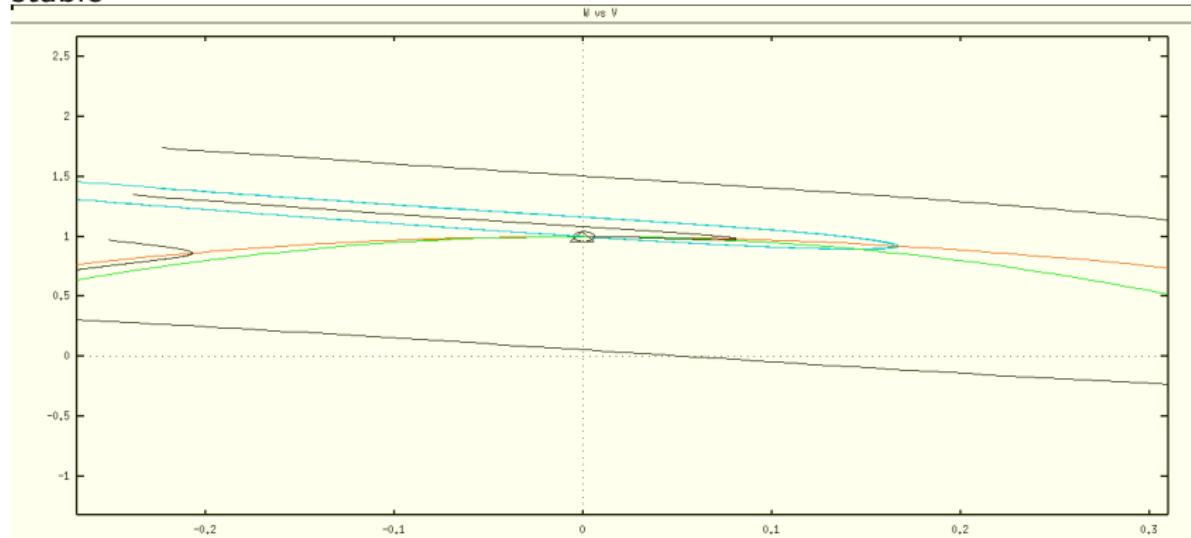
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -1.0$



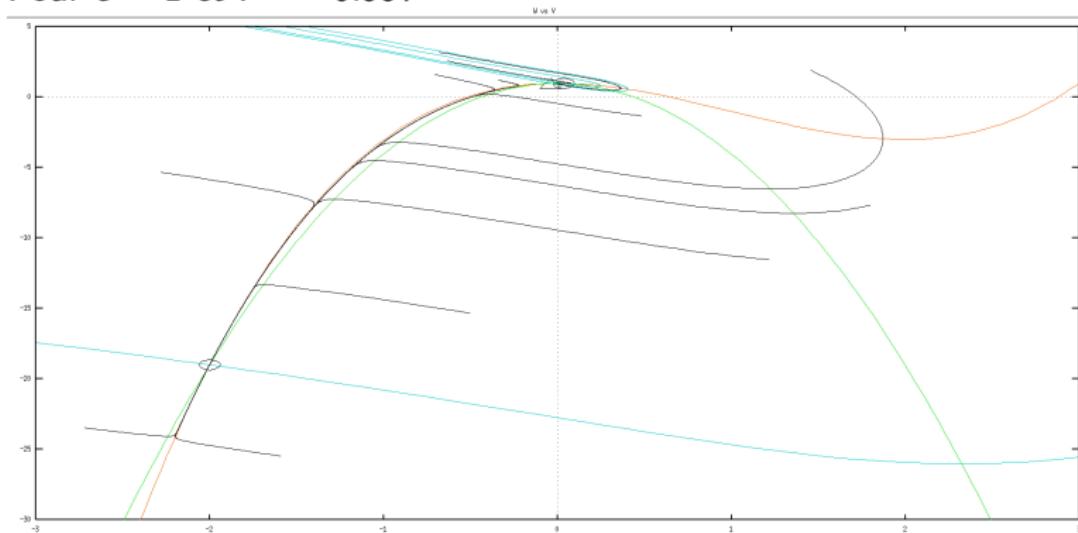
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -1.0$



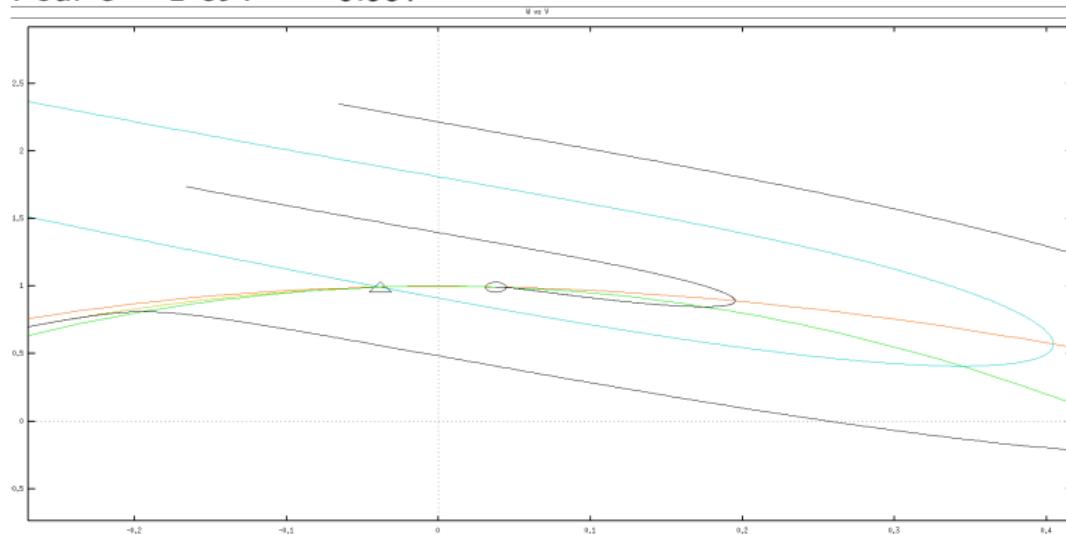
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -1.0$: deux bassins d'attraction séparés par variété stable



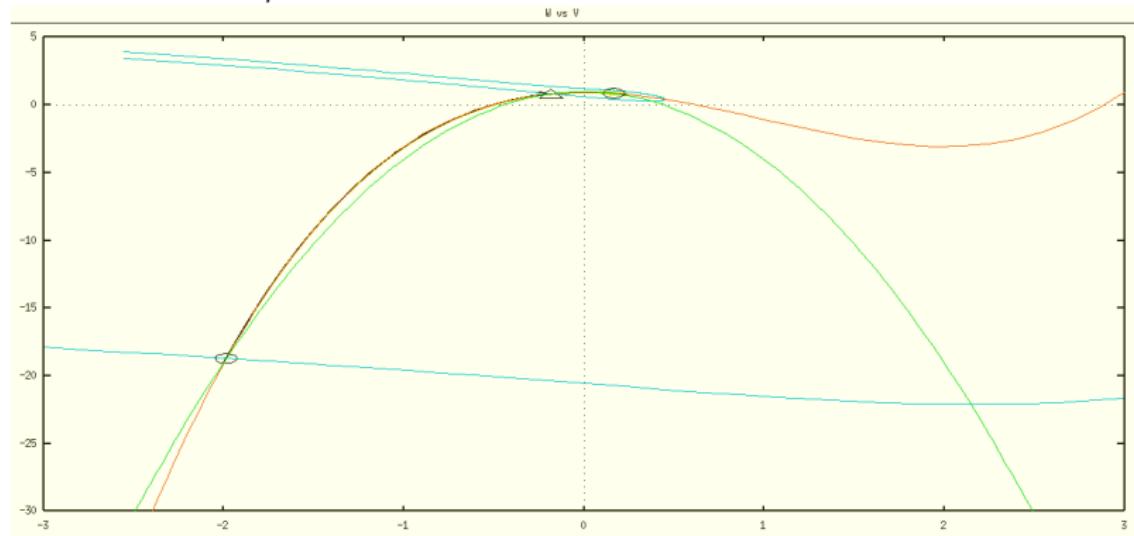
Pour $c = 1$ et $I = -0.997$



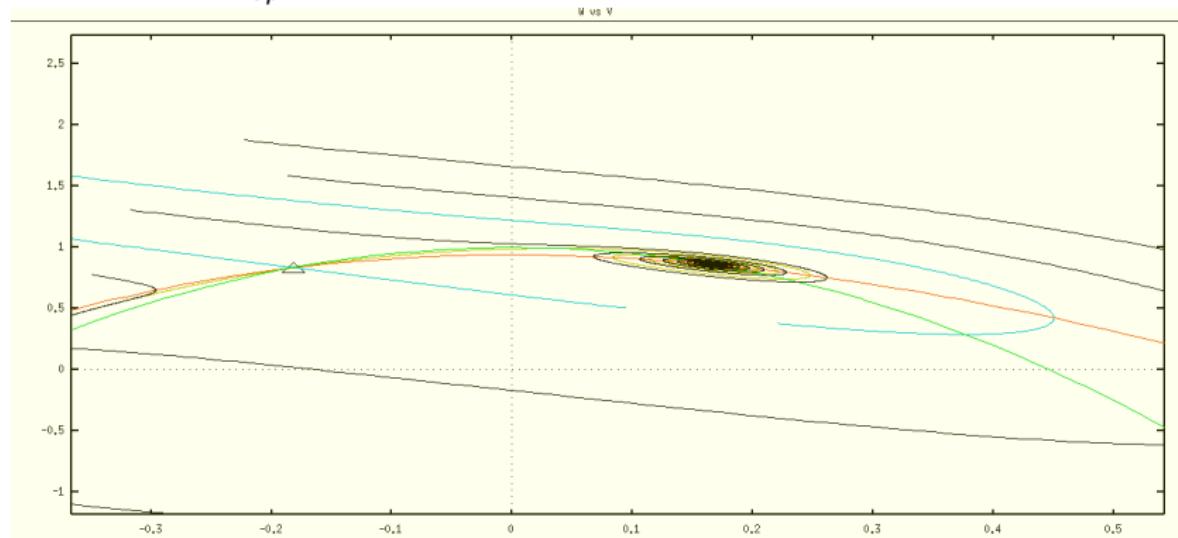
Pour $c = 1$ et $I = -0.997$



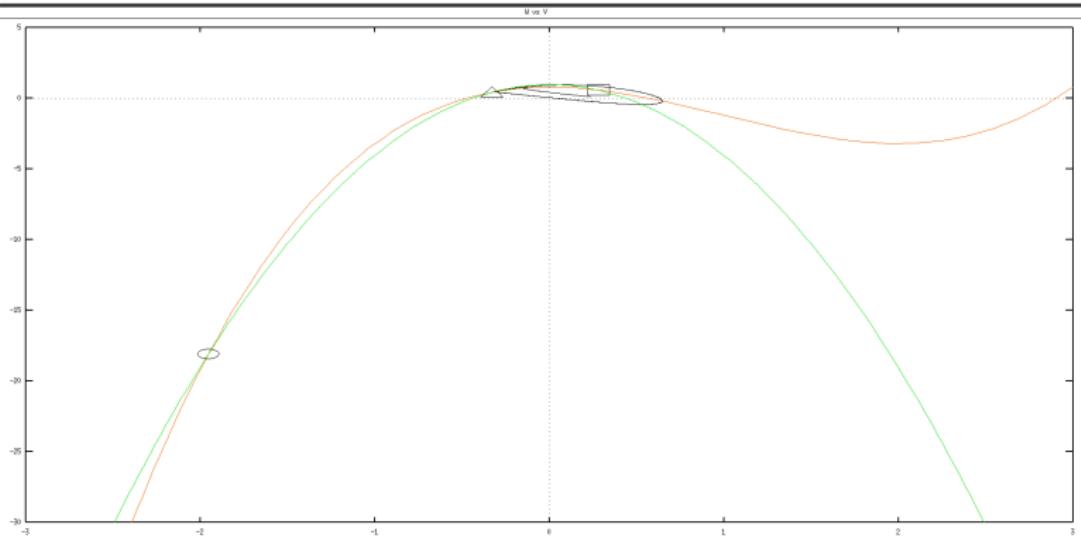
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -0.94$



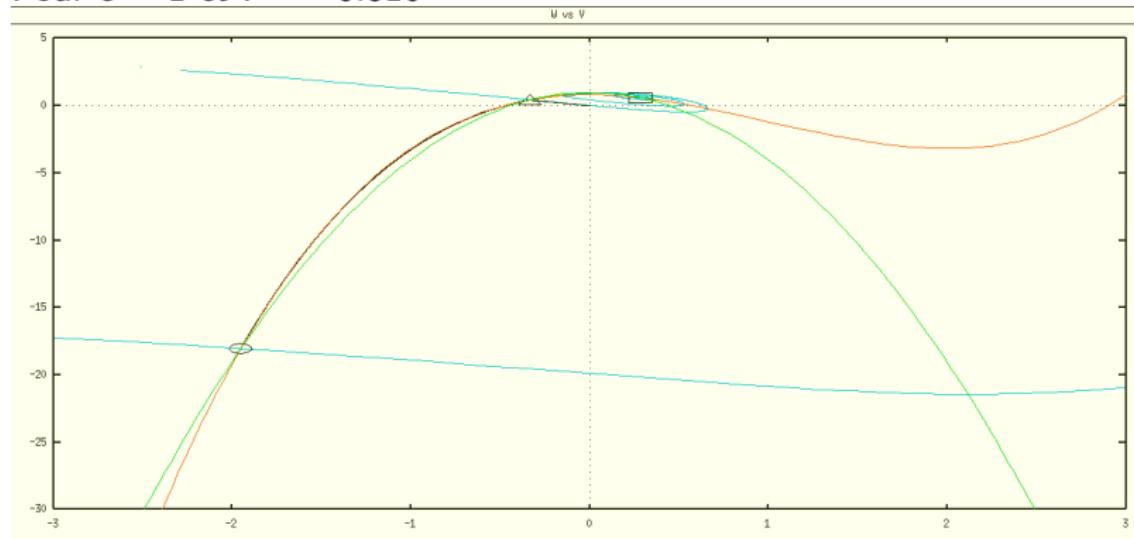
Pour $c = 1$ et $I_{ap} = -0.94$



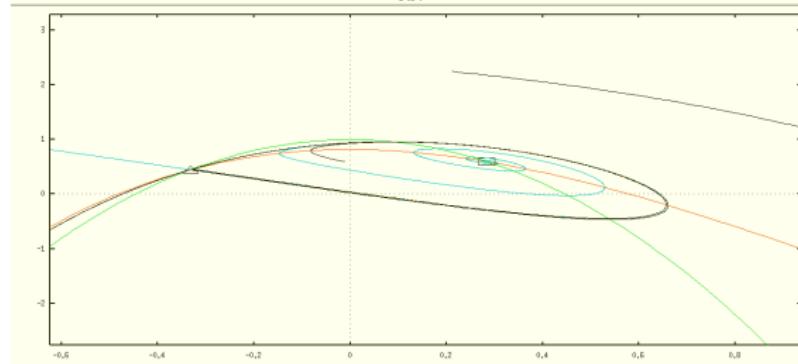
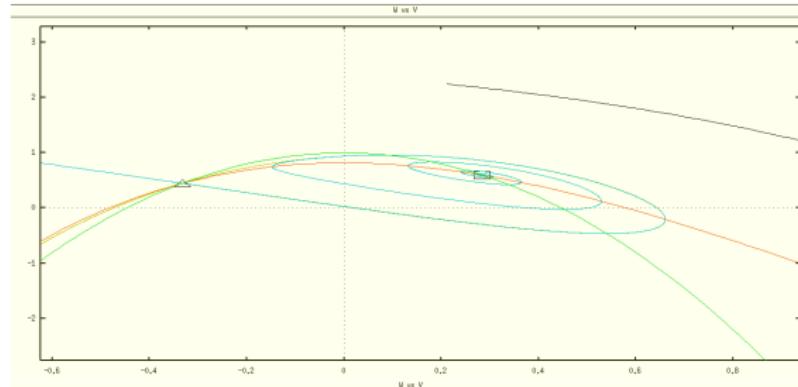
Pour $c = 1$ et $I = -0.82$



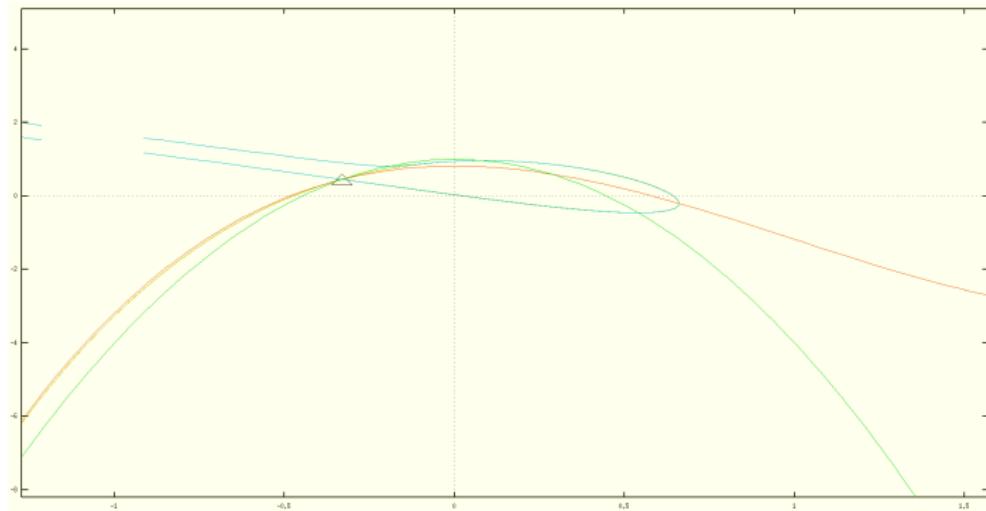
Pour $c = 1$ et $I = -0.816$



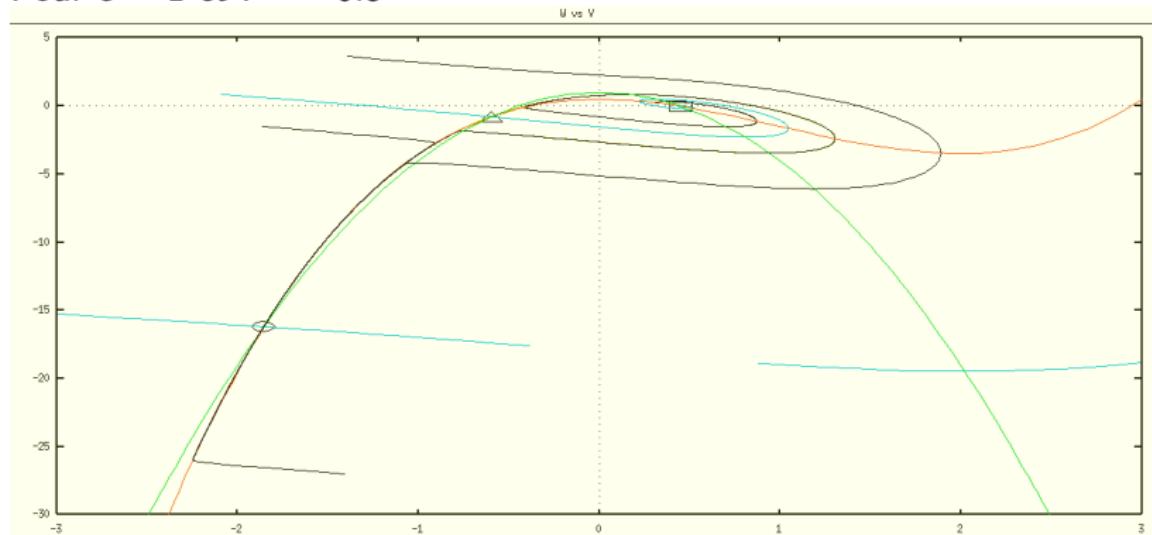
Pour $c = 1$ et $I = -0.816$



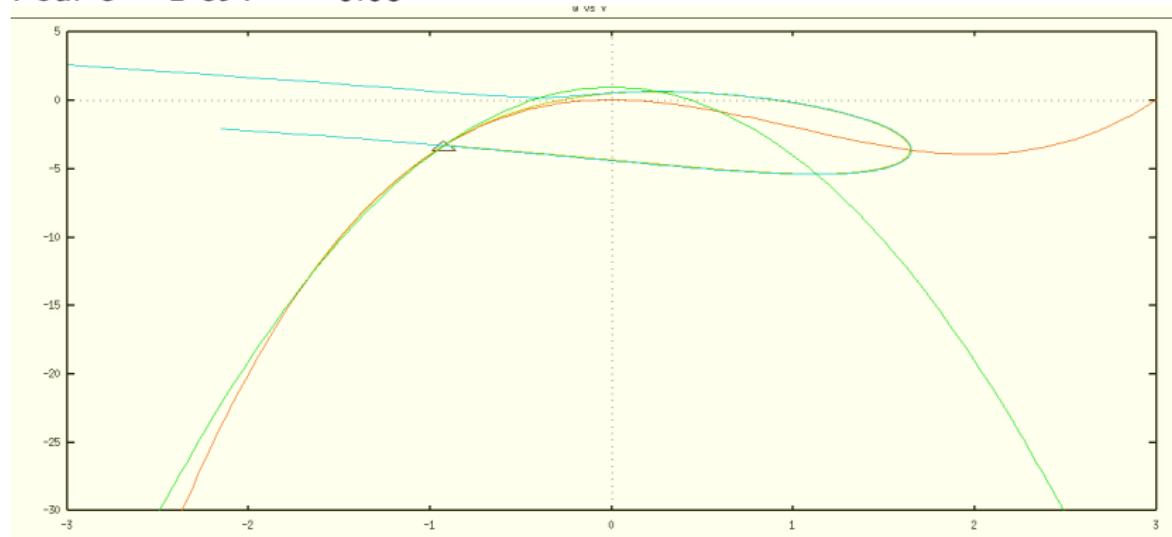
Pour $c = 1$ et $I = -0.816$



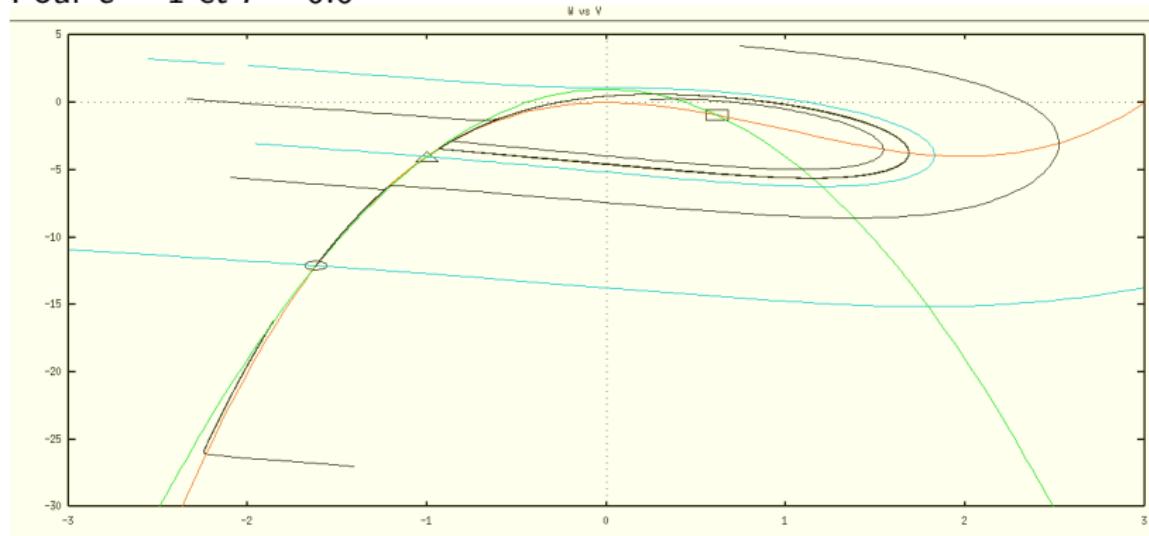
Pour $c = 1$ et $I = -0.5$



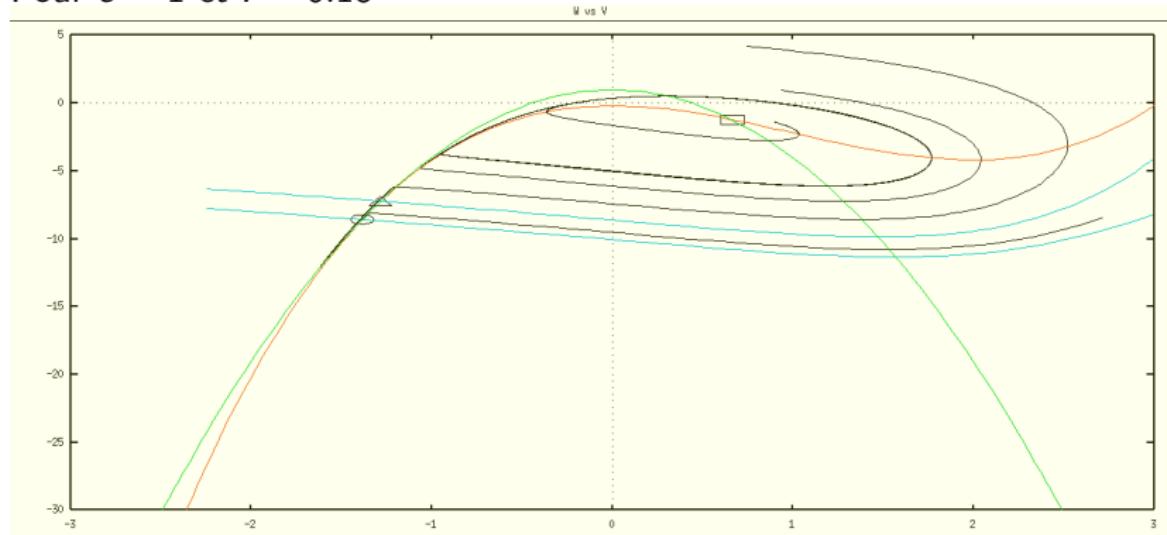
Pour $c = 1$ et $I = -0.08$



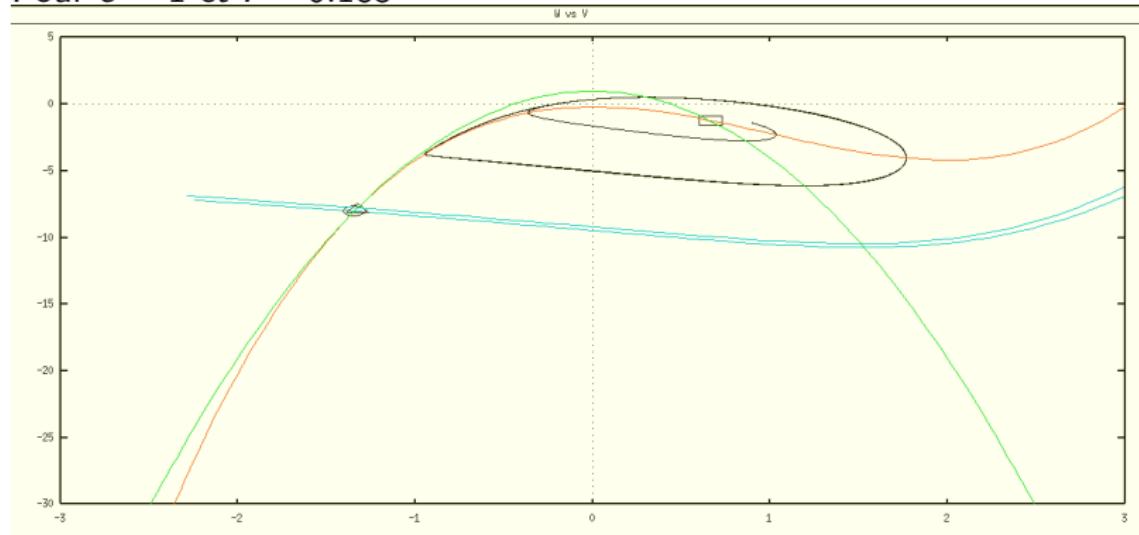
Pour $c = 1$ et $I = 0.0$



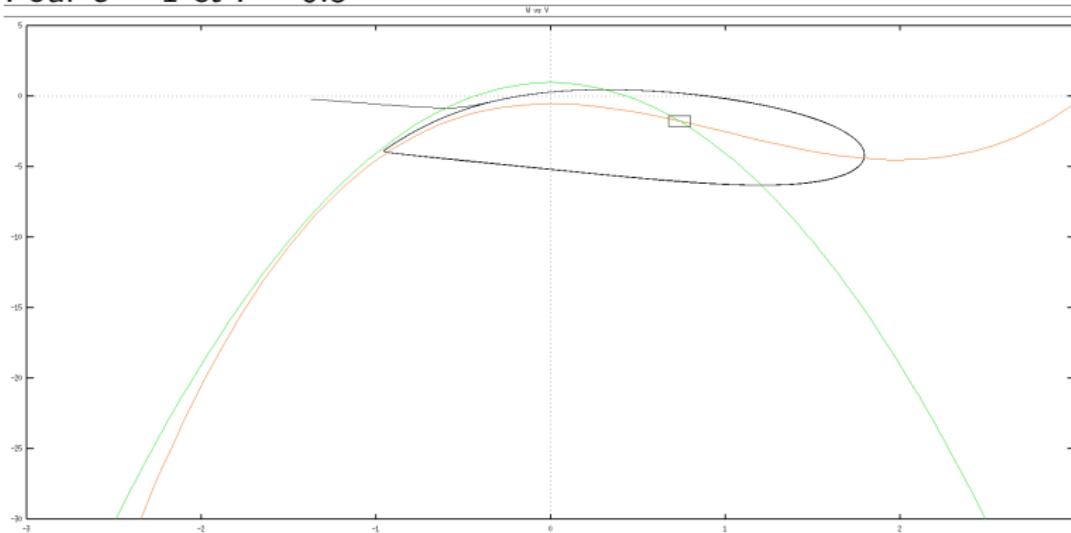
Pour $c = 1$ et $I = 0.18$



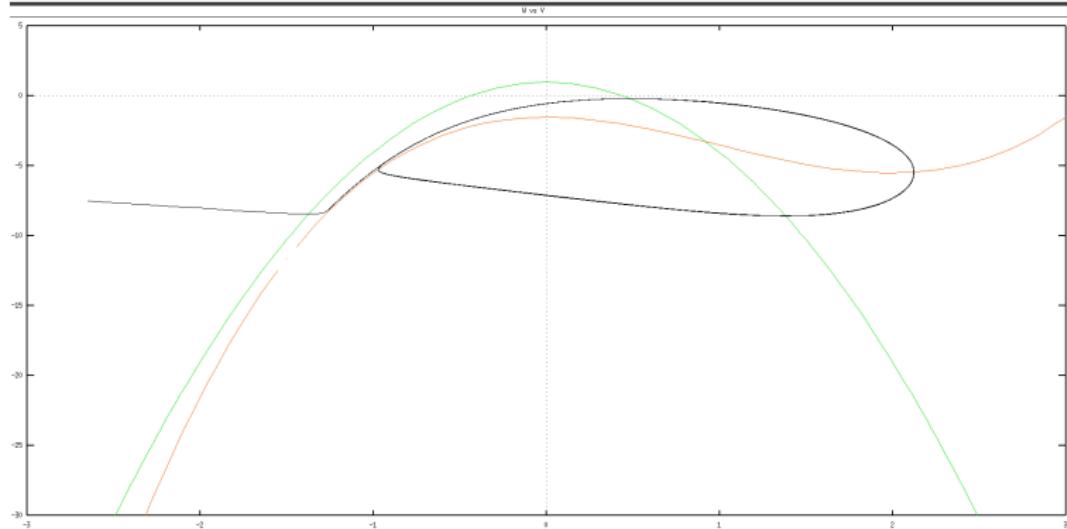
Pour $c = 1$ et $I = 0.185$



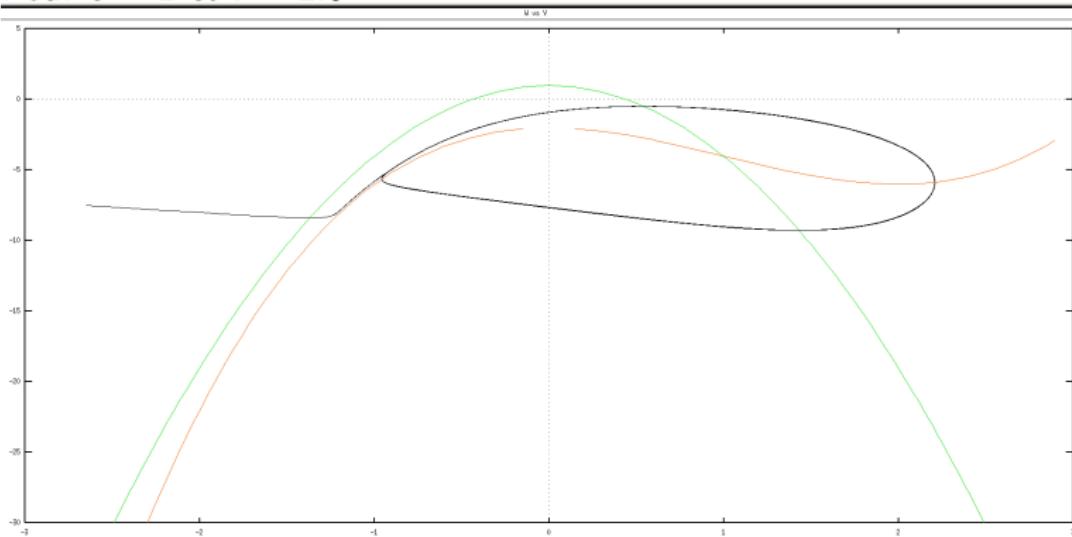
Pour $c = 1$ et $I = 0.5$



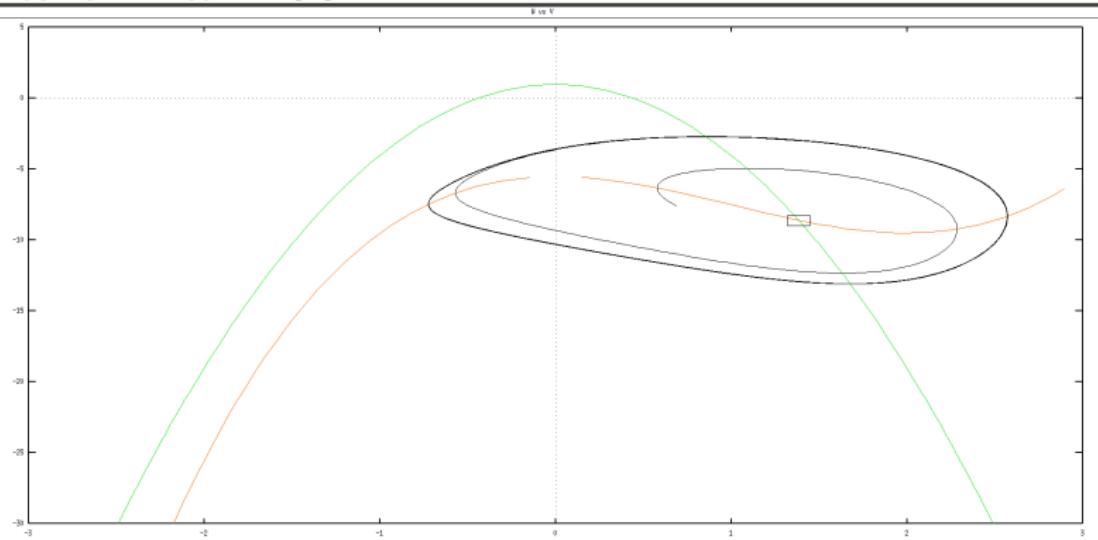
Pour $c = 1$ et $I = 1.5$



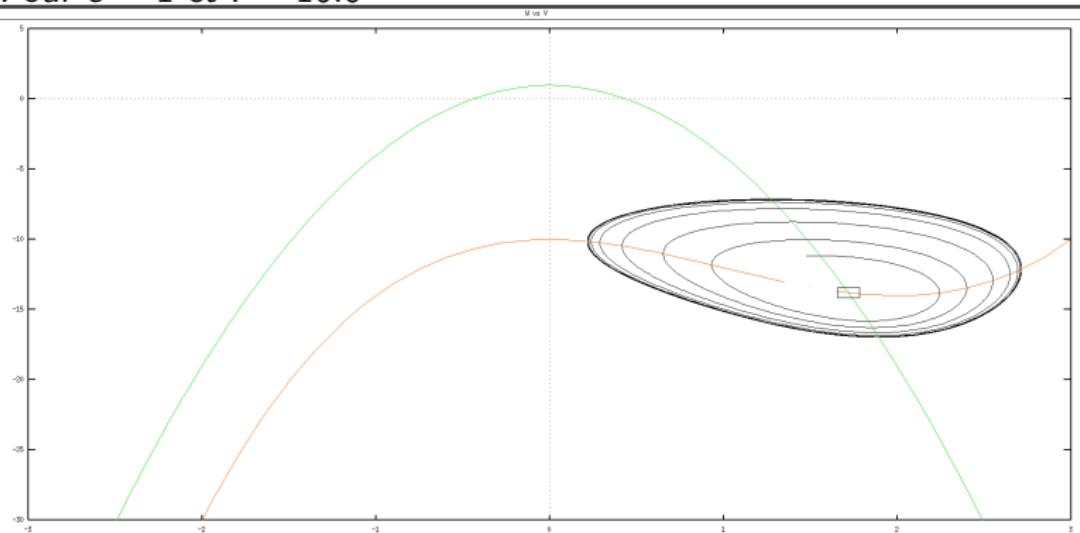
Pour $c = 1$ et $I = 2.0$



Pour $c = 1$ et $I = 5.5$



Pour $c = 1$ et $I = 10.0$



Récapitulatif

Valeur de I_{ap}	N	Caractérisation des points
$I_{ap} \in] -2, -1[$	1	noeud stable
		Bifurcation pli
$I_{ap} = -1$	2	noeud stable et col-noeud
$I_{ap} \in] -1, -0.9971[$	3	noeud stable et col et noeud stable
$I_{ap} \in] -0.9971, -0.926[$	3	noeud stable, col et foyer stable
		Bifurcation Hopf
$I_{ap} \in] -0.926, -0.816[$	3	noeud stable, col et foyer instable, cycle limite
		Bifurcation homocline
$I_{ap} \in] -0.816, -0.0856[$	3	noeud stable, col et foyer instable
		Bifurcation homocline
$I_{ap} \in] -0.0856, 5/27[$	3	noeud stable, col, foyer instable, cycle limite
$I_{ap} = 5/27$	2	col-noeud , foyer instable et cycle limite
		Bifurcation pli
$I_{ap} \in] 5/27, 10[$	1	foyer instable et cycle limite

1 Pour $C = 2$

- Recherche des points d'équilibre
- Stabilité des points

2 Pour $C = 1$

3 Passage en 3 dimensions : bursting

- Obtention du bursting
- Pour $c = 2$: Bursting fold/Hopf
- Pour $c = 1$: Bursting Square-Wave
- Entre $c = 1$ et $c = 2$

Nouveau système

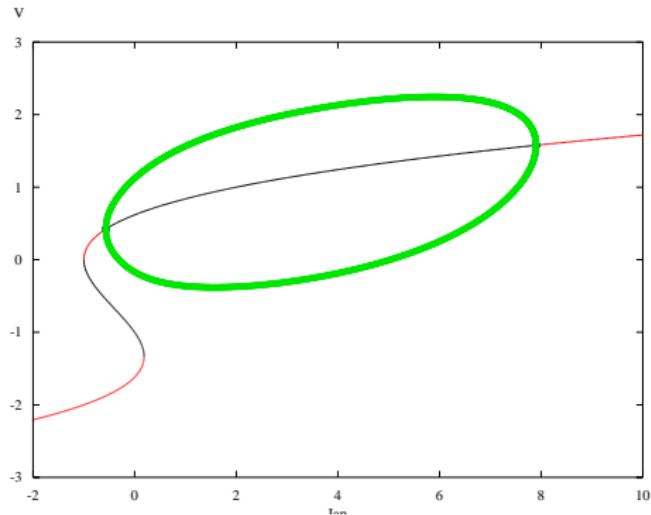
$$\begin{cases} v'(t) = (w - v^3 + 3v^2 + I_{ap})/c = f(v, w) \\ w'(t) = 1 - 5v^2 - w = g(v, w) \\ I'_{ap}(t) = \epsilon(0.3I_{ap} - 1 - v) \end{cases} \quad (2)$$

- pour $c = 2$ et $c = 1$: existence de zones de **multistabilité** dans le sous système rapide (v, w)
- $I'_{ap} = \epsilon(0.9v^3 + 0.6v^2 - v - 1.3)$ si $v = v_0$
- racines de $I'_{ap} = 0$:

$$\begin{cases} v_1 \approx -2.64087 \\ v_2 \approx -1 \\ v_3 \approx 1.64087 \end{cases}$$

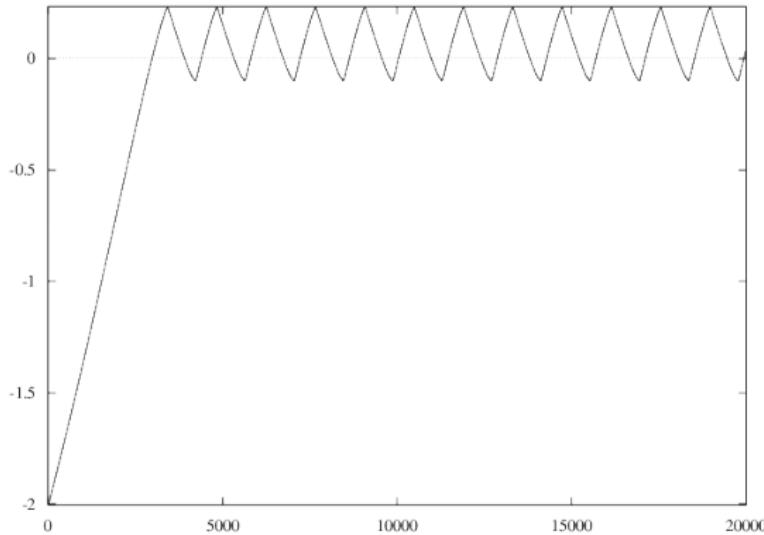
Hystérèse

$c \in [1, 2]$							
Valeur de v	$v < -2.64$	$v = -2.64$	$-2.64 < v < -1$	$v = -1$	$-1 < v < 1.64$	$v = 1.64$	$v > 1.64$
I'_{ap}	-	0	+	0	-	0	+



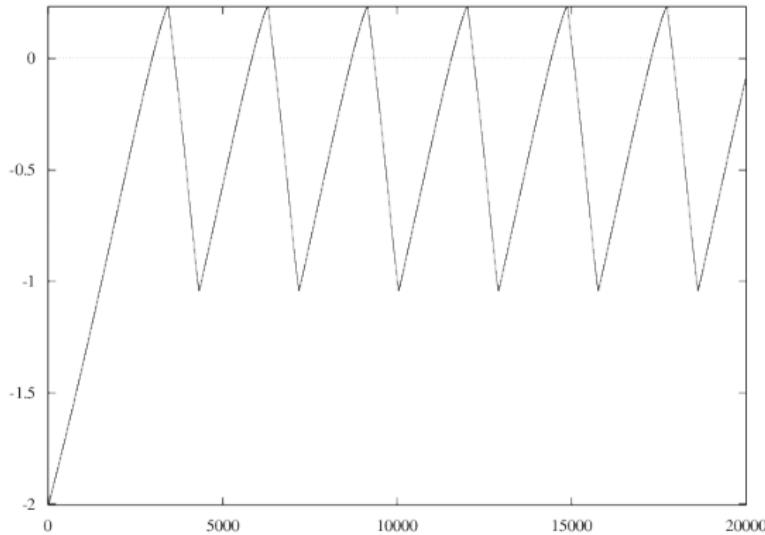
Superposition de la trace en temps de I_{ap}

$$c = 1$$



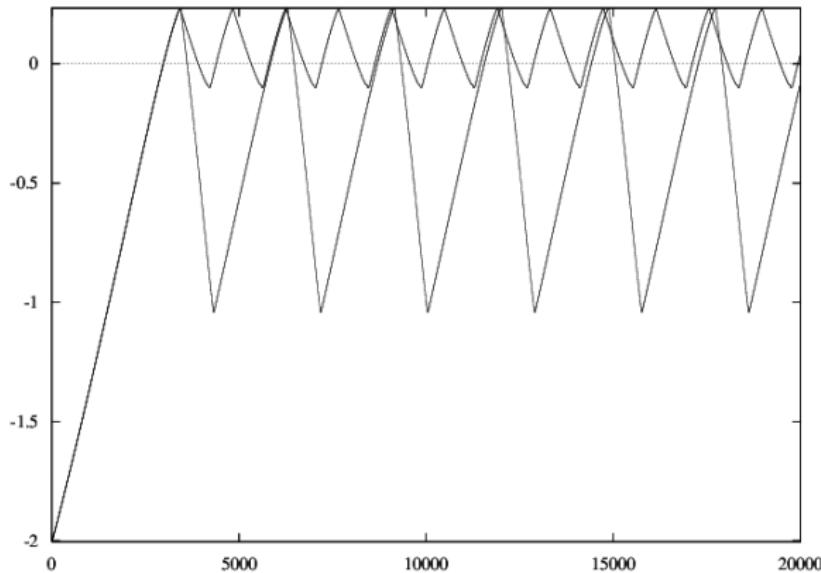
Superposition de la trace en temps de I_{ap}

$$c = 2$$



Superposition de la trace en temps de I_{ap}

pour $c = 2$ et $c = 1$



Récapitulatif

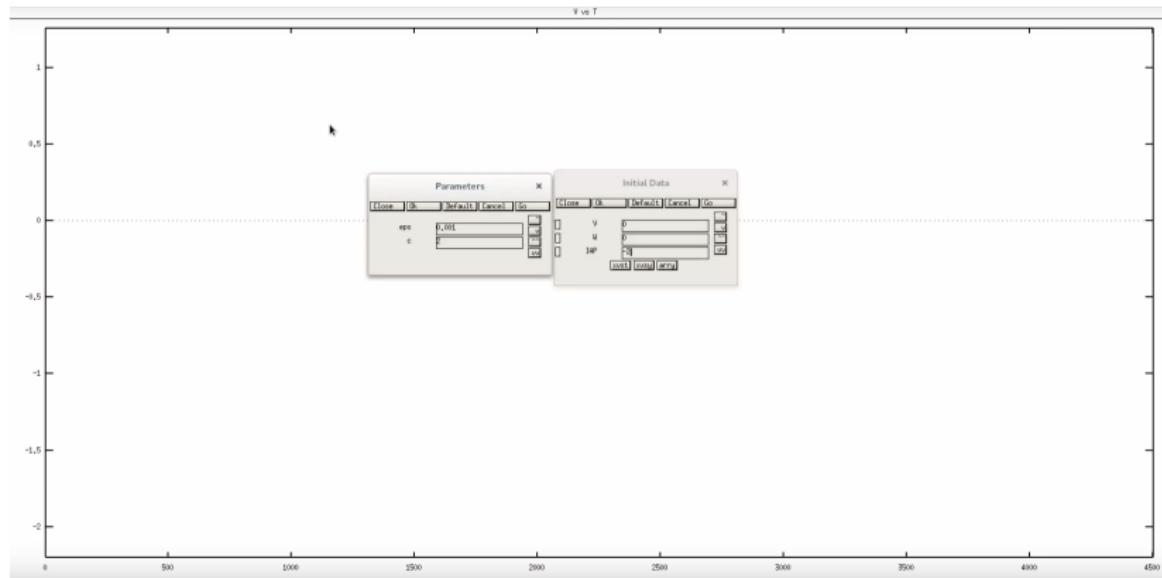
Contexte :

- I_{ap} variable lente (ϵ aussi petit que l'on veut), (v, w) variables rapides
- Sous système rapide bistable pour $c \in [1; 2]$
 - branche de noeuds
 - famille de cycles limites
- Phénomène d'hystérèse

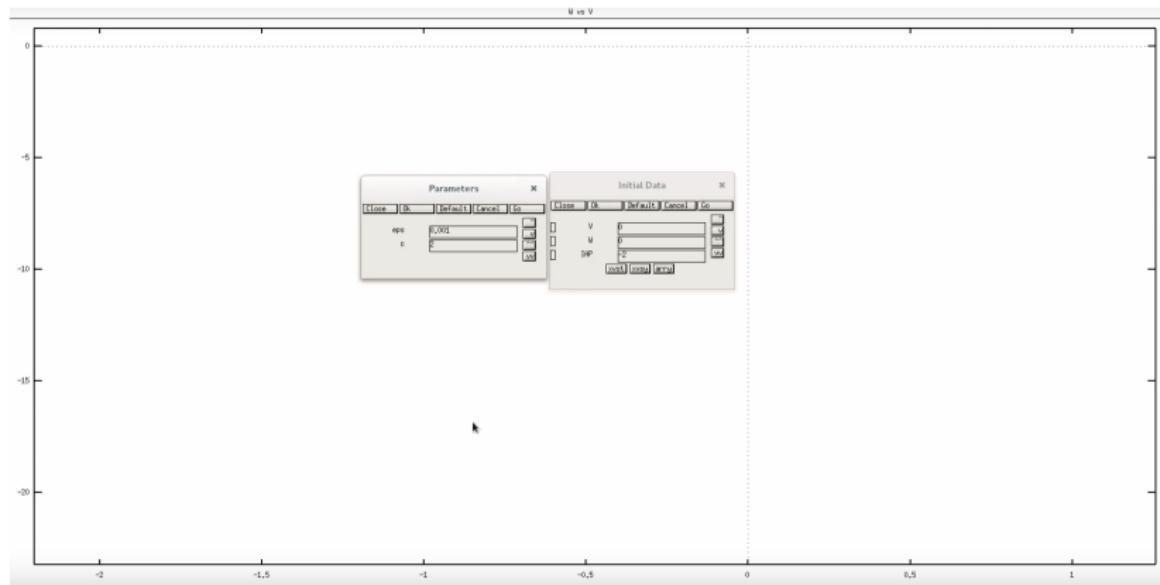
Observations :

- Amplitude de I_{ap} 4 fois plus importante pour $c = 2$
- Fréquence 2 fois plus élevée pour $c = 1$

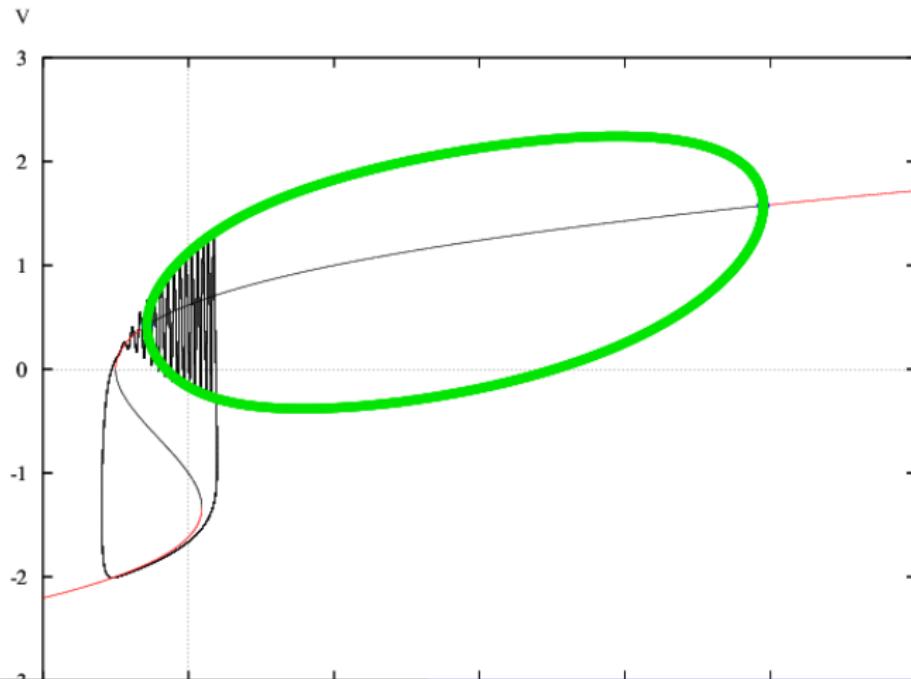
Bursting temporel $v = f(t)$ pour $c = 2$



Bursting dans le plan de phase $v = f(t)$ pour $c = 2$



Superposition diagramme de bifurcation du sous-système rapide et $v = f(l_{ap})$

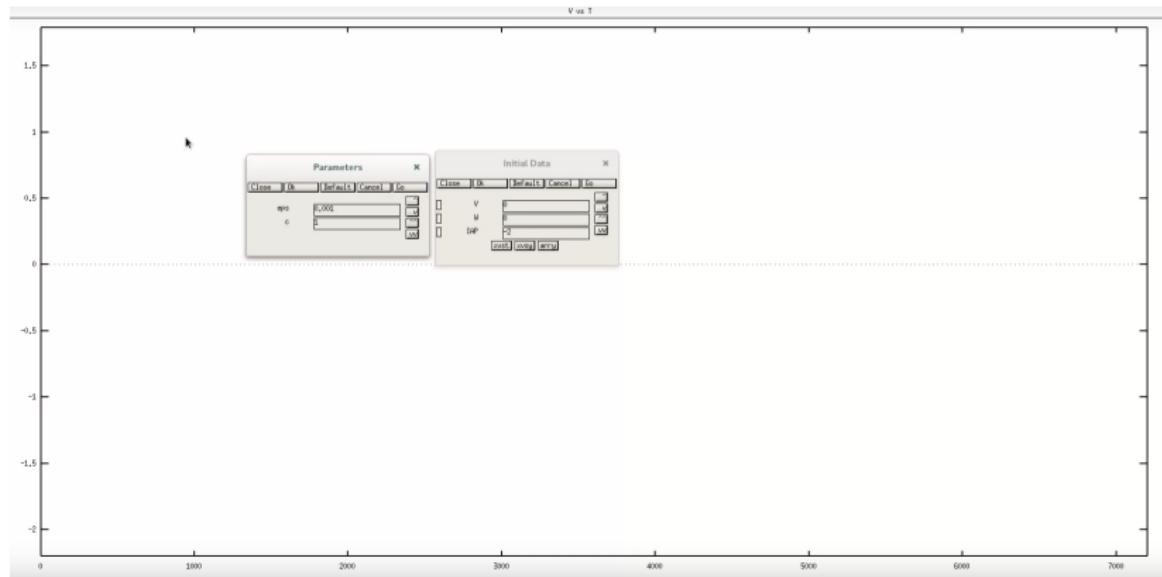


Récap bursting pour $c=2$

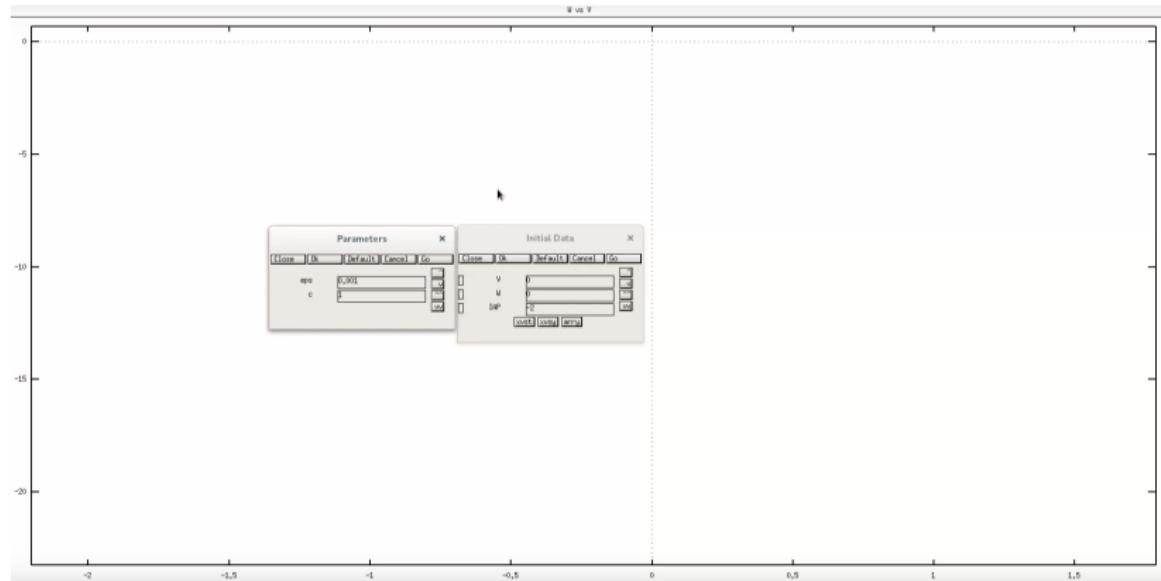
- Début du burst par bifurcation pli
- Fin du burst par bifurcation de Hopf surcritique
- Amplitude des spikes décroissante
- Fréquence des spikes constante $\approx 2\pi$
- $v_{rest} \neq v_{burst}$

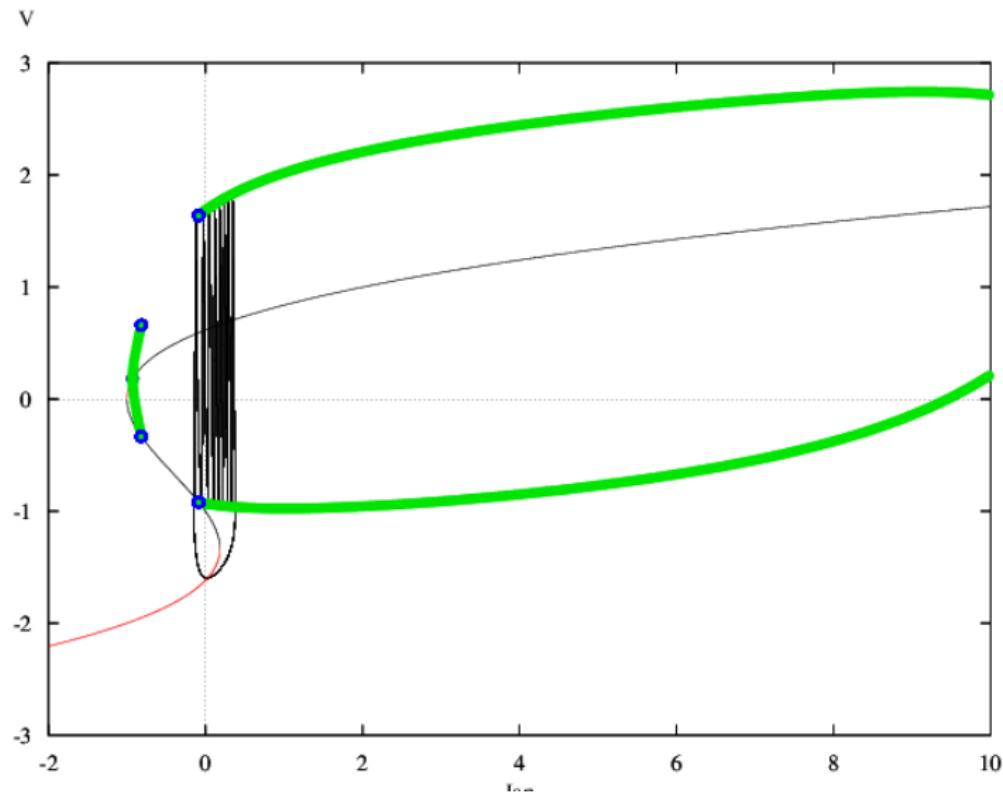
Classification de Izhikevich : **fold/Hopf**

Bursting temporel $v = f(t)$ pour $c = 1$



Bursting dans le plan de phase $v = f(t)$ pour $c = 1$





Récap bursting pour $c=1$

- Début du burst par bifurcation pli

Classification de Rinzel : **Square-Wave**

Récap bursting pour $c=1$

- Début du burst par bifurcation pli
- Fin du burst par bifurcation homocline

Classification de Rinzel : **Square-Wave**

Récap bursting pour $c=1$

- Début du burst par bifurcation pli
- Fin du burst par bifurcation homocline
- Amplitude des spikes constante

Classification de Rinzel : **Square-Wave**

Récap bursting pour $c=1$

- Début du burst par bifurcation pli
- Fin du burst par bifurcation homocline
- Amplitude des spikes constante
- Fréquence décroissante et tend vers 0.

Classification de Rinzel : **Square-Wave**

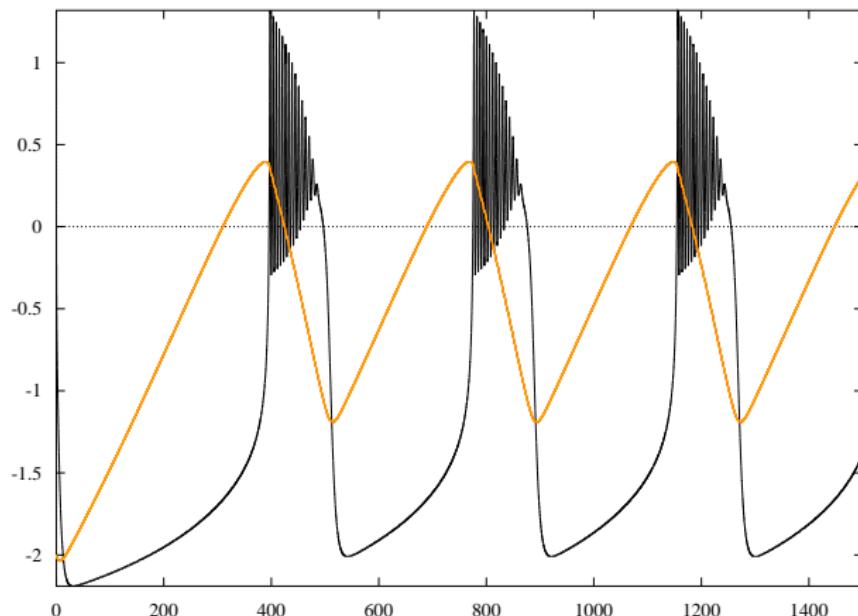
Récap bursting pour $c=1$

- Début du burst par bifurcation pli
- Fin du burst par bifurcation homocline
- Amplitude des spikes constante
- Fréquence décroissante et tend vers 0.
- $v_{rest} \neq v_{burst}$

Classification de Rinzel : **Square-Wave**

Entre $c=1$ et $c=2$

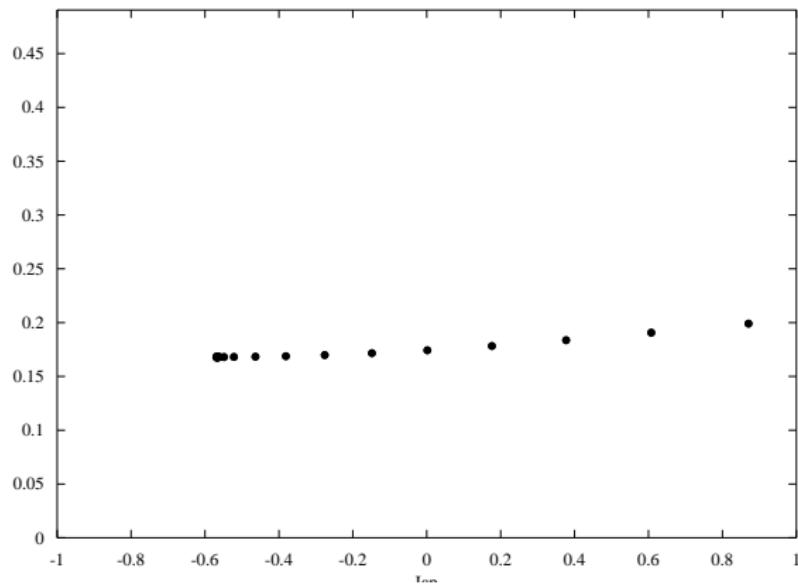
Trace en temps de I_{ap} et v pour $c = 2.0$ & $\epsilon = 0.01$



Entre $c=1$ et $c=2$

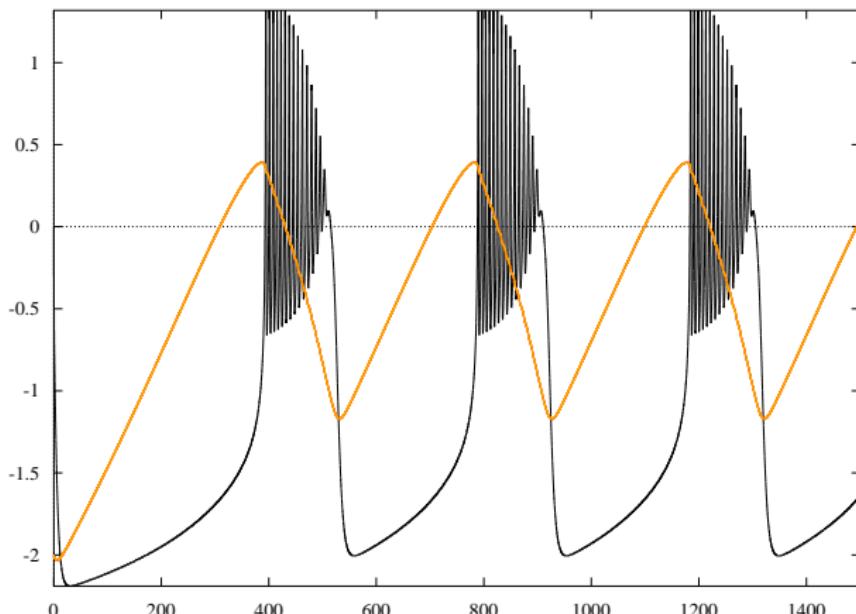
$freq = f(I_{ap})$ famille de cycles limites pour $c = 2.0$ & $\epsilon = 0.01$

Frequency



Entre $c=1$ et $c=2$

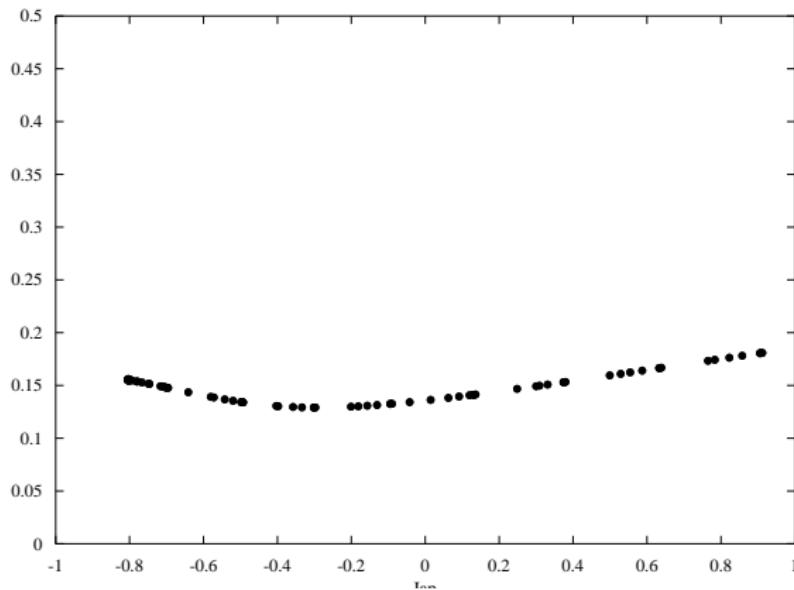
Trace en temps de I_{ap} et v pour $c = 1.5$ & $\epsilon = 0.01$



Entre $c=1$ et $c=2$

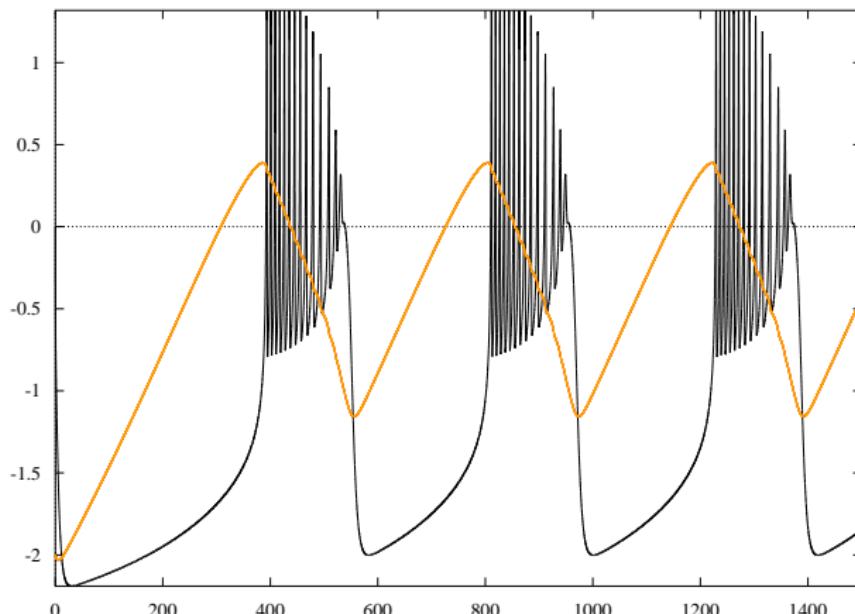
$freq = f(I_{ap})$ famille de cycles limites $c = 1.5$ & $\epsilon = 0.01$

Frequency



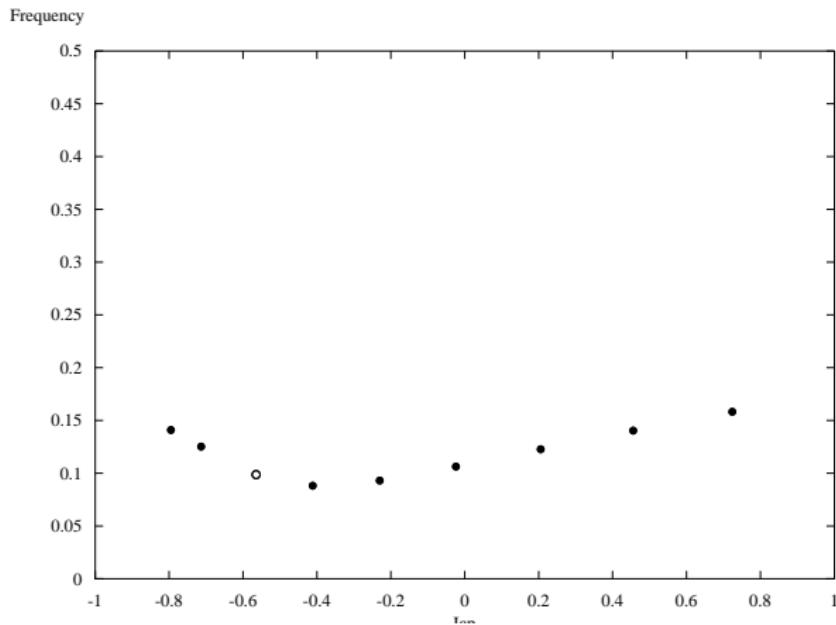
Entre $c=1$ et $c=2$

Trace en temps de I_{ap} et v pour $c = 1.3$ & $\epsilon = 0.01$



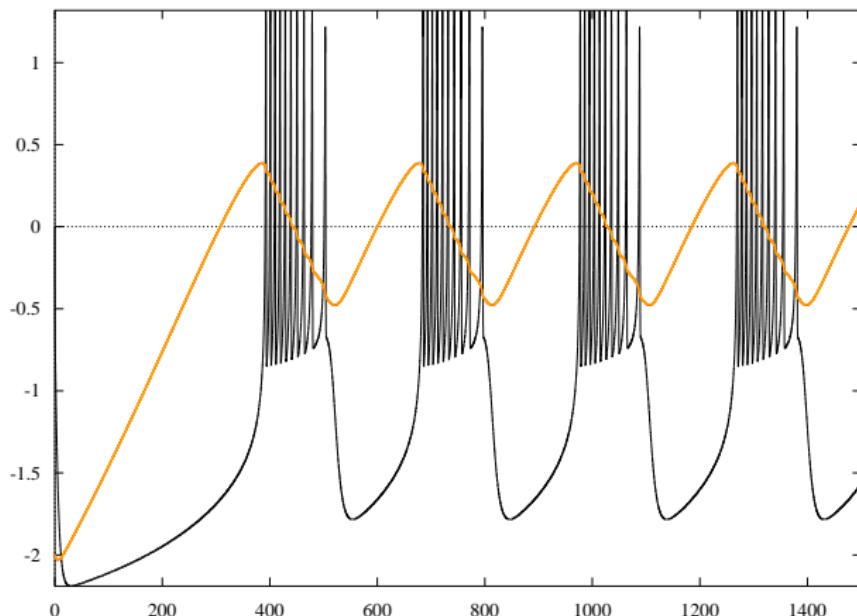
Entre $c=1$ et $c=2$

$freq = f(I_{ap})$ famille de cycles limites $c = 1.3$ & $\epsilon = 0.01$



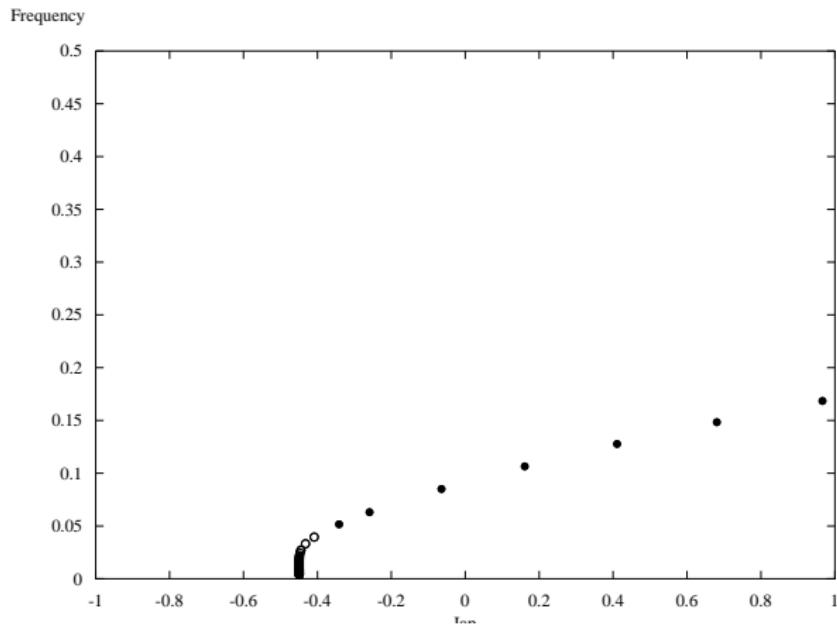
Entre $c=1$ et $c=2$

Trace en temps de I_{ap} et v pour $c = 1.2$ & $\epsilon = 0.01$



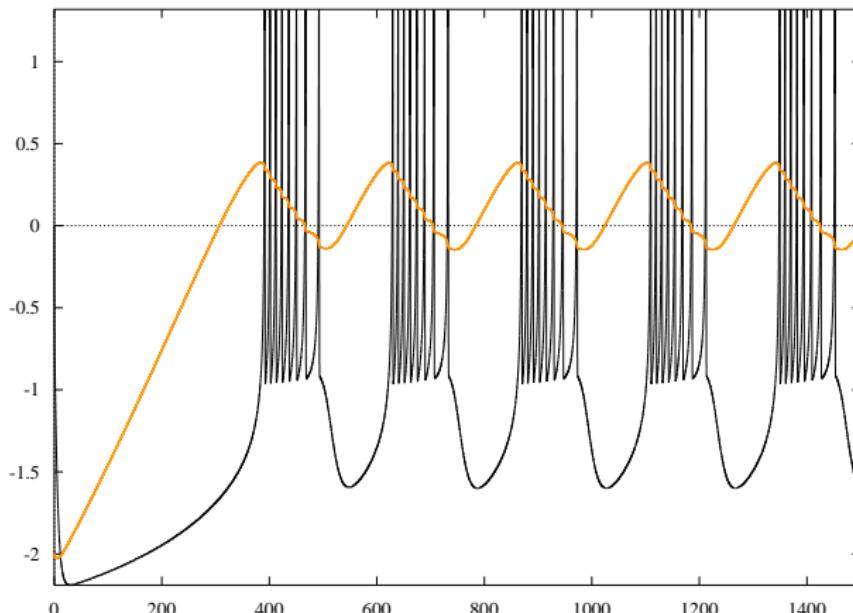
Entre $c=1$ et $c=2$

$freq = f(I_{ap})$ famille de cycles limites $c = 1.2$ & $\epsilon = 0.01$



Entre $c=1$ et $c=2$

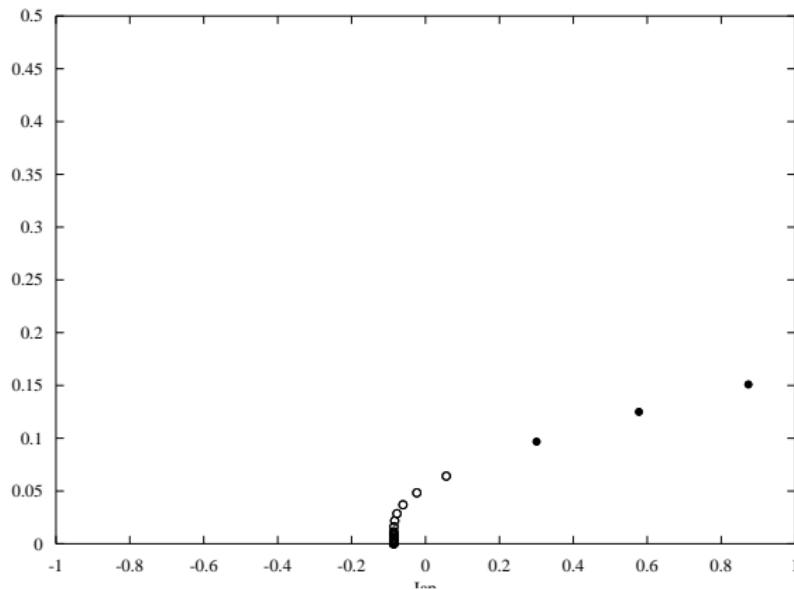
Trace en temps de I_{ap} et v pour $c = 1.0$ & $\epsilon = 0.01$



Entre $c=1$ et $c=2$

$freq = f(I_{ap})$ famille de cycles limites $c = 1.0$ & $\epsilon = 0.01$

Frequency



Récapitulatif fréquence

- Amplitude de bursting augmente quand c diminue

Récapitulatif fréquence

- Amplitude de bursting augmente quand c diminue
- Fréquence de bursting diminue jusque $c = 1.2$: famille de cycles limites plus longue à parcourir

Récapitulatif fréquence

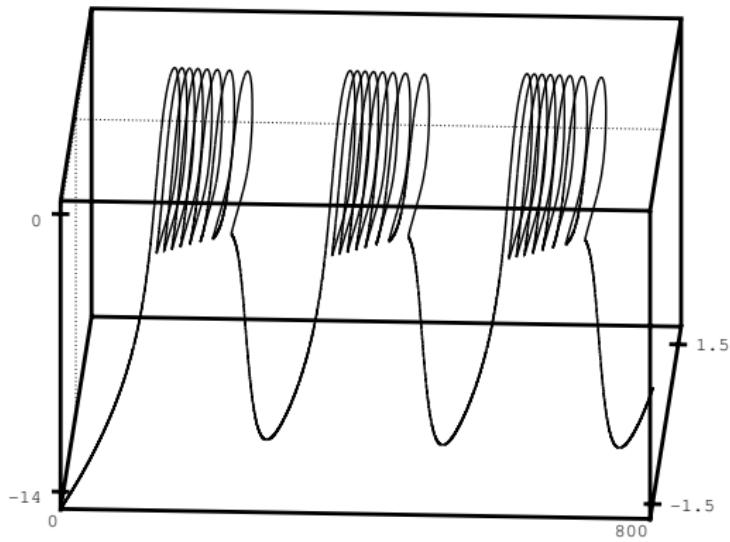
- Amplitude de bursting augmente quand c diminue
- Fréquence de bursting diminue jusque $c = 1.2$: famille de cycles limites plus longue à parcourir
- Fréquence en phase de spiking admet un minimum, annonciateur de la bifurcation homocline

Récapitulatif fréquence

- Amplitude de bursting augmente quand c diminue
- Fréquence de bursting diminue jusque $c = 1.2$: famille de cycles limites plus longue à parcourir
- Fréquence en phase de spiking admet un minimum, annonciateur de la bifurcation homocline
- Fréquence tend vers 0 à la fin du burst après la bifurcation homocline

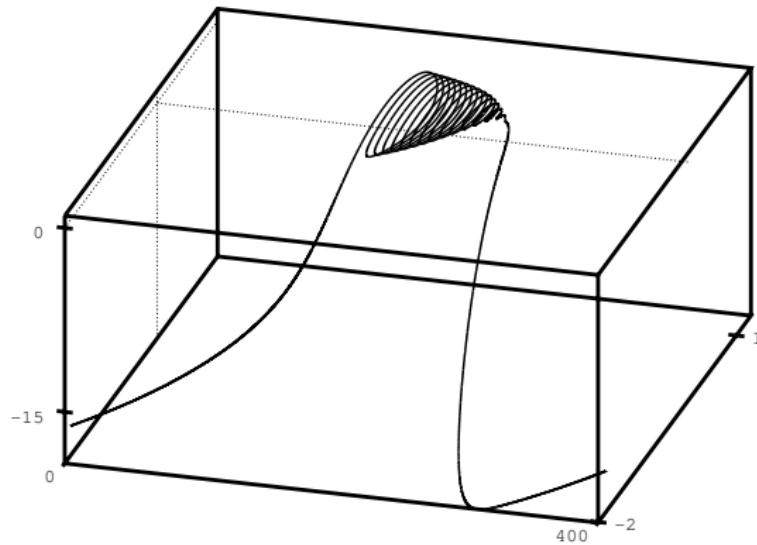
Modèle de Hindmarsh-Rose à 3D : différents burst

$$c = 1$$

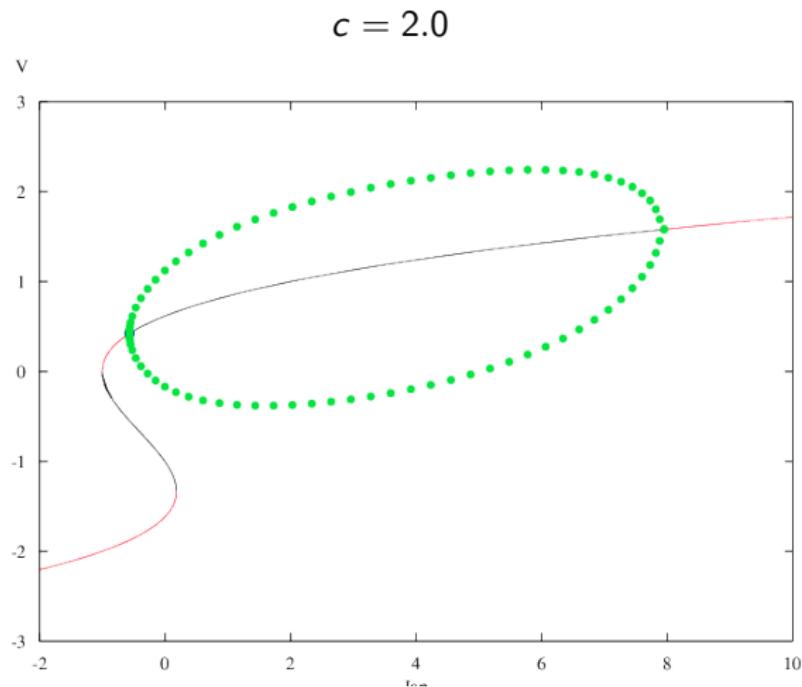


Modèle de Hindmarsh-Rose à 3D : différents burst

$$c = 2$$

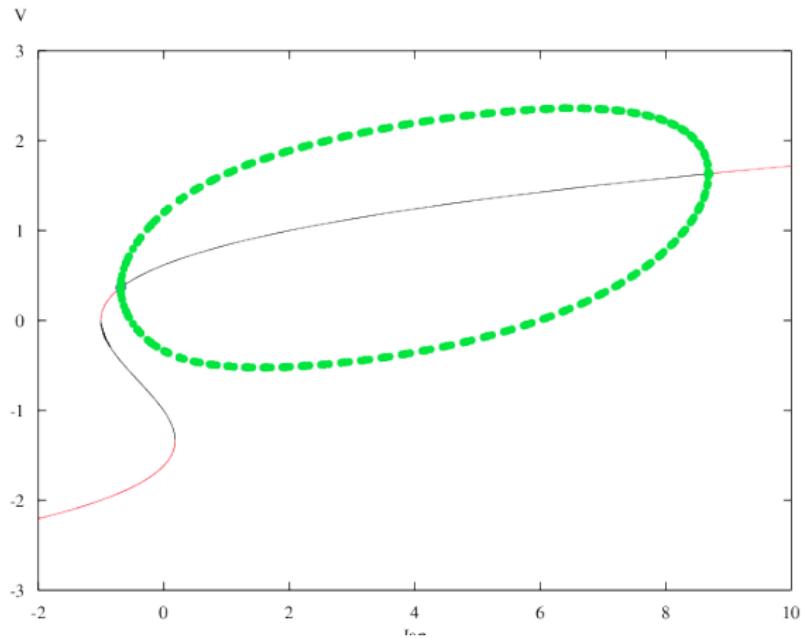


Transition $c = 2$ à $c = 1$



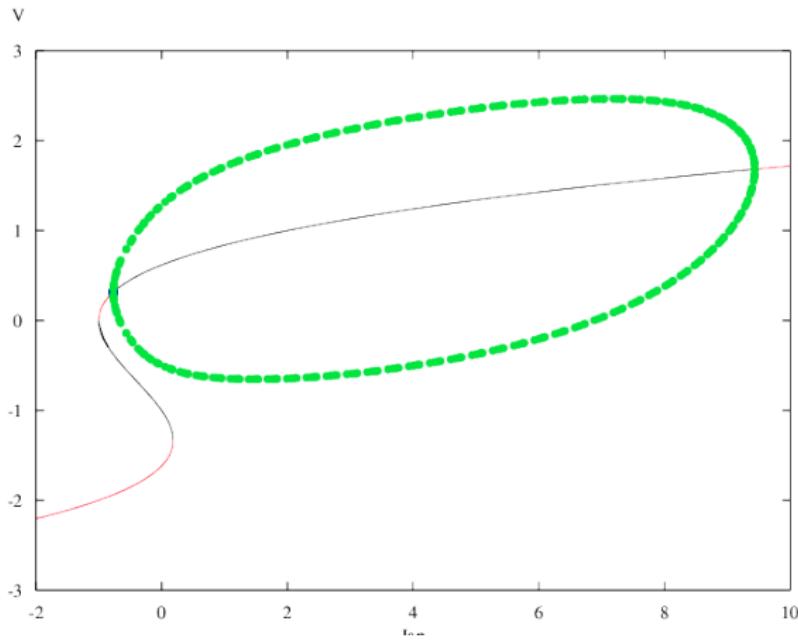
Transition $c = 2$ à $c = 1$

$c = 1.8$



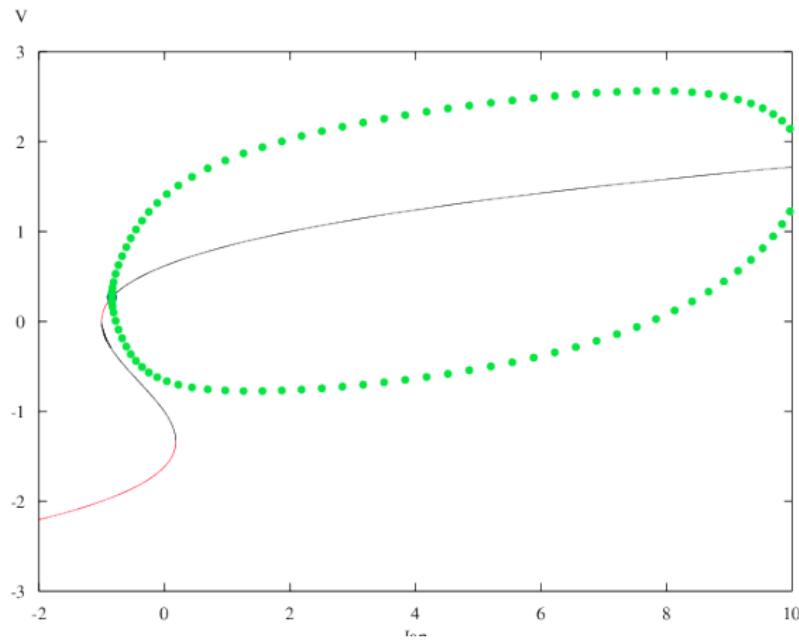
Transition $c = 2$ à $c = 1$

$c = 1.6$



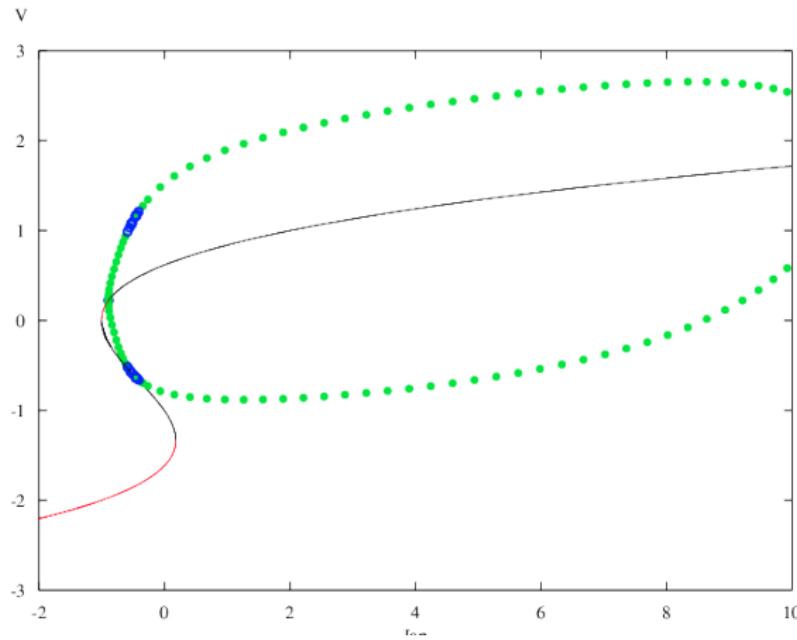
Transition $c = 2$ à $c = 1$

$c = 1.4$



Transition $c = 2$ à $c = 1$

$c = 1.2$



Transition $c = 2$ à $c = 1$

