Étude du premier modèle de Hindmarsh-Rose

Vincent Matthys, Maureen Muscat et Mariène Wan

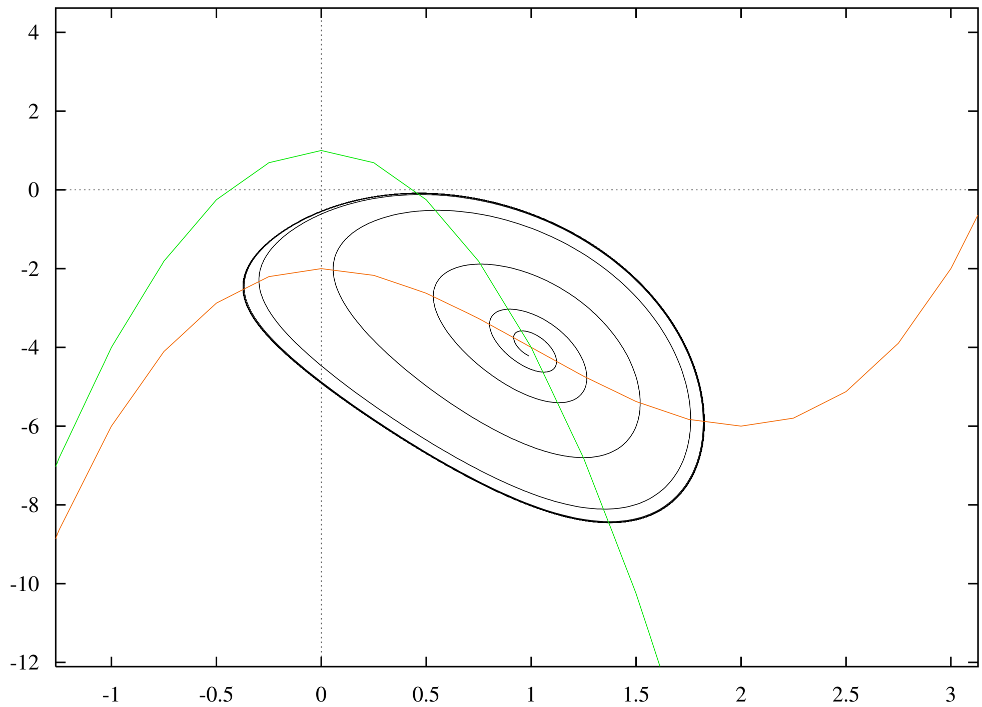


Figure 1 – Plan de phase, avec les nullclines en couleurs et une solution en noir avec I = 2 et c = 2

Etude du modèle Hindmarsh-Rose

Table des matières

1 Fichier équations

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{w - v^3 + 3v^2 + I_{ap}}{c} = f(v, w) \quad \text{avec } c \neq 0 \\ w'(t) = 1 - 5v^2 - w = g(v, w) \end{cases} \tag{1}$$

a Recherche des nullclines

Recherche des nullclines :

$$\begin{aligned} \text{Nullcline pour v} : v' = 0 \qquad & \Leftrightarrow w = v^3 - 3v^2 - I_{ap} \\ \text{Nullcline pour w} : w' = 0 \qquad & \Leftrightarrow w = 1 - 5v^2 \end{aligned}$$

La nullcline de v est de forme **cubique**.
La nullcline de w est une **parabole**.

Les **points stationnaires** sont les points à l'intersection des deux nullclines, c'est-à-dire les points dans le plan de phase dont le vecteur tangent a ses deux composantes nulles. Nous résolvons :

$$\begin{aligned} v^3 - 3v^2 - I_{ap} &= 1 - 5v^2 \\ v^3 + 2v^2 - I_{ap} - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a.1 Résolution par la méthode de Cardan

On peut réecrire 2 sous la forme suivante :

$$av^3 + bv^2 + cv + d = 0$$

Où $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$ et $d = -(I_{ap}+1)$. Et d'après la méthode de Cardan, le changement de variable se fait selon la formule :

$$v = t - \frac{b}{3a}$$

On pose alors $v = t - \frac{2}{3}$ et on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}\right) + 2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{8}{9} - 1 - I_{ap} &= 0 \\ t^3 - 2t^2 + \frac{4}{9}t + \frac{8}{9}t - \frac{8}{27} + 2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{8}{9} - 1 - I_{ap} &= 0 \\ t^3 - \frac{4}{3}t - \frac{11}{27} - I_{ap} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

On peut alors résoudre l'équation 3 par la méthode de Cardan :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\left(-\left(\frac{11}{27} + I_{ap}\right)\right)^2 - \frac{4}{27}\left(-\frac{4}{3}\right)^3 \\ \Delta_1 &= -\frac{121}{729} - \frac{22}{27}I_{ap} - I_{ap}^2 + \frac{4}{27}\frac{64}{27} \\ \Delta_1 &= -I_{ap}^2 - \frac{22}{27}I_{ap} + \frac{5}{27} \\ \Delta_1 &= -(I_{ap} + 1)(I_{ap} - \frac{5}{27}) \end{aligned} \tag{4}$$

Suivant cette méthode :

— Si $\Delta_1 > 0$, alors il y a trois solutions réelles distinctes.

— Si $\Delta_1 = 0$, alors il y a deux solutions réelles dont une solution double.

— Si $\Delta_1 < 0$, alors une solution est réelle et les deux autres sont complexes conjuguées.

On utilisera à profit la notation trigonométrique des solutions réelles telle que présentée par la littérature.

a.1.1 $\Delta_1 > 0$ L'équation possède trois solutions réelles distinctes.

En repartant de 3, et en posant $t = u\cos(\theta)$ il vient :

$$u^3\cos^3(\theta) - \frac{4}{3}u\cos(\theta) - \left(\frac{11}{27} + I_{ap}\right) = 0 \tag{5}$$

L'idée est de choisir u pour se ramener à la relation : $4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0$, démontrée ci-après :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta)\\
&= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\
&= (2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)\\
&= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta))\\
&= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta) + 2\cos^3(\theta)\\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)
\end{aligned}$$

En divisant 5 par u^3 puis en posant $u = \frac{4}{3}$:

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\cos(\theta) - \frac{\frac{11}{27} + I_{ap}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} &= 0\\
\cos^3(\theta) - \frac{3}{4}\cos(\theta) - \frac{\frac{11}{27} + I_{ap}}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} &= 0\\
4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \frac{27}{16}\left(\frac{11}{27} + I_{ap}\right) &= 0 && \text{en multipliant par 4}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors l'identité trigonométrique souhaitée et il reste :

$$\cos(3\theta) = \frac{11 + 27I_{ap}}{16} \tag{6}$$

Or étant dans le cas $\Delta_1 > 0$, on a $-1 < I_{ap} < \frac{5}{27}$, donc $-1 < \frac{11+27I_{ap}}{16} < 1$. On peut donc résoudre 6 sur un intervalle de 2π à l'aide de arccos et on a 3 solutions :

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11 + 27I_{ap}}{16}\right)\\
\theta_2 &= \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11 + 27I_{ap}}{16}\right) + \frac{2\pi}{3}\\
\theta_3 &= \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11 + 27I_{ap}}{16}\right) + \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

En remontant à l'expression des t correspondant, il vient :

$$t_1 = u\cos(\theta_1) = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11+27I_{ap}}{16}\right)\right)$$
$$t_2 = u\cos(\theta_1) = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11+27I_{ap}}{16}\right)+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$t_3 = u\cos(\theta_1) = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11+27I_{ap}}{16}\right)+\frac{4\pi}{3}\right)$$

Soit les solutions en v suivantes, en accord avec [?] page 734 :

$$v_1 = t_1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11+27I_{ap}}{16}\right)\right)-1\right) \tag{7}$$
$$v_2 = t_2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11+27I_{ap}}{16}\right)+\frac{2\pi}{3}\right)-1\right) \tag{8}$$
$$v_3 = t_3 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{11+27I_{ap}}{16}\right)+\frac{4\pi}{3}\right)-1\right) \tag{9}$$

a.1.2 $\Delta_1 = 0$ L'équation possède alors deux solutions réelles, une simple (t_1) et une double (t_2) :

$$\begin{cases} t_1 &= \dfrac{3q}{p} \\ t_2 &= \dfrac{-3q}{2p} \end{cases} \quad \text{avec : } p = -\frac{4}{3} \text{ et } q = -\left(\frac{11}{27}+I_{ap}\right)$$

Soit les solutions en v suivantes :

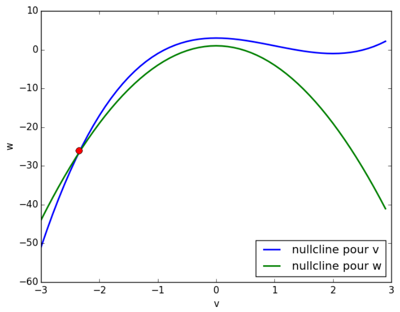
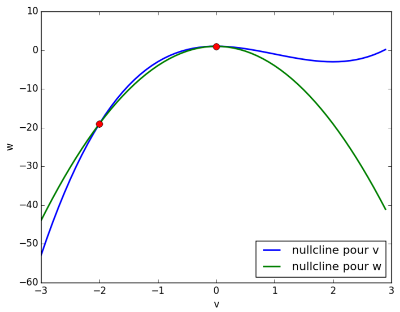
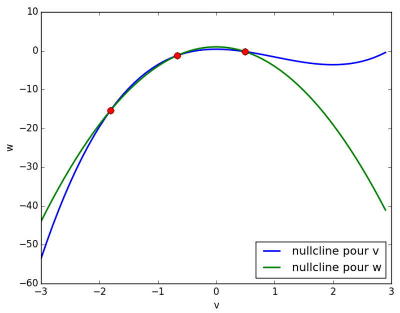
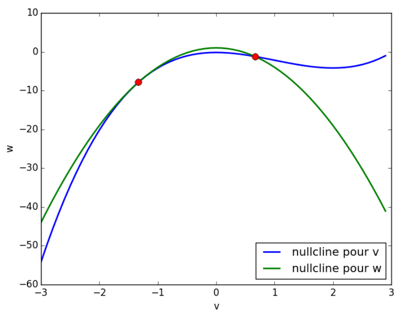
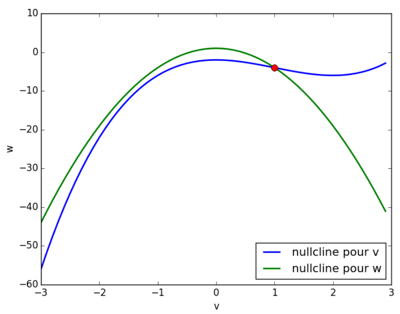
$$v_1 = t_1 - \frac{2}{3} = \frac{-3(\frac{11}{27}+I_{ap})}{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9}+I_{ap}\right) \tag{10}$$
$$v_2 = t_2 - \frac{2}{3} = \frac{3(\frac{11}{27}+I_{ap})}{-2\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} \quad = -\frac{9}{8}\left(1+I_{ap}\right) \tag{11}$$

a.1.3 $\Delta_1 < 0$ L'équation possède alors une solution réeelle et deux solutions complexes : La solution réelle en v, d'après [?], avec $p = -\dfrac{4}{3}$ et $q = -\left(\dfrac{11}{27}+I_{ap}\right)$:

$$\begin{aligned} v_1 &= -2\frac{|q|}{q}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh\left(-\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)\right) - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(2\frac{\left|-\left(\frac{11}{27}+I_{ap}\right)\right|}{\left(\frac{11}{27}+I_{ap}\right)}\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh\left(\frac{27}{16}\left|-\left(\frac{11}{27}+I_{ap}\right)\right|\right)\right)-1\right) \end{aligned} \tag{12}$$

a.2 Résultats

L'équation 2 à 1, 2 ou 3 solution selon la valeur de I_{ap}.

Valeur de I_{ap}	Δ_1	Nombre de points stationnaires	Nullclines
$I_{ap} < -1$	$\Delta_1 < 0$	1	
$I_{ap} = -1$	$\Delta_1 = 0$	2	
$-1 < I_{ap} < 5/27$	$\Delta_1 > 0$	3	
$I_{ap} = 5/27$	$\Delta_1 = 0$	2	
$I_{ap} > 5/27$	$\Delta_1 < 0$	1	

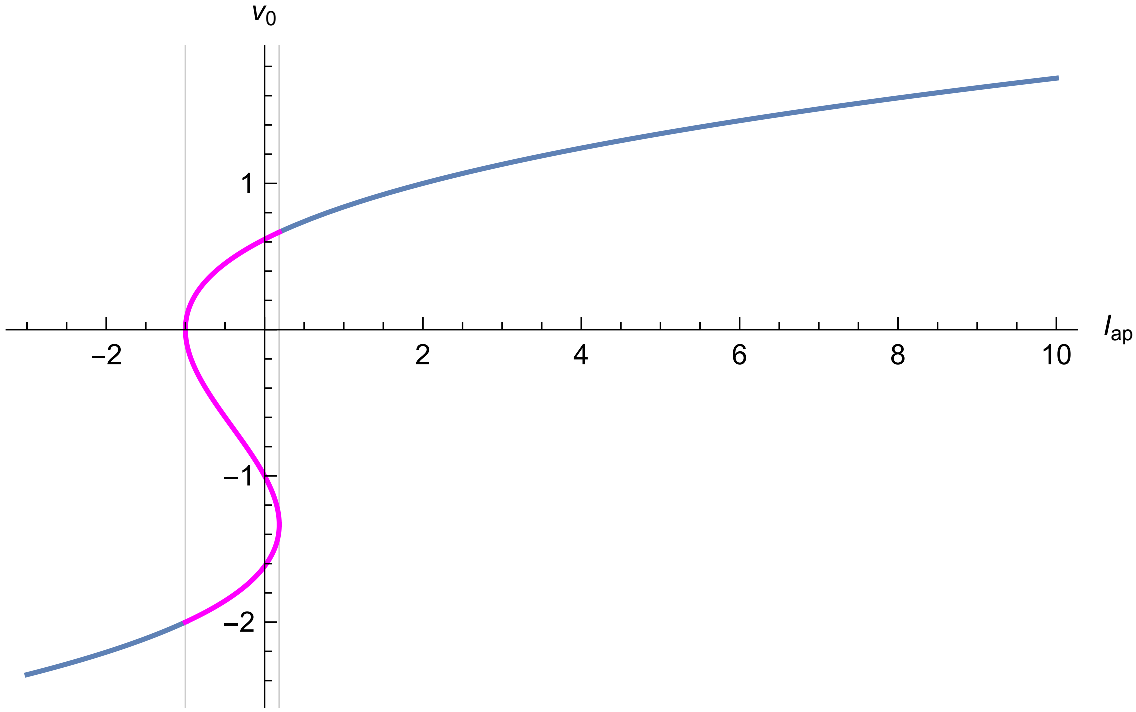


FIGURE 2 – Branches de points stationnaires par la méthode de Cardan

b Stabilité et bifurcations

b.1 Matrice Jacobienne du système

$$J(v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(v,w) & \frac{\partial f}{\partial w}(v,w) \\ \frac{\partial g}{\partial w}(v,w) & \frac{\partial g}{\partial w}(v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3v}{c}(v-2) & \frac{1}{c} \\ -10v & -1 \end{pmatrix} = J(v)$$

Matrice jacobienne en un point $(v_0; w_0)$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{-3v_0}{c}(v_0-2)-\lambda & \frac{1}{c} \\ -10v_0 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - Tr(J(v_0))\lambda + \det(J(v_0)) \\ &= \lambda^2 + \left(\frac{3v_0}{c}(v_0-2)+1\right)\lambda + \frac{v_0}{c}(4+3v_0) \\ &= \lambda^2 + \left(\frac{3}{c}v_0^2 - \frac{6}{c}v_0 + 1\right)\lambda + \left(\frac{3}{c}v_0^2 + \frac{4}{c}v_0\right) \end{aligned}$$

On distingue différents cas de stabilité en fonction du signe de $\det(J(v_0))$ et de $Tr(J(v_0))$.

Le discriminant réduit de $Tr(J(v_0)) = 0$ est $\Delta' = \left(\frac{3}{c}\right)^2 - \frac{3}{c} = \frac{3}{c}(\frac{3}{c}-1)$. Si $c < 3$ alors $\Delta' > 0$ et $Tr(J(v_0)) = 0$ admet deux racines réelles données par :

$$x_{Tr+} = \frac{\frac{3}{c} + \sqrt{\frac{3}{c}(\frac{3}{c}-1)}}{\frac{3}{c}} = 1 + \sqrt{1-\frac{c}{3}} \quad \text{et} \quad x_{Tr-} = 1 - \sqrt{1-\frac{c}{3}} \tag{13}$$

De plus $\det(J(v_0)) = \frac{v_0}{c}(3v_0+4) = 0$ admet 2 racines réelles :

$$x_{Det+} = 0 \quad \text{et} \quad x_{Det-} = -\frac{4}{3} \tag{14}$$

b.2 Expression des valeurs propres

$$\Delta = \left(\frac{3v_0}{c}(v_0-2)+1\right)^2 - 4\frac{v_0}{c}(4+3v_0) = \frac{9v_0^4}{c^2} - \frac{36v_0^3}{c^2} + \frac{6}{c}(\frac{6}{c}-1)v_0^2 - \frac{28v_0}{c} + 1$$

$$\begin{aligned}
&\text{Pour } \Delta > 0 \quad \lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(-\left(\frac{3v_0}{c}(v_0-2)+1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3v_0}{c}(v_0-2)+1\right)^2 - 4\left(\frac{3}{c}v_0^2+\frac{4}{c}v_0\right)}\right)\\
&\text{Pour } \Delta = 0 \quad \lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(\frac{3v_0}{c}(2-v_0)-1\right)\\
&\text{Pour } \Delta < 0 \quad \lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(-\left(\frac{3v_0}{c}(v_0-2)+1\right) \pm i\sqrt{4\left(\frac{3}{c}v_0^2+\frac{4}{c}v_0\right) - \left(\frac{3v_0}{c}(v_0-2)+1\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

b.3 Condition pour avoir des valeurs propres complexes conjuguées

Les conditions pour avoir des valeurs propres complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} \Delta &< 0 \\ \frac{9v_0^4}{c^2} - \frac{36v_0^3}{c^2} + \frac{6}{c}(\frac{6}{c}-1)v_0^2 - \frac{28v_0}{c} + 1 &< 0 \end{aligned} \tag{15}$$

b.4 Condition algébrique pour une bifurcation pli

Pour avoir une bifurcation pli ou col-noeud, il faut que le produit des valeurs propres s'annule au point de bifurcation, puisque l'une des valeurs propres s'annule. Il faut donc que le déterminant de la Jacobienne (le produit des valeurs propres) s'annule et change de signe. Le déterminant est égal à $\frac{v_0}{c}(3v_0+4)$. Ce dernier s'annule et change de signe pour des points stationnaires en $v_0 = 0$ et $v_0 = -\frac{4}{3}$. D'après 2, cela correspond respectivement à des I_{ap} de -1 et $\frac{5}{27}$.

L'annulation d'une des deux valeurs propres est nécessaire au point de bifurcation, mais elle ne suffit peut-être pas à distinguer la bifurcation pli des bifurcations transcritique et fourche.

Nous pouvons regarder le diagrame de bifurcation sous deux angles différents, soit $I_{ap} = f(v_0)$, soit $v_0 = f(I_{ap})$. À partir de ces 2 visions nous allons prouver qu'il y a apparitions d'un point stationnaire, puis de 2 points stationnaires sur des branches distinctes du point déja existant.

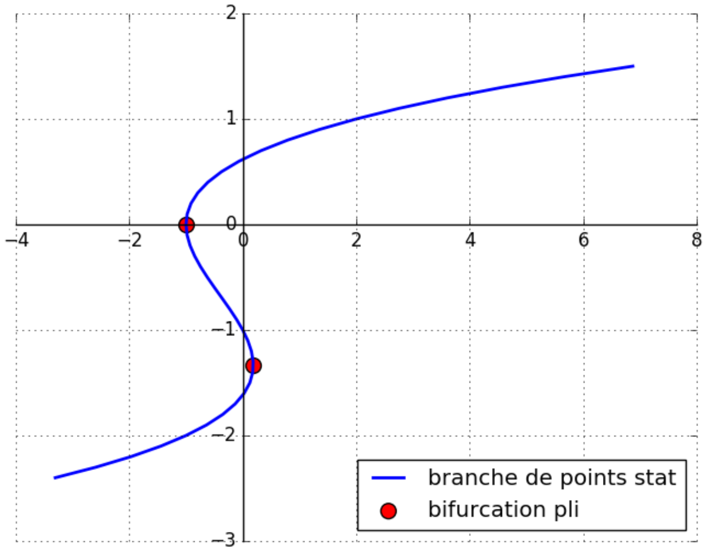


FIGURE 3 – Bifurcation pli sur le diagramme de bifurcation $v_0 = f(I_{ap})$

b.4.1 Interprétation avec le diagramme de bifurcation $v_0 = f(I_{ap})$ Pour une bifurcation pli, on a l'apparition d'un point stationnaire au point de bifurcation, puis de deux points stationnaires de stabilité oppposé dont un col. Cependant, on a toujours au moins un point stationnaire. La question revient alors à savoir si les branches de points stationnaires nouvelles apparaissent (branches 7, 8, 9) dans la continuité ou non de la branche actuelle (quand $\Delta < 0$, branche 12). Une condition suffisante pour déterminer, en $I_{ap} = -1$ ou $\frac{5}{27}$, l'emplacement des nouvelles branches apparaissantes par rapport à l'ancienne est comparer leur limite . Si deux nouvelles branches apparaissent sans être dans la continuité de la branche 12, alors il y a bifurcation pli.

— en $I_{ap} = -1$ à droite de la branche stationnaire 12 avec $\Delta_1 < 0$ et à gauche avec des nouvelles branches stationnaires 7, 8, 9 avec $\Delta_1 > 0$

$$\sum_{i=7}^{9} \mathbb{1}_{\lim\limits_{\substack{I_{ap} \to -1 \\ I_{ap} < -1}} v_{1,12}(I_{ap}), \lim\limits_{\substack{I_{ap} \to -1 \\ I_{ap} > -1}} v_{1,i}(I_{ap})} = 1$$

— en $I_{ap} = \frac{5}{27}$ à droite des branches stationnaires 7, 8, 9 avec $\Delta_1 > 0$ et à gauche de l'unique branche 12 avec $\Delta_1 < 0$

$$\sum_{i=7}^{9} \mathbb{1}_{\lim\limits_{\substack{I_{ap} \to \frac{5}{27} \\ I_{ap} < \frac{5}{27}}} v_{1,i}(I_{ap}), \lim\limits_{\substack{I_{ap} \to \frac{5}{27} \\ I_{ap} > \frac{5}{27}}} v_{1,12}(I_{ap})} = 1$$

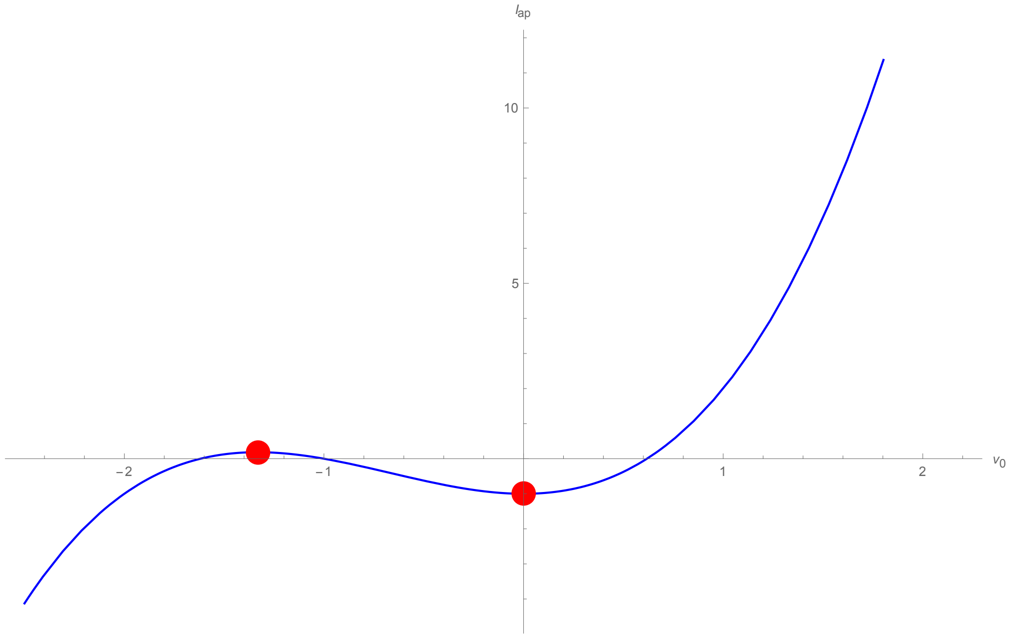


FIGURE 4 – Bifurcation pli sur le diagramme de bifurcation $I_{ap} = f(v_0)$

b.4.2 Interprétation avec le diagramme de bifurcation $I_{ap} = f(v_0)$

Les branches de points stationnaires restent les mêmes que l'on représente $v_0 = f(I_{ap})$ ou $I_{ap} = f(v_0)$. Dans cette dernière représentation, les points de bifurcation pli correspondent à des extrema locaux de la fonction $f : v \longmapsto v_0^3 + 2v_0^2 - 1 = I_{ap}$.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv_0} &= 0 && \text{Extremum local} \\ 3v_0^2 + 4v_0 &= 0 \\ v_0(3v_0 + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Les extrema locaux, et donc les points de bifurcation pli, correspondent à des valeurs de $v_0 = 0$ et $v_0 = -\frac{4}{3}$. Ces valeurs correspondent aux racines (équation 14) du déterminant de la jacobienne du système. Pour ces valeurs de v_0, l'une des deux valeurs propre s'annule. Ainsi, la condition algébrique pour avoir une bifurcation pli sur les valeurs propres de la jacobienne du système est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Bifurcation pli} &\Leftrightarrow \text{Une des valeurs propres de la jacobienne s'annule} \\ &\Leftrightarrow v_0 = 0 \quad \text{ou} \quad v_0 = -\frac{4}{3} \end{aligned} \tag{16}$$

b.5 Condition algébrique pour une bifurcation de Hopf

Pour avoir une bifurcation de Hopf, il faut nécessairement un point stationnaire qui soit un foyer. Pour avoir un foyer en un point v_0, il faut que $\Delta < 0$, c'est-à-dire que l'inéquation 15 doit être respectée. De plus, une bifurcation de Hopf ne peut avoir lieu que lors de la transition d'un foyer stable à un foyer instable. Les conditions algébriques pour une bifurcation de Hopf en un point v_H sont les suivantes :

$$\begin{cases} v < v_H & \text{foyer stable ou instable} \\ v > v_H & \text{foyer de stabilité opposée} \\ \left.\dfrac{dRe(\lambda)}{dI_{ap}}\right|_{v_H} \neq 0 & \Leftrightarrow \left.\dfrac{d\left(\frac{3v_0}{2c}((2-v_0)-1)\right)}{dI_{ap}}\right|_{v_H} \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

b.6 Résumé des stabilités et des bifurcations

D'après les équations 13 et 14, et à l'aide du théorème de Hartman-Grobam, on peut déduire la nature des points d'équilibre dans les deux tableaux 1 et 2. A l'aide des conditions de bifurcation pli 16 et de Hopf 17, validées pour certaines valeurs de v_0, on a alors le résumé suivant pour $c = 1$ et $c = 2$.

Ces résultats théoriques ont été validés à l'aide de `XPP-aut`, dont les diagrammes de bifurcation obtenus par continuation sont présentés en figure 5 et 6

$c = 2$					
Valeur de v_0	$v_0 < -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < v_0 < 0$	$0 < v_0 < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < v_0 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$v_0 > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
$Tr(J)$	-	-	-	+	-
$Det(J)$	+	-	+	+	+
Nature	foyer ou noeud stable	col	foyer ou noeud stable	foyer ou noeud instable	foyer ou noeud stable

TABLE 1 – Résumé de la stabilité des points d'équilibre pour $c = 2$

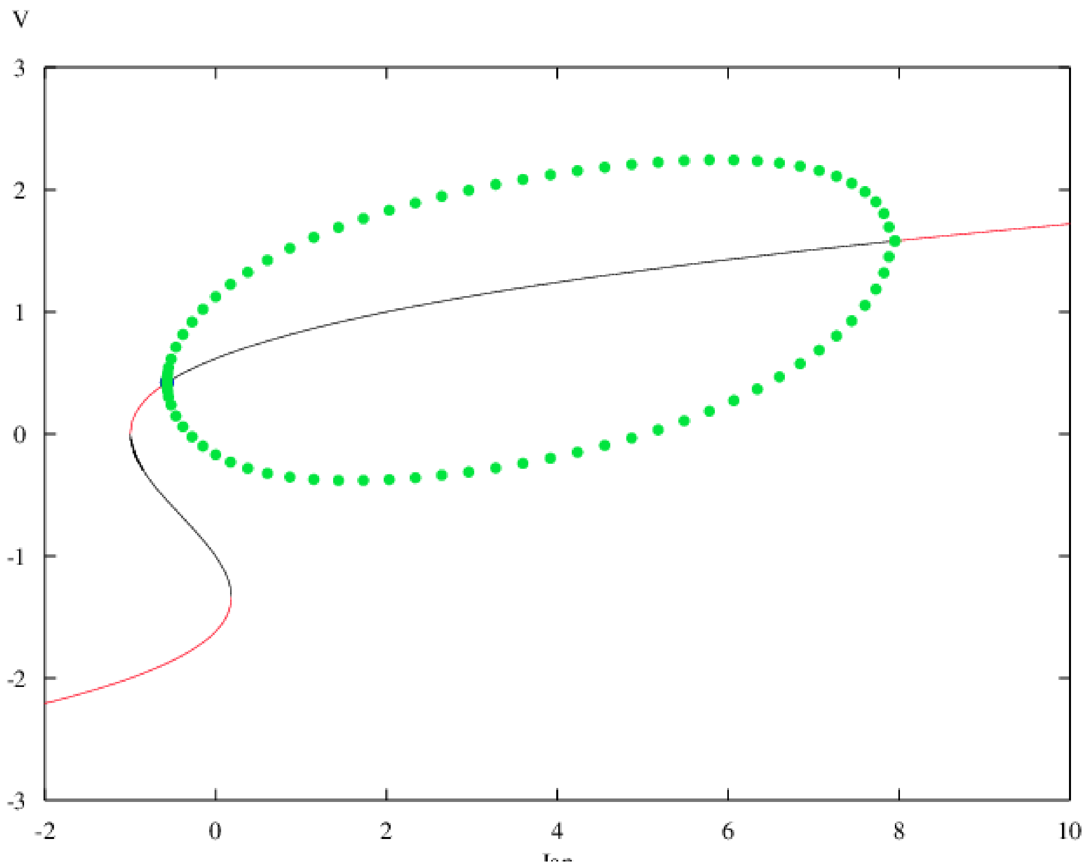


FIGURE 5 – Diagramme de bifurcation obtenu pour $c = 2$ à l'aide de `XPP-aut` par continuation. Les familles de points stationnaires stables sont représentées en trait continu rouge, les familles de points stationnaires instables en trait continu noir, et les familles de cycles limites stables en pointillés vert

Pour $c = 2$, il y a deux bifurcations de Hopf en $v = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ et en $v = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il y a également deux bifurcation pli en $v = 0$ et $v = -\frac{4}{3}$.

$c = 1$					
Valeur de v_0	$v_0 < -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < v_0 < 0$	$0 < v_0 < 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$	$1 - \sqrt{\frac{2}{3}} < v_0 < 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$	$v_0 > 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$
$Tr(J)$	-	-	-	+	-
$Det(J)$	+	-	+	+	+
Nature	foyer ou noeud stable	col	foyer ou noeud stable	foyer ou noeud instable	foyer ou noeud stable

TABLE 2 – Résumé de la stabilité des points d'équilibre pour $c = 1$

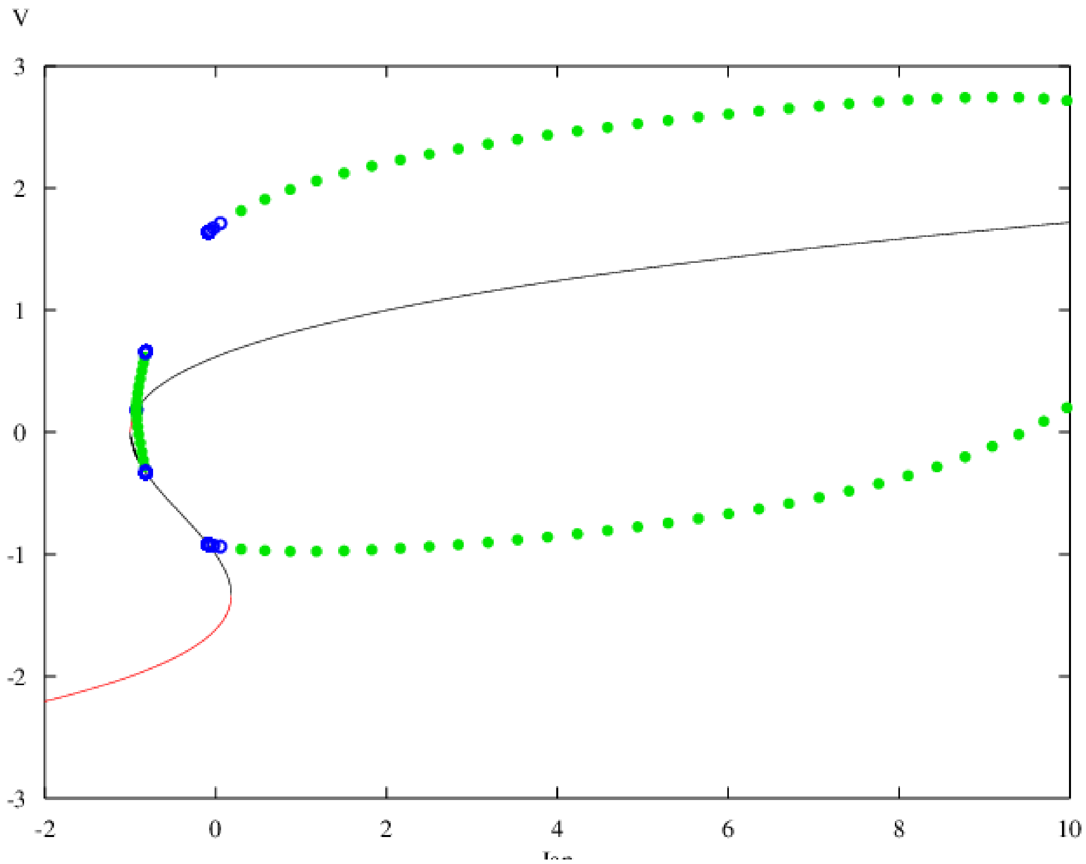


FIGURE 6 – Diagramme de bifurcation obtenu pour $c = 1$ à l'aide de `XPP-aut` par continuation. Les familles de points stationnaires stables sont représentées en trait continu rouge, les familles de points stationnaires instables en trait continu noir, et les familles de cycles limites stables en pointillés vert. Les points bleus correspondent aux points pour lesquels la période des solutions attirés par les cylces limites stables tend vers l'infini

Pour $c = 1$, il y a deux bifurcations de Hopf en $v = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ et en $v = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$. Il y a également deux bifurcation pli en $v = 0$ et $v = -\frac{4}{3}$.

c Quelques simulations pour I_{ap} entre -2 et 10

Comme nous l'avons précédemment vu le nombre de point stationnaire et leur stabilité dépend de I_{ap}. Nous avons réalisé nos simulations à l'aide de `XPP-aut`.

c.1 I_{ap} entre -2 et -1

Il n'y a qu'un point d'équilibre : un noeud stable.

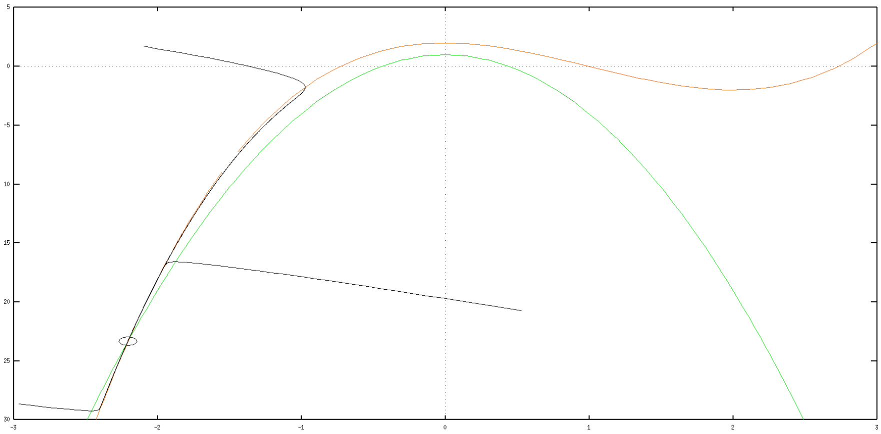


FIGURE 7 – Plan de phase pour $I = -2$, le point stationnaire est un noeud stable

c.2 À $I_{ap} = -1$

Bifurcation pli, apparition d'un nouveau point d'équilibre.

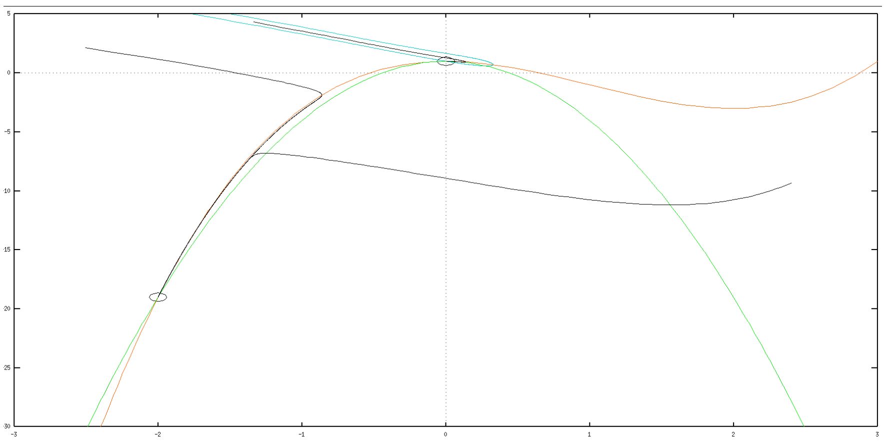


FIGURE 8 – Plan de phase pour $I = -1$, deux points stationnaires

c.3 I_{ap} entre -1 et -0.5672

3 points stationnaires : un noeud stable, un col et un autre noeud stable qui devient ensuite un foyer stable.

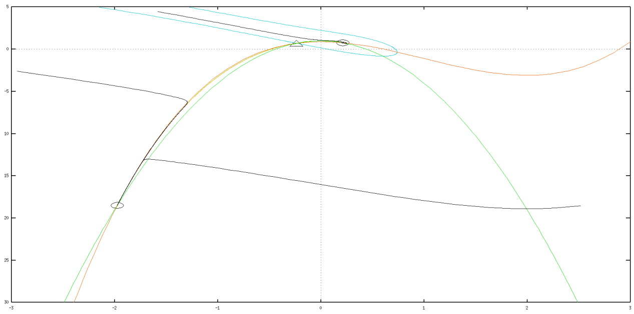


FIGURE 9 – Plan de phase, trois points stationnaires, 2 sont stables et 1 col.

c.4 I_{ap} entre -0.5672 et 0.185

Bifurcation de Hopf, le foyer stable devient instable et un cycle limite stable apparaît. Quand I_{ap} augmente, le cycle limite stable grossi. 3 points stationnaires

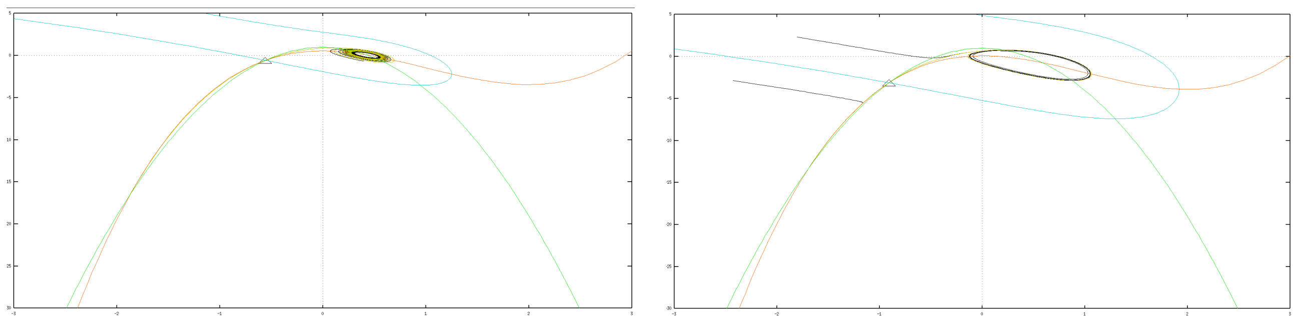


FIGURE 10 – Plan de phase, trois points stationnaires et un cycle limite.

c.5 À $I_{ap} = 0.185$

Bifurcation pli, le col et le noeud stable se rejoingne pour ne former qu'un seul point, puis disparaissent.

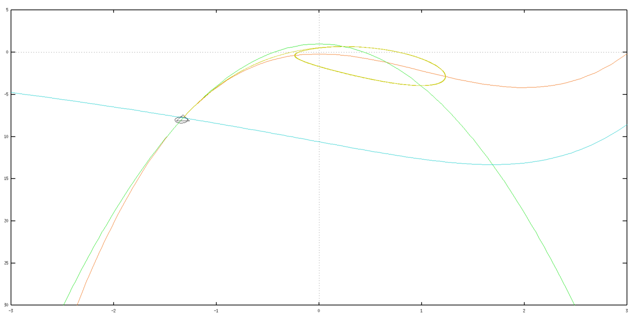


FIGURE 11 – Plan de phase, deux points stationnaires et un cycle limite.

c.6 I_{ap} entre 0.185 et 7.9

Il n'y a plus qu'un point stationnaire : le foyer instable. Le cycle limite grossi puis diminue.

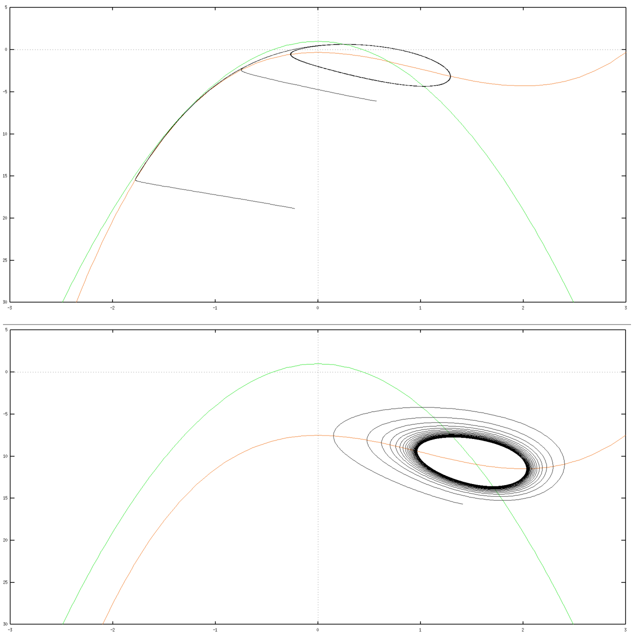


FIGURE 12 – Plan de phase, un foyer instable et un cycle limite stable dont la taille augmente puis diminue.

c.7 I_{ap} entre 7.9 et 10

Bifurcation de Hopf, le cycle limite stable devient très petit et disparaît. Le foyer instable devient un foyer stable.

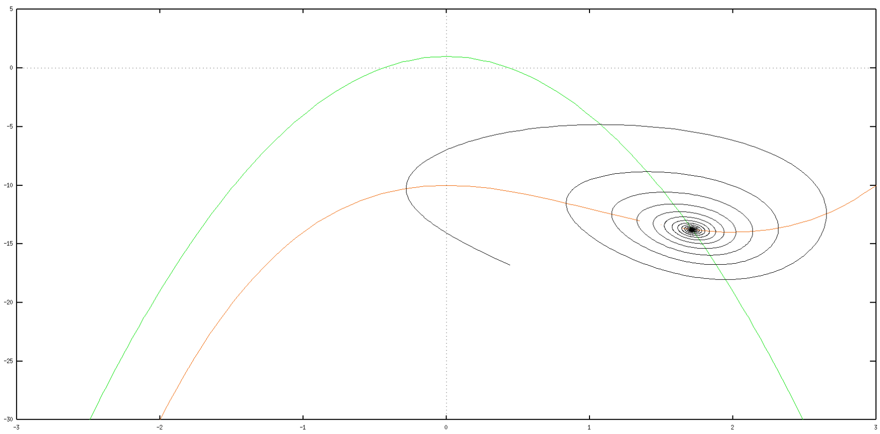


FIGURE 13 – Plan de phase, un foyer stable.

d Pour résumer

Valeur de I_{ap}	Nombre de points stat	Caractérisation des points
$I_{ap} \in [-2, -1[$	1	noeud stable
Bifurcation pli		
$I_{ap} = -1$	2	noeud stable et **col-noeud**
$I_{ap} \in [-1, -0.988[$	3	noeud stable et **col et noeud stable**
$I_{ap} \in [-0.988, -0.5672[$	3	noeud stable et col et **foyer stable**
Bifurcation Hopf		
$I_{ap} \in [-0.5672, 5/27[$	3	noeud stable et col et **foyer instable et cycle limite**
$I_{ap} = 5/27$	2	**col-noeud** et foyer instable et cycle limite
Bifurcation pli		
$I_{ap} \in [5/27, 7.90[$	1	foyer instable et cycle limite
Bifurcation Hopf		
$I_{ap} \in [7.90, 10[$	1	foyer stable

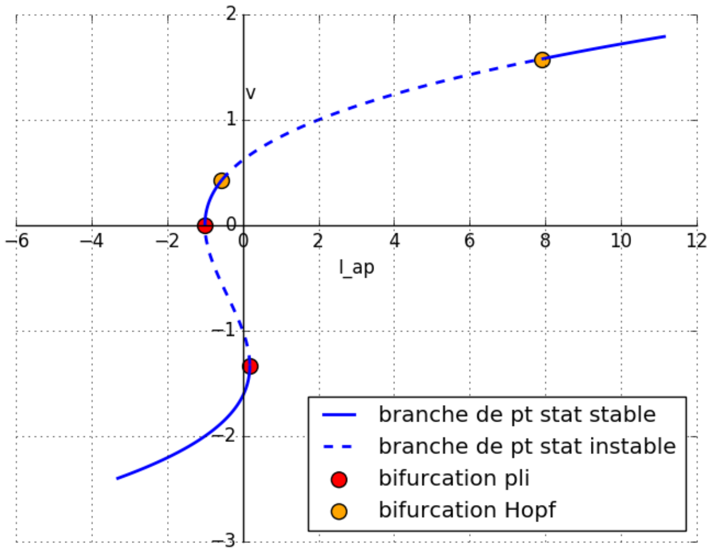


FIGURE 14 – Diagramme de bifurcation (sans l'enveloppe du cycle limite).

Le système possède des régions de **bistabilité** :

— Pour $I_{ap} \in]-1, -0,567[$ avec 2 points stables

— Pour $I_{ap} \in]-0,567, 5/27[$ avec 1 point stable et un cycle limite stable

C'est à dire, il y a bi-stabilité entre les deux bifurcations pli.