Compte-rendu du devoir 1

Vincent Matthys

1 Leaning in discrete graphical models

Etant donné que z et x sont des variables à valeurs discrètes prenant respectivement M et K valeurs, on peut procéder au *one hot encoding*, notant respectivement $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{X}$ leur encodage sur, respectivement $\mathbb{R}^M$ et $\mathbb{R}^K$. Ainsi, on peut écrire :

$$p(z = m) = P(Z_m = 1) = \pi_m$$
$$p(x = k|z = m) = p(X_k = 1|Z_m = 1) = \theta_{mk}$$

En supposant que l'on ait un échantillon de n observations de (x, z), on peut exprimer la probabilité jointe d'une obersvation i :

$$p(x^{(i)}, z^{(i)}; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = p(z^{(i)}; \boldsymbol{\pi})p(x^{(i)}|z^{(i)}; \boldsymbol{\theta})$$
$$p(x^{(i)}, z^{(i)}; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{m=1}^{M}\prod_{k=1}^{K}\theta_{mk}^{X_k^{(i)}Z_m^{(i)}}\prod_{l=1}^{M}\pi_l^{Z_l^{(i)}} \tag{1}$$

On peut alors écrire la log-vraisemblance de l'échantillon dans le modèle $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})$, composé d'observations i.i.d., en utilisant 1 :

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{n}\ln\big(p(x^{(i)}, z^{(i)}; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\prod_{m=1}^{M}\prod_{k=1}^{K}\theta_{mk}^{X_k^{(i)}Z_m^{(i)}}\prod_{l=1}^{M}\pi_l^{Z_l^{(i)}}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\ln\left(\theta_{mk}^{X_k^{(i)}Z_m^{(i)}}\right) + \sum_{l=1}^{M}\ln\left(\pi_l^{Z_l^{(i)}}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}X_k^{(i)}Z_m^{(i)}\ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^{M}Z_l^{(i)}\ln(\pi_l)\right)\\
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{n}X_k^{(i)}Z_m^{(i)}\right)\ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{n}Z_l^{(i)}\right)\ln(\pi_l)\\
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\alpha_{mk}\ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^{M}\beta_l\ln(\pi_l) \qquad (2)
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha_{mk} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_k^{(i)} Z_m^{(i)} \right)$$

$$\beta_l = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_l^{(i)} \right)$$