

---

# COMPTE-RENDU DU DEVOIR 1

Vincent Matthys

---

## 1 Learning in discrete graphical models

Etant donné que  $z$  et  $x$  sont des variables à valeurs discrètes prenant respectivement  $M$  et  $K$  valeurs, on peut procéder au *one hot encoding*, notant respectivement  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{X}$  leur encodage sur, respectivement  $\mathbb{R}^M$  et  $\mathbb{R}^K$ . Ainsi, on peut écrire :

$$p(z = m) = P(Z_m = 1) = \pi_m$$

$$p(x = k|z = m) = p(X_k = 1|Z_m = 1) = \theta_{mk}$$

En supposant que l'on ait un échantillon de  $n$  observations de  $(x, z)$ , on peut exprimer la probabilité jointe d'une observation  $i$  :

$$p(x^{(i)}, z^{(i)}; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = p(z^{(i)}; \boldsymbol{\pi})p(x^{(i)}|z^{(i)}; \boldsymbol{\theta})$$

$$p(x^{(i)}, z^{(i)}; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{m=1}^M \prod_{k=1}^K \theta_{mk}^{X_k^{(i)} Z_m^{(i)}} \prod_{l=1}^M \pi_l^{Z_l^{(i)}} \quad (1)$$

On peut alors écrire la log-vraisemblance de l'échantillon dans le modèle  $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})$ , composé d'observations i.i.d., en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \ln(p(x^{(i)}, z^{(i)}; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \prod_{m=1}^M \prod_{k=1}^K \theta_{mk}^{X_k^{(i)} Z_m^{(i)}} \prod_{l=1}^M \pi_l^{Z_l^{(i)}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \ln \left( \theta_{mk}^{X_k^{(i)} Z_m^{(i)}} \right) + \sum_{l=1}^M \ln \left( \pi_l^{Z_l^{(i)}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K X_k^{(i)} Z_m^{(i)} \ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^M Z_l^{(i)} \ln(\pi_l) \right) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left( \sum_{i=1}^n X_k^{(i)} Z_m^{(i)} \right) \ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^M \left( \sum_{i=1}^n Z_l^{(i)} \right) \ln(\pi_l) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \alpha_{mk} \ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^M \beta_l \ln(\pi_l) \end{aligned} \quad (2)$$

avec

$$\alpha_{mk} = \sum_{i=1}^n X_k^{(i)} Z_m^{(i)}$$

$$\beta_l = \sum_{i=1}^n Z_l^{(i)}$$

D'après (2), la log-vraisemblance est donc strictement concave en chaque composantes de  $\boldsymbol{\pi}$  et  $\boldsymbol{\theta}$ , par combinaison linéaire de logarithmes. D'autre part, on a les contraintes linéaires suivantes :

$$\sum_{m=1}^M \pi_m - 1 = 0$$

$$\sum_{k=1}^K \theta_{mk} - 1 = 0, \forall m : 1..M \quad (3)$$

On peut donc écrire le Lagrangien, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange correspondants, associé au problème de maximisation de la log-vraisemblance (2) :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \lambda, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \alpha_{mk} \ln(\theta_{mk}) + \sum_{l=1}^M \beta_l \ln(\pi_l) - \lambda \left( \sum_{m=1}^M \pi_m - 1 \right) - \boldsymbol{\gamma}^\top \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^K \theta_{mk} - 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4)$$

Le problème admet une solution unique, notée  $(\widehat{\boldsymbol{\pi}_{MLE}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}_{MLE}})$  que l'on trouve par dérivation de (4)

### 1.1 Par rapport à $\pi_m$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \lambda, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \pi_m} = \frac{\beta_m}{\pi_m} - \lambda = 0 \implies \pi_m \propto \beta_m \implies \pi_m = \frac{\beta_m}{\sum_{m=1}^M \beta_m} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_m^{(i)}}{\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^n Z_m^{(i)}}$$

D'où finalement :

$$\left( \widehat{\boldsymbol{\pi}_{MLE}} \right)_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_m^{(i)} \quad (5)$$

### 1.2 Par rapport à $\theta_{mk}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \lambda, \boldsymbol{\gamma})}{\partial \theta_{mk}} = \frac{\alpha_{mk}}{\theta_{mk}} - \gamma_m = 0 \implies \theta_{mk} \propto \alpha_{mk} \implies \theta_{mk} = \frac{\alpha_{mk}}{\sum_{k=1}^K \alpha_{mk}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_k^{(i)} Z_m^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^K X_k^{(i)} \right) Z_m^{(i)}}$$

D'où finalement :

$$\left( \widehat{\boldsymbol{\theta}_{MLE}} \right)_{mk} = \frac{\sum_{i=1}^n X_k^{(i)} Z_m^{(i)}}{\sum_{i=1}^n Z_m^{(i)}} \quad (6)$$

On remarque que si  $\sum_{i=1}^n Z_m^{(i)}$  est nulle, alors  $\left(\widehat{\theta}_{MLE}\right)_{mk}$  n'est pas défini, et ce pour tout  $k$ . Mais, dans de telles conditions, cela signifie que la  $m^{\text{ième}}$  valeur de  $z$  n'a pas été observée, et donc que l'on peut réduire  $\boldsymbol{\theta}$  d'une ligne entière, puisqu'alors la probabilité d'observer une quelconque valeur de  $x$  sachant que  $z$  prend la valeur  $m$  est nulle.

En définitif, on peut s'affranchir de l'hypothèse implicite qu'aucune composante de  $\boldsymbol{\pi}$  ni de  $\boldsymbol{\theta}$  n'est nulle. En effet, si tel est le cas, alors la probabilité d'observer une telle observation est nulle.

### 1.3 Conclusion

On remarque donc que l'estimateur de  $\boldsymbol{\pi}$  n'est rien d'autre que la moyenne empirique des observations de  $z$ , et que l'estimateur de  $\boldsymbol{\theta}$  est également la moyenne des observations de  $x$  pour une valeur de  $z$  donnée.

## 2 Linear classification

### 2.1 Generative model : Linear Discriminant Analysis

Supposons un échantillon de  $N$  observations de  $x, y$ , notées,  $(x_n, y_n)$ , pour  $n$  variant de 1 à  $N$ , où  $y_n \in \{0, 1\}$ . Etant donné le modèle suivant :

$$y \sim \text{Bernoulli}(\boldsymbol{\pi})$$

$$p(x|y = i) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_i)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu_i)\right)$$

paramétré par :

$$\Theta = (\mu_0, \mu_1, \Sigma, \boldsymbol{\pi})$$

on peut réécrire la probabilité d'observer  $(x_n, y_n)$  sous la forme comprenant déjà la contrainte sur  $\boldsymbol{\pi}$  :

$$p(x_n, y_n) = (\boldsymbol{\pi}p(x_n|y_n = 1))^{y_n} ((1 - \boldsymbol{\pi})p(x_n|y_n = 0))^{1-y_n} \quad (7)$$

ce qui permet de déterminer la log-vraisemblance de l'échantillon composé de  $N$  observations i.i.d dans le modèle  $\Theta$  en utilisant (7) :

$$\begin{aligned} \ell(\Theta) &= \sum_{n=1}^N \ln(p(x_n, y_n; \Theta)) \\ \ell(\Theta) &= \sum_{n=1}^N \ln((\boldsymbol{\pi}p(x_n|y_n = 1))^{y_n} ((1 - \boldsymbol{\pi})p(x_n|y_n = 0))^{1-y_n}) \\ \ell(\Theta) &= \sum_{n=1}^N \left( y_n \left( \ln\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}}\right) - \frac{1}{2}(x_n - \mu_1)^\top \Sigma^{-1}(x_n - \mu_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \left( (1 - y_n) \left( \ln\left(\frac{1 - \boldsymbol{\pi}}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}}\right) - \frac{1}{2}(x_n - \mu_0)^\top \Sigma^{-1}(x_n - \mu_0) \right) \right) \right) \\ \ell(\Theta) &= \sum_{n=1}^N \left( y_n \left( \ln \boldsymbol{\pi} - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \det \Sigma - \frac{1}{2}(x_n - \mu_1)^\top \Sigma^{-1}(x_n - \mu_1) \right) \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \left( (1 - y_n) \left( \ln(1 - \boldsymbol{\pi}) - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \det \Sigma - \frac{1}{2}(x_n - \mu_0)^\top \Sigma^{-1}(x_n - \mu_0) \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$\ell(\Theta)$  est donc une fonction strictement concave en  $\pi$  par stricte concavité du logarithme, en  $\mu_0$  et  $\mu_1$  par stricte concavité de l'opposé d'une forme quadratique (avec les valeurs propres de  $\Sigma$  strictement positives), et en  $\Sigma$  par convexité du logdet. Le problème de maximisation  $\ell(\Theta)$  admet une solution unique, notée  $(\widehat{\mu_{0,MLE}}, \widehat{\mu_{1,MLE}}, \widehat{\Sigma_{MLE}}, \widehat{\pi_{MLE}})$  que l'on trouve par dérivation de (8).

### 2.1.1 Calcul du MLE

**Par rapport à  $\pi$**

$$\frac{\partial \ell(\mu_0, \mu_1, \Sigma, \pi)}{\partial \pi} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{y_n}{\pi} - \frac{1-y_n}{1-\pi} \right) = 0 \implies \frac{1-\pi}{\pi} = \frac{\sum_{n=1}^N (1-y_n)}{\sum_{n=1}^N y_n} \implies \pi = \frac{\sum_{n=1}^N y_n}{\sum_{n=1}^N 1}$$

D'où finalement :

$$(\widehat{\pi_{MLE}}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n \quad (9)$$

qui est la moyenne empirique des classes observées.

**Par rapport à  $\mu_0$  et  $\mu_1$**

$$\frac{\partial \ell(\mu_0, \mu_1, \Sigma, \pi)}{\partial \mu_0} = \sum_{n=1}^N ((1-y_n)(-\Sigma^{-1}(x_n - \mu_0))) = 0 \implies \mu_0 = \frac{\sum_{n=1}^N (1-y_n)x_n}{\sum_{n=1}^N (1-y_n)}$$

En introduisant  $A = \sum_{n=1}^N y_n$ , on a donc :

$$(\widehat{\mu_{0,MLE}}) = \frac{1}{N-A} \sum_{y_n=0} x_n \quad (10)$$

Et de la même façon :

$$(\widehat{\mu_{1,MLE}}) = \frac{1}{A} \sum_{y_n=1} x_n \quad (11)$$

**Par rapport à  $\Sigma$**  En introduisant temporairement  $\Lambda = \Sigma^{-1}$ , la log-vraisemblance se réécrit :

$$\begin{aligned} \ell(\Theta) = & \sum_{n=1}^N \left( y_n \left( \ln \pi - \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln \det \Lambda - \frac{1}{2} (x_n - \mu_1)^\top \Lambda (x_n - \mu_1) \right) \right) \\ & + \sum_{n=1}^N \left( (1-y_n) \left( \ln(1-\pi) - \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln \det \Lambda - \frac{1}{2} (x_n - \mu_0)^\top \Lambda (x_n - \mu_0) \right) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

En introduisant aussi :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma}_0 &= \frac{1}{N-A} \sum_{y_n=0} (x_n - \mu_0)^\top (x_n - \mu_0) \\ \widetilde{\Sigma}_1 &= \frac{1}{A} \sum_{y_n=1} (x_n - \mu_1)^\top (x_n - \mu_1) \end{aligned} \quad (13)$$

On peut réécrire (12) sous la forme suivante :

$$\ell(\Theta) = -N \ln(2\pi) + A \ln \pi + (N - A) \ln(1 - \pi) + \frac{N}{2} \ln \det \Lambda - \frac{N - A}{2} \text{tr}(\tilde{\Sigma}_0 \Lambda) - \frac{A}{2} \text{tr}(\tilde{\Sigma}_1 \Lambda) \quad (14)$$

Dérivant (14) par rapport à  $\Lambda$  :

$$\frac{\partial \ell(\mu_0, \mu_1, \Lambda, \pi)}{\partial \Lambda} = \frac{N}{2} \Lambda^{-1} - \frac{N - A}{2} \tilde{\Sigma}_0 - \frac{A}{2} \tilde{\Sigma}_1 = 0 \implies \Lambda^{-1} = \frac{1}{N} \left( (N - A) \tilde{\Sigma}_0 + A \tilde{\Sigma}_1 \right)$$

D'où finalement :

$$\widehat{\Sigma}_{MLE} = \frac{1}{N} \left( (N - A) \tilde{\Sigma}_0 + A \tilde{\Sigma}_1 \right) \quad (15)$$

### 2.1.2 Comparaison avec la régression logistique

Le modèle d'une régression logistique repose sur un modèle  $(\omega, \mathbf{b})$  tel que :

$$p(y = 1|x) = \sigma(\omega^\top x + \mathbf{b}) \quad (16)$$

Dans le cas du *LDA*, on peut également calculer cette probabilité comme suit :

$$\begin{aligned} p(y = 1|x) &= \frac{p(x|y = 1)p(y = 1)}{p(x)} \\ &= \frac{p(x|y = 1)p(y = 1)}{p(x|y = 0)p(y = 0) + p(x|y = 1)p(y = 1)} \\ &= 1 / \left( 1 + \frac{p(x|y = 0)p(y = 0)}{p(x|y = 1)p(y = 1)} \right) \\ &= 1 / \left( 1 + \frac{1 - \pi}{\pi} \exp \left( -\frac{1}{2}(x - \mu_0)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu_0) + \frac{1}{2}(x - \mu_1)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu_1) \right) \right) \\ &= \sigma \left( -\ln \left( \frac{1 - \pi}{\pi} \right) - \frac{1}{2} Q(\mu_0, \mu_1, \Sigma^{-1}, x) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Où :

$$\begin{aligned} Q(\mu_0, \mu_1, \Sigma^{-1}, x) &= -(x - \mu_0)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu_0) + (x - \mu_1)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu_1) \\ Q(\mu_0, \mu_1, \Sigma^{-1}, x) &= -x^\top \Sigma^{-1}x + \mu_0^\top \Sigma^{-1}x + x^\top \Sigma^{-1}\mu_0 - \mu_0^\top \Sigma^{-1}\mu_0 \\ &\quad + x^\top \Sigma^{-1}x - \mu_1^\top \Sigma^{-1}x - x^\top \Sigma^{-1}\mu_1 + \mu_1^\top \Sigma^{-1}\mu_1 \\ Q(\mu_0, \mu_1, \Sigma^{-1}, x) &= 2(\mu_0 - \mu_1)^\top \Sigma^{-1}x + \mu_1^\top \Sigma^{-1}\mu_1 - \mu_0^\top \Sigma^{-1}\mu_0 \end{aligned}$$

Ainsi, le terme quadratique disparaît sous l'hypothèse de l'égalité des matrices de covariance entre les deux gaussiennes, d'où le L de LDA, et on peut écrire (17) sous la forme :

$$\begin{aligned} p(y = 1|x) &= \sigma \left( (\mu_1 - \mu_0)^\top \Sigma^{-1}x + \mu_0^\top \Sigma^{-1}\mu_0 - \mu_1^\top \Sigma^{-1}\mu_1 - \ln \left( \frac{1 - \pi}{\pi} \right) \right) \\ p(y = 1|x) &= \sigma(\omega_{LDA}^\top x + \mathbf{b}_{LDA}) \end{aligned} \quad (18)$$

Où :

$$\begin{aligned} \omega_{LDA} &= \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_0) \\ \mathbf{b}_{LDA} &= \mu_0^\top \Sigma^{-1}\mu_0 - \mu_1^\top \Sigma^{-1}\mu_1 - \ln \left( \frac{1 - \pi}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

La LDA est donc équivalent à une régression logistique de paramètres  $(\omega_{LDA}, \mathbf{b}_{LDA})$

### 2.1.3 Résultats numériques