
Exercice 18 (interpolation par sinus cardinal tronqué)

Soit p un entier naturel non nul. On souhaite réaliser l'interpolation d'un signal discret au moyen de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{sinc}(x) & \text{si} \quad |x| \leq p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où sinc est le prolongement continu en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

1. S'agit-il d'une interpolation directe ou indirecte ?
2. Calculer la transformée de Fourier de φ.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\int_n^{n+1} \mathrm{sinc}(x)\, dx$ est du signe de $(-1)^n$.
4. En déduire que $\hat{\varphi}(0) \neq 1$.
5. Soit $\delta > 0$ et $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz). On note f_δ l'approximation de f obtenue après interpolation par φ des échantillons $(f(k\delta))_{k\in\mathbb{Z}}$. Montrer que $\hat{f_\delta}(0) = \hat{\varphi}(0) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2k\pi\delta^{-1})$.
6. En déduire que si $\hat{f}(0) \neq 0$, alors $\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f_\delta - f| \neq 0$. Conclure.

Exercice 19 (rotation)

La rotation d'une image est un transformation intéressante car elle met bien en évidence la capacité d'un interpolateur à préserver l'information contenue dans l'image. Commençons par "préparer" l'image `u` (par exemple lena.pgm) en la limitant à un disque

```
um = double(u).*contrast(distcenter(u,'n'),[0,0.8,0.85],[1,1,0])/255;
imshow(um);
```

Faisons-lui maintenant subir 35 rotations de 10 degrés et affichons la séquence ainsi produite :

```
m(:,:,1) = um;
for i=1:35
  m(:,:,i+1) = frot(m(:,:,i),10,0);
end
cmview(m);
```

Le résultat est catastrophique mais ce n'est pas très étonnant compte tenu du fait que nous avons effecté la rotation au moyen d'une interpolation au plus proche voisin (ordre 0 dans `frot`). Nous pouvons maintenant faire varier la méthode d'interpolation en changeant cette valeur (le troisième argument de `frot`, qui spécifie la méthode d'interpolation comme pour la fonction `fzoom`). Tester ainsi les valeurs $n = 1, -3, 3, 5$ en générant directement le résultat après 36 rotations (sans le film) par

```
v = um;
for i=1:36; v = frot(v,10,0); end
flip2(um,v);
```

(pour passer d'une image à l'autre, presser une touche, et 'Ctrl-C' pour terminer la visualisation). Vous pouvez aussi bien sûr changer le nombre de rotations et l'angle correspondant.

Comparez et commentez les résultats obtenus pour chaque méthode d'interpolation ($n = 1, -3, 3, 5, ...$), en particulier la différence entre les cas $n = 3$ et $n = -3$.

A priori, une rotation par interpolation de Fourier (sinc) demanderait $O(N^4)$ opérations, puisqu'il n'y a pas de correspondance simple entre la grille de départ et la grille après rotation (sauf pour des angles multiples de $\pi/2$...). Il est assez surprenant que l'on puisse en fait réaliser cette opération en $O(N^2 \log N)$ opérations, en décomposant la rotation en produit de glissements, ainsi nous l'avons vu en cours. Testez cette méthode en remplaçant le précédent `frot(v,10,0)` par `fftrot(v,10)` et observez le résultat obtenu.

Que concluez-vous ? Pourquoi n'y a-t-il (quasiment) aucune perte d'information ?

Exercice 20 (interpolation linéaire décalée)

Soit $u(k), k \in \mathbb{Z}$ un signal discret à support fini ($u(k) \neq 0$ pour un nombre fini d'indices k seulement). Pour $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, on envisage d'interpoler u par

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\psi(x - k), \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 - |x - \alpha| & \text{si} \quad |x - \alpha| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Expliciter $\hat{c}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)e^{-ik\xi}$ en fonction de $\hat{u}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$ de façon à ce que l'interpolation de u par v soit exacte (u et v coïncident sur $\mathbb{Z}$). Que se passe t-il pour $\alpha = \frac{1}{2}$?

2) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c(k) = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} c(k - 1) + \frac{1}{1 - \alpha} u(k).$$

3) On suppose que $u(k) = f(k\delta)$ pour un certain $\delta \in]0, 1]$, avec $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz) et $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]$. Montrer que si $v_\delta(x) = v(x/\delta)$, alors

$$e_\delta := \int_{-\pi}^{\pi} \left|\hat{f}(\xi) - \widehat{v_\delta}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} |1 - \hat{\varphi}(\delta\xi)|^2 \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

où φ est la fonction interpolatrice directe associée à ψ.

4) En déduire que

$$\sqrt{e_\delta} = C(\alpha)\|f''\|_2 \cdot \delta^2 + \underset{\delta \to 0}{o}(\delta^2)$$

pour une certaine fonction $C(\alpha)$ à préciser.

5) Donner la valeur α_0 de α qui minimise $C(\alpha)$, puis discuter selon la valeur de α la pertinence et l'intérêt de la méthode d'interpolation proposée.

Exercice 21

L'opérateur différentiel $F(u, Du) = u_x/u_y$ est-il invariant par changement de contraste ? Même question pour l'opérateur différentiel $F(u, Du, D^2u) = u_{xx}/u_{yy}$.

Exercice 22

Construire un filtre linéaire 3×3 consistant avec

$$F(u, Du, D^2u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Exercice 23

Étudier la consistance des opérateurs discrets suivants:

a) $Tu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \star u.$

b) $Tu\,(i,j) = \max\Big(u(i+1,j), u(i-1,j), u(i,j+1), u(i,j-1)\Big) - u(i,j).$

Exercice 24

Quels sont les opérateurs différentiels F que l'on peut implémenter avec un schéma 2×2, i.e. un opérateur discret T consistant avec F tel que $Tu(i,j)$ ne dépend que de $u(i,j)$, $u(i+1,j)$, $u(i,j+1)$, et $u(i+1,j+1)$?
