Vincent Matthys
ENS Paris Saclay

Compte rendu - TP7

Vincent Matthys
vincent.matthys@ens-paris-saclay.fr

20 Exercice 20

20.1

Du fait de l'interpolation exacte, on doit avoir :

$$u[l] = v[l] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k]\psi[l-k] \quad \forall l \in \mathbb{Z}$$
$$u = c * \psi_d$$

où ψ_d est la version discrétisée de ψ. Ceci permet d'établir la relation entre les coefficients de Fourier $\widehat{u}$, $\widehat{c}$ et $\widehat{\psi_d}$ suivante :

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{c}(\xi) \times \widehat{\psi_d}(\xi) \quad \text{avec} \quad \widehat{\psi_d}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\xi + 2n\pi)$$

puisque discrétiser avec un pas de 1 ψ revient à 2π périodiser sa transformée de Fourier.

Il faut alors remarquer que ψ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\psi(x) = \left(\mathbb{1}_{[\alpha-1/2,\alpha-1/2]} * \mathbb{1}_{[\alpha-1/2,\alpha-1/2]}\right)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ce qui permet d'expiliciter rapidement la transformée de Fourier de ψ :

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\mathbb{1}_{[\alpha-1/2,\alpha-1/2]}}(\xi) \times \widehat{\mathbb{1}_{[\alpha-1/2,\alpha-1/2]}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$
$$\widehat{\psi}(\xi) = \left(e^{-i\alpha\xi}\ sinc\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \widehat{\psi}(0) = 1$$
$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-2i\alpha\xi}\left(sinc\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2$$

On peut alors en déduire l'expression de la transformée de Fourier de ψ discrétisée :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\psi_d}(\xi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\xi + 2n\pi) \\
\widehat{\psi_d}(\xi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\alpha(\xi+2n\pi)} \left(sinc\left(\frac{\xi+2n\pi}{2}\right)\right)^2 \\
\widehat{\psi_d}(\xi) &= e^{-2i\alpha\xi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(\xi/2+n\pi)}{\xi/2+n\pi}\right)^2 \\
\widehat{\psi_d}(\xi) &= e^{-2i\alpha\xi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(\xi/2)(-1)^n}{\xi/2+n\pi}\right)^2 \\
\widehat{\psi_d}(\xi) &= e^{-2i\alpha\xi} \sin^2(\xi/2) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\xi/2+n\pi}\right)^2
\end{aligned}
$$

Et si on considère alors $\widehat{\psi_d}$ sur une période 2π, à savoir sur $[-\pi,\pi]$:

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\psi_d}(\xi)| &= \sin^2(\xi/2) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\xi/2+n\pi}\right)^2 > 0 \quad \forall\xi \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\} \\
|\widehat{\psi_d}(0)| &= 1 > 0
\end{aligned}
$$

on prouve que $\widehat{\psi_d}$ ne s'annule jamais, ce qui permet finalement d'exprimer $\widehat{c}$ en fonction de $\widehat{u}$:

$$
\widehat{c}(\xi) = \frac{\widehat{u}(\xi)}{\widehat{\psi_d}(\xi)} \quad \forall\xi \in \mathbb{R}
$$

$$
\widehat{c}(\xi) = \begin{cases} \widehat{u}(0) \quad \text{pour} \quad \xi = 0 \\ \dfrac{\widehat{u}(\xi)e^{2i\alpha\xi}}{\sin^2(\xi/2)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{\xi/2+n\pi}\right)^2} \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^* \end{cases}
$$

20.2