
COMPTE-RENDU TP3

Vincent Matthys
vincent.matthys@ens-paris-saclay.fr

6 Exercice 6

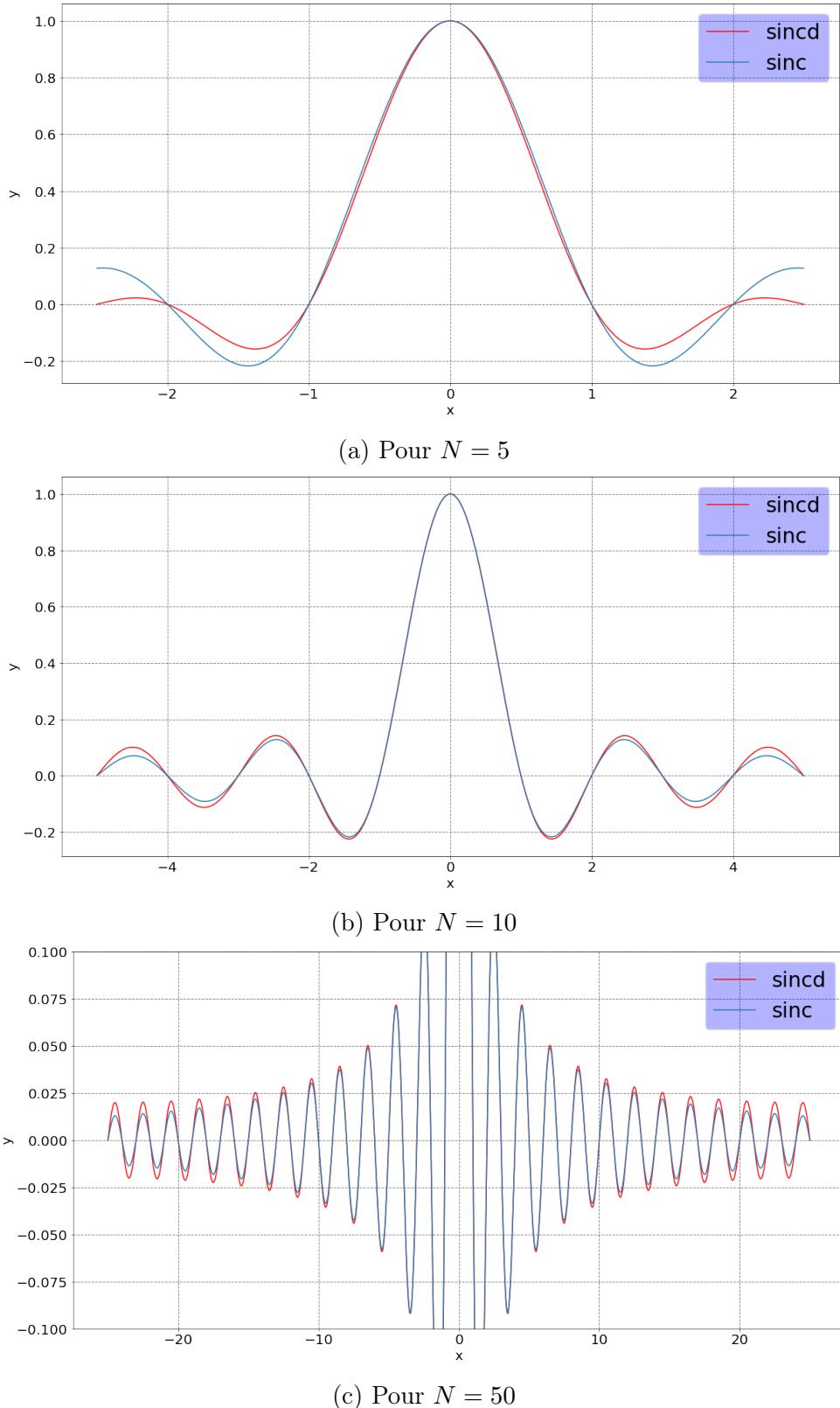


FIGURE 1 – Représentation graphique de la convergence du sincd_N et du sinc , sur $[-N/2, N/2]$

En figure 1 sont représentés le sinc et le sincd_N , pour différentes valeurs de N pour $x \in [-N/2, N/2]$. On constate que, pour chaque valeur entière, on a bien égalité, et que,

pour N assez grand, les différences sont minimes.

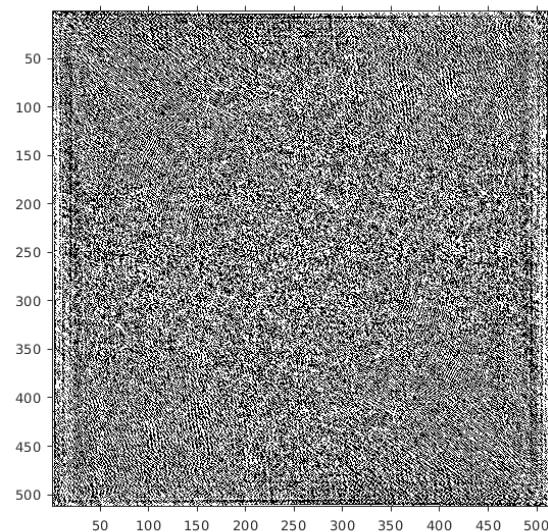
7 Exercice 7

```
u = double(imread('lena.pgm'));
```



(a) Image lena

```
f = fft2(u);  
imshow(f, 'InitialMagnification', 100);
```

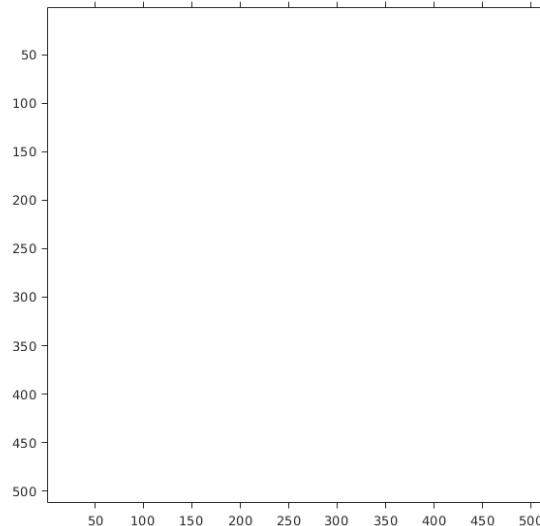


(b) Partie réelle de la transformée de Fourier de lena

FIGURE 2 – Partie réelle de la transformée de Fourier de Lena

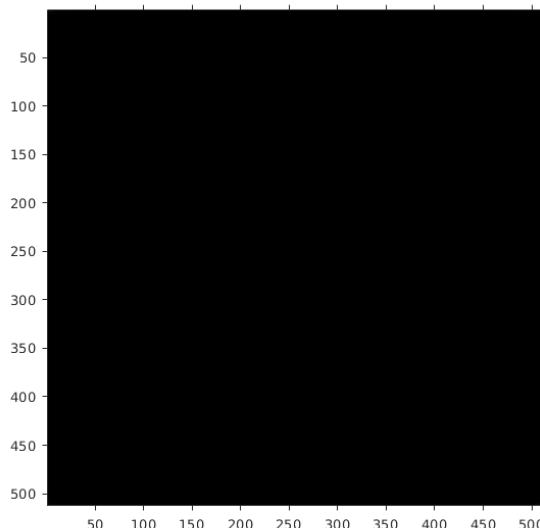
En figure 2, on demande à Matlab d'afficher en niveaux de gris une matrice complexe, résultant en un message d'erreur *Warning : Displaying real part of complex input..*. On observe donc uniquement la partie réelle de la transformée de Fourier.

```
imshow(abs(f));
```



(a) Sans l'option [] de imshow

```
imshow(abs(f),[]);
```



(b) Avec l'option [] de imshow

FIGURE 3 – Représentations du module de la transformée de Fourier

En figure 3, la commande 3a est équivalent à :

```
imshow(abs(f) > 1);
```

et on n'obtient que des pixels blancs, puisque imshow, quand on lui présente un double (ce qui est le type de $\text{abs}(f)$), représente en noir les valeurs à 0, en blanc les valeurs à 1, et en niveaux de gris les valeurs entre ces bornes. Or, on vérifie que $\text{abs}(f) > 1$ ne contient que des 1. En revanche, avec l'option `[]`, on rescale $\text{abs}(f) \in [0, 1]$, avec la plus grande valeur en blanc, et la plus faible en noire. Or, la répartition des valeurs est très asymétrique, et on ne représente quasiment que du noir. On peut s'en convaincre en tracant le logarithme de cette image, qui donne la figure 4.

```
imshow(log(abs(f)),[]);
```

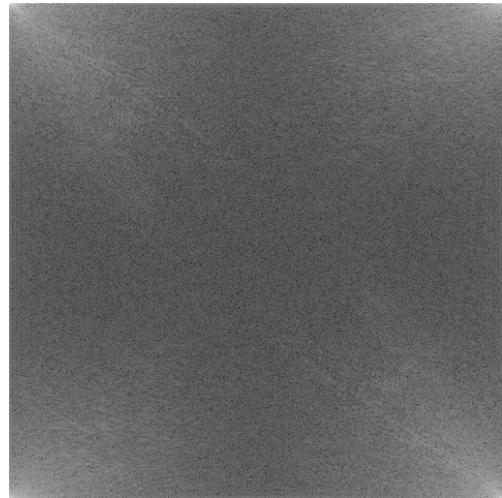
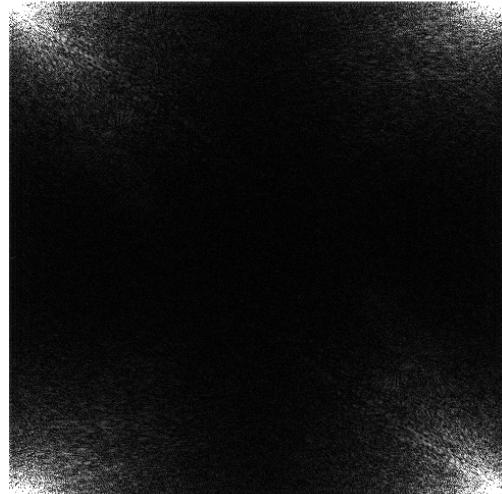


FIGURE 4 – Logarithme de la figure 3b

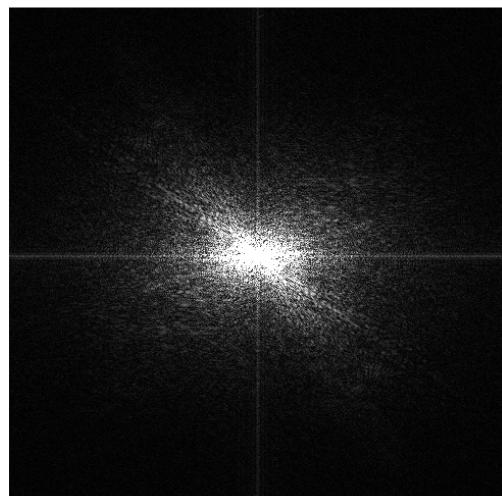
En figure 5, on sature 1 % des valeurs extrémées du module de la transformée, et on redistribue linéairement les valeurs restantes sur tous les niveaux de gris. C'est ce que fait la fonction `normsat`. La fonction `fftshift` permet de centrer l'origine des fréquences, passant du coin supérieur gauche en figure 5a au centre en figure 5b.

```
imshow(normsat(abs(f),1));
```



(a) Avec l'origine des fréquences en haut à gauche de l'image

```
imshow(normsat(fftshift(abs(f)),1));
```

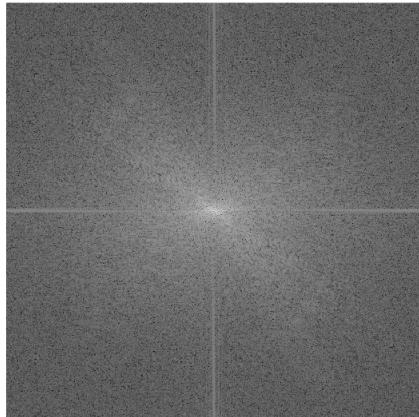


(b) Avec l'origine des fréquences au milieu de l'image

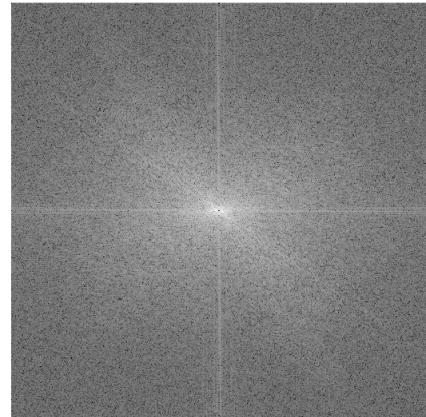
FIGURE 5 – Visualisation du module de la transformée de Fourier après saturation à 1 % des valeurs extrêmes et mapping linéaire des valeurs restantes en niveau de gris

En figure 6d sont présentés les commandes et leur résultat pour visualiser efficacement différentes parties d'une transformée de Fourier.

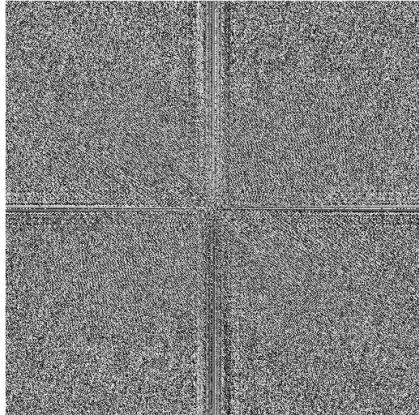
```
imshow(log(1 +abs(real(fftshift(f))  
))), [], imshow(log(1 +abs(imag(fftshift(f))  
))), [])
```



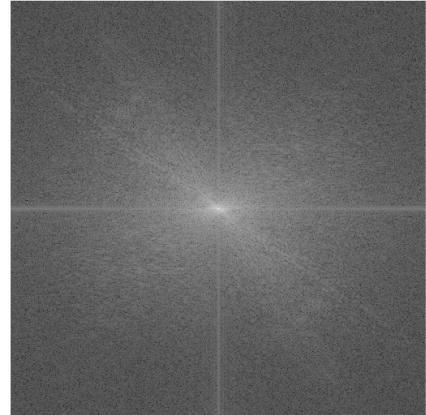
(a) Logarithme de la partie réelle
imshow(angle(fftshift(f)) + pi,
[])



(b) Logarithme de la partie imaginaire
imshow(log(1 +abs(fftshift(f))),
[])



(c) Phase



(d) Logarithme du module

FIGURE 6 – Visualisation des divers parties d'une transformée de Fourier

8 Exercice 8

8.1 Question 1

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \delta_{(k+mM, l+nN)} \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \delta_{(k+mM, l+nN)}(x, y) e^{-ix\xi_x - iy\xi_y} dx dy \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \delta_{(mM, nN)}(x - k, y - l) e^{-ix\xi_x - iy\xi_y} dx dy \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) e^{-i(k\xi_x + l\xi_y)} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \delta_{(mM, nN)}(x, y) e^{-ix\xi_x - iy\xi_y} dx dy \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) e^{-i(k\xi_x + l\xi_y)} \widehat{\Pi}_{M,N}(\boldsymbol{\xi}) \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) e^{-i(k\xi_x + l\xi_y)} \frac{2\pi}{M} \frac{2\pi}{N} \Pi_{\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}}(\boldsymbol{\xi}) \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{2\pi}{M} \frac{2\pi}{N} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}}(\boldsymbol{\xi}) \sum_{0 \leq k \leq M-1, 0 \leq l \leq N-1} u(k, l) e^{-i(2\pi pk/M + 2\pi ql/N)} \\
\widehat{U}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{2\pi}{M} \frac{2\pi}{N} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(p, q) \delta_{\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned} \tag{1}$$

La relation établie en (1) montre que la transformée de fourier discrète agit comme si le signal initial était déjà périodique, puisque les coefficients de Fourier sont ceux du signal périodisé.

8.2 Question 2

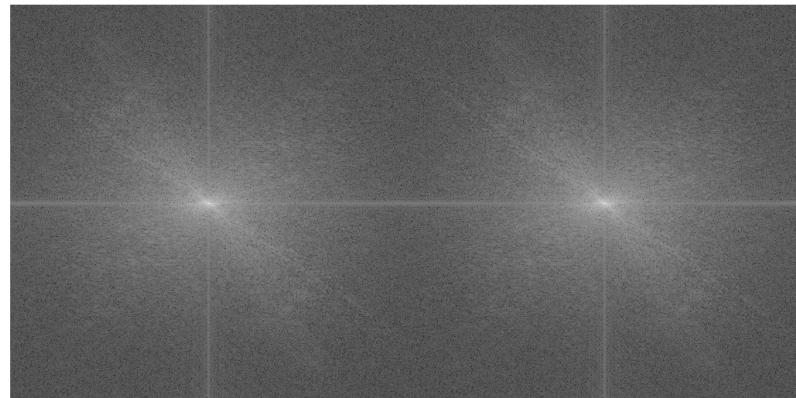
$$\begin{aligned}
\widehat{u}'(p, q) &= \sum_{k=0}^{M-1} \times \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi pk/M} e^{-2i\pi ql/N} u'(k, l) \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \times \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi pk/M} e^{-2i\pi ql/N} \dot{u}(k + k_0, l + l_0) \\
&= \sum_{k'=k_0}^{k_0+M-1} \times \sum_{l'=l_0}^{l_0+N-1} e^{-2i\pi p(k'-k_0)/M} e^{-2i\pi q(l'-l_0)/N} \dot{u}(k', l') \\
&= e^{-2i\pi pk_0/M} e^{-2i\pi ql_0/N} \sum_{k'=k_0}^{k_0+M-1} \times \sum_{l'=l_0}^{l_0+N-1} e^{-2i\pi pk'/M} e^{-2i\pi ql'/N} \dot{u}(k', l') \\
&= e^{-2i\pi pk_0/M} e^{-2i\pi ql_0/N} \widehat{u}(p, q)
\end{aligned} \tag{2}$$

Et on constate donc que les coefficients de Fourier de la translatée périodique sont, en module, identiques aux coefficients de Fourier de l'image, mais avec une phase modifiée qui dépend de la translation.

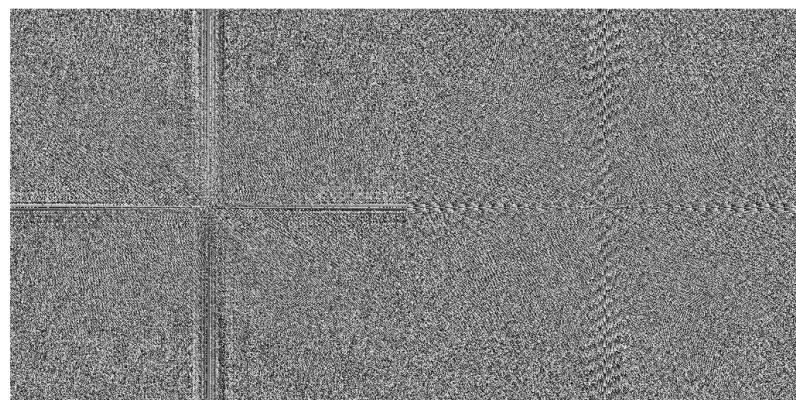
8.3 Question 3



(a) Images initiales



(b) Visualisation du module de la transformée de Fourier



(c) Visualisation de la phase de la transformée de Fourier

FIGURE 7 – Effet de la périodisation implicite sur le module et la phase de la transformée de Fourier : translation de lena périodisée.

En figure 7, on présente l'image translatée *lena* après périodisation. On retrouve bien que le module de la transformée de Fourier, visualisée en figure 7b ne varie pas, mais la phase de celle-ci est modifiée, comme présenté en figure 7c. On retrouve effectivement les résultats de la question 2.

9 Exercice 9

L'interpolée de Shannon $v(x, y)$ en fonction de \hat{u} s'écrit :

$$v(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{|\alpha| \leq M/2, |\beta| \leq N/2, (p,q) \in \mathbb{Z}} \epsilon_M(\alpha) \epsilon_N(\beta) \hat{u}(\alpha, \beta) e^{2i\pi(\frac{\alpha x}{M} + \frac{\beta y}{N})} \quad (3)$$

avec $\epsilon_N(p) = 0.5$ si $|p| = N/2$, donc dans le cas N pair, et 0 sinon
Montrons que :

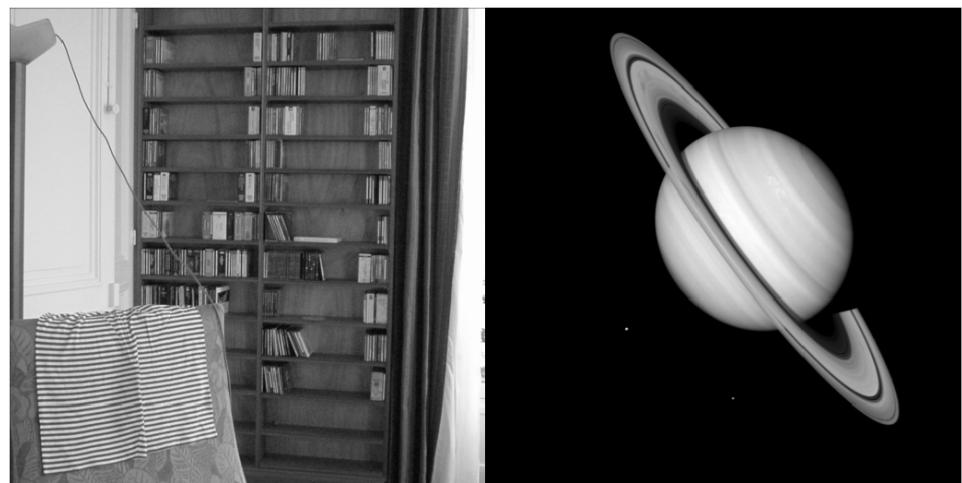
$$w(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{MN} \sum_{\substack{-M/2 \leq \alpha < M/2 \\ -N/2 \leq \beta < N/2}} \hat{u}(\alpha, \beta) e^{2i\pi(\frac{\alpha x}{M} + \frac{\beta y}{N})} \right) \quad (4)$$

définit une interpolation exacte de u . En effet, on a, pour $(k, l) \in \mathbb{Z}$

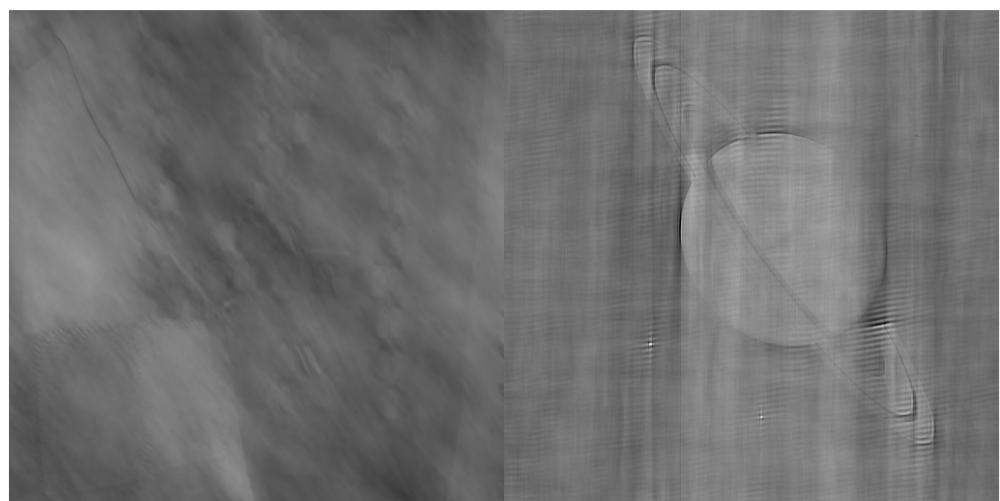
$$\begin{aligned} w(k, l) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{MN} \sum_{\substack{-M/2 \leq \alpha < M/2 \\ -N/2 \leq \beta < N/2}} \hat{u}(\alpha, \beta) \exp \left(2i\pi \left(\frac{\alpha k}{M} + \frac{\beta l}{N} \right) \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{MN} \sum_{\substack{-M/2 \leq \alpha < M/2 \\ -N/2 \leq \beta < N/2}} \left(\sum_{p,q=0}^{M-1, N-1} u(p, q) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{\alpha p}{M} + \frac{\beta q}{N} \right) \right) \right) \exp \left(2i\pi \left(\frac{\alpha k}{M} + \frac{\beta l}{N} \right) \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{MN} \sum_{p,q=0}^{M-1, N-1} u(p, q) \left(\sum_{\substack{-M/2 \leq \alpha < M/2 \\ -N/2 \leq \beta < N/2}} \exp \left(2i\pi \left(\alpha \frac{k-p}{M} + \beta \frac{l-q}{N} \right) \right) \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{MN} \sum_{p,q=0}^{M-1, N-1} u(p, q) M \delta(k-p) N \delta(l-q) \right) \\ &= u(k, l) \end{aligned} \quad (5)$$

10 Exercice 10

10.1 Question 1



(a) Images initiales

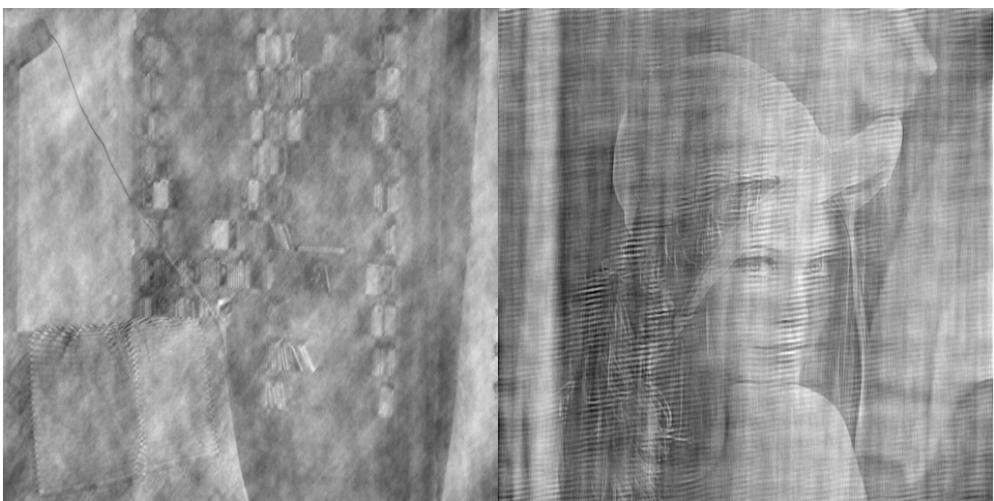


(b) Images dont les phases ont été échangées

FIGURE 8 – Echange de phase entre *room.pgm* et *saturn.pgm*



(a) Images initiales



(b) Images dont les phases ont été échangées

FIGURE 9 – Echange de phase entre *room.pgm* et *lena.pgm*

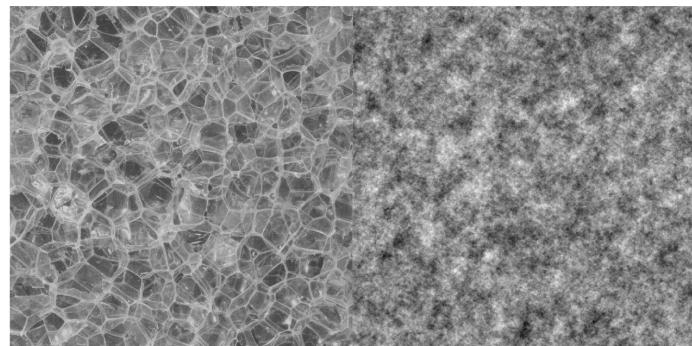
Deux exemples sont présentés en figures 8 9. On constate que toute l'information n'est pas contenue uniquement dans le module de la transformée de Fourier, puisqu'on apperçoit, avec le module de *saturne* et la phase de *room*, les rayures du coussin, ainsi que la forme de la bibliothèque. De la même façon, on apperçoit aussi *lena* dans l'image où on garde le module de *room* et on ajoute la phase de *lena*. En revanche, on semble conserver mieux les objets quand on garde le module de la transformée de Fourier.

10.2 Question 2

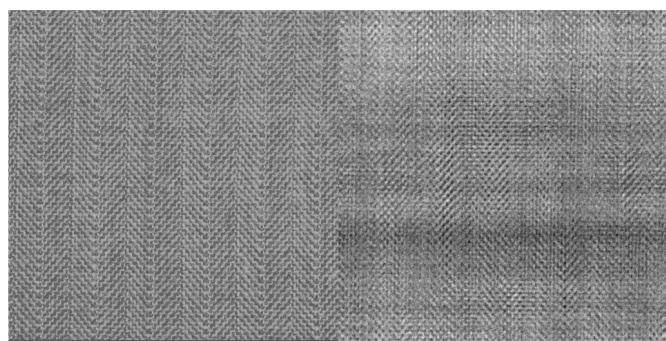
En figure 10 sont présentées les synthèses d'images à phase aléatoire obtenues a partir d'images d'objets, en figure 10a, et d'images de textures en figures 10b 10c 10d. On constate



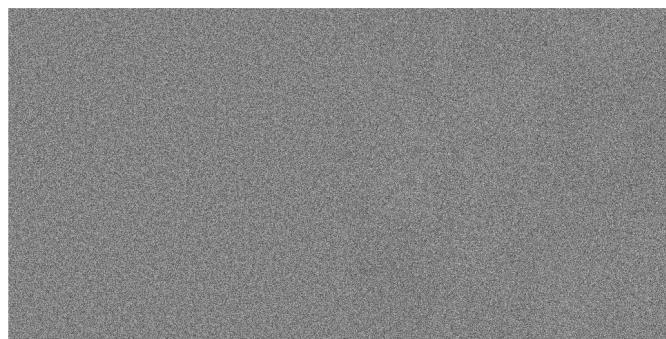
(a) A partir de *lena*



(b) A partir de bulles de plastique



(c) A partir d'un tissu avec des motifs en chevrons

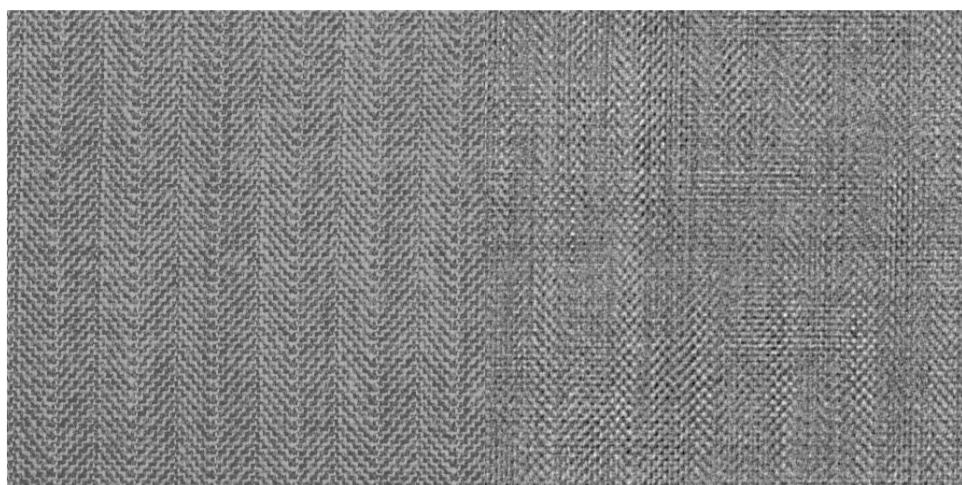


(d) A partir de bruit blanc gaussien

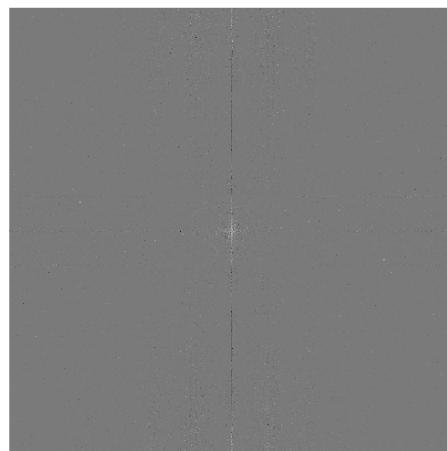
FIGURE 10 – Synthèse de texture à partir de la composante périodique : sur la colonne de gauche, l'image originale, sur la colonne de droite : l'image synthétisée

que les microtextures sont celles le mieux reproduites, et c'était attendu car l'information spatiale contenue dans la phase est perdue à grande échelle par le fait de rendre la phase aléatoire. En particulier, en figure 10, on constate que les images synthétisées sont d'autant plus vraisemblables que le motif de texture initial est fin, avec pour limite le bruit blanc gaussien en figure 10d.

En travaillant directement avec l'image, sans passer par sa composante périodique, on constate que près des bords (verticaux) de l'image, on retrouve majoritairement l'information de l'image initiale, comme observé en figure 11. Cela s'explique car la composante continue tue l'énergie le long des axes de la transformée de Fourier, qui n'est plus tuée si on ne considère plus uniquement cette composante continue. Ainsi, l'énergie du module de la transformée de Fourier prédomine toujours dans l'image synthétisée, comme on peut le constater dans la visualisation de la différence des transformée de Fourier de la composante périodique et de l'image initiale, présentée en figure 11b



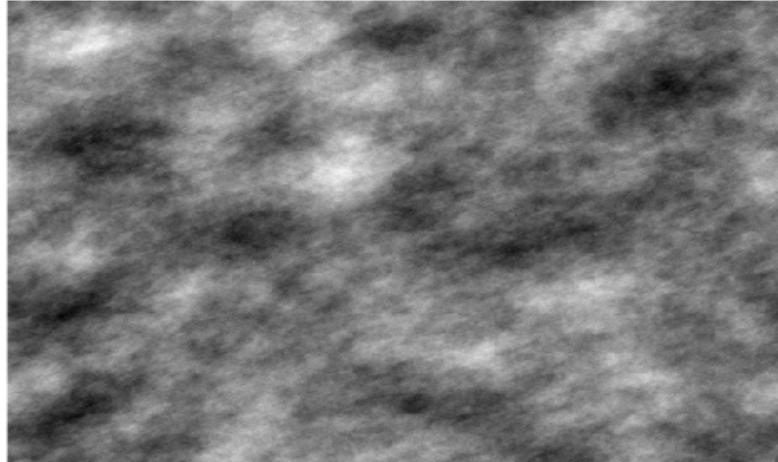
(a) A partir de bruit blanc gaussien



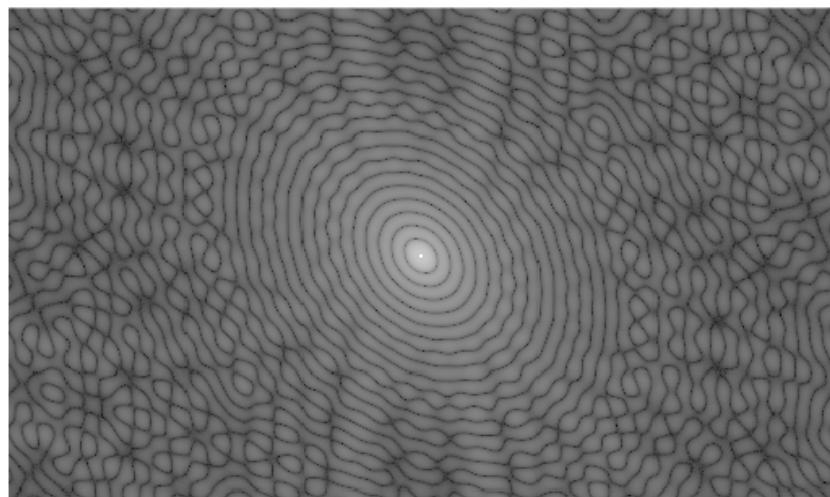
(b) Transformée de Fourier de l'image synthétisée à partir de la différence de la composante périodique et de l'image synthétisée à partir de l'image brute

FIGURE 11 – Synthèse de texture à partir de l'image initiale de la figure 10c sans extraire la composante continue

10.3 Question 3



(a) Image *texture* synthétisée



(b) Transformée de Fourier de *texture*

FIGURE 12 – Visualisation de *texture* et de sa transformée de Fourier

En figure 12 on peut visualiser l'image de texture synthétisée à partir d'une ellipse, ainsi que sa transformée de Fourier. Le but est de retrouver les caractéristiques de l'ellipse à partir de laquelle a été synthétisée la figure 12a par randomisation de la phase. Il suffit donc de trouver l'ellipse dont la transformée de Fourier est présentée en figure 12b. Celle-ci est en fait la convolution d'une ellipse avec un sinus cardinal séparable à 2 dimensions, format des rebonds elliptiques permettant de déterminer l'axe principal de l'ellipse, comme étant perpendiculaire à l'axe principal de ces rebonds, c'est à dire que l'axe principal de l'ellipse initial est incliné de $\frac{\pi}{4} \pm \pi$ par rapport à l'axe des abscisses. Les