Compte-rendu TP5

Vincent Matthys
vincent.matthys@ens-paris-saclay.fr

1 Exerice 13

1.2 Zoom d'un facteur 2 d'un signal discret

Appelant $\tilde{u}$ l'interpolée linéaire de v, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} v[2n] &= \tilde{u}(\frac{2n}{2}) = u[n] \\ v[2n+1] &= \tilde{u}(\frac{2n+1}{2}) = \frac{u[n]+u[n+1]}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

On peut donc exprimer la transformée de Fourier de v suivant :

$$\begin{aligned} \hat{v}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} v[k]e^{-ik\xi} \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{v}(\xi) &= \sum_{\substack{k=2n\\ n\in\mathbb{Z}}} v[2n]e^{-i2n\xi} + \sum_{\substack{k=2n+1\\ n\in\mathbb{Z}}} v[2n+1]e^{-i(2n+1)\xi} \\ \hat{v}(\xi) &= \sum_{\substack{k=2n\\ n\in\mathbb{Z}}} u[n]e^{-in(2\xi)} + \sum_{\substack{k=2n+1\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{u[n]+u[n+1]}{2}e^{-i(2n+1)\xi} \\ \hat{v}(\xi) &= \hat{u}(2\xi) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u[n]}{2}e^{-i(2n+1)\xi} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u[n+1]}{2}e^{-i(2n+1)\xi} \\ \hat{v}(\xi) &= \hat{u}(2\xi) + \frac{e^{-i\xi}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u[n]}{2}e^{-in(2\xi)} + + \frac{e^{i\xi}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u[n+1]}{2}e^{-i(n+1)(2\xi)} \\ \hat{v}(\xi) &= \hat{u}(2\xi)\left(1+\cos\left(\xi\right)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

D'autre part, l'interpolée U de Shannon de v, par le théorème de Shannon, s'exprime comme :

$$U(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u[k] sinc(x-k) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

S'ensuit une première opération de zoom par 2, représentée par le signal W :

$$W(x) = U(\frac{x}{2}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Dont la transformée de Fourier s'exprime :

$$\begin{aligned}
\hat{W}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} U(\frac{x}{2}) e^{-ix\xi} dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \\
&= \int_{\mathbb{R}} U(x) e^{-ix(2\xi)} dx \\
&= \hat{U}(2\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] sinc(x-k) e^{-ix(2\xi)} \quad \text{d'après (3)} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] e^{-ik(2\xi)} \int_{\mathbb{R}} sinc(x-k) e^{-i(x-k)(2\xi)} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] e^{-ik(2\xi)} \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(2\xi) \\
&= \hat{u}(2\xi) \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(2\xi)
\end{aligned} \tag{5}$$

On peut alors discrétiser pour obtenir $\hat{w}$, zoom d'un facteur 2 par interpolée de Shannon :

$$\begin{cases}
\hat{w}(\xi) = \hat{u}(2\xi) \quad \forall \xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\
\hat{w}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in [-\pi, \pi] \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\
\hat{w}(\xi) : 2\pi - \text{periodisée}
\end{cases} \tag{6}$$

Ce qui correspond à concentrer la transformée de Fourier dans le demi-carré, et à mettre à 0 les coefficients tout autour. Ce qui est bien différent du zoom par interpolée linéaire, obtenu en (2), où on concentre la transformée de Fourier par 2 mais en modulant par un facteur oscillant entre 1 et 2.

1.3 Zoom d'un facteur 2 d'une image discrète

17 Exerice 17

Pour l'image *crop_bouc.pgm*, on constate que tous les zoom par interpolation autre que plus proche voisins donne des phénomènes de repliement

En figure 1 est visualisé le module de la transformée de Fourier de l'image cameraman en entier.

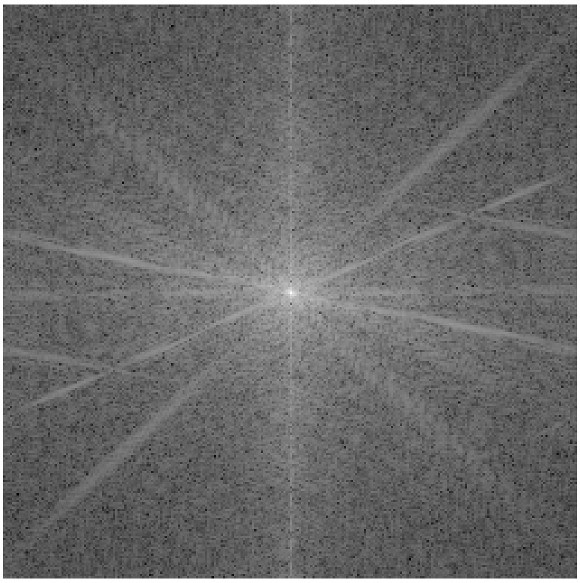

FIGURE 1 – Transformée de Fourier du cameraman entier

En figure 2 est visualisé le module de la transformée de Fourier de l'image cameraman en entier. On peut constater

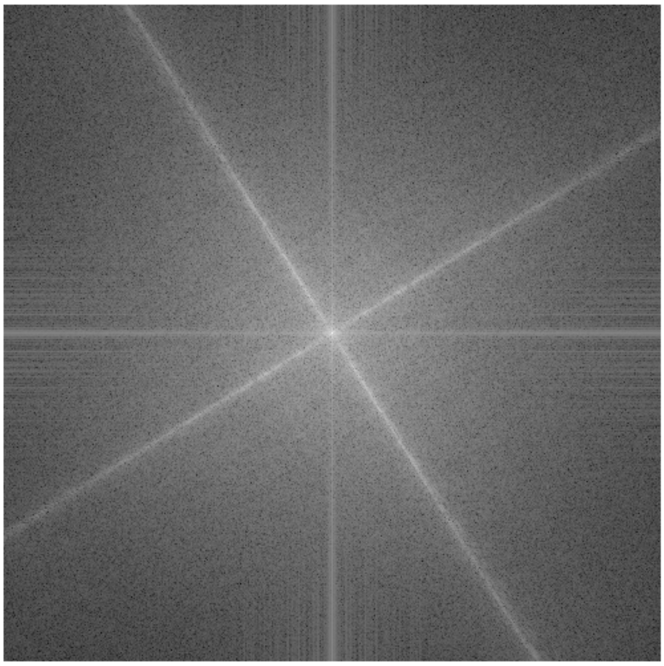

FIGURE 2 – Transformée de Fourier du bouc entier