问题求解与实践
——线性方程组求解

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

线性方程组求解

设线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 可逆且主对角元素 $a_{00}, a_{11}, \cdots, a_{(n-1)(n-1)}$ 均不为零，求解 x

- **迭代法**

  雅克比迭代、松弛迭代等

- **解析法**

  高斯消去法、行列式法等

高斯消去法

高斯消去法就是利用初等变换将矩阵A化为上三角形式，然后利用回代法求此三角阵的解。

也就是将线性方程组转化为下面的形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

回代求解：

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \Big/ a_{nn}^{(n)} \\ x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j) \Big/ a_{ii}^{(i)} \end{cases} \qquad (i = n-1, \cdots, 2, 1)$$

高斯消去法

处理第 *i* 行

```
for(i=1; i<n; i++)
{
    temp=A[i][0]/A[0][0];
    for(j=0; j<n; j++)
    {
        A[i][j]=A[i][j]-temp*A[0][j];
    }
    b[i]=b[i]-temp*b[0];
}
```

第 i 行 – 第 0 行*a_{i0}/a_{00}

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots & a_{0n-1} \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
* \\ * \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ *
\end{bmatrix}
$$

高斯消去法

第 i 行 – 第 1 行*$\boldsymbol{a_{i1}/a_{11}}$

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots & a_{0n-1} \\
0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in\text{-}1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_{n\text{-}11} & a_{n\text{-}12} & a_{n\text{-}13} & \cdots & a_{n\text{-}1n\text{-}1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
* \\ * \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ *
\end{bmatrix}
$$

处理第 i 行

```
for(i=2; i<n; i++)
{
    temp=A[i][1]/A[1][1];
    for(j=1; j<n; j++)
    {
        A[i][j]=A[i][j]-temp*A[1][j];
    }
    b[i]=b[i]-temp*b[1];
}
```

高斯消去法

```
for(i=1; i<n; i++)   {
    temp=A[i][0]/A[0][0];
    for(j=0; j<n; j++)   {   A[i][j]=A[i][j]-temp*A[0][j];    }
    b[i]=b[i]-temp*b[0];
}
```

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \end{bmatrix}$$

```
for(i=2; i<n; i++)   {
    temp=A[i][1]/A[1][1];
    for(j=1; j<n; j++)   {   A[i][j]=A[i][j]-temp*A[1][j];    }
    b[i]=b[i]-temp*b[1];
}
```

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# \end{bmatrix}$$

```
for(i=3; i<n; i++) {
    temp=A[i][2]/A[2][2];
    for(j=2; j<n; j++)    {  A[i][j]=A[i][j]-temp*A[2][j];    }
    b[i]=b[i]-temp*b[2];
}
```

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$$

高斯消去法

```
for(k=0;k<n-1;k++)
{
        // 若有选主元的步骤，可以添加在此处
        if(!A[k][k])    return -1;
        //消去过程
        for(i=k+1;i<n;i++)
        {
                temp=A[i][k]/A[k][k];
                for(j=k;j<n;j++)
                {  A[i][j]=A[i][j]-temp*A[k][j];     }
                b[i]=b[i]-temp*b[k];
        }
}
```

$a_{k+1k}, a_{k+2k}, \cdots, a_{(n-1)k}$ 清零