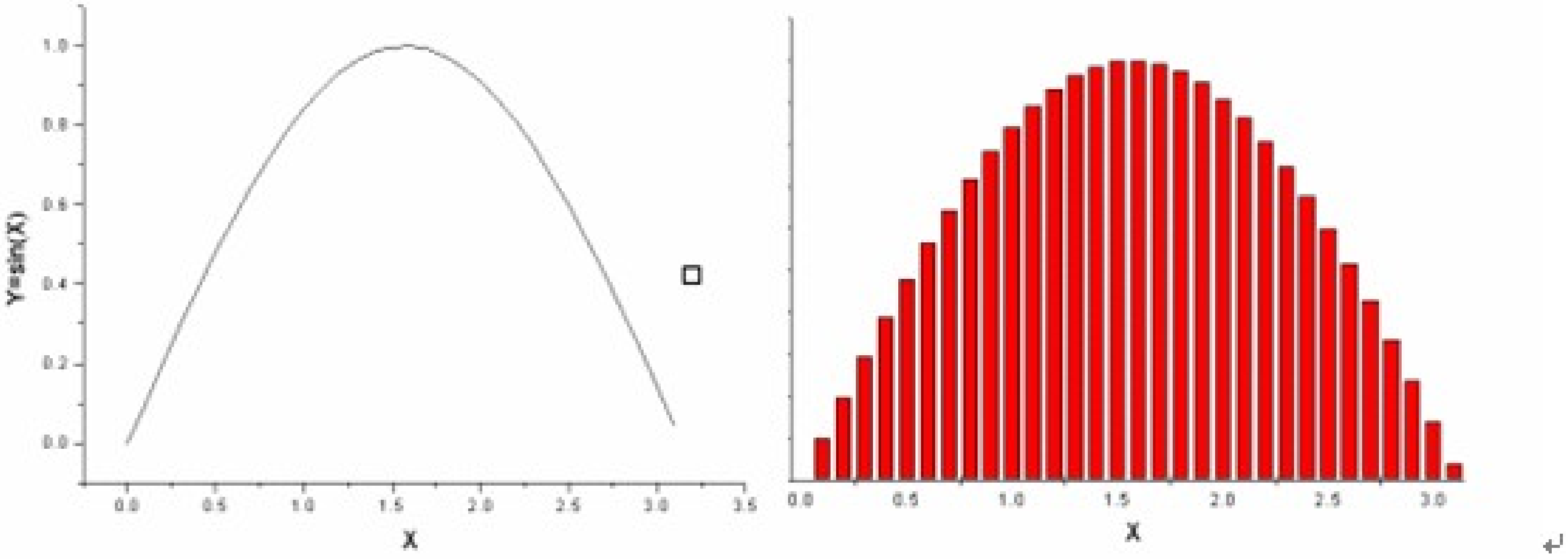
问题求解与实践
——数值积分

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

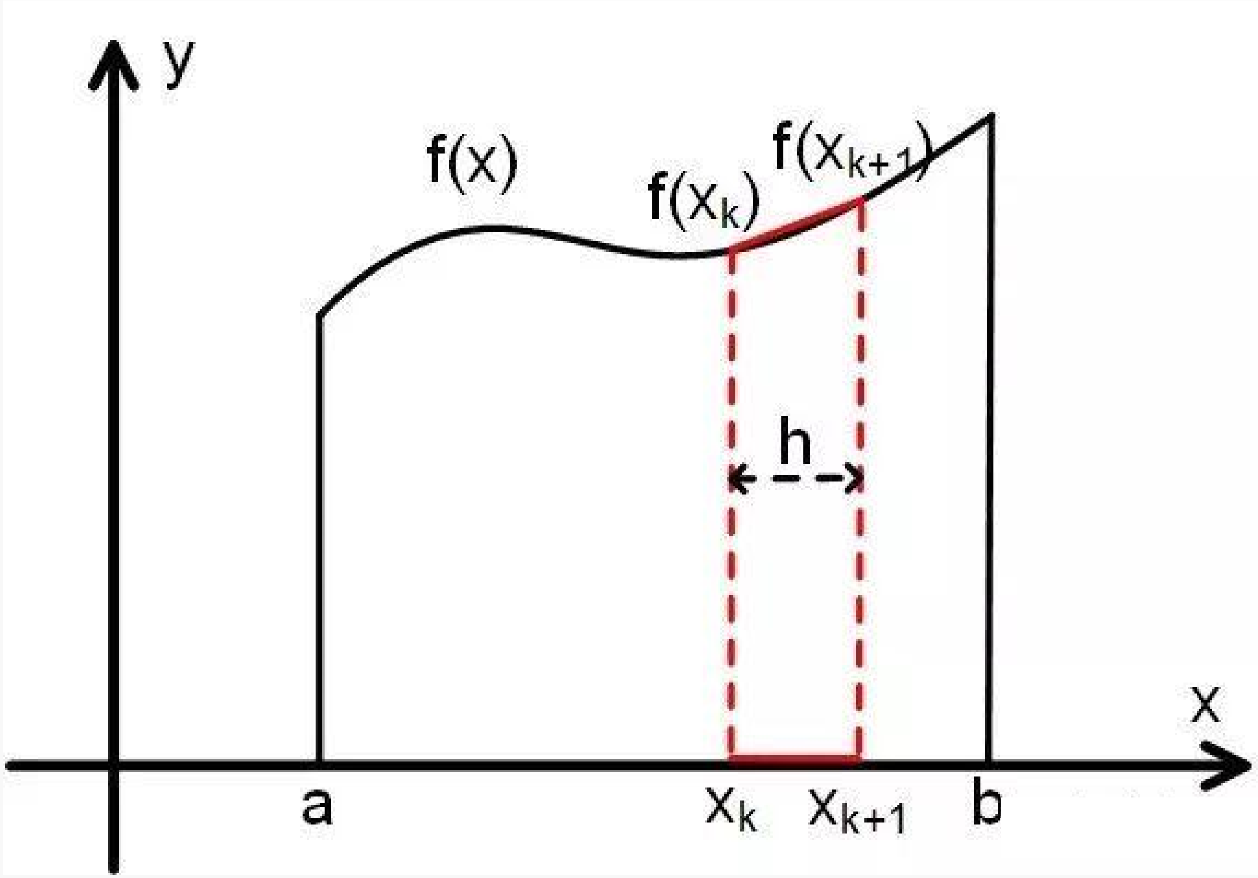
问题描述

- 给定函数f(x)，求积分$\int_a^b f(x)\,dx$
  - 矩形积分法
  - 梯形积分法
  - Simpson积分法，输入：&f, a, b, n
  - Romberg积分法，输入：&f, a, b, eps

矩形积分法



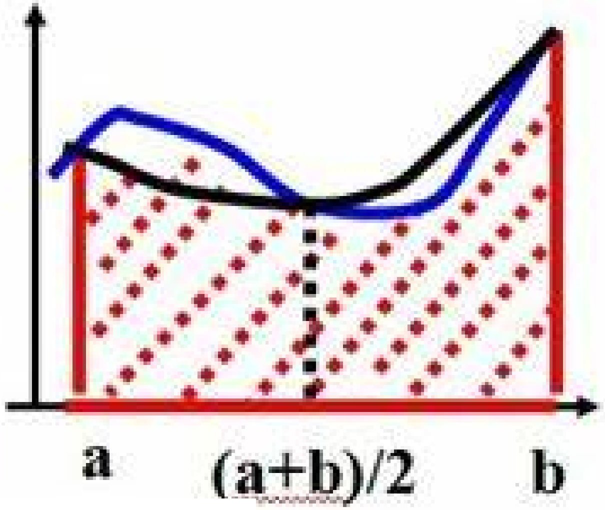
梯形积分法



Simpson积分法

③ Simpson公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$



Simpson公式是以函数f(x)在a, b, (a+b)/2这三点的函数值f(a), f(b), $f(\frac{a+b}{2})$ **的加权平均值**

$\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ **作为平均高度f(ξ)的近似值而获得的一种数值积分方法。**

Romberg积分法

将上述结果综合后

$$
\begin{cases}
T_0(0) = \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\
T_0(k) = \dfrac{1}{2}T_0(k-1) + \dfrac{b-a}{2^k}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} f\left(a+(2j+1)\dfrac{b-a}{2^k}\right) \\
T_1(k-1) = \dfrac{4}{3}T_0(k) - \dfrac{1}{3}T_0(k-1) \\
T_2(k-1) = \dfrac{16}{15}T_1(k) - \dfrac{1}{15}T_1(k-1) \\
T_3(k-1) = \dfrac{64}{63}T_2(k) - \dfrac{1}{63}T_2(k-1)
\end{cases}
$$

外推加速公式

$k = 1,2,\cdots$

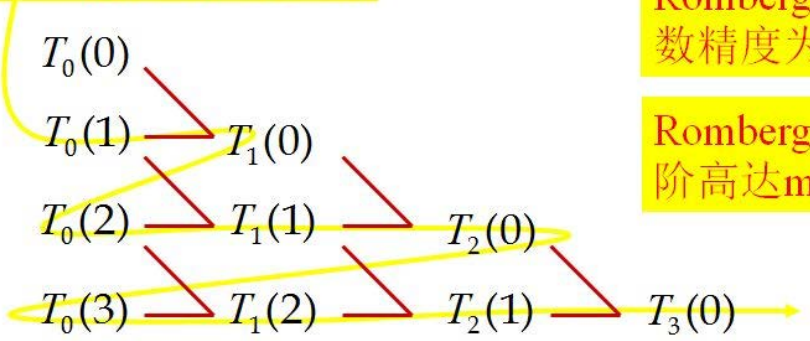
以上整个过程称为Romberg算法

其中外推加速公式可简化为

$$T_m(k-1) = \frac{1}{4^m-1}[4^m T_{m-1}(k) - T_{m-1}(k-1)] \quad \text{--------(9)}$$

并且m可以推广到$m = 1,2,\cdots \qquad k = 1,2,\cdots$

Romberg算法求解步骤



Romberg算法的代数精度为m的两倍

Romberg算法的收敛阶高达m+1的两倍

Romberg积分法（例）

- 计算$\int^{1.5}\frac{1}{1+x}dx$

将上述结果综合后

$$
\begin{cases}
T_0(0) = \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\
T_0(k) = \dfrac{1}{2}T_0(k-1) + \dfrac{b-a}{2^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} f\left(a+(2j+1)\dfrac{b-a}{2^k}\right) \\
\boxed{\begin{array}{l} T_1(k-1) = \dfrac{4}{3}T_0(k) - \dfrac{1}{3}T_0(k-1) \\ T_2(k-1) = \dfrac{16}{15}T_1(k) - \dfrac{1}{15}T_1(k-1) \\ T_3(k-1) = \dfrac{64}{63}T_2(k) - \dfrac{1}{63}T_2(k-1) \end{array}}
\end{cases}
$$

外推加速公式

$k = 1,2,\cdots$

以上整个过程称为Romberg算法

	m=0	1	2	3
k=0	T0(0)	T1(0)	T2(0)	T3(0)
1	T0(1)	T1(1)	T2(1)	
2	T0(2)	T1(2)		
3	T0(3)			

i	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$	$T_{i,4}$	
1	1.05				
2	0.953571429	0.921428571			
3	0.925983575	0.916787624	0.916478228		
4	0.918741799	0.916327874	0.916297224	0.916294351	
5	0.916905342	0.916293190	0.916290077	0.916290776	0.916290762