Exercice **Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$
2. $\sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
3. $\sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$
4. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$
5. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
6. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{\mathrm{i}^n n^2}{n^2+1}$
7. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n\binom{2n}{n}}$
8. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
9. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} a_{2n} & = a^n \\ a_{2n+1} & = b^n \end{cases}$ où $0 < a < b$

Correction On prend dans chaque cas $z \neq 0$. et on revient à la règle de d'Alembert des séries numériques :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n^2+1}{3^n} > 0$ et :
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}}|z| \\ &= \frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)}|z| \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3n^2}|z| \end{aligned}$$
Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = |z|\frac{1}{3}$$
D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathrm{e}^{-n^2} > 0$ et :
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}}|z| \\ &= \mathrm{e}^{-2n-1}|z| \end{aligned}$$
Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = 0$$
D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = +\infty$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$: $a_n = \frac{\ln n}{n^2} > 0$ et :
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}|z|^{2(n+1)}}{a_n|z|^{2n}} &= \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}}|z|^2 \\ &= \frac{n^2\ln(n+1)}{(n+1)^2\ln n}|z|^2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2 \end{aligned}$$
Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = 1|z|^2$$
D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = \sqrt{\frac{1}{1}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n^n}{n!}|z|^{3n} > 0$ et :
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^3 \\ &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}|z|^3 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)}|z|^3 \end{aligned}$$
Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e} \times |z|^3$$
D'après la règle de D'Alembert la série CV pour $\mathrm{e} \times |z|^3 < 1$ soit $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$, et diverge pour $r > \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

   On en déduit d'après la caractérisation du rayon de CV que $R_a = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}|z| \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}|z| \end{aligned}$$

   Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \times |z|$$

   D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 1$.

6. Les coefficients ne sont pas réels (et pas positifs), on travaille alors avec les modules.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| = \frac{n^2}{n^2+1} > 0$ et :

   ...(à vous, c'est facile avec les équivalents)

   Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| = |z|$$

   D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV de $\sum |a_n| z^n$ vaut : $R_a = 1$, .

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{n\binom{2n}{n}} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\frac{1}{n\binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{1}{n\binom{2n}{n}}}|z| \\ &= \frac{n\times(2n)!\times((n+1)!)^2}{(n+1)\times(2n+2)!\times(n!)^2}|z| \\ &= \frac{n}{2(2n+1)}|z| \end{aligned}$$

   Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|}{4}$$

   D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 4$.

8. On analyse les valeurs de a_n, avec la π-périodicité de tan :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = a_n$$

   Donc a_n ne prend que trois valeurs : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{3p} & = a_0 = 0 \\ a_{3p+1} & = a_1 = -\sqrt{3} \\ a_{3p+2} & = a_2 = \sqrt{3} \end{cases}$.

   Point de critère de D'Alembert possible directement (indirectement oui)... mais si on a bien compris ce qu'est un rayon de CV c'est rapide :

   On déduit des valeurs d'une part que $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum a_n 1^n$ diverge grossièrement, d'où $R_a \leqslant 1$ avec la caractérisation du rayon de CV.

   Et d'autre part que $(|a_n|1^n)$ est bornée, donc que $R_a \geqslant 1$ avec la définition du rayon de CV.

   Finalement : $R_a = 1$

9. Le règle de D'Alembert n'est pas exploitable directement ici.

   On revient à la définition du rayon de CV. et on utilise les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs.

   Soit $r > 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée équivaut à $(a_{2n} r^{2n})$ et $(a_{2n+1} r^{2n+1})$ sont bornées.

   — $a_{2n} r^{2n} = (ar^2)^n$ donc $(a_{2n} r^{2n})$ est une suite géométrique de raison ar^2,
     elle est bornée lorsque $ar^2 \leqslant 1 \iff r \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$.

   — $a_{2n+1} r^{2n+1} = r \times (br^2)^n$ donc $(a_{2n+1} r^{2n+1})$ est une suite géométrique de raison br^2,
     elle est bornée lorsque $br^2 \leqslant 1 \iff r \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}}$.

   — Et de plus : $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$

   Donc $(a_n r^n)$ est bornée lorsque $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}}$, le rayon de CV est $R_a = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Exercice **Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ **2.** $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$

4. $\sum_n (\ln n) x^n$ **5.** $\sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n+1}$ **6.** $\sum_n (2+ni) z^n$

7. $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} z^n$

Correction

Exercice **Rayon de convergence et somme**

Calculer le rayon de convergence puis la somme de :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2} x^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

Correction

1. — Rayon de CV $R=+\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x\in\mathbb{R}$:
   L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\end{aligned}$$
2. — Rayon de CV $R=+\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x\in\mathbb{R}$: sachant que $(n+1)(n-2)=n^2-n-2=n(n-1)-2$
   L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x\end{aligned}$$
3. — Rayon de CV $R=1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

— Pour tout $x \in]-1;1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x\end{aligned}$$

4. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x \in]-1;1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{3n}{n+2} = 3\left(1 - 2\frac{1}{n+2}\right)$
   L'égalité ci-dessous est vraie car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} = 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)$$

   Soit $x = 0$ et dans ce cas la somme est nulle, soit $x \neq 0$ et on peut factoriser par x :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} &= 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}\right) \\ &= 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \\ &= 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + -\frac{2}{x^2}x\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}\ln(1-x) + \frac{2}{x}\right)\end{aligned}$$

5. Il faut le voir mais on a immédiatement $R = +\infty$ par linéarité avec :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x) + \cos(x)\right)$$

Exercice **DSE en 0**

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a > 0$	**4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Correction

Exercice **Équation différentielle**

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

Exercice **derivation**

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Est-elle convergente pour $|x|=R$?
2. Pour tout nombre réel x tel que la série entière précédente converge, on note $S(x)$ sa somme.
   Expliciter la dérivée de la fonction $x\mapsto xS(x)$ sur $]-R,R[$.
   En déduire $S(x)$ pour x appartenant à $]-R,R[$.
3. Calculer la somme de chacune des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{R^n}{(n+1)(n-2)},$$

$$\sum_{n\geq 3}\frac{R^n}{(n+1)(n-2)}.$$

Correction

1. $R=1$. En effet, $\frac{|x|^n}{(n+1)(n-2)}\sim\frac{|x|^n}{n^2}$. Donc si $|x|\leq 1$, la série est absolument convergente (par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$) tandis que si $|x|>1$, $\frac{|x|^n}{n^2}\to+\infty$ et la série diverge grossièrement.
2. On peut naturellement dériver la fonction sur son ouvert de convergence, soit ici $]-R,R[$.

$$xS(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-2)}.$$

   On a donc $(xS)'(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n-2}=x^2\sum_{k\geq 1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-x^2\ln(1-x)$. Une intégration par parties, suivie d'une intégration de fraction rationnelle, permet d'en déduire $xS(x)$, puis

$$S(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{x}\ln(1-x)+1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right).$$

   (Une autre méthode aboutissant à ce résultat est d'écrire :

$$3S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n-2}-\frac{x^n}{n+1}\right)=\frac{x^3}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\frac{x^3-1}{x}\sum_{n\geq 4}\frac{x^n}{n}=x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\frac{1-x^3}{x}\left(\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right).$$

3. Par continuité, $S(-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{-1}\ln 2+1-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^2}{3}\right)=\frac{5}{18}-\frac{2}{3}\ln 2$ et $S(1)=\frac{1}{3}\left(0+1+\frac{1}{2}+\frac{1^2}{3}\right)=\frac{11}{18}$.

Exercice **Fonction impaire**

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_{2k+1}=0$.

Exercice **Rayon de convergence**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels décroissante, de limite 0, et telle que $\sum_{n\geq 0}a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$?
Correction La série entière diverge en $z=1$ et converge en $z=-1$ (par le critère de convergence des séries alternées) donc $R=1$.