Equation différentielle d'ordre 1

Exercice : Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x' + x = 1$
2. $7x' + 2x = -5t^2 + 4t - 1$
3. $x' + 2x = t^2 - 2t + 3$
4. $x' + x = te^{-t}$
5. $x' - 2x = \cos(t)$

Exercice : Datation

Le carbone 14 possède plusieurs isotopes dont le carbone 14 - noté C^{14}, utilisé pour la datation. La proportion de carbone 14 est constante chez un organisme vivant. Après sa mort, la vitesse de disparition du carbone 14 est proportionnelle à la proportion de C^{14} présente dans l'organisme. On note k la constante de proportionnalité.

1. On note $x(t)$ la proportion de C^{14} à un instant t dans l'organisme. Écrire l'équation différentielle satisfaite par x.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. On appelle période de demi-vie la durée nécessaire pour que la proportion de C^{14} ait diminuée de moitié. Sachant que la période de demi-vie du C^{14} est de 40 ans, calculer la constante k.
4. Une équipe d'archéologues a mesuré dans une momie une proportion de C^{14} de $9,15.10^{?38}$. A quelle dynastie appartient ce pharaon () ?

Exercice : Equation différentielle linéaire de premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Sur $\mathbb{R}$:
$$E_1 :\ x' + x = \cos t + \sin t$$
Puis déterminer la solution au problème de Cauchy :
$$\begin{cases} x' + x = \cos t + \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$
2. Sur $\mathbb{R}$:
$$E_2 :\ x' - 2tx = \text{sh}t - 2t\text{ch}t$$
3. Sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$E_3 :\ tx' + (t-1)x = t^2$$

Correction

1. (a) Résolvons l'équation homogène $(H) :\ x' = -x$, associée à (E).
   — Posons $a(t) = -1$, a est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   $A(t) = -t$ primitive de a sur $\mathbb{R}$
   — La solution générale de (H) est :
   $x_0 = C\mathrm{e}^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$

   (b) Par superposition des solutions, il suffit de trouver une solution particulière à $x' + x = \cos t$ d'une part et à $x' + x = \sin t$ d'autre part, pour déterminer une solution particulière à (E).
   De plus par linéarité, il suffit de trouver une solution particulière à $x' + x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour trouver les solutions particulières ci-dessus.

(c) Déterminons une solution particulière à $x'+x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ par la méthode de la variation de la constante.
Posons $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et cherchons une solution sous la forme :
$x_1=\lambda(t)\mathrm{e}^{-t}$ $\quad x_1$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :
$x_1'=\lambda'\mathrm{e}^{-t}-\lambda\mathrm{e}^{-t}$
Donc :
$$\begin{aligned} x_1 \text{ solution } &\iff x_1'+x_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\\ &\iff \lambda'\mathrm{e}^{-t}-\lambda\mathrm{e}^{-t}+\lambda\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\\ &\iff \lambda'\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\\ &\iff \lambda'=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\end{aligned}$$
Donc : $\lambda=\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ convient et une solution particulière est :
$$\begin{aligned} x_1&=\tfrac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\\ &=\tfrac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\\ &=\tfrac{\cos t+\sin t}{2}+\mathrm{i}\tfrac{-\cos t+\sin t}{2}\end{aligned}$$

(d) Solutions particulières à :
- $x'+x=\cos t$: $\mathcal{R}e(x_1)=\frac{\cos t+\sin t}{2}$
- $x'+x=\sin t$: $\mathcal{I}m(x_1)=\frac{-\cos t+\sin t}{2}$

(e) Solution générale de (E) :
$x=C\mathrm{e}^{-t}+\frac{\cos t+\sin t}{2}+\frac{-\cos t+\sin t}{2}$ où $C\in\mathbb{R}$.
$x=C\mathrm{e}^{-t}+\sin t$ où $C\in\mathbb{R}$.

(f) Résolution du problème de Cauchx :
$$\begin{aligned} x(0)=2 &\iff C+0=2\\ &\iff C=2\end{aligned}$$
Donc la solution au problème de Cauchy est :
$x=2\mathrm{e}^{-t}+\sin t$

Vous avez la méthode et une rédaction (trop) détaillée. . .pour la suite je vous donne les résultats.

2. (a) Solution générale de l'équation homogène associée (H) : $x'=2tx$:
$x_0=C\mathrm{e}^{t^2}$ où $C\in\mathbb{R}$
(b) Solution particulière de (E_2) : (il faut le « voir » à la forme de l'équation)
$x_1=\mathrm{ch}t$
(c) Solution générale de (E) :
$x=C\mathrm{e}^{t^2}+\mathrm{ch}t$ où $C\in\mathbb{R}$.

3. (a) On normalise, c'est possible sur $\mathbb{R}_+^*$:
$x'+\frac{t-1}{t}x=t$
(b) Solution générale de l'équation homogène associée (H) : $x'=-\frac{t-1}{t}x$:
$x_0=Ct\mathrm{e}^{-t}$ où $C\in\mathbb{R}$
(c) Solution particulière de (E_3) :
$x_1=t$
(d) Solution générale de (E) :
$x=Ct\mathrm{e}^{-t}+t$ où $C\in\mathbb{R}$.

Exercice : Équation différentielle linéaire de premier ordre non homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$tx'(t)+x(t)=0(I=\mathbb{R})$$
$$2tx'(t)+x(t)=t^2(I=\mathbb{R})$$
$$(1+t^2)^2x'(t)+2tx(t)=te^{\frac{1}{1+t^2}}$$

Exercice : Varions la constante...

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x' + x = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $x' - \frac{x}{t} = t^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $x' - 2tx = -(2t-1)e^t$ sur $\mathbb{R}$;
5. $x' - \frac{2}{t}x = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Exercice : Raccordement des solutions- tous les cas possibles

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $tx' - 2x = t^3$;
2. $t^2x' - x = 0$;
3. $(1-t)x' - x = t$;
4. $(1+t)x'?x = t^2 + 2t + 2$

Systèmes différentiels linéaires

Exercice : Diagonalisable

Résoudre le système suivant :

$$x'(t) = 5x(t) - 3y(t)$$
$$y'(t) = 6x(t) - 4y(t)$$

Exercice : Triangulaire supérieur

Résoudre le système suivant :

$$x'(t) = x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = y(t)$$

Exercice : Champs magnétique

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} x'' & = & \omega y' \\ y'' & = & -\omega x' \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

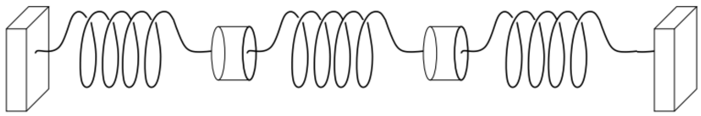
Exercice : Diagonalisable

Donner le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' & = x + 2y - z \\ y' & = 2x + 4y?2z \\ z' & = -x - 2y + z \end{cases}$$

Exercice : Un peu de physique : étude du mouvement d'un système de masses reliées par des ressorts, glissant

Pour simplifier, les ressorts ont même raideur k et les corps même masse m. Notons $x_i(t)$ l'écart par rapport à la position d'équilibre pour le i-ème corps.



Le principe fondamentale s'écrit :

$$mx_1''(t) = -2k.x_1(t) + k.x_2(t)$$
$$mx_2''(t) = k.x_1(t) - 2k.x_2(t)$$

1. Modéliser ce système linéaire sous forme matricielle ;
2. Résoudre le système ;
3. Les physiciens ont compris qu'en général, le mouvement est une superposition de mouvements fondamentaux appelés modes propres. Ce sont les mouvements où tous les corps oscillent à la même fréquence. Déterminer les fréquences propres w du système.

Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

Exercice : Équations du second ordre à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$;
2. $x'' + 9x = t + 1$, $x(0) = 0$;
3. $x'' - 2x' + x = \sin^2 t$;

Exercice : Equation différentielle linéaire de second ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Sur $\mathbb{R}$:
$$E_1 : x'' + 2x' - 3x = 11\mathrm{e}^{2t}$$
2. Sur $[0; \pi[$
$$E_2 : x'' + x = \cos t$$
3. Sur $\mathbb{R}$
$$E_3 : x'' - 2x' + x = \mathrm{ch} t$$
4. Sur $\mathbb{R}$:
$$E_4 : x'' + x' + 2x = 6e^{2t}$$
5. Sur $\mathbb{R}$:
$$E_5 : x'' + 2x' + 5x = \cos t$$
6. Sur $\mathbb{R}$:
$$E_6 : x'' - x = \mathrm{sh}\, t$$

Correction Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (a) Équation différentielle homogène associée : $(H)\, x'' + 2x' - 3x = 0$
polynôme caractéristique associé : $x^2 + 2x - 3 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 16 > 0$
Racines du polynôme : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.

La solution générale de (H) est :

$x_H = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-3t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) Détermination une solution particulière à (E), comme 2 n'est pas racine du polynôme caractéristique on la cherche sous la forme $x_1 = C\mathrm{e}^{2t}$ où $C \in \mathbb{R}$, qui est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$x_1' = 2C\mathrm{e}^{2t}$

$x_1'' = 4C\mathrm{e}^{2t}$

x_1 solution de $(E) \iff x_1'' + 2x_1' - 3x_1 = 11\mathrm{e}^{2x}$

$\iff \ldots$

$\iff C = \frac{11}{5}$

$x_1 = \frac{11}{5}\mathrm{e}^{2t}$ solution de (E).

(c) Solution générale de (E) :

$x = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-3t} + \frac{11}{5}\mathrm{e}^{2t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

2. (a) Équation différentielle homogène associée : $(H)\, x'' + x = 0$

...

La solution générale de (H) est :

$x_H = A\cos t + B\sin t$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) On détermine une solution particulière à $(\tilde{E})x'' + x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et une solution particulière de (E) sera, par linéarité, la partie réelle de la solution trouvée.

Attention, comme i est racine simple du polynôme caractéristique on la cherche sous la forme $x_1 = Ct\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ avec $C \in \mathbb{R}$, qui est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

...

$x_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ solution de $(\tilde{E})$.

...

$x_2 = -\frac{t}{2}\sin t$ solution de (E).

(c) Solution générale de (E) :

$x = A\cos t + B\sin t - \frac{t}{2}\sin t$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

3. (a) Équation différentielle homogène associée : $(H)\, x'' - 2x' + x = 0$

...

La solution générale de (H) est :

$x_H = A\mathrm{e}^t + Bt\mathrm{e}^{-t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) On détermine une solution particulière x_1 à $(E_1)x'' - 2x' + x = \mathrm{e}^t$, puis x_2 à $(E_2)x'' - 2x' + x = \mathrm{e}^{-t}$ et une solution particulière de (E) sera, par superposition, $\frac{x_1+x_2}{2}$.

Attention, comme 1 est racine double du polynôme caractéristique on cherche x_1 sous la forme $x_1 = Ct^2\mathrm{e}^t$ avec $C \in \mathbb{R}$, qui est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

...

$x_1 = \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t$ solution de (E_1).

...

$x_2 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$ solution de (E_2).

...

$x_3 = \frac{1}{4}t^2\mathrm{e}^t + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-t}$ solution de (E_2).

(c) Solution générale de (E) :

$x = A\mathrm{e}^t + Bt\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}t^2\mathrm{e}^t + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice : Changement de variable

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation di ?érentielle :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.

(b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).

(c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

(d) En déduire le "portrait robot" de y.

3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la ?n de l ?analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice : Dissolution

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5min plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?

Exercice : Séparation des variables

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^t e^y = 0$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition.

Exercice : Développement en série entière

Pour les équations différentielles suivantes :

— Chercher les solutions développables en séries entières

— Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode d'abaissement de l'ordre

— Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$:

$$t(t-1)x'' + 3tx' + x = 0.$$