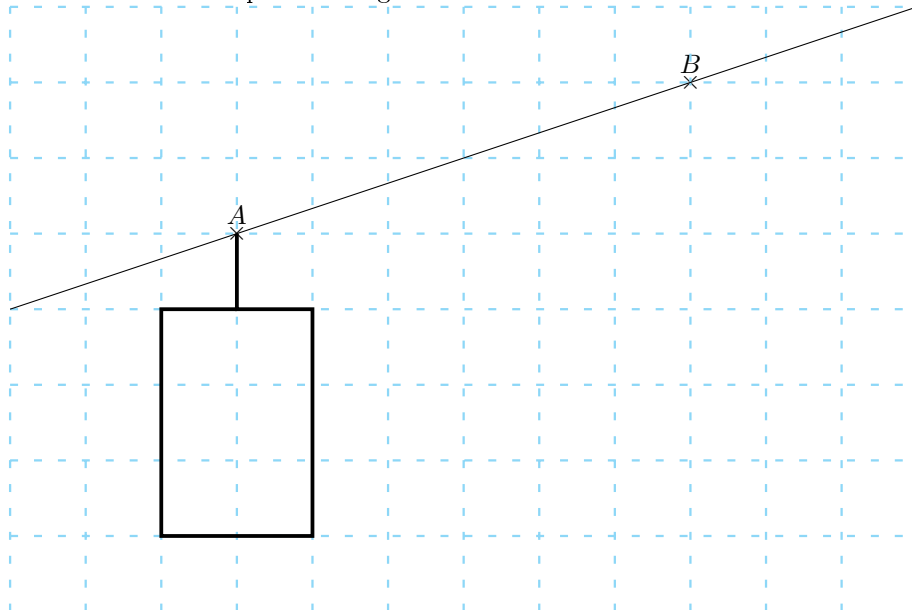


# Vecteurs

## I Translations - Vecteurs associés

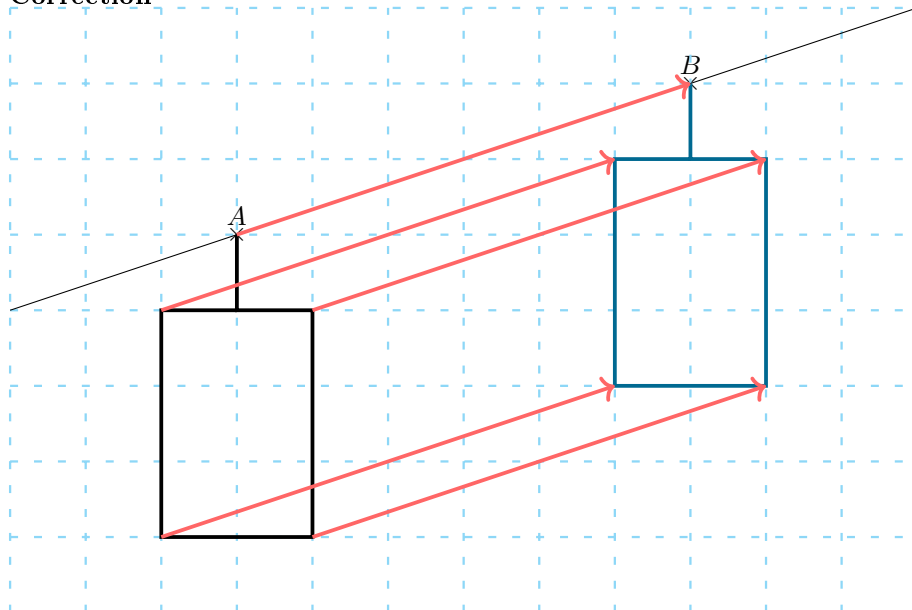
### Activité : Télécabine

Une télécabine se déplace le long d'un câble de A vers B :



Dessiner ci-dessus la télécabine lorsqu'elle sera arrivée au terminus B.  
On appelle ce déplacement une ..... de A vers B.

### Correction

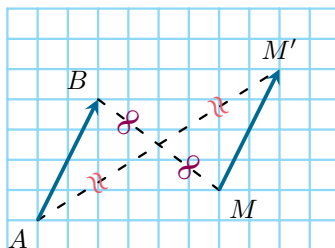


Déplacer une figure par **translation**, c'est faire glisser cette figure sans la faire tourner. Pour décrire ce déplacement, il faut donc donner la **direction**, le **sens** et la **longueur** de ce parcours. Pour cela, on va utiliser un nouvel outil mathématique : **vecteur**. Sur la figure,

### Définition Translation

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan.

On appelle **translation qui transforme  $A$  en  $B$**  la transformation qui, à tout point  $M$  du plan, associe l'unique point  $M'$  tel que  $[AM']$  et  $[BM]$  ont même milieu.



### Vocabulaire

- Le point  $M'$  est appelé **image** du point  $M$ .
- On dit également que  $M$  est le **translaté** de  $M'$ .

### Remarque

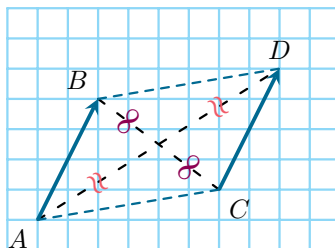
Une **transformation** sert à **modéliser** mathématiquement un mouvement.

- La **symétrie centrale** est la transformation qui modélise le demi-tour.
- La **translation** est la transformation qui modélise le glissement rectiligne. Pour la définir, on indique la direction, le sens et la longueur du mouvement.

### Proposition Parallélogramme

On considère quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

La translation qui transforme  $A$  en  $B$  transforme  $C$  en  $D$ , si et seulement si  $ABDC$  est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).



### Démonstration

C'est la conséquence de la propriété : *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu*.

### Définition Vecteurs associés

À chaque translation est associé un **vecteur**.

Pour  $A$  et  $B$  deux points, le **vecteur**  $\overrightarrow{AB}$  est associé à la translation qui transforme  $A$  en  $B$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est défini par :

1. la **direction** (celle de la droite  $(AB)$ ),
2. le **sens** (de  $A$  vers  $B$ )
3. la **longueur**  $AB$ .

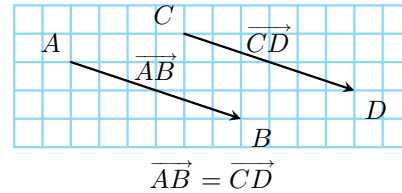
$A$  est l'**origine** du vecteur et  $B$  son **extrémité**.

**Définition Egalité entre vecteurs**

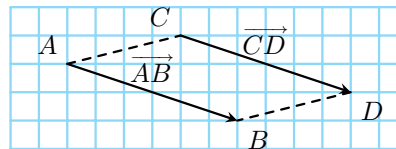
Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits **égaux**.

Deux vecteurs égaux ont :

1. même direction ;
2. même sens ;
3. même longueur.

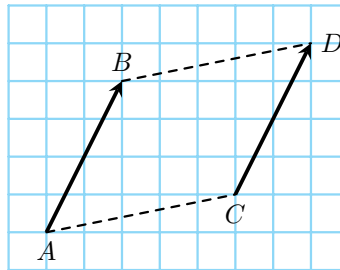
**Propriété Parallélogramme**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati).

**Méthode Construire un vecteur**

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés.

Pour **placer** le point  $D$  tel que  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ , on construit le parallélogramme  $ABDC$ .

**Remarque**

Une translation peut être définie par un point quelconque et son translaté.

Il existe donc une **infinité** de vecteurs associés à une translation. Ils sont tous égaux.

Le vecteur choisi pour définir la translation est un **représentant** de tous ces vecteurs.

La translation **ne dépend pas** du représentant choisi pour la définir. On le note souvent  $\vec{u}$ .

**Définition Vecteur nul**

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point quelconque en lui-même est le **vecteur nul**, noté  $\vec{0}$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots = \vec{0}$

**Définition Vecteur opposé**

Le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  de la translation qui transforme  $B$  en  $A$  est appelé **vecteur opposé** à  $\overrightarrow{AB}$ .

**Remarque**

— Le vecteur opposé à  $\overrightarrow{AB}$  se note  $-\overrightarrow{AB}$  et on a l'égalité  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

— La notation  $\overleftarrow{AB}$  n'existe pas.

## Remarque

Deux vecteurs **opposés** ont même direction, même longueur mais sont de sens contraires.

# II Opérations sur les vecteurs

## A Additions

### Propriété Enchaînement de translations

L'enchaînement de deux translations est également une translation.

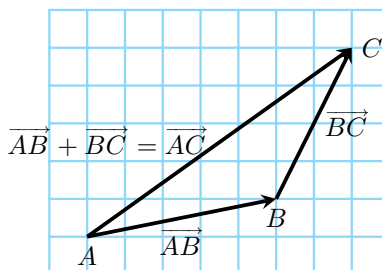
### Définition-Proposition Relation de Chasles

Soit  $A, B, C$  trois points.

L'enchaînement de la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  puis de la translation de vecteur  $\overrightarrow{BC}$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AC}$  et on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

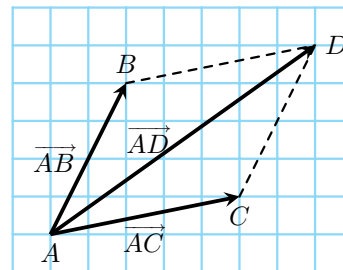
Le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  est le vecteur **somme**.



### Proposition Diagonale du parallélogramme

Soit  $A, B, C, D$  quatre points.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme.



## Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

$$\Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

### Méthode Construire la somme de deux vecteurs

On remplace l'un des deux vecteurs par un représentant :

- soit de même origine afin d'utiliser la règle du parallélogramme ;
- soit d'origine l'extrémité de l'autre afin d'utiliser la relation de Chasles.

**Remarque**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$  si et seulement si  $A$  est le milieu du segment  $[BC]$ .

**B Soustraction****Définition**

**Soustraire un vecteur**, c'est additionner son opposé.

**Exemple**

Soit trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés.

Donner un représentant du vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

On a :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$$

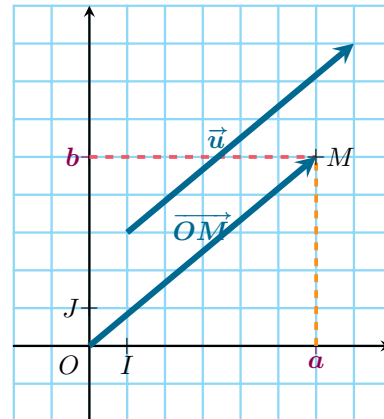
$$\vec{u} = \overrightarrow{CB} \text{ en utilisant la relation de Chasles.}$$

**III Coordonnées d'un vecteur****Définition Coordonnées d'un vecteur**

Dans un repère  $(O; I, J)$ , on considère la translation de vecteur  $\vec{u}$  qui translate l'origine  $O$  en un point  $M$  de coordonnées  $(a; b)$ .

Les **coordonnées du vecteur**  $\vec{u}$  sont les coordonnées du point  $M$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ .

On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

**Proposition Égalité des coordonnées**

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

**Proposition Coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$** 

Dans un repère  $(O; I, J)$ , les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

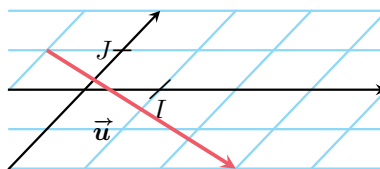
**Démonstration**

Soit  $A$ ,  $B$  et  $M$  de coordonnées respectives  $(x_A; y_A)$ ,  $(x_B; y_B)$  et  $(x_M; y_M)$  dans un repère  $(O; I, J)$  tels que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$  et  $OMBA$  est un parallélogramme.

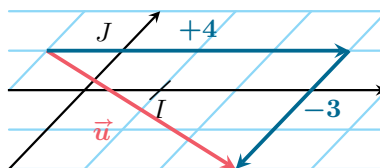
Donc  $[AM]$  et  $[OB]$  ont même milieu. 
$$\begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{x_B + x_O}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

### Méthode Lire les coordonnées d'un vecteur

Lire les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  sur la figure ci-dessous.

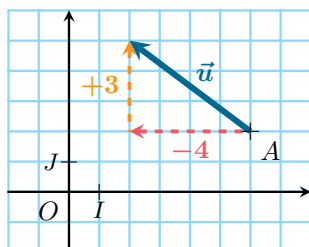


Les coordonnées de  $\vec{u}$  sont  $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  car



### Méthode Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine  $A(6; 2)$  du vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .



On a :

### Méthode Repérer un point défini par une égalité vectorielle

Dans un repère orthogonal  $(O; I, J)$ , on a les points  $A(-2; 3)$ ,  $B(4; -1)$  et  $C(5; 3)$ .

Calculer les coordonnées

1. du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  ;
2. du point  $D$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

On a :

1. Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  soit  $\begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix}$ . Donc  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche  $(x_D; y_D)$ , les coordonnées du point  $D$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Or, « si deux vecteurs sont égaux alors ils ont mêmes coordonnées ».

Donc le couple  $(x_D; y_D)$  est la solution du système :

$$\begin{cases} x_D - x_C = x_B - x_A \\ y_D - y_C = y_B - y_A \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_D - 5 = 6 \\ y_D - 3 = -4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_D = 6 + 5 = 11 \\ y_D = -4 + 3 = -1 \end{cases}$$

Les coordonnées du point  $D$  sont  $(11; -1)$ .

### Proposition Somme de deux vecteurs

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors les coordonnées du **vecteur**

**somme**,  $\vec{u} + \vec{v}$ , sont  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .

**Méthode Repérer un point défini par une somme vectorielle**

Dans un repère orthogonal  $(O; I, J)$ , on place les points  $A(2; 3)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(5; 3)$  et  $D(-2; -1)$ . Quelles sont les coordonnées du point  $E$  tel que  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$  ?

On cherche les coordonnées  $(x_E; y_E)$  du point  $E$  tel que  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

Donc le couple  $(x_E; y_E)$  est solution du système :

$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_E - 2 = (-2 - 2) + (4 - 5) \\ y_E - 3 = (-1 - 3) + (-1 - 3) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_E = -5 + 2 = -3 \\ y_E = -8 + 3 = -5 \end{cases}$$

Les coordonnées du point  $E$  sont  $(-3; -5)$ .

**IV Multiplication par un réel****Définition**

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $(x; y)$  et  $\lambda$  un réel.

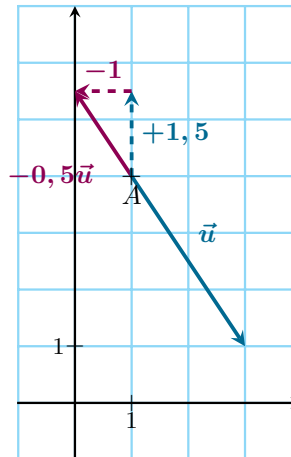
La **multiplication de  $\vec{u}$  par  $\lambda$**  est le vecteur  $\lambda\vec{u}$  de coordonnées  $(\lambda x; \lambda y)$ .

**Méthode Repérer le produit d'un vecteur par un réel**

Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine  $A(1; 4)$  du vecteur  $-0,5\vec{u}$  avec  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

On a :

$\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Donc  $-0,5\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} -0,5 \times 2 \\ -0,5 \times (-3) \end{pmatrix}$  soit  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ .

**Proposition Sens en fonction du signe de  $\lambda$** 

Soient deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  et  $\lambda$  un réel tels que  $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$ .

- si  $\lambda > 0$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont de même sens.
- si  $\lambda < 0$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont de sens contraires.

**Remarque**

$\vec{u}$  et  $\lambda\vec{u}$  ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de  $\lambda$ .

**V Colinéarité****Définition Colinéaire**

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si leurs coordonnées dans un même repère sont proportionnelles.

## Remarque

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur  $\vec{u}$ .

### Proposition

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls sont colinéaires lorsqu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ .

### Méthode Vérifier la colinéarité de deux vecteurs

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires, il suffit de :

**possibilité 1** trouver un réel  $\lambda$  non nul tel que  $x' = \lambda x$  et  $y' = \lambda y$  ;

**possibilité 2** vérifier que les produits en croix,  $xy'$  et  $x'y$ , sont égaux.

Soit  $(O; I, J)$  un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$ .
2.  $\vec{w} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{z} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$ .

On a :

1.  $-6 = -3 \times 2$  et  $-18 = -3 \times 6$  donc  $\vec{v} = -3\vec{u}$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc colinéaires.
2.  $-5 \times (-7) = 35$  et  $3 \times 12 = 36$ . Les produits en croix ne sont pas égaux. Donc  $\vec{w}$  et  $\vec{z}$  ne sont pas colinéaires.

### Proposition Caractérisation vectorielle des droites parallèles

- Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires ;
- Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont **alignés** si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

## Exemple

Les points  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 1)$  et  $C(5; 3)$  sont-ils alignés ?

On calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  puis les produits en croix :

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (3 - 1)(3 - 2) = 2 \times 1 = 2.$$

et ainsi :

$$(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (1 - 2)(5 - 1) = -1 \times 4 = -4.$$

Les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas proportionnelles. Donc  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ne sont pas alignés.