

# Story No. 1 Réduction des endomorphismes/matrices carrés

La réduction d'endomorphisme a pour objectif d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple, par exemple pour faciliter les calculs. Réduire un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , cela correspond à trouver une base de l'espace dans laquelle l'endomorphisme s'exprime simplement. C'est à dire c'est décomposer l'espace  $E$  comme somme directe de sous-espaces stables par  $u$ ,  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$  où les  $E_i$  sont stables par  $u$ . On peut donc définir les endomorphismes  $u|_{E_i}$  induits par  $u$  sur  $E_i$ , soit :

$$u|_{E_i} \begin{cases} E_i \longrightarrow E_i \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}.$$

Comme tout vecteur  $\vec{x} \in E$  se décompose de façon unique sous la forme  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$ , on a :

$$u(\vec{x}) = u|_{E_1}(\vec{x}_1) + \dots + u|_{E_n}(\vec{x}_n).$$

Ainsi, l'étude de  $u$  se ramène à l'étude des endomorphismes  $u|_{E_i}$ . L'idée directrice est que les  $u_i$  sont plus **simples** que  $u$  car définis sur des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

En dimension finie, avec une base adaptée à la décomposition en somme directe, soit  $\mathcal{B}_1$  base de  $E_1, \dots, \mathcal{B}_n$  base de  $E_n$ , la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$  est :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [u|_{E_1}]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [u|_{E_2}]_{\mathcal{B}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [u|_{E_n}]_{\mathcal{B}_n} \end{pmatrix}$$

où 0 est la matrice nulle.

Dans le cas favorable, les  $u_i$  sont des homothéties, c'est à dire  $u|_{E_i} = \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ .

$$u(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$$

Dans ce cas, la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \text{Id}_{\dim(E_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \text{Id}_{\dim(E_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \text{Id}_{\dim(E_n)} \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_i \text{Id}_{\dim(E_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ .  $[u]_{\mathcal{B}}$  est donc une matrice diagonale. On dit que l'endomorphisme  $u$

est **diagonalisable**. Dans le cadre du programme, l'essentiel du cours de réduction se limite à l'aspect de diagonalisation. Les méthodes de réduction sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

Par exemple, soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$  ( $E = E_1 \oplus E_2$ ).

Le projecteur  $p$  (ou la projection) sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  est défini par :

$$p \begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \longmapsto \vec{x}_1 \end{cases}$$

*Nature géométrique* : pour tout  $x \in E_1$  :  $p(\vec{x}) = 1.\vec{x}$  donc  $p|_{E_1} = 1\text{Id}_{E_1}$  et pour tout  $x \in E_2$  :  $p(\vec{x}) = 0.\vec{x}$  donc  $p|_{E_2} = 0\text{Id}_{E_2}$ . La matrice de  $p$  dans une base adaptée à  $E_1 \oplus E_2$  s'écrit :

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1.\text{I}_r & 0 \\ 0 & 0.\text{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

*Nature algébrique* : On a  $p^2 = p$ , d'où  $p^2 - p = 0$  et enfin  $(p - 1.\text{Id}_E)(p - 0.\text{Id}_E) = 0$ . Le polynôme  $Q = (X - 1)(X - 0)$  est un polynôme annulateur de l'endomorphisme  $p$  car  $Q(p) = 0$ . Comme  $Q$  est scindé simple, on démontrera que de nouveau  $p$  est diagonalisable dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à  $E_1 \oplus E_2$ .

*Notations*

- $\mathbb{K}$  désigne un corps (ici  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) ;
- $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ;
- $\mathcal{L}(E)$  désigne l'ensemble des endomorphismes de  $E$ , c'est à dire l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$ .

## I Stabilité

### A D'un sous espace vectoriel : $u(F) \subset F$

#### Définition : Stable

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit qu'un sous-espace  $F$  de  $E$  est **stable** par  $u$  si  $u(F) \subset F$ , c'est à dire :

$$\forall \vec{x} \in F, \quad u(\vec{x}) \in F.$$

On peut alors définir un endomorphisme  $u|_F \in \mathcal{L}(F)$  en posant  $u|_F(\vec{x}) = u(\vec{x})$  pour tout  $x \in F$ .  $u|_F$  s'appelle l'**endomorphisme induit** par  $u$  sur  $F$ .

#### Exemple : Dérivée

Soit  $\phi : f \mapsto f'$ . L'espace vectoriel des fonctions  $C^\infty$  est stable par  $\phi$ .

#### Proposition

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  dont les premiers vecteurs,  $\mathcal{B}'$ , forment une base de  $F$ . Alors la matrice de  $u$  dans cette base a la forme

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

si et seulement si  $F$  est stable par  $u$ . Dans ce cas  $A = [u|_F]_{\mathcal{B}'}$ .

#### Proposition : Diagonalisation par blocs

Soit  $E_1 \oplus E_2 = E$  de dimension finie avec  $E_1$  et  $E_2$  stables par  $u$ . Alors la matrice de  $u$  dans une base adaptée  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  à la décomposition  $E_1 \oplus E_2 = E$  a la forme diagonale par blocs

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$A = [u|_{E_1}]_{\mathcal{B}_1}$  et  $B = [u|_{E_2}]_{\mathcal{B}_2}$ .

#### Définition : Stable

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ . On dit qu'un sous-espace  $F$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est stable par  $M$  si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad MX \in F.$$

Dans ce cas,  $M$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  avec une matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à  $F$ .

#### Proposition : Diagonalisation par blocs

Soit  $E_1 \oplus E_2 = \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  avec  $E_1$  et  $E_2$  stables par  $M$ . Alors la matrice de  $M$  est semblable à la matrice diagonale par blocs, c'est à dire que

$$M = P \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec  $P$  la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ .

### Exemple : Matrice orthogonale

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit  $E_1 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$  et  $E_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

Pour la stabilité, on vérifie que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1$$

et

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1.$$

De plus, on a  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$ .

$A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et la matrice de passage est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### B D'une droite vectoriel : $u(\mathbb{K}\vec{x}) \subset \mathbb{K}\vec{x}$ (vecteurs propres et valeurs propres : $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ )

#### Proposition : Caractérisation

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\vec{x} \in E$ .

$\mathbb{K}\vec{x}$  est stable par  $u$  si et seulement si il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  tel que  $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .

#### Proposition : Caractérisation

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

$\mathbb{K}X$  est stable par  $M$  si et seulement si il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  tel que  $MX = \lambda X$ .

#### Définition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  si il existe  $\vec{x} \neq \vec{0}_E$  tel que  $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .
- On dit que  $\vec{x} \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si  $\vec{x} \neq \vec{0}_E$  et  $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .
- On appelle **spectre** de  $u$ , noté  $\text{Sp}(u)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .
- On appelle **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ .

### Exemple

Soit  $\Psi \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto XP' \end{cases}$ . On a  $\Psi(X^i) = i \times X^i$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .  $X^i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $i$ .

### Exemple

Soit  $\phi : f \mapsto f'$ . On a  $\text{Sp}(\phi) = \mathbb{R}$ . En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto e^{\lambda x}$  est vecteur propre

$$\phi(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}.$$

### Définition

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ .

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $M$  si il existe  $X \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$  tel que  $MX = \lambda X$ .
- On dit que  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est un **vecteur propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si  $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$  et  $MX = \lambda X$ .
- On appelle **spectre** de  $M$ , noté  $\text{Sp}(M)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $M$ .
- On appelle **sous-espace propre** de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$ .

### Exemple

La matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  représente la symétrie par rapport à la première bissectrice, soit la symétrie par rapport à  $E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  parallèlement à  $E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On a  $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (tout vecteur appartenant à la première bissectrice est invariant par  $M$ ) et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $-1$  (tout vecteur orthogonal à la première bissectrice est transformé en son opposé par  $M$ ).

### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \text{Sp}u$ .

Alors l'ensemble des vecteurs propres de  $u$  associés à la valeur propre  $\lambda$  est  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \setminus \{\vec{0}_E\}$ .

### Proposition

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  et  $\lambda \in \text{Sp}M$ .

Alors l'ensemble des vecteurs propres de  $M$  associés à la valeur propre  $\lambda$  est  $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ .

### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \text{Sp}u$ ;
- $\exists \vec{x} \neq \vec{0}_E$  tel que  $(u - \lambda \text{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E$ ;
- $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}_E\}$ ;
- $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injective
- $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas bijective (uniquement en dimension finie).

### Proposition

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \text{Sp}M$ ;
- $\exists X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$  tel que  $(M - \lambda I_n)X = 0$ ;
- $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$ ;
- $(M - \lambda I_n)$  n'est pas inversible.

**Proposition**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $E_\lambda$  le sous-espace propre correspondant.

Alors  $E_\lambda$  est stable par  $u$ .

De plus, l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_\lambda$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ . Autrement dit,  $u|_{E_\lambda} = \lambda \text{Id}_{E_\lambda}$ .

De plus, en dimension finie, la matrice de  $u$  dans une base adaptée à  $E_\lambda$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

**Proposition : Diagonalisation**

Soit  $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$  de dimension finie avec  $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2} \dots$  et  $E_{\lambda_p}$  des espaces propres de  $u$ . Alors la matrice de  $u$  dans une base adaptée à  $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p}$  est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \text{Id}_{\dim(E_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \text{Id}_{\dim(E_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \text{Id}_{\dim(E_p)} \end{pmatrix}.$$

**Proposition**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $M$  et  $E_\lambda$  le sous-espace propre correspondant.

Alors  $E_\lambda$  est stable par  $M$ .

De plus,  $M$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \text{Id}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , c'est à dire que :

$$M = P \begin{pmatrix} \text{Id}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec  $P$  la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à  $E_\lambda$ .

**Proposition : Diagonalisation**

Soit  $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p} = \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  avec  $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2} \dots$  et  $E_{\lambda_p}$  des espaces propres de  $M$ . Alors la matrice de  $M$  est semblable à la matrice diagonale, c'est à dire que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \text{Id}_{\dim(E_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \text{Id}_{\dim(E_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \text{Id}_{\dim(E_p)} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec  $P$  la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à  $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ .

**Théorème**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Les sous-espaces propres de  $u$  sont en somme directe.

Autrement dit, si  $(\vec{x}_i)_{i \in I}$  est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille  $(\vec{x}_i)_{i \in I}$  est libre.

**Théorème**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ .

Les sous-espaces propres de  $M$  sont en somme directe.

Autrement dit, si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille  $(X_i)_{i \in I}$  est libre.

## II Polynômes d'endomorphismes

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, on supposera que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie.

### A Polynôme caractéristique

#### Lemme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

L'application de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  définie par  $\lambda \mapsto \det(\lambda \text{Id}_E - u)$  est une fonction polynomiale en la variable  $\lambda$ .

#### Lemme

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ .

L'application de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  définie par  $\lambda \mapsto \det(\lambda \text{I}_n - M)$  est une fonction polynomiale en la variable  $\lambda$ .

#### Lemme

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  deux matrices semblables.

Alors  $\det(\lambda \text{I}_n - A) = \det(\lambda \text{I}_n - B)$

#### Définition : Polynôme caractéristique

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **polynôme caractéristique** de  $u$  et on note  $\chi_u$  l'unique polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  tel que  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - u)$ .

#### Exemple

On définit l'application  $\phi$  par :

$$\phi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P - P' \end{array} \right.$$

La matrice de l'endomorphisme de  $\phi$  dans la base canonique,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  est :

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } \phi(X^i) = X^i - iX^{i-1}.$$

$$\text{Donc } \chi_{\phi}(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - \phi) = \det(\lambda \text{I}_3 - [\phi]_{\mathcal{B}}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3.$$

#### Définition : Polynôme caractéristique

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ . On appelle **polynôme caractéristique** de  $M$  et on note  $\chi_M$  l'unique polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  tel que  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_M(\lambda) = \det(\lambda \text{I}_n - M)$ .

#### Exemple

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \chi_M(\lambda) = \det(\lambda \text{I}_2 - M) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

#### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Le spectre de  $u$  est exactement l'ensemble des racines de  $\chi_u$ , c'est à dire  $\text{Sp}(u) = \text{Racines}(\chi_u)$ .

**Exemple**

On a  $\text{Sp}(\phi) = \{1\}$ .

**Proposition**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ .

Le spectre de  $M$  est exactement l'ensemble des racines de  $\chi_M$ , c'est à dire  $\text{Sp}(M) = \text{Racines}(\chi_M)$ .

**Exemple**

Avec  $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ , on a  $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$ .

**Théorème**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  $n = \dim E$ .

Alors :

- $\chi_u$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  ;
- le coefficient en  $X^{n-1}$  de  $\chi_u$  vaut  $-\text{tr } u$  ;
- le coefficient constant de  $\chi_u$  vaut  $(-1)^n \det u$ .

En résumé,  $\chi_u(X) = X^n - \text{tr } u X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$ .

**Corollaire**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $\chi_u$  est scindé ;  $\chi_u$  peut alors s'écrire sous la forme  $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ .  
On a  $\text{tr } u = \sum_{k=1}^n \lambda_k$  et  $\det u = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ .

**Théorème**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ .

Alors :

- $\chi_M$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  ;
- le coefficient en  $X^{n-1}$  de  $\chi_M$  vaut  $-\text{tr } M$  ;
- le coefficient constant de  $\chi_M$  vaut  $(-1)^n \det M$ .

En résumé,  $\chi_M(X) = X^n - \text{tr } M X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det M$ .

**Corollaire**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ . On suppose que  $\chi_M$  est scindé ;  $\chi_M$  peut alors s'écrire sous la forme  $\chi_M(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ . On a  $\text{tr } M = \sum_{k=1}^n \lambda_k$  et  $\det M = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ .

**Exemple**

Soit  $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ . Comme  $\text{tr } M = 3$  et  $\det_B M = 2$  On a  $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr } M X + \det M = \lambda^2 - 3X + 2$ .

**Proposition**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ , et  $u|_F$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ , alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

**Démonstration :** La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_S)$  de  $E$  où  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$  est de la forme :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } A = [u|_F]_{\mathcal{B}_F}.$$

$$\chi_u = \det(XI_n - [u]_{\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} XI_r - A & -B \\ 0 & XI_{n-r} - C \end{vmatrix} = \det(XI_r - A) \det(XI_{n-r} - C) = \chi_{u|_F} \det(XI_{n-r} - C).$$

Donc  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ . ■

### Proposition

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}()$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $M$ , et  $u|_F$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ , alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels  $u$ -stables tels que  $E = F \oplus G$ ,  $u|_F$  et  $u|_G$  les endomorphismes induits par  $u$  sur  $F$  et  $G$  respectivement.

Alors  $\chi_u = \chi_{u|_F} \chi_{u|_G}$ .

### Définition : Multiplicité

On appelle **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $\chi_u$  ou de  $\chi_M$ .

### Exemple

Pour l'application  $\phi \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P - P' \end{cases}$ , comme  $\chi_\phi(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ , 1 est de multiplicité 3.

### Théorème

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  ou de  $M$ .

Alors

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

où

- $E_\lambda$  est le sous-espace propre de  $u$  ou de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ ;
- $m_\lambda$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda$ .

**Démonstration :** Soit  $n$  la dimension de  $E$ . Comme  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ ,  $E_\lambda$  contient un vecteur non nul, donc sa dimension  $\dim E_\lambda \geq 1$ . De plus  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $\dim E_\lambda \leq n$ . On a :

1. Si  $\dim E_\lambda = n$ , alors  $u$  est égal à l'homothétie  $\lambda \text{Id}_E$ , dont le polynôme caractéristique est égal à  $(X - \lambda)^n$ . et on a bien  $m_\lambda = n$ .
2. Si  $\dim E_\lambda \leq n$ , alors soit  $\mathcal{B}$  une base adaptée à  $E_\lambda$ . La matrice  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \text{Id}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ . On obtient alors  $\chi_u = (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda)} \chi_C$  ce qui prouve  $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$  car  $(X - \lambda)^{\dim(E_\lambda)}$  divise  $\chi_u$ . ■

### Remarque

Si  $\lambda$  est de multiplicité 1 (racine simple) alors  $\dim E_\lambda = 1$ .

## B Polynôme annulateur

### Définition : Polynôme annulateur

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit **polynôme annulateur de  $u$**  s'il est non nul et si  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}()$ .

Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit **polynôme annulateur de  $M$**  s'il est non nul et si  $P(M) = 0$ .



**Exemple**

Soit  $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ . On a  $(M - 2I_2)(M - I_2) = 0$ , donc  $P = (X - 2)(X - 1)$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

**Lemme**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\vec{x} \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On suppose que  $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .  
Alors  $P(u)(\vec{x}) = P(\lambda)\vec{x}$ .

**Lemme**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ ,  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On suppose que  $MX = \lambda X$ .  
Alors  $P(M)(X) = P(\lambda)X$ .

**Théorème**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P$  un polynôme annulateur de  $u$ .  
Alors toutes les valeurs propres de  $u$  sont des racines de  $P$ , c'est à dire  $\text{Sp}(u) \subset \text{Racines}(P)$ .

**Théorème**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  et  $P$  un polynôme annulateur de  $M$ . Alors toutes les valeurs propres de  $M$  sont des racines de  $P$ , c'est à dire  $\text{Sp}(M) \subset \text{Racines}(P)$ .

**Exemple**

Soit  $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ . On a  $(M - 2I_2)(M - I_2) = 0$ , donc 2 et 1 sont les uniques valeurs propres possibles. On vérifie que le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de 1 et que le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de 2.

**Théorème : Cayley-Hamilton**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors le polynôme caractéristique de  $u$  est un polynôme annulateur de  $u$ .  
Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$ .  
Alors le polynôme caractéristique de  $M$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

**III Endomorphismes diagonalisables****Définition : Diagonalisable**

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **diagonalisable** si et seulement si il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{B}}$  est diagonale.
- Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  est dite **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

**Proposition**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .  
Alors  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $[u]_{\mathcal{B}}$  est diagonalisable.

**Définition : Scindé simple**

On dira que  $P \in \mathbb{K}[X]$  est **scindé simple** s'il est scindé et que toutes ses racines sont simples.

**Théorème**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , on note  $m_\lambda$  sa multiplicité et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  est diagonalisable, c'est à dire il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{B}}$  est diagonale ;
2.  $u$  admet un polynôme annulateur scindé et  $\forall \lambda \in \text{Sp}u$ ,  $\dim E_\lambda = m_\lambda$  ;
3.  $\chi_u$  est scindé et  $\forall \lambda \in \text{Sp}u$ ,  $\dim E_\lambda = m_\lambda$  ;
4.  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}u} \dim E_\lambda = \dim E$  ;
5.  $E$  est somme directe des espaces propres de  $u$ , c'est à dire  $E = \oplus_{\lambda \in \text{Sp}u} E_\lambda$  ;
6. Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$  ;
7. Le polynôme scindé simple  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)$  annule  $u$  ;
8.  $u$  admet un polynôme annulateur scindé simple.

**Corollaire**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Si  $\chi_u$  est un polynôme scindé simple, alors  $u$  est diagonalisable. La réciproque est fausse (contre-exemple :  $u = \text{Id}_E$ ).
2. Si  $u$  est diagonalisable et que  $F$  est stable par  $u$ , alors l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est également diagonalisable.
3. Si  $E = \oplus_{k=1}^p F_k$  et que pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $u|_{F_k}$  est une homothétie, alors  $u$  est diagonalisable. Pour la réciproque, cf. 2. du théorème précédent.

**Théorème**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}()$ .

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $M$ , on note  $m_\lambda$  sa multiplicité et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  est diagonalisable, c'est à dire  $M$  est semblable à une matrice diagonale ;
2.  $M$  admet un polynôme annulateur scindé et  $\forall \lambda \in \text{Sp}M$ ,  $\dim E_\lambda = m_\lambda$  ;
3.  $\chi_M$  est scindé et  $\forall \lambda \in \text{Sp}M$ ,  $\dim E_\lambda = m_\lambda$  ;
4.  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}M} \dim E_\lambda = \dim E$  ;
5.  $E$  est somme directe des espaces propres de  $M$ , c'est à dire  $E = \oplus_{\lambda \in \text{Sp}M} E_\lambda$  ;
6. Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  formée de vecteurs propres de  $M$  ;
7. Le polynôme scindé simple  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}M} (X - \lambda)$  annule  $M$  ;
8.  $M$  admet un polynôme annulateur scindé simple.

**Corollaire**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}()$ . Si  $\chi_M$  est un polynôme scindé simple, alors  $M$  est diagonalisable.

Une méthode pour diagonaliser une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}()$  :

- on calcule le polynôme caractéristique  $\chi_A$  ;
- on factorise  $\chi_A$  : s'il n'est pas scindé, c'est que  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{K}$  ;
- pour chaque racine  $\lambda$ , on détermine une base du sous-espace propre  $E_\lambda$  en résolvant le système linéaire  $AX = \lambda X$ . Si on trouve strictement moins de  $m_\lambda$  vecteurs libres, c'est que  $A$  n'est pas diagonalisable ;
- soit  $P$  la matrice carrée dont les colonnes sont les  $n$  vecteurs propres trouvés. Soit  $D$  la matrice diagonale formée des valeurs propres correspondantes. On a alors  $A = PDP^{-1}$  et  $D = P^{-1}AP$ .

Des applications :

- calcul des puissances d'une matrice  $A$ ;
- système de suites linéaires récurrences à coefficients constants;
- systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

## IV Endomorphismes trigonalisables

### Définition : Trigonalisable

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **trigonalisable** si et seulement si il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{B}}$  est triangulaire supérieure.
- Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}()$  est dite **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Alors  $u$  est trigonalisable si et seulement si  $[u]_{\mathcal{B}}$  est trigonalisable.

### Théorème

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  est trigonalisable, c'est à dire il existe  $\mathcal{B}$  base de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{B}}$  est triangulaire supérieure ;
2.  $\chi_u$  est scindé ;
3.  $u$  admet un polynôme annulateur scindé.

### Corollaire

1. Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
2. Toute matrice carrée est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n\mathbb{C}$ .