Exercice

Domaine de définition] Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ, appelé fonction de Rienman et de la fonction μ.

Exercice

Convergence uniforme] Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^{-nx} \end{array} \right. , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence de cette suite de fonctions.

Exercice

Vrai/Faux] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et le prouver :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice

Étude de convergence simple et uniforme détaillée] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
3. Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$.
4. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice

Convergence uniforme sur un intervalle plus petit...] On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0, 1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. Soit $a \in]0, 1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$, démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Exercice

Avec paramètre] Soit $a \geqslant 0$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice

Convergence uniforme et fonctions bornées] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *bornées*, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

Exercice

Convergence simple et fonctions décroissantes] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0,1]$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice

Exemples et contre-exemples] Pour $x \geqslant 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A>0$.
3. Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geqslant \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A>0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice

Série alternée] On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1,+\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice

Convergence normale] Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
Démontrer que la fonction $zeta$ converge normalement sur tout intervalle $[a,\infty[$ avec $a>1$.
En déduire la continuité de la fonction ζ sur $]1,\infty[$.
Donner la limite $\lim\limits_{x\to\infty} \zeta(x)$.

Exercice

Equivalent Série-Intégrale] On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n>0$, $f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \end{array} \right.$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Donner un équivalent de 0 de f.

Exercice

Convergence suite de fonctions] On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n>0$, $f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x)^n \end{array} \right.$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

2. Démontrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice

Convergence suite de fonctions] On considère la suite de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n > 1$, $f_n \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n} \end{array} \right.$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+}$.

Exercice

Espérance et variance de loi géométrique] Soit X, une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, $\mathcal{G}(p)$,c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

1. Calculer l'espérance de X
2. Calculer la variance de X

Exercice

Devoir Maison] CCP mp 2017 sujet 1 mathématique. Le problème est sur le série trigonométrique.