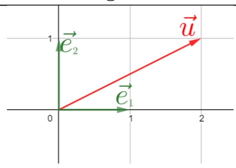
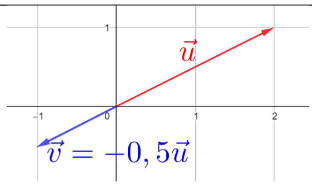
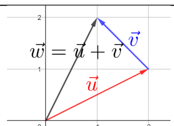
Chapitre 1

Espace vectoriel E

Exemple 1 ($\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$)

Tout d'abord, commençons par les vecteurs du plan :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e}_1 + 1\overrightarrow{e}_2$
Multiplication par un scalaire		$\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = -0.5.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{v} = -0.5.\overrightarrow{u}$
Addition		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Du fait de l'équivalence entre ces trois représentations, géométrique, numérique et algébrique, tout ce qui est vrai ou faux pour l'un l'est aussi pour l'autre [1]. Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel pour bien comprendre l'algèbre linéaire.

1. Il y a des limites à cette équivalence. La représentation géométrique est uniquement pertinente dans le plan et l'espace. La représentation numérique est limitée aux espaces vectoriels de dimension finie.

Exemple 2 (*Exemples d'ensembles de vecteurs : $E = \{\overrightarrow{x}\}$*)

Il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer une addition et une homothétie soit une combinaison linéaire, par exemples :

- l'ensemble des n-uplets réels : $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $E = \mathbb{R}^n$ et , où chaque x_i est un réel,
- l'ensemble des matrices carrés réels : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque $a_{i,j}$ est un un réel,
- l'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaire d'ordre 1 homogène : $\overrightarrow{x} = f$ une fonction $\mathcal{C}^1$ tel que $f' + a_0 f = 0$ et $E = \{f \in C_1 : f' + a_0 f = 0\}$,

— l'ensemble des polynômes réels : $\overrightarrow{x} = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ et $E = \mathbb{R}[X]$,
— l'ensemble des suites réels : $\overrightarrow{x} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
— etc.

Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique abstraite constituée de propriétés partagés par tous les ensembles : cette structure s'appelle **l'espace vectoriel** et permet d'effectuer des combinaisons linéaires,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers.

1.1 Structure algébrique

Définition 1 (*Loi de composition interne :* $\overrightarrow{x} \triangle \overrightarrow{y}$)

Soit A un ensemble. Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{ccc} A\times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & x\triangle y \end{array} \right. .$$

Définition 2 (*Propriétés*)

On dit que $\triangle$

1. est **associative** : si $\in (x,y,z)\in A^3$, $x\triangle(y\triangle z) = (x\triangle y)\triangle z$. On ne considèrera que des loi associatives.
2. est **commutative** : si $\forall(x,y)\in A^2$, $x\triangle y = y\triangle x$;
3. admet **un élément neutre** si $\exists e\in A$ tel que $\forall x\in A$, $x\triangle e = e\triangle x = x$. Il existe au plus un élément e vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le neutre** de la loi $\triangle$.
4. est **symétrique** (ou **inverse** si loi est $\times$, ou **opposé** si la loi est $+$) Si $\triangle$ est une loi associative qui admet un neutre e, et si $x\in A$, on appelle de x pour la loi $\triangle$ tout élément $x'\in A$ tel que $x\triangle x' = x'\triangle x = e$. Si $\triangle$ est également associative, il existe au plus un élément x' vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le** symétrique de x pour la loi $\triangle$.

Définition 3 (*Groupe*)

Un **groupe** est un couple $(G,\triangle)$ où G est un ensemble et $\triangle$ une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\triangle$. Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi $\triangle$ est de plus commutative.

Exemple 3 (*Le Groupe* $(\mathbb{R}^n,+)$)

La loi d'addition sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n), \overrightarrow{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)) & \longmapsto & \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \end{array} \right. .$$

— **associative** : Soit $\overrightarrow{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\overrightarrow{z} = (z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+(\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+((y_1,y_2,\ldots,y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n))\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\ldots,x_n+y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n)\\ &= ((x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n))+(z_1,z_2,\ldots,z_n)\\ &= (\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})+\overrightarrow{z}\end{aligned}$$

— **commutative** : Soit $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\overrightarrow{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,\ldots,y_n+x_n)\\ &= \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

— **élément neutre** : Soit $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $\overrightarrow{0}=(0,0,\ldots,0)$ est l'élément neutre
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+\overrightarrow{0} &= (x_1+0,x_2+0,\ldots,x_n+0)\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ &= \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

— **symétrique** : Soit $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $-\overrightarrow{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ est l'opposé de $\overrightarrow{x}$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+(-\overrightarrow{x}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\\ &= (x_1-x_1,x_2-x_2,\ldots,x_n-x_n)\\ &= (0,0,\ldots,0)\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{R}^n,+)$ est un groupe commutatif.

Définition 4 (*Loi de composition externe :* $\lambda.\overrightarrow{x}$)

Soit $\mathbb{K}$ et A deux ensembles. Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de $\mathbb{K}$ et un élément de A, associe un élément de A :

$$.\left|\begin{array}{rcl} A\times A & \longrightarrow & A\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}\right.$$

Exemple 4 (($\mathbb{R}^n$, .))

La loi de multiplication sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$.\left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ (\lambda,\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)) & \longmapsto & \lambda.\overrightarrow{x}=(\lambda.x_1,\lambda.x_2,\ldots,\lambda.x_n)\end{array}\right..$$

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $2.(1,-2)=(2,-4)$.

Définition 5 (*Corps* $\mathbb{K}$ *:* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$)

Dans ce cours, un corps $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 6 (*Espace vectoriel :* $\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}$)

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un triplet $(E,+,.)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une loi de composition externe sur E, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi . est compatible avec la structure de groupe $(E,+)$, i.e.
   (a) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall\overrightarrow{x}\in E$, $(\lambda+\mu).\overrightarrow{x}=(\lambda.\overrightarrow{x})+(\mu.\overrightarrow{x})$;
   (b) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in E^2$, $\lambda.(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})=(\lambda.\overrightarrow{x})+(\lambda.\overrightarrow{y})$;
   (c) $\forall\overrightarrow{x}\in E$, $1_{\mathbb{K}}.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}$;
   (d) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall\overrightarrow{x}\in E$, $\lambda.(\mu.\overrightarrow{x})=(\lambda\mu).\overrightarrow{x}$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un vecteur et est noté dans ce cours avec une flèche $\overrightarrow{x}$. Un élément du corps $\mathbb{K}$ est un scalaire et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ.

Exemple 5

- les n-uplets $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles,
- les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,
- si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X,E)$ muni des lois usuelles.

1.2 Construire des espaces vectoriels

1.2.1 Sous-espace vectoriel : $F\subset E$ et F e.v.

Définition

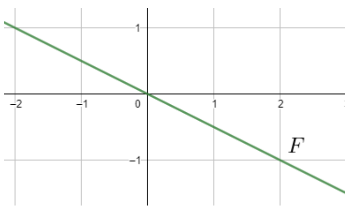
Définition-Proposition 1 (*Sous espace vectoriel*)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si

- F est non vide,
- F est stable par $+$, i.e. $\forall\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in F$, $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\in F$,
- F est stable par . , i.e. $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\overrightarrow{x}\in F$, $\lambda.\overrightarrow{x}\in F$.

Muni des lois induites, F est alors un espace vectoriel.

Exemple 6

$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+2y=0\}$ 

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

- *non vide :*

$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ car $0+2.0=0$.

— *stable par + :*
Soit $\overrightarrow{x}_1=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{x}_2=(x_2,y_2) \in F$ d'où $x_1+2y_1=0$ et $x_2+2y_2=0$.
Montrons que $\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2) \in F$.
i.e. montrons que $(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)=0$.
On a :

$$(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)=x_1+2y_1+x_2+2y_2=0+0=0.$$

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x}=(x,y) \in F$ d'où $x_1+2y_1=0$ et $x_2+2y_2=0$.
Montrons que $\lambda\overrightarrow{x}=(\lambda x,\lambda y) \in F$.
i.e. montrons que $(\lambda x)+2(\lambda y)=0$.
On a

$$(\lambda x)+2(\lambda y)=\lambda(x+2y)=\lambda 0=0.$$

Proposition 1.2.1 (*Critère d'un sous-espace vectoriel*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si
— $\overrightarrow{0_E} \in F$;
— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F, \lambda.\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} \in F$.

Engendré par une famille finie : $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x_p})=\{\lambda_1.\vec{x_1}+\cdots+\lambda_p.\vec{x_p}\}$

Définition 7 (*Famille finie*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une **famille finie** de vecteurs de E est un p-uplet $\mathcal{F}=(\overrightarrow{x}_1,\dots,\overrightarrow{x_p})$ formée de vecteurs de E, où $p \in \mathbb{N}$.

Définition 8 (*Combinaison linéaire*)

Avec les mêmes notations, une **combinaison linéaire** de la famille $\mathcal{F}$ est un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ de la forme $\overrightarrow{x}=\lambda_1.\overrightarrow{x_1}+\cdots+\lambda_p.\overrightarrow{x_p}$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$.
Les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.
On note $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaison linéaires de la famille $(\overrightarrow{x}_1,\dots,\overrightarrow{x_p})$.

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F})=\{\lambda_1.\overrightarrow{x_1}+\cdots+\lambda_p.\overrightarrow{x_p} : \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

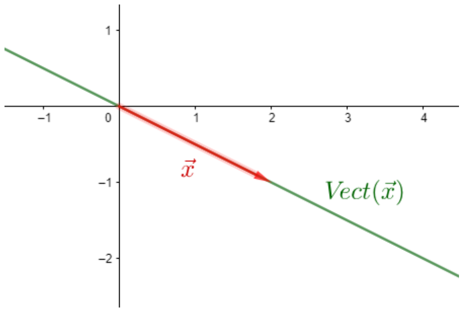
Par convention, $\mathrm{Vect}(\emptyset)=\{\overrightarrow{0}_E\}$.

Définition-Proposition 2 (*Espace engendré*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\overrightarrow{x}_1,\dots,\overrightarrow{x_p})$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x}_1,\dots,\overrightarrow{x_p})$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **espace engendré** par la famille $(\overrightarrow{x}_1,\dots,\overrightarrow{x_p})$. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_p}$.

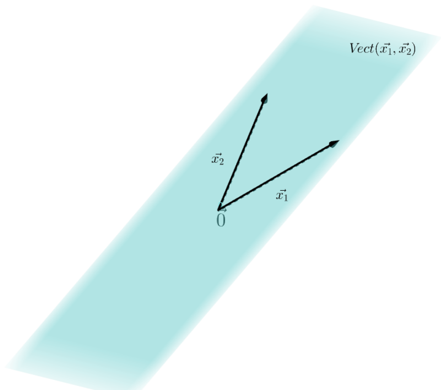
Exemple 7 (*Droite vectoriel*)

Lorsque que $p=1$ avec $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x})=\{\lambda.\overrightarrow{x} : \forall\lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{x}$. On la note $\mathbb{R}\overrightarrow{x}$.
Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est



Exemple 8 (*Plan vectoriel*)

Lorsque que $p = 2$ avec $\overrightarrow{x_1}$ non colinéaire à $\overrightarrow{x_2}$, $\text{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \{\lambda.\overrightarrow{x_1} + \mu.\overrightarrow{x_2} : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectorielle** engendrée par $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. On le note $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2}$.
Un plan vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est



Intersection $F_1 \cap F_2$

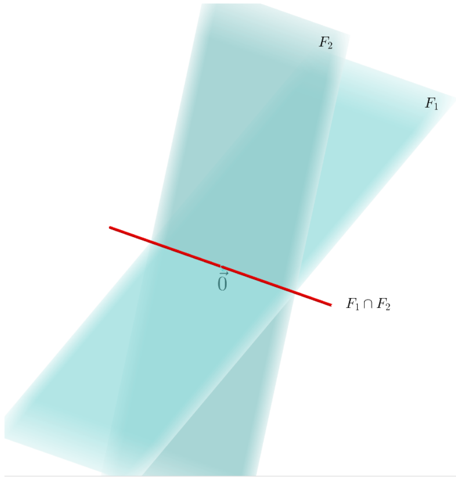
Proposition 1.2.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $\cap_{i=1}^p F_i$ est également un sous espace vectoriel.

Démonstration :
- *non vide :*
  $\forall i \in [\![1, p]\!] : \overrightarrow{0} \in F_i$ donc $\overrightarrow{0} \in \cap_{i=1}^p F_i$
- *stable par + :*
  Soit $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 \in \cap_{i=1}^p F_i$ d'où pour tout $i \in [\![1, p]\!] : \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 \in F_i$.
  Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!] : \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in F_i$ donc $\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \cap_{i=1}^p F_i$.
- *stable par . :*
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\overrightarrow{x} \in \cap_{i=1}^p F_i$ d'où $\forall i \in [\![1, p]\!] : \overrightarrow{x} \in F_i$.
  Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!] : \lambda\overrightarrow{x} \in F_i$ donc $\lambda\overrightarrow{x} \in \cap_{i=1}^p F_i$. ■

Exemple 9

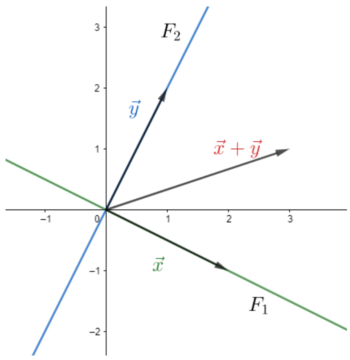
$F = \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}}^{=F_1} \cap \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}}^{=F_2}$ l'intersection de deux plans vectoriels, F_1 et F_2 dans $\mathbb{R}^3$



Somme de sous-espaces vectoriels : $F_1 + F2 = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}$

Remarque 1

L'union $\cup_{i=1}^{p} F_i$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



Sur cette figure, les vecteurs $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F_1 \cup F_2$ et on a $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \notin F_1 \cup F_2$. La somme permet de construire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Définition-Proposition 3 (*Somme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de la forme $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ où $\overrightarrow{x} \in F_1$ et $\overrightarrow{y} \in F_2$; autrement dit,

$$F_1 + F_2 = \{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} : \overrightarrow{x} \in F_1, \overrightarrow{y} \in F_2\}.$$

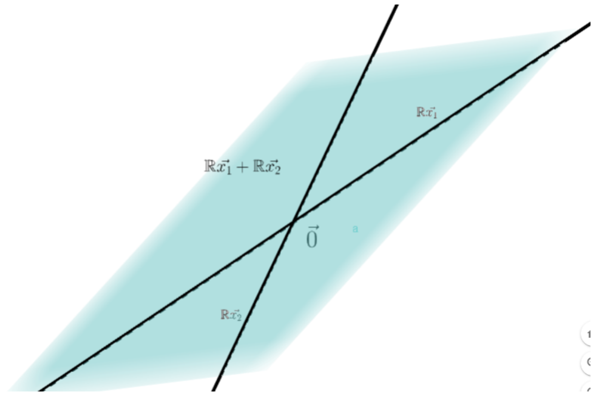
$F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
Plus précisément $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Démonstration :
- *non vide :*
  $\overrightarrow{0} \in F_1, F_2$ d'où $\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.
- *stable par + :*
  Soit $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2} \in F_1 + F_2$.
  $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2} = \underbrace{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F_1 + F_2$.
$\lambda(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \underbrace{\lambda\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda\overrightarrow{y}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$. ■

Exemple 10

Soit $\mathbb{R}\overrightarrow{x}_1$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{x}_2$ deux droite vectorielles distinctes. La somme de ces deux espace vectoriels forme le plan vectoriel $\mathbb{R}\overrightarrow{x}_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{x}_2$.



Définition 9 (*Somme directe*)

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ où $\overrightarrow{x} \in F_1$ et $\overrightarrow{y} \in F_2$. On note alors la somme $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 1.2.3 (*Critère 1*)

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si

$$\forall \overrightarrow{x} \in F_1, \forall \overrightarrow{y} \in F_2 : \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E} \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E}.$$

Démonstration :

— $(\Longrightarrow)$:
Soit $\overrightarrow{x} \in F_1$ et $\overrightarrow{y} \in F_2$ tel que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. On a aussi $\underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2} = \overrightarrow{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

— $(\Longleftarrow)$:
Supposons qu'un $\overrightarrow{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons : $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$ et $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :

$$\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'}}_{\in F_2}.$$

D'après l'hypothèse, on a $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'} = \overrightarrow{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y'}$. ■

Proposition 1.2.4 (*Critère 2*)

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration :

— ($\Longrightarrow$) :

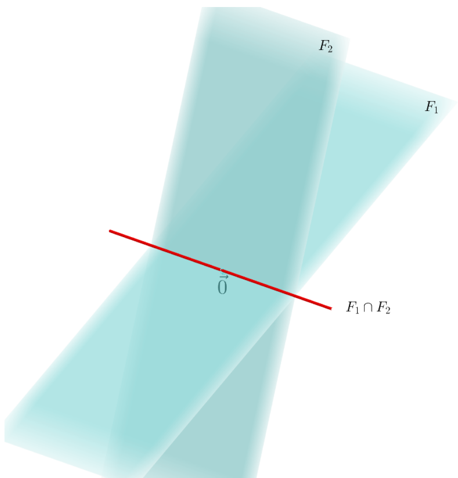
* $\{\overrightarrow{0_E}\} \subset F_1 \cap F_2$: $\overrightarrow{0_E} \in F_1, F_2$ donc $\overrightarrow{0_E} \in F_1 \cap F_2$.
* $F_1 \cap F_2 \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$: Soit $\overrightarrow{x} \in F_1 \cap F_2$. On a $\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{-\overrightarrow{x}}_{\in F_2} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2}$. Par unicité de la décomposition, on identifie $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Du fait de la double inclusion, on a $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

— ($\Longleftarrow$) :
Supposons qu'un $\overrightarrow{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons : $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$ et $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y'}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :
$$\underbrace{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}}_{\in F_1} = \underbrace{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'}}_{\in F_2}.$$
Comme $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$, on a $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'} = \overrightarrow{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y'}$. ■

Exemple 11

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F_1 et F_2, est une droite vectoriel, $F_1 \cap F_2$, donc la somme n'est pas directe.



Si $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ et $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} = (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z=\lambda, x=-\lambda, y=0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda(-1,0,1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(-1,0,1)
\end{aligned}$$

Finalement $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(-1,0,1)$.

Définition 10 (*Supplémentaires*)

Avec les mêmes notations, si la somme $F_1 + F_2$ est directe et égale à E, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**, et on note
$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Exemple 12

Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^n)$.

— $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] + \mathrm{Vect}(X^n)$:
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a
$$P = \overbrace{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}}^{\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} + \overbrace{a_nX^n}^{\in\mathrm{Vect}(X^n)}.$$

— $\mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathrm{Vect}(X^n) = \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\}$:
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathrm{Vect}(X^n)$.
Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $deg(P) < n$. Comme $P \in \mathrm{Vect}(X^n)$, on a $P = \lambda X^n$. Si $\lambda \neq 0$, on a $deg(P = \lambda X^n) = n$, d'où une contradiction. Donc $P = 0$.

Définition-Proposition 4 (*Somme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$ l'ensemble $\sum_{k=1}^{p} F_k$ des vecteurs de la forme $\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\cdots+\overrightarrow{x_p}$ où $\overrightarrow{x_1} \in F_1$, $\overrightarrow{x_2} \in F_2$, ..., $\overrightarrow{x_p} \in F_p$; autrement dit,
$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p} : \overrightarrow{x_1} \in F_1, \overrightarrow{x_2} \in F_2, \ldots, \overrightarrow{x_p} \in F_p\}.$$
Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E ; plus précisément S est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$.

Définition 11 (*Somme directe*)

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p}$ où $\overrightarrow{x_1} \in F_1$, $\overrightarrow{x_2} \in F_2$, ..., $\overrightarrow{x_p} \in F_p$. On note alors la somme $\oplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition 1.2.5 (*Critère 1*)

Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si
$$\overrightarrow{x_1} \in F_1, \overrightarrow{x_2} \in F_2, ..., \overrightarrow{x_p} \in F_p, \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E} \implies \overrightarrow{x_1} = \cdots = \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E}.$$

Remarque 2

Le critère 2 ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.
$E = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{x_2} = (0,1)$ et $\overrightarrow{x_3} = (1,1)$. On a $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} = \mathbb{R}\overrightarrow{x_1} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_3} = \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_3} = \{(0,0)\}$. Cependant la somme $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_3}$ n'est pas directe car $(1,1) = 1(1,1)$ et $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.

1.2.2 Espace vectoriel produit : $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$

Définition 12 (*Produit cartésien*)

Soit $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On pose
$$E = E_1 \times E_2 = \{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) : \overrightarrow{x_1} \in E_1, \overrightarrow{x_2} \in E_2\}.$$
E est le **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2.
On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :
$$\forall(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E, (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) \in E, \quad (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) + (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{x_1} +_1 \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2} +_2 \overrightarrow{y_2}).$$
De même, on définit la loi de composition externe . sur E par :
$$\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E, \lambda.(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\lambda._1\overrightarrow{x_1}, \lambda._2\overrightarrow{x_2}).$$

Exemple 13

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit E^p par
$$E^p = \prod_{k=1}^{p} E.$$
Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

Proposition 1.2.6

E ainsi défini est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 13

On définit de manière analogue le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, produit cartésien des ensembles $E_1, \ldots, E_n$. $(E_1, +_1, ._1)$, $(E_2, +_2, ._2)$, ..., $(E_p, +_p, ._p)$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E = \prod_{k=1}^{p} E_k = \{(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) : \overrightarrow{x_1} \in E_1, \ldots, \overrightarrow{x_p} \in E_p\}$.

1.3 Base : $\forall\vec{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots \lambda_p), \quad \vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \cdots + \lambda_p\vec{e_p}$

1.3.1 Définition

Famille génératrice : existence

Définition 14 (*Famille génératrice*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, c'est à dire si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est à dire si
$$\forall\overrightarrow{x} \in E, \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{e_p}.$$

Exemple 14

La famille $\{(1,1), (0,1), (1,-1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\overrightarrow{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1).$$
En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car $(x, y) = x(1,1) + (y-1)(0,1)$.

Famille libre : unicité

Définition 15 (*Famille libre*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ est **libre** si tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel engendré par la famille s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{Vect}((\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p}), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Autrement dit aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition 1.3.1 (*Critère*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ nulle est triviale, c'est à dire

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \overrightarrow{0_E} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration : La démonstration est similaire au critère 2 de la somme directe (voir démonstration 1.2.1). ■

Exemple 15

Dans l'exemple précédent, on a démontré qu'un vecteur pouvait s'exprimer à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes. Avec ce dernier critère, la démonstration serait :
Soit $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(1,1) + \beta(0,1) + \alpha(1,-1) = (0,0).$$

On a :

$$\begin{cases} \lambda + \alpha & = 0 \\ \lambda + \beta - \alpha & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & = 1 \\ \alpha & = -1 \\ \beta & = -2 \end{cases}.$$

On vérifie que $(1,1) - 2(0,1) - (1,-1) = (0,0)$.

Base : existence et unicité

Définition 16

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.
De façon équivalente, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une base de E si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Exemple 16

L'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{K}_n[X]$, admet une base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, appelée base canonique.

Exemple 17

L'espace vectoriel des matrices carrés de taille 2, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, admet une base $(\begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix})$, appelée base canonique.

Remarque 3

On n'a pas unicité de la base. Par exemple pour $\mathbb{K}_n[X]$, avec les x_i $n+1$ scalaires distincts, les polynômes de Lagrange

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(X) = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3.2 Existence d'une base

Définition 17 (*Dimension finie*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E, et **de dimension infinie** sinon.

Exemple 18

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.
En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple 19

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

Théorème 1.3.2 (*Théorème de la base incomplète*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration : La démonstration repose sur l'algorithme suivant :
Soit la partie libre initiale $\mathcal{L}$.
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille finie, $\mathcal{G}$, génératrice de E.
Tant que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E :

1. Puisque $\mathcal{G}$ engendre E et que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E, il existe un vecteur $\overrightarrow{g}$ de $\mathcal{G}$ qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$.
2. On remplace $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} \cup \{\overrightarrow{g}\}$, qui est encore libre car le nouveau vecteur n'est pas une combinaison linéaire des précédents.

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de $\mathcal{G}$ différent des précédents et que $\mathcal{G}$ est fini. $\mathcal{L}$ est alors une partie génératrice, donc une base de E. ∎

Théorème 1.3.3 (*Théorème de la base extraite*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration : La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$. ∎

1.3.3 Unicité du cardinal de la base

Proposition 1.3.4

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration : Démontrons cette proposition par récurrence.

— *Initialisation* :
Soit $(\overrightarrow{g}_1)$ une famille génératrice de E.
Soit $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ une famille de E. Il existe λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{g}_1$ et $\overrightarrow{v}_2 = \lambda_2 \overrightarrow{g}_1$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors la famille $(\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0})$ est liée.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\overrightarrow{v}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{v}_2$. Les vecteurs sont colinéaires donc liées.

Idem si $\lambda_2 \neq 0$.

— *Hérédité* :
Soit $(\vec{g_1}, \dots, \vec{g_n})$ une famille génératrice de E.
Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.
Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, il existe $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\vec{v}_i = \lambda_{i,1} \vec{g}_1 + \lambda_{i,2} \vec{g_2} + \cdots + \lambda_{i,n} . \vec{g_n}$$

Quitte à réorganiser les deux familles, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\vec{v}_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1} = \in \text{Vect}(\vec{g_1}, \dots, \vec{g}_{n-1}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel générée par la famille $(\vec{g_1}, \dots, \vec{g}_{n-1})$.
Donc la famille $\left(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}, \dots, \vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}\right)$ est liée. Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\beta_1 (\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}) + \cdots + \beta_n (\vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}) = \vec{0}.$$

d'où

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \cdots + \beta_n \vec{v}_n - (\beta_1 \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} + \cdots + \beta_n \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}) \vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

La famille est donc liée. ■

Proposition 1.3.5

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.

Démonstration : Si la famille a strictement plus de n vecteurs, on peut en enlever pour constituer une famille de $n+1$ vecteurs qui est donc liée d'après la proposition précédente. A fortiori, la famille initiale est liée. ■

Proposition 1.3.6 (*Unicité du cardinal d'une base*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f_q})$ deux bases de E. Alors $p = q$.

Démonstration : $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une famille génératrice de E. Comme $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f_q})$ est libre d'après la proposition précédente, $q \leqslant p$. Par symétrie, on a aussi $p \leqslant q$. Finalement $p = q$. ■

Cette proposition nous permet cette définition.

Définition-Proposition 5 (*Dimension*)

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est égale au cardinal d'une base quelconque de E.

Proposition 1.3.7 (*Critère*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_n})$ est une famille libre, alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_n})$ est une base de E.
Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_n})$ est une famille génératrice, alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_n})$ est une base de E.

Exemple 20

Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$, la combinaison linéaire des polynômes de Lagrange $\sum_{j=0}^n P(x_j) l_j(X)$ avec $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ scalaires distincts est égale au polynôme P aux points $x_0, \ldots, x_n$, donc égal à P. Les polynômes de Lagrange forment une famille génératrice de $n+1$ vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 1.3.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors F est également de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

1.3.4 Base adaptée

Définition 18 (*Base adaptée*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E.
La base $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est dite **adaptée** à F si et seulement s'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ soit une base de F.

Exemple 21

La base $((1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1))$ est adaptée à $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ car $((1,-1,0),(0,1,-1))$ est une base de F.

Proposition 1.3.9 (*Existence d'une base adaptée*)

La base ainsi définie existe.

Démonstration : Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ de F. Cette famille est libre dans E. On la complète en une base de E d'après le théorème de la base incomplète. ■

Définition 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et B une base de E.
La base $\mathcal{B}$ est dite **adaptée** à la décomposition $E = \oplus_{k=1}^{p} F_k$ si et seulement si $\mathcal{B}$ peut s'écrire comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ où $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Proposition 1.3.10

La base ainsi définie existe.

Proposition 1.3.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
On suppose que $\mathcal{B}$ s'écrit comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_p$.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, notons F_k le sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_k$.
Alors les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires.

1.4 Théorèmes en dimension finie

Proposition 1.4.1 (*Existence d'un supplémentaire*)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous espace vectoriel admet un supplémentaire.
Autrement dit, soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F que l'on complète avec $\mathcal{B}_2$ pour former une base de E.
D'après la proposition 1.3.11, si on pose G l'espace vectoriel engendrée par $\mathcal{B}_2$, alors $E = F \oplus G$. ■

Proposition 1.4.2

Soit $E_1, \dots E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!]$, E_k est de dimension finie.
De plus, dans ce cas,

$$\dim(\prod_{k=1}^{p} E_k) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Démonstration : On suppose $p = 2$.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E_1 et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ une base de E_2.
Alors $((\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}_F), \dots, (\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{0}_F), (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_1}), \dots, (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_q}))$ est une base de $E_1 \times E_2$.

- *Génératrice* :
  Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E_1 \times E_2$.
  Comme $\overrightarrow{x} \in E_1$ et $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille génératrice de E_1, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$.
  Comme $\overrightarrow{y} \in E_2$ et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ est une famille génératrice de E_2, il existe $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{y} = \beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q}$.
  D'où $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \lambda_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}_F) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{0}_F) + \beta_1(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_1}) + \dots + \beta_q(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_q})$.
- *Libre* :
  Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_q \in K$ tel que

  $$\lambda_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}_F) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{0}_F) + \beta_1(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_1}) + \dots + \beta_q(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_q}) = (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{0}_F).$$

  D'où :

  $$(\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}, \beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q}) = (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{0}_F).$$

  Par identification, on obtient $\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}_E$ et $\beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q} = \overrightarrow{0}_F$. Comme $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une famille libre de E_1 et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ de E_2 , $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$. ■

Corollaire 1.4.3

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'espace vectoriel E^p est de dimension finie si et seulement si E l'est ; dans ce cas, on a $\dim(E^p) = p. \dim(E)$.

Proposition 1.4.4 (*Formule de Grassmann*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie et F_1, F_2 deux sous espace vectoriel de E. On a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_1).$$

Démonstration : Une idée est de remarquer l'analogie avec la formule ensembliste :

$$\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B).$$

Soit C une base de $F \cap G$. On la complète en une base A de F et en une base B de G.
$A \cup B$ est une base $F + G$ et $A \cap B = C$ est une base de $F \cap G$. ■

Proposition 1.4.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

Alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ *est également de dimension finie, et*

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ *est directe.*

Proposition 1.4.6

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriels de dimensions finies et* $F_1, \ldots, F_p$ *des sous espaces vectoriels de* E.

On suppose que

$$\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E.$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. *les sous espaces vectoriels* $F_1, \ldots, F_p$ *sont supplémentaires,*
2. *les sous espaces vectoriels* $F_1, \ldots, F_p$ *sont en somme directe,*
3. $\sum_{k=1}^{p} F_k = E$.