

Espaces préhilbertiens réels

En algèbre linéaire, un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel avec une structure supplémentaire appelée produit scalaire. Cette structure supplémentaire associe chaque couple de vecteurs à une quantité scalaire connue sous le nom de produit scalaire des vecteurs. Le produit scalaire permet l'introduction rigoureuse de notions géométriques intuitives telles que la longueur d'un vecteur ou l'angle entre deux vecteurs. Il permet de définir la notion d'orthogonalité entre vecteurs (produit scalaire nul). Les espaces préhilbertiens réels généralisent les espaces euclidiens aux espaces vectoriels de toute dimension (éventuellement infinie), et sont étudiés en analyse fonctionnelle. Un produit scalaire induit naturellement une norme associée donc un espace préhilbertien réel est également un espace vectoriel normé.

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

Définition Produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . Autrement dit, un **produit scalaire** sur E est une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$

— **bilinéaire** : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z}) = \lambda \varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \mu \varphi(\vec{y}, \vec{z}) \text{ par rapport à la première variable,}$$

$$\varphi(\vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = \lambda \varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \mu \varphi(\vec{x}, \vec{z}) \text{ par rapport à la seconde variable.}$$

— **symétrique** : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \varphi(\vec{y}, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

— **définie** : $\forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}_E$,

— **positive** : $\forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$.

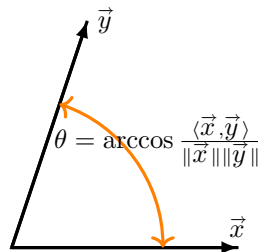
Il suffit de vérifier la linéarité à gauche et la symétrie pour justifier la bilinéarité.

Remarque

A ce stade, les notions de norme et d'angle ne sont pas définies. Le produit scalaire est définie indépendamment d'une relation du type $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$. En réalité, dans la théorie des espaces préhilbertiens réels, la définition du produit scalaire est première et les notions de norme et d'angle viennent après.

Norme : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

Angle : $\theta = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$



Définition Espace préhilbertien réel

Un **espace préhilbertien réel** est un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

On note le produit scalaire généralement $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$, (\vec{x}, \vec{y}) , $(\vec{x} | \vec{y})$ ou encore $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Définition-Proposition Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Le **produit scalaire canonique** est défini par

$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^T Y$.

Ainsi défini, nous retrouvons le produit scalaire usuel défini dans le plan \mathbb{R}^2 . Par exemple si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, on a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Démonstration

— *symétrique* : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^T Y \stackrel{\text{matrice carré de taille 1}}{=} (X^T Y)^T = Y^T X = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

— *bilinéaire* : par symétrie la linéarité par rapport à la seconde variable suffit,

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2 \rangle = X^T (\lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda X^T Y_1 + \mu X^T Y_2 = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \mu \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle.$$

— *positive* : $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$.

— *définie* : $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \stackrel{\geq 0}{x_i^2} = 0$, alors $x_i = 0$ pour tout i , soit $\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple : Non unicité du produit scalaire

L'application $(X, Y) \rightarrow X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 distinct du produit scalaire canonique.

— *symétrique* : $X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \stackrel{\text{matrice carré de taille 1}}{=} (X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y)^T = Y^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T X = Y^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$.

— *bilinéaire* : par symétrie la linéarité par rapport à la seconde variable suffit,

$$X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (\lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y_1 + \mu X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y_2.$$

— *positive* : $X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$.

— *définie* : $X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$, soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple : Sur les fonctions continues

L'application $(f, g) \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Symétrie, bilinéaire et positivité évidentes.

Pour définie, $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t) dt = 0$ implique que $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ car f^2 est une fonction continue et positive. Donc $f = 0$.

Exemple : Sur les polynômes

L'application $(P, Q) \rightarrow \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Symétrie, bilinéaire et positivité évidentes.

Pour définie, $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n P^2(k)$ implique que P admet $n+1$ racines donc $P = 0$ car $\deg P \leq n$.

Exemple : Sur les matrices carrés

L'application $(A, B) \rightarrow \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}()$.

- *symétrique* : $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) \stackrel{\text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)}{=} \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle$
- *bilinéaire* : par symétrie la linéarité par rapport à la seconde variable suffit,

$$\langle A, \lambda B_1 + \mu B_2 \rangle = \text{tr}(A^T (\lambda B_1 + \mu B_2)) = \lambda \text{tr}(A^T B_1) + \mu \text{tr}(A^T B_2) = \lambda \langle A, B_1 \rangle + \mu \langle A, B_2 \rangle.$$

- *positive* : Rappels : coefficient d'un produit de matrice $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ et trace $\text{tr}(C) = \sum_{k=1}^n c_{kk}$.
On a

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{j=1}^n (A^T A)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$$

- *définie* : $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 0$ implique que $a_{ij} = 0$ pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $A = 0$.

B Norme associée à un produit scalaire**Définition**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

On appelle **norme associée** l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

On appelle **distance** de \vec{x} à \vec{y} le réel positif $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Le vecteur \vec{x} est dit **unitaire** si $\|\vec{x}\| = 1$.

Remarque

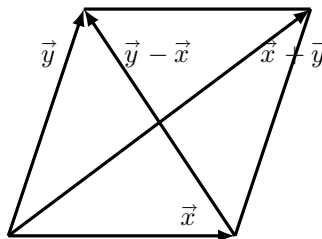
Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, le vecteur $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ est unitaire.

Proposition Identités remarquables de la norme associée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a

- $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- **identité du parallélogramme** : $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$
- **identité de polarisation** : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$.

L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale au double de la somme des carrés des longueurs des côtés.



Démonstration

Pour la première identité, on a :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \stackrel{\text{distributivité}}{=} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \stackrel{\text{symétrie}}{=} \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

La démonstration de la suivante est similaire. Les deux dernières identités sont des combinaisons des deux premières (+ et -).

Théorème Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Alors pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in E$, on a :

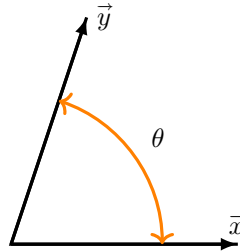
$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si \vec{x} et \vec{y} sont liés.

Démonstration

Voir <https://www.youtube.com/watch?v=0AVLW1bTpLw>.

Dans \mathbb{R}^2 , la démonstration est directe car $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\theta)$ et $|\cos(\theta)| \leq 1$.



Dans le cas générale, lorsque $\vec{y} = \vec{0}$, l'énoncé est clairement vrai, par conséquent on supposera \vec{y} non nul.

— *Inégalité* Posons, pour tout réel t , $P(t) = \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2$. Par construction, la fonction P est positive ou nulle. On a :

$$P(t) = \langle \vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y} \rangle \stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \|\vec{x}\|^2 + 2t\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + t^2\|\vec{y}\|^2$$

Comme \vec{y} est non nul, $\|\vec{y}\|^2$ est non nul également. P est donc une fonction polynomiale du second degré. P étant positive ou nulle, son discriminant est négatif ou nul :

$$4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

Comme $t \rightarrow \sqrt{t}$ est croissante, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

— *Égalité* Si (\vec{x}, \vec{y}) est une famille liée alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. On a :

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = |\langle \lambda\vec{y}, \vec{y} \rangle| = |\lambda|\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

Réciproquement, si $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine réelle (double) t , et pour ce t on a

$$\|\vec{x} + t\vec{y}\|^2 = 0 \stackrel{\text{définie}}{\iff} \vec{x} + t\vec{y} = \vec{0}.$$

Donc (\vec{x}, \vec{y}) est une famille liée.

Exemple

Pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs (x_1, \dots, x_n) et $(1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Exemple

Pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$: $|\int_0^1 f(t) dt| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$.

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et $x \rightarrow 1$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Corollaire Norme sur E

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Alors la norme associée $\|\cdot\|$ est une **norme** sur E , c'est-à-dire vérifie ces propriétés :

- **Homogène** : $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$.
- **Définie** : $\|\vec{x}\| = 0 \implies \vec{x} = 0$.
- **Inégalité triangulaire** : $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Cette norme fournit une structure d'espace vectoriel normé sur E . On peut donc parler de convergence sur E , de topologie sur E , etc.

Démonstration

— *Homogène* : $\|\lambda \vec{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = |\lambda| \|\vec{x}\|$.

— *Définie* : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = 0 \implies \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \implies \vec{x} = 0$

— *Inégalité triangulaire* :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \stackrel{\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Comme $t \rightarrow \sqrt{t}$ est croissante, on obtient l'inégalité : $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

II Orthogonalité

On considère un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

A Vecteurs orthogonaux

Définition Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

On dit que les vecteurs \vec{x} et \vec{y} sont **orthogonaux** si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

On note $\vec{x} \perp \vec{y}$.

En géométrie d'Euclide, la notion d'orthogonalité est associée à l'angle droit et est première par rapport au produit scalaire. Dans cette théorie générale, elle est seconde et est relative au produit scalaire. En particulier, en fonction du choix du produit scalaire, deux vecteurs peuvent être orthogonaux ou non.

Exemple

Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont orthogonaux par rapport au produit scalaire canonique $X^T Y$ mais ne le sont pas rapport au produit scalaire $X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ car $(1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$.

Exemple

$E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

Comme $\langle \cos, \sin \rangle = 0$, les vecteurs \cos et \sin sont orthogonaux.

Théorème Pythagore

Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

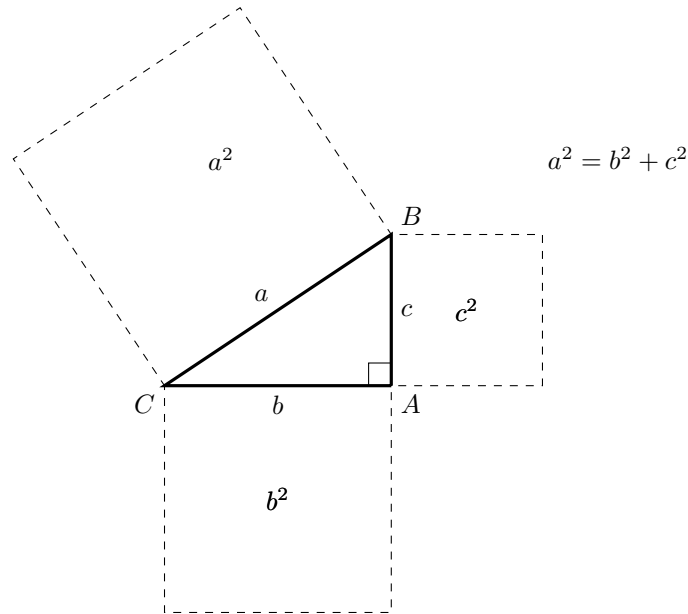


Illustration du théorème de Pythagore dans le plan

Démonstration

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \text{ donc } \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Proposition

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout les autres.

Démonstration

Analyse : Soit \vec{x} un vecteur orthogonal à tout les autres. En particulier, il est orthogonal à lui-même donc $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, donc $\vec{x} = \vec{0}$.

Synthèse : on vérifie que le vecteur nul est orthogonal à tout les autres.

B Famille orthogonales et orthonormales**Définition**

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E .

La famille \mathcal{F} est **orthogonale** si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket : i \neq j \Rightarrow \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0.$$

La famille \mathcal{F} est **orthonormale** si la famille est orthogonale et si les vecteurs sont unitaires ($\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \|\vec{x}_i\| = 1$).

La famille \mathcal{F} est une **base orthonormale** si la famille est une base et une famille orthonormale.

Théorème Pythagore généralisée

Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E .

Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\vec{x}_i\|^2.$$

Proposition libre

Une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls est libre.

En particulier, une famille orthonormale est libre.

Si E est de dimension finie, une famille orthonormale contient au plus $\dim E$ vecteurs. Si elle contient $\dim E$, c'est une base.

Démonstration

Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\langle \vec{x}_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \vec{x}_j, \vec{x}_i \rangle \stackrel{\text{famille orthogonale}}{=} \lambda_j \|\vec{x}_j\|^2 = 0$$

Comme $\|\vec{x}_j\| \neq 0$, $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc la famille est libre.

Proposition Coordonnées dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de E . Alors

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n \rangle \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i.$$

Démonstration

Soit $\vec{x} \in E$. Il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\langle \vec{x}, \vec{e}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \stackrel{\text{famille orthonormale}}{=} x_j.$$

Proposition Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de E . Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \in E$.

Alors :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle^2 = X^T X$$

Démonstration

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j \right\rangle \stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Ainsi, en dimension finie, tous les produits scalaires se ramènent au produit scalaire canonique via le choix d'une base orthonormale. Dans le cours sur les espaces vectoriels, on a prouvé l'existence d'une base. Le théorème prouve que l'on peut construire une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

Théorème **Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille *libre* de vecteurs de E .

Alors il existe une **unique** famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de vecteurs de E telle que

- la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est orthonormale,
- pour tout $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n),$$

- pour tout $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle \vec{x}_n, \vec{e}_n \rangle > 0$.

De plus, on peut la construire avec les formules suivantes :

- $\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}$;

- pour $n \in \llbracket 2, p \rrbracket$, on note

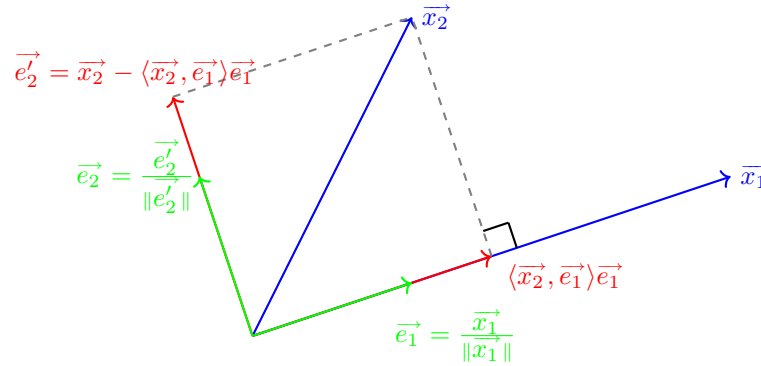
$$\vec{e}'_n = \vec{x}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \vec{e}_k, \vec{x}_n \rangle \vec{e}_k;$$

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{e}'_n}{\|\vec{e}'_n\|}.$$

Démonstration

Si $n = 2$, on applique cette algorithme :

1. Normaliser \vec{x}_1 : $\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}$
2. Projeter \vec{x}_2 sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{x}_1$: $\langle \vec{x}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$
3. Retrancher à \vec{x}_2 la composante suivante \vec{e}_1 : $\vec{e}'_2 = \vec{x}_2 - \langle \vec{x}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$
4. Normaliser \vec{e}'_2 : $\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}'_2}{\|\vec{e}'_2\|}$



Plus généralement, le procédé de Gram-Schmidt construit \vec{e}_k en retranchant à \vec{x}_k ses composantes selon $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}$ puis en le normalisant :

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_1 &= \vec{x}_1 & \vec{e}_1 &= \frac{\vec{e}'_1}{\|\vec{e}'_1\|} \\
 \vec{e}'_2 &= \vec{x}_2 - \langle \vec{x}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 & \vec{e}_2 &= \frac{\vec{e}'_2}{\|\vec{e}'_2\|} \\
 \vec{e}'_3 &= \vec{x}_3 - \langle \vec{x}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{x}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 & \vec{e}_3 &= \frac{\vec{e}'_3}{\|\vec{e}'_3\|} \\
 \vdots & & \vdots & \\
 \vec{e}'_k &= \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{x}_k, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i & \vec{e}_k &= \frac{\vec{e}'_k}{\|\vec{e}'_k\|}
 \end{aligned}$$

Démontrons par récurrence que \vec{e}'_k est orthogonal à la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1})$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- *Initialisation* : le vecteur \vec{e}'_1 est orthogonal à la famille vide
- *Hérédité* : supposons la propriété vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.
Soit $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. On a :

$$\langle \vec{e}'_k, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{x}_k, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{x}_k, \vec{e}_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{x}_k, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}_{\text{d'après HR } \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{i,j}} = \langle \vec{x}_k, \vec{e}_j \rangle - \langle \vec{x}_k, \vec{e}_j \rangle \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = 0$$

Donc la famille $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ est orthogonal et du fait de la normalisation orthonormal.

Exemple

Soit \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$.

Soit $((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Construisons une base orthonormale.

1. *Normaliser* $(1, 0)$:

$$\vec{e}_1 = \frac{(1, 0)}{\|(1, 0)\|} = \frac{(1, 0)}{\sqrt{(1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

2. *Projeter* $(0, 1)$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}(1, 0)$:

$$\langle \vec{x}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = \langle (0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left((0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

3. *Retrancher* à $(0, 1)$ la composante suivante $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:

$$\vec{e}_2 = (0, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

4. *Normaliser* $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$\vec{e}_2 = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)}{\left\| \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{3/2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Théorème Existence d'une base orthonormale

Tout espace euclidien admet une base orthonormale.

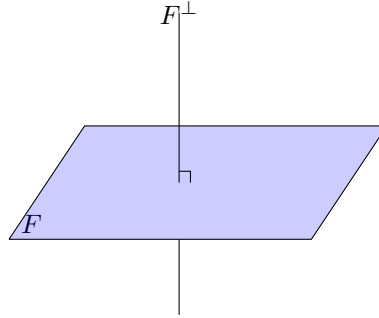
C Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition Orthogonal d'un espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On appelle orthogonal de F , l'ensemble :

$$F^\perp = \{\vec{x} \in E : \forall \vec{y} \in F \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}.$$



Proposition

1. F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
2. F et F^\perp sont en somme directe.
3. Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.

Démonstration

1. — *Non vide* : $\vec{0} \in F^\perp$ car $\forall \vec{y} \in F \quad \langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0$.
— *Stabilité* : Soit $\vec{x}, \vec{y} \in F^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\forall \vec{z} \in F : \quad \langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle}_{=0 \text{ car } \vec{x} \in F^\perp} + \mu \underbrace{\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle}_{=0 \text{ car } \vec{y} \in F^\perp} = 0.$$

F^\perp est bien un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $\vec{x} \in F \cap F^\perp$. Donc $\underbrace{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}_{\substack{\in F \\ \in F^\perp}} = 0$. Comme le produit scalaire est définie, $\vec{x} = \vec{0}$.
 F et F^\perp sont en somme directe.
3. Soit $\vec{x} \in G^\perp$. Soit $\vec{y} \in F$. Comme $F \subset G$, on a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ puisque $\vec{x} \in G^\perp$.
On a bien $\vec{x} \in F^\perp$.

Exemple

On a $\{\vec{0}_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{\vec{0}_E\}$ car le seul vecteur de E orthogonal à tout vecteur est le vecteur nul.

Proposition

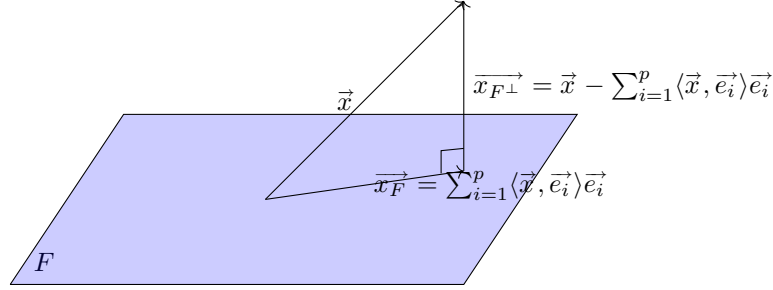
$\vec{x} \in F^\perp$ si et seulement si \vec{x} est orthogonal aux vecteurs d'une base quelconque de F .

Proposition Supplémentaire orthogonal d'un sous espace vectoriel de dimension finie

Soit F un espace vectoriel de dimension finie de E . On a :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

En particulier, si E est aussi de dimension finie : $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$.

**Démonstration**

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de F . Soit $\vec{x} \in E$.

— *Analyse* : on suppose qu'il existe $\vec{x}_F = \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i \in F$ et $\vec{x}_{F^\perp} \in F^\perp$ tel que :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i + \vec{x}_{F^\perp}.$$

Pour tout $k \in [1, p]$, on a :

$$\langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i + \vec{x}_{F^\perp}, \vec{e}_k \right\rangle = \sum_{i=1}^p x_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle + \langle \vec{x}_{F^\perp}, \vec{e}_k \rangle = x_k.$$

Finalement $\vec{x}_F = \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ et $\vec{x}_{F^\perp} = \vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$.

— *Synthèse* : on peut écrire

$$\vec{x} = \overbrace{\sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i}^{\in F} + \left(\vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \right).$$

Comme

$$\forall j \in [1, p] : \langle \vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}_j \rangle - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \stackrel{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \text{ BON}}{=} 0.$$

$\vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F^\perp , donc appartient à F^\perp .

Corollaire Inégalité de Bessel

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de F . Soit $\vec{x} \in E$. Alors, on a :

$$\sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

avec égalité si et seulement si $\vec{x} \in F$.

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{x}\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^p \overbrace{\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i}^{\in F} + \overbrace{\left(\vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \right)}^{\in F^\perp} \right\|^2 \\
 \|\vec{x}\|^2 &\stackrel{\text{Th Pythagore}}{=} \left\| \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \right\|^2 + \left\| \vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \right\|^2 \\
 \|\vec{x}\|^2 &\stackrel{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \text{ B.O.N.}}{=} \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle^2 + \left\| \vec{x} - \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \right\|^2 \\
 \|\vec{x}\|^2 &\geq \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle^2
 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\vec{x} \in F$.

D Projection orthogonal et distance

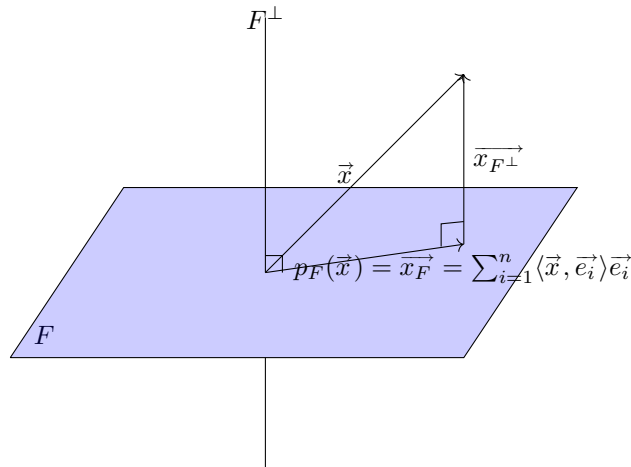
Définition Projecteur orthogonal

Soit F un espace vectoriel de dimension finie de E .

On appelle **projection orthogonale** sur F la projection, notée p_F , sur F parallèlement à F^\perp . Autrement dit,

$$p_F(\vec{x}) = p_F(\overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_{F^\perp}}) = \overrightarrow{x_F} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i,$$

avec $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormale de F .

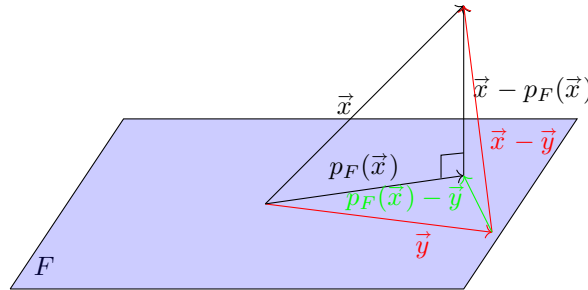


Théorème Distance à un sous-espace de dimension fini

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $\vec{x} \in E$.

$$\forall \vec{y} \in F, \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$$

avec égalité si et seulement si $\vec{y} = p_F(\vec{x})$.

**Démonstration**

Soit $\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in F$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\overbrace{(\vec{x} - p_F(\vec{x}))}^{\in F^\perp} - \overbrace{(\vec{y} - p_F(\vec{x}))}^{\in F}\| \stackrel{\text{Th Pythagore}}{=} \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| + \|\vec{y} - p_F(\vec{x})\|$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$$

avec égalité si et seulement si $\vec{y} = p_F(\vec{x})$.

Définition-Proposition Distance à un sous-espace de dimension fini

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $\vec{x} \in E$.

La **distance de \vec{x} à F** est :

$$d(\vec{x}, F) = \inf_{\vec{y} \in F} \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|.$$

Démonstration

C'est une conséquence directe d'un théorème précédent qui affirme que le vecteur appartenant à F "le plus proche" de \vec{x} est le projeté orthogonal sur F de \vec{x} .

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère F le sous-espace vectoriel défini par l'équation

$$\{ x_1 + x_2 = 0 \}$$

Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p_F sur F puis déterminer la distance de \vec{x} à F .

1. *Déterminer une base orthonormale de F .* On commence par trouver une base de F . $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ est une base de F . Cet unique vecteur constitue une famille orthogonal, il suffit de le normaliser. Comme $\|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, on pose $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.
2. *Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p_F sur F .* On calcule $p_F(\vec{e}_1)$ et $p_F(\vec{e}_2)$ par la formule $p_F(\vec{e}_i) = \langle \vec{e}_i, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1$. On obtient :

$$[p_F]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la distance de $\vec{x} = (x_1, x_2)$ à F . On a $[p_F(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [p_F]_{\mathcal{B}} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{-x_1 + x_2}{2} \end{pmatrix}$. D'où $p_F(\vec{x}) = (\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{-x_1 + x_2}{2})$. Puis $\vec{x} - p_F(\vec{x}) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2})$. Soit $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$

III Forme linéaire sur un espace Euclidien

On considère un espace euclidien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

A Représentations des formes linéaires

Proposition

Pour toute forme linéaire $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in E$ tel que :

$$\forall \vec{x} \in E : \phi(\vec{x}) = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle.$$

En d'autres termes, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{x} \mapsto \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de E . Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in E$. On a :

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(\vec{e}_i) \stackrel{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ BON}}{=} \left\langle \sum_{i=1}^n \phi(\vec{e}_i) \vec{e}_i, \vec{x} \right\rangle = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle,$$

avec $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \phi(\vec{e}_i) \vec{e}_i$.

B Représentations des hyperplans

Définition Vecteur normal

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E . On appelle **vecteur normal à H** tout vecteur non nul orthogonal à H .

Proposition Équation d'un hyperplan

Soit E un espace euclidien ayant pour base orthonormale $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Soit H un hyperplan de E .

Si $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$ est un vecteur normal à H ,

Alors

$$H = \left\{ \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in E : \sum_{i=1}^n u_i x_i = 0 \right\}.$$

Réciproquement si

$$H = \left\{ \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in E : \sum_{i=1}^n u_i x_i = 0 \right\}$$

Alors $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$ est un vecteur normal à H .

En d'autres termes, il existe $\vec{u} \in E$ non nul tel que :

$$H = \{ \vec{x} \in E : \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0 \}.$$

Ou bien encore, il existe $\phi \in E^*$ non nul tel que :

$$H = \ker \phi.$$