Chapitre 1

Intégrale à paramètre

Une intégrale à paramètre est une fonction d'une variable entière ou réelle, définie par intégration d'une fonction de deux variables, la variable d'intégration et le paramètre, :

$$F(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que la fonction F est une intégrale dépendant du paramètre x. On définit ainsi une fonction F dont on veut découvrir les propriétés à partir de celles de f.
En première partie, nous verrons le cas où le paramètre est un entier

$$u_n = F(n) = \int_J f(n,t)\,\mathrm{d}t = \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le cours sur les suites et séries de fonctions nous a fourni un théorème pour permuter la limite et l'intégrale

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

si la suite de fonctions convergent uniformément sur J et si J est un segment. Que peut on dire lorsque J est un intervalle quelconque ? Lorsqu'il y a convergence simple et non plus uniforme ? Notre but est de donner des théorèmes plus généraux.
En seconde partie, nous verrons le cas où le paramètre est un réelle et nous introduirons des théorèmes la permutation de la limite et de l'intégrale

$$\lim_{x\to x_0} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

et la permutation de la dérivée et l'intégrale

$$\frac{d}{dx}\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

sur un intervalle J quelconque.

I Intégrale à paramètre entier : $u_n = F(n) = \int_J f_n(t)\mathrm{d}t$.

A Permutation limite-intégrale ou série-intégrale : cas segment et convergence uniforme

Rappel du cours sur les suites et séries de fonctions.

Théorème I.1 (*Permutation limite/intégrale*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- *pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a,b]$;*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors f est continue (donc intégrable) sur $[a,b]$ et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème I.2 (*Permutation somme/intégrale*)

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- *pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a,b]$*
- *la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f*

Alors f est continue sur $[a,b]$ (donc intégrable) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

B Permutation limite-intégrale ou série-intégrale : cas intervalle ouvert et convergence simple

Théorème I.3 (*Convergence dominée*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de J dans $\mathbb{K}$, et $f,\phi : J\to\mathbb{K}$ continues par morceaux avec ϕ positive. On suppose que

1. ***Convergence simple de (f_n) vers f** : pour tout $t\in J$, la suite numérique $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$;*
2. ***Hypothèse de domination** : pour tout $t\in J$ et tout $n\geqslant 1, |f_n(t)|\leqslant\phi(t),$;*
3. ***Intégrabilité de la fonction dominante** : la fonction ϕ est intégrable sur J.*

Alors toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur J, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$$

.

Remarque 1

Le théorème précédent est valable sur un intervalle quelconque qui peut aussi être un segment. L'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par une autre hypothèse, l'"hypothèse de domination". Il s'agit de fournir une fonction ϕ (continue par morceaux et intégrable sur J) majorant toutes les fonctions f_n. Ceci signifie que l'on doit majorer chaque $|f_n(t)|$ par une expression **dépendante de** t **et indépendante de** n et qui soit une fonction de t intégrable sur J.

Exemple 1

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite suivante :

$$u_n = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}.$$

Soit $f_n : t\mapsto (\frac{1}{1+t^n})$.

1. *Convergence simple sur* $[1, +\infty[$ *:*
   Soit $t > 1$ fixé.
   La suite numérique $(\frac{1}{1+t^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $t > 1$ et 1 si $t = 1$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t > 1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$.
2. *Hypothèse de domination :*
   Pour $n \geqslant 2$ et $t \geqslant 1$, on a
   $$\left|\frac{1}{1+t^n}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2} = \phi(t).$$
   .
3. *Intégrabilité de la fonction dominante :*
   $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \underset{\text{convergence dominée}}{=} \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+t^n}\, dt = \int_1^{+\infty} 0\, dt = 0.$$

Exemple 2 (*Wallis*)

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite suivante :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

Soit $f_n : t \mapsto \sin^n t$.

1. *Convergence simple sur* $[0, \pi/2]$ *:*
   Soit $t \in [0, \pi/2]$ fixé.
   La suite géométrique $(\sin^n t)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $t \neq \pi/2$ et 1 si $t = \pi/2$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq \pi/2 \\ 1 \text{ si } t = \pi/2 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$.
2. *Hypothèse de domination :*
   Pour $n \geqslant 1$ et $t \in [0, \pi/2]$, on a
   $$|f_n(t)| \leqslant 1 = \phi(t).$$
   .
3. *Intégrabilité de la fonction dominante :*
   $\int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t$ converge et donc intégrable sur $[0, \pi/2]$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n \underset{\text{convergence dominée}}{=} \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 0 \,\mathrm{d}t = 0.$$

Théorème I.4 (*Intégration terme à terme*)

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues par morceaux de J dans $\mathbb{K}$, et $f : J \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On suppose que

1. ***Convergence simple de $\sum_n f_n$ vers f*** *: pour tout $t \in J$, la suite numérique $\sum_n f_n(t)$*

converge vers $f(t)$;

2. ***Hypothèse de domination*** *: la série numérique $\sum_n \int_J |f_n(t)| dt$ converge.*

Alors f est intégrable sur J, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 3

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n}(1-t)\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

1. *Convergence simple sur* $[0,1[$ *:*
   La série géométrique $\sum_n t^{2n}$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$. Donc la suite $(1-t)\sum_n t^{2n}$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.
2. *Hypothèse de domination :*
   On a $\int_0^1 t^{2n}(1-t)\mathrm{d}t = [\frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+2}}{2n+2}]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_n \int_0^1 t^{2n}(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge par règle d'équivalence sur les séries à termes positifs.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées. On en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n}(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(2).$$

II Intégrale à paramètre réelle : $F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$

Contexte :
Soit I et J deux intervalles (non vides) de $\mathbb{R}$ et

$$f \left| \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

On s'intéresse à la fonction F définie par

$$F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t.$$

A Domaine de définition $I = D_F$

Proposition II.1

La fonction F est définie sur D_F si, pour tout $x \in D_F$ fixé, l'intégrale $\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Proposition II.2

$x \in D_F$ si et seulement si $\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe (est bien définie).
Il y a deux possibilités :

- *si J est un segment et si $t \mapsto f(x,t)$ est continue alors l'intégrale est bien définie.*
- *Si J n'est pas un segment et si $t \mapsto f(x,t)$ est continue, alors l'intégrale est bien définie si l'intégrale impropre $\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ converge.*

Exemple 4

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
En $+\infty$, on a :

$$e^{-xt^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par raccordement, $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc F est bien définie sur $]0,+\infty[$.

B Continuité

Théorème II.3 (*continuité sous le signe* $\int$)

On suppose :

1. *f est **continue par rapport à** x, c.-à-d.*
   — *pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.*
2. *f est **continue par morceaux par rapport à** t, c.-à-d.*
   — *pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.*
3. ***Hypothèse de domination :***
   Il existe une fonction ϕ telle que
   — *pour tout $(x,t) \in I \times J$, on a $|f(x,t)| \leqslant \phi(t)$,*
   — *ϕ est continue par morceaux et intégrable sur J.*

Alors :
— *La fonction $F\colon x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.*

Remarque 2

Ce théorème est une interversion de limite et d'intégrale :

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(x_0,t)\,\mathrm{d}t = F(x_0)$$

Exemple 5

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$ avec $b > a > 0$.

1. *Continuité :*
   Soit $x \in [a,b]$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   Soit $t \in [0,+\infty[$ fixé. La fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[a,b]$.
2. *Domination :*
   On a :
   $$\forall x \in [a,b], \forall t \in [0,+\infty[: \quad \left|e^{-xt^2}\right| \leqslant e^{-at}.$$
   $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Les hypothèses de théorème de continuité sous le signe $\int$ sont vérifiées donc la fonction F est continue sur $[a,b]$.

Dans certains cas, il n'est pas possible de "dominer" la fonction f sur l'intervalle I tout entier. On peut cependant se contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment K inclus dans I, le théorème précédent s'applique encore.

Théorème II.4 (*continuité sous le signe $\int$ version locale*)

On peut remplacer l'hypothèse de domination par :
- ***Hypothèse de domination locale :*** *Pour tout segment K inclus dans I, il existe une fonction $\phi_K : J \to \mathbb{R}$ telle que*
  - *pour tout $(x,t) \in K \times J$, on a $|f(x,t)| \leqslant \phi_K(t)$,*
  - *ϕ_K est continue par morceaux et intégrable sur J.*

Exemple 6

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.
On a démontré que F est continue pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. Donc F est continue sur $]0,+\infty[$.

Si l'intervalle d'intégration est un segment $[c,b]$, l'hypothèse de domination est automatique sur tout segment $[a,b] \subset I$ en posant $\phi(t) = M = \sup_{(x,t)\in[a,b]\times[c,d]} |f(x,t)|$ avec f continue (voir cours sur les fonctions de plusieurs variables).

Exemple 7

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

1. *Continuité :*
   Soit $x \in [a,b]$ fixé. La fonction $t \mapsto \frac{e^{xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$.
   Soit $t \in [0,1]$ fixé. La fonction $x \mapsto \frac{e^{xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[a,b]$.
2. *Domination :*
   On a :
   $$\forall x \in [a,b], \forall t \in [0,1] : \quad \left|\frac{e^{xt}}{1+t^2}\right| \leqslant M = \sup_{(x,t)\in[a,b]\times[0,1]} \left|\frac{e^{xt}}{1+t^2}\right|.$$
   $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0,1]$.

Les hypothèses de théorème de continuité sous le signe $\int$ sont vérifiées donc la fonction F est continue sur $[a,b]$. On a démontré que F est continue pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

C Dérivabilité

Théorème II.5 (*Dérivation sous le signe $\int$*)

On suppose :
1. *pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.*
2. *f admet une dérivé partielle, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ vérifiant les hypothèses de théorème continuité sous le signe $\int$*

Alors :
- *La fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- *Pour tout $x \in I$, on a*
$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 3

Ce théorème est une interversion de limite et de dérivée :
$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 8

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$ la transformée de Fourier de la Gaussienne. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x)$, puis déterminer l'expression de F.

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-itx} e^{-at^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur J car $|e^{-itx} e^{-at^2}| \leqslant e^{-at^2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt$ converge.
2. f admet une dérivé partielle, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -ite^{-itx} e^{-at^2}$ vérifiant les hypothèses de théorème continuité sous le signe $\int$, soit :
   (a) *Continuité :*
   Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto -ite^{-itx} e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $x \mapsto -ite^{-itx} e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) *Domination :*
   On a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : \quad \left| -ite^{-itx} e^{-at^2} \right| \leqslant |t| e^{-at^2}.$$
   $t \mapsto |t| e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Les hypothèses de théorème de dérivation sous le signe $\int$ sont vérifiées donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie,
$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx} e^{-at^2} \mathrm{d}t.$$
Une intégration par parties permet de se ramener à
$$F'(x) = \left[\frac{i}{2a} e^{-itx} e^{-at^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2} (-ix) e^{-itx} \,\mathrm{d}t.$$
Soit
$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$
On résout l'équation différentielle vérifiée par F : $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$. De plus, $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
Finalement $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$.

Théorème II.6 (*continuité sous le signe $\int$ version locale*)

On peut remplacer l'hypothèse de domination par :
- ***Hypothèse de domination locale :*** *Pour tout segment K inclus dans I, il existe une fonction $\phi_K : J \to \mathbb{R}$ telle que*
  - *pour tout $(x,t) \in K \times J$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \phi_K(t)$,*
  - *ϕ_K est continue par morceaux et intégrable sur J.*

Théorème II.7 (*Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$*)

On suppose :
1. *f est de classe $\mathcal{C}^p$ par rapport à x, c.-à-d.*
   - *pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.*
2. *pour tout $0 \leqslant k < p$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue par morceaux et intégrable par rapport à t, c.-à-d.*
   - *pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ et pour tout $x \in I$ fixés, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.*
3. *$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$ est continue par morceaux par rapport à t, c.-à-d.*

— *pour tout* $x \in I$ *fixé, la fonction* $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J.

4. ***Hypothèse de domination :*** *Il existe une fonction* ϕ *telle que*
   — *pour tout* $(x,t) \in I \times J$, *on a* $\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \phi(t)$,
   — ϕ *est continue par morceaux et intégrable sur* J.

Alors :

— *La fonction* $F\colon x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ *est définie et de classe* C^p *sur* I.

— *Pour tout* $k \in \{0,\dots,p\}$, *pour tout* $x \in I$, *on a*

$$F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$$