

Chapitre 1

Probabilité finie

La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude.

Expérience	Univers Ω (ensemble des issues)	cardinal
Lancer d'un dé	Un entier $k \in \{1, \dots, 6\}$	finie
Prélèvement de n objets en sortie d'une chaîne de production dans l'échantillon	Nombre d'objets défectueux, $k \in \{0, \dots, n\}$	finie
Questionnaire à 100 questions binaires	Suite ω de 100 réponses $\omega \in \{oui, non\}^{100}$	finie
Lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile	Un entier $k \in \mathbb{N}$: le temps d'attente du premier succès	dénombrable
Temps d'attente pour une hotline	un temps $\omega \in [0, +\infty[$	continue
Mouvement d'un grain de pollen dans un liquide	Une fonction continue : la trajectoire $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$	continue
Mouvement d'un cours boursier	Une fonction continue : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$	continue

Bien que le résultat précis de chacune de ces expériences soit imprévisible, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. Par exemple si on jette 6000 fois le dé, on s'attend à ce que le nombre d'apparitions de la face « 3 » soit voisin de 1000. Si on met en service 100 ampoules, leurs durées de vie observées seront concentrées autour d'une certaine valeur moyenne.

La théorie des probabilités modélise l'expérience aléatoire dans un cadre formel en quantifiant le sentiment d'incertitude vis-à-vis d'un événement. La *statistique* permet de confronter les modèles probabilistes avec la réalité observée afin de les valider ou de les invalider. Par exemple si quelqu'un a 60 bonnes réponses sur 100 au questionnaire, est-il légitime de considérer qu'il a « mieux fait » que le hasard ?

Dans le cadre de cours, on limite l'univers à un ensemble finie, c'est à dire que l'on peut effectuer une énumération finie des issues de l'expérience aléatoire.

1.1 Modélisation probabilistes pour un univers fini

1.1.1 Axiomes des probabilité. Premières propriétés

Définition 1 (*Univers*)

Un **univers**, noté Ω , est l'ensemble de toutes les **issues** (résultats) qui peuvent être obtenues au cours d'une expérience aléatoire. Une issue est noté ω . Dans toute la suite de cours, on suppose que Ω est fini.

Exemple 1 (*Lancer de un dé*)

Pour l'expérience aléatoire du lancer d'un dé, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 2 (*Événement*)


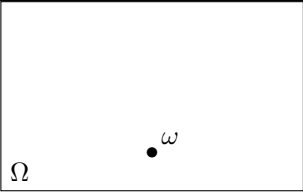
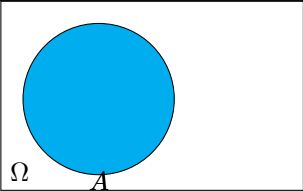
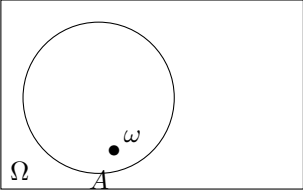
Un **événement** est une partie de l'univers. Un événement est dit **élémentaire** si il contient une unique issue.

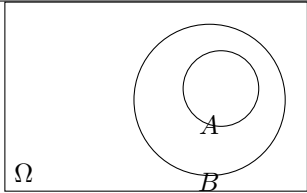
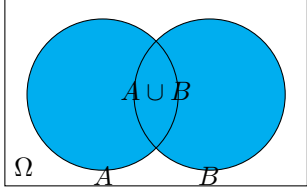
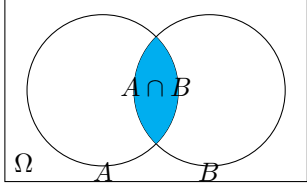
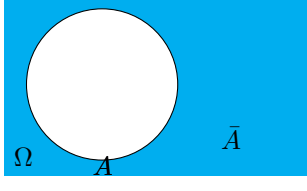
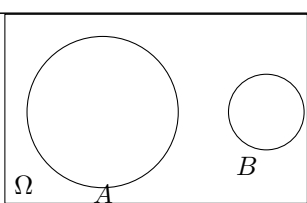
Exemple 2

Pour l'expérience aléatoire du lancer d'un dé, l'événement A "Obtenir un chiffre pair" est l'ensemble $\{2, 4, 6\}$. Il n'est pas élémentaire car il est composé de trois issues : 2, 4 et 6.

Définition 3 (*Notions et opérations*)

Les notions et opérations que l'on définit sur les événements correspondent aux notions et opérations que l'on définit sur les ensembles.

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire proba- biliste	Diagramme de Venn
\emptyset	ensemble vide	événement impos- sible	
Ω	ensemble plein	événement certain	
ω	élément de Ω	issue	
$\{\omega\}$	singleton	événement élémen- taire	
A	sous-ensemble de Ω	événement	
$\omega \in A$	ω appartient à A	Le résultat ω est une des réalisations possibles de A	

$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B	
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B	
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B	
\bar{A} (noté aussi A^c)	complémentaire de A dans Ω	événement contraire de A	
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles	

Définition 4 (Tribu)

L'ensemble des événements possibles appelé **tribu** est l'ensemble des parties de l'univers, soit $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 3

Pour le lancer d'une pièce, l'univers est $\{P, F\}$ et la tribu est $\{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.

Définition 5 (Espace probabilisable)

Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé **espace probabilisable**.

Définition 6 (Axiomes des probabilités)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour deux événements disjoints A et B , on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ s'appelle un **espace probabilisé**.

Proposition 1.1.1

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tel que $A \subset B$, on a :

$$P(A) \leq P(B)$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $P(A) \in [0, 1]$.
4. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

5. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a

$$P(A \cap B) \leq P(A) + P(B).$$

6. Si A_1, \dots, A_n est une famille d'événements deux à deux incompatibles, alors alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

7. **Sous additivité** : Si A_1, \dots, A_n est une famille d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Démonstration : 1. Les deux événements Ω et \emptyset sont disjoints d'où :

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\Omega \cup \emptyset) \\ P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) \\ P(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

2. Comme $A \subset B$, on a $A \cup (B \setminus A) = B$, d'où :

$$P(A) + P(B \setminus A) = P(B)$$

et

$$P(A) \leq P(B)$$

3. Comme $A \subset \Omega$, on a $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.
4. Comme $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$, on a

$$P(A \cup B) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(B).$$

Comme $(A \cap B) \subset A$, on a bien :

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$

5. Comme $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, on a $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

6. Démonstration par récurrence :

Soit H_n la propriété si A_1, \dots, A_n est une famille d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

— H_1 : on a bien $P(A) = P(A)$.

— $H_n \Rightarrow H_{n+1}$: Soit A_1, \dots, A_n, A_{n+1} une famille d'événements deux à deux incompatibles. On a :

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) &= P((\cup_{i=1}^n A_i) \cup A_{n+1}) \\ &= P(\cup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) \text{ car } \cup_{i=1}^n A_i \text{ et } A_{n+1} \text{ sont disjoints} \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) \text{ car } H_n \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \end{aligned}$$

7. Démonstration identique à la précédente en remplaçant les égalités par inégalités. ■

Définition 7 (*Probabilité uniforme*)

On appelle **probabilité uniforme** sur Ω la probabilité définie par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple 4 (*Lancer de deux dés*)

Pour l'expérience aléatoire du lancer de deux dés, l'univers est $\Omega = \overbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}^{\text{Issues du premier dé}} \times \overbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}^{\text{Issues du second dé}}$ et la probabilité est la probabilité uniforme.

L'événement A : "Somme des chiffres égale à 2 ou 12" est $\{(1, 1), (6, 6)\}$.

L'événement B : "Somme des chiffres égale à 7" est $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

D'où

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

et

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Proposition 1.1.2

Une probabilité P sur un univers fini est complètement déterminée par les $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$. $P(\{\omega\})$, appelé *poids de probabilité*.

En effet, pour $A \subset \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}), \\ &= \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}). \end{aligned}$$

Remarque 1

— Les poids d'une probabilité P vérifient

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

— Il est souvent plus facile de définir une probabilité sur les événements élémentaires ("les issues") que sur l'ensemble des événements.

Une probabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la donnée d'une suite finie (p_1, \dots, p_n) de nombres tels que :

1. $p_i = P(\{\omega_i\})$
2. $0 \leq p_i \leq 1$
3. $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Exemple 5

Une dé est pipée tel que la chance d'obtenir le chiffre 6 soit 2 fois plus grande que les autres chiffres. Dans ce cas, on a donc :

$$\begin{cases} p_6 = 2p_1 = 2p_2 = 2p_3 = 2p_4 = 2p_5 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}$$

Après résolution, la probabilité est donc définie par

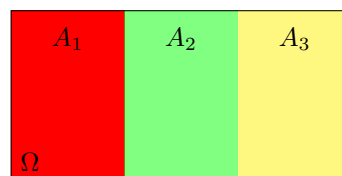
$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{7} \text{ et } p_6 = \frac{2}{7}.$$

Définition 8 (*Système complet d'événements*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Un **système complet d'événements**, appelé aussi **partition**, est une famille (A_1, \dots, A_n) d'événements deux à deux incompatibles tels que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$



A_1, A_2, A_3 est un système complet d'événements de Ω .

Remarque 2 ((A, \bar{A}))

A , et \bar{A} forme un système complet d'événements pour tout événement A .

Proposition 1.1.3 (*Probabilité d'un système complet d'événements*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

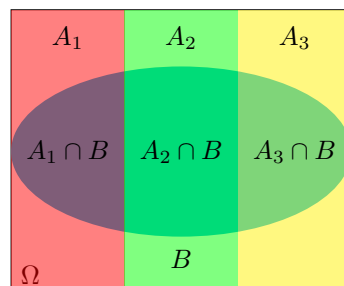
Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements.

On a :

$$1 = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Pour tout événement B , on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i).$$



Remarque 3

En particulier, pour tout événement A , on a :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

et pour tout événement B , :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ P(B) &= P(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)) \\ P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) \right) \\ P(B) &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i). \end{aligned}$$

En particulier si $B = \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{i=1}^n P(\Omega \cap A_i) \\ 1 &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

■

Remarque 4

Un système complet d'événements intervient dans la modélisation d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 6 (3 urnes)

On dispose de 3 urnes U_1 , U_2 , U_3 , chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de l'événement B : "obtenir une blanche" ? Les événements U_1 : "tirer l'urne 1", U_2 : "tirer l'urne 2", U_3 : "tirer l'urne 3" sont un système

complet d'événements. On a donc :

$$P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) + P(B \cap U_3).$$

Il reste à déterminer les probabilité de cette somme ce qui est l'objet des probabilités conditionnelles.

1.1.2 Probabilité conditionnelle

Dans l'expérience aléatoire des trois urnes, la probabilité de tirer une boule blanche est modifié si l'on dispose de l'information l'urne 1 a été choisie.

Le concept de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte ce complément d'information.

Par exemple, une classe est constituée de N élèves, dont

1. N_h hommes,
2. N_m majeurs,
3. $N_{h \cap m}$ hommes et majeurs.

Un élève passant au tableau est choisi aléatoirement.

On note H = "élève choisi est un homme" et M = "élève choisi est majeur".

L'équiprobabilité donne :

$$P(M) = \frac{N_m}{N} \text{ et } P(H \cap M) = \frac{N_{h \cap m}}{N}.$$

Quelle est la probabilité que l'élève choisie soit un homme sachant qu'il doit être majeur, noté $P_M(H)$? Dans cette expérience aléatoire, l'information supplémentaire est l'élève choisi est majeur. L'univers est maintenant l'ensemble des élèves majeurs donc la probabilité est :

$$P_M(H) = \frac{N_{h \cap m}}{N_m}.$$

Mais,

$$P_M(H) = \frac{N_{h \cap m}}{N_m} = \frac{\frac{N_{h \cap m}}{N}}{\frac{N_m}{N}} = \frac{P(H \cap M)}{P(M)}.$$

Par analogie, la définition formelle est :

Définition 9 (*Probabilité conditionnelle*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit A un événement tel que $P(A) > 0$. L'application

$$P_A \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \\ B \longmapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée **probabilité conditionnellement à A** , ou **probabilité sachant A** .

On note $P(B|A) = P_A(B)$.

Exemple 7

On lance un dé parfaitement équilibré. La probabilité d'obtenir un 6 est $1/6$. On suppose maintenant que ce dé a ses faces impaires peintes en vert, et ses faces paires peintes en bleu. On a aperçu de loin que, sur le dessus du dé, on a obtenu une face bleue. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 sachant une face bleue ?

On note $B = \{2, 4, 6\}$ l'événement "face bleue". On a :

$$P_B(\{6\}) = \frac{P(\{6\} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 1.1.4 (Formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements de probabilités non nulles.

Pour tout événement B , on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Démonstration : Dans l'équation d'un système complet d'événements de la proposition 1.1.3, il suffit de remplacer $P(B \cap A_i)$ par $P(B|A_i)P(A_i)$. ■

Exemple 8 (3 urnes)

La probabilité de tirer une boule blanche était de :

$$P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) + P(B \cap U_3).$$

Ce qui donne :

$$P(B) = P_{U_1}(B)P(U_1) + P_{U_2}(B)P(U_2) + P_{U_3}(B)P(U_3) = \frac{1}{10} \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \frac{1}{3} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Remarque 5

En particulier, si A est un événement de probabilité non nulle, on a pour tout événement B :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A}).$$

Proposition 1.1.5 (Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

Alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Cette formule permet d'inverser des conditions. Sa version simple découle de façon directe de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Proposition 1.1.6 (Formule de Bayes usuelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout événement B de probabilité non nulle, et pour tout $k \in \{1, n\}$, on a

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)}.$$

Remarque 6

Le système (A_1, \dots, A_n) représente souvent une liste de causes pouvant amener l'événement

B lors d'une étape suivante de l'expérience par exemple dans le problème des 3 urnes. Il est alors généralement facile de déterminer la probabilité qu'une certaine conséquence B ait lieu, sachant que la cause A_i a eu lieu, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(B)$ en respectant l'ordre temporel. Ces données permettent, grâce à la formule de Bayes, de remonter le temps, en déterminant la probabilité qu'une certaine cause A_i ait eu lieu sachant la conséquence B . Pour cette raison, cette formule est aussi souvent appelée formule de probabilité des causes.

Exemple 9 (3 urnes)

On cherche à connaître la probabilité que l'urne 1 est été choisie sachant que l'on a tiré une boule blanche, c'est à dire $P_B(U_1)$.

On a donc

$$P_B(U_1) = \frac{P_{U_1}(B)P(U_1)}{P_{U_1}(B)P(U_1) + P_{U_2}(B)P(U_2) + P_{U_3}(B)P(U_3)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{10}}{\frac{1}{3} \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \frac{6}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Exemple 10 (Test de dépistage)

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Ces chiffres ont l'air excellent, vous ne pouvez qu'en convenir. Toutefois, avant d'autoriser la commercialisation de ce test, vous faites appel au statisticien du ministère : ce qui vous intéresse, ce n'est pas vraiment les résultats présentés par le laboratoire, c'est la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif. La formule de Bayes permet de calculer cette probabilité.

On note M l'événement : "La personne est malade", et T l'événement : "Le test est positif". Le but est de calculer $P_T(M)$. Les données que vous avez en main sont $P(M) = 0,0001$ (et donc $P(\bar{M}) = 0,9999$), $P_M(T) = 0,99$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,001$. La formule de Bayes donne :

$$P_T(\bar{M}) = \frac{P_{\bar{M}}(T)P(\bar{M})}{P_M(T)P(M) + P_{\bar{M}}(T)P(\bar{M})} = \frac{0,9999 \times 10^{-3}}{10^{-4}0,99 + 0,9999 \times 10^{-3}} \approx 0,91.$$

C'est catastrophique! Il y a que 91% de chances qu'une personne positive au test ne soit pas malade! C'est tout le problème des tests de dépistage pour des maladies rares : ils doivent être excessivement performants, sous peine de donner beaucoup trop de "faux-positifs".

Définition 10 (Arbre de probabilité)

Un **arbre de probabilité** est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles, soit un graphe orienté et pondéré obéissant aux règles suivantes :

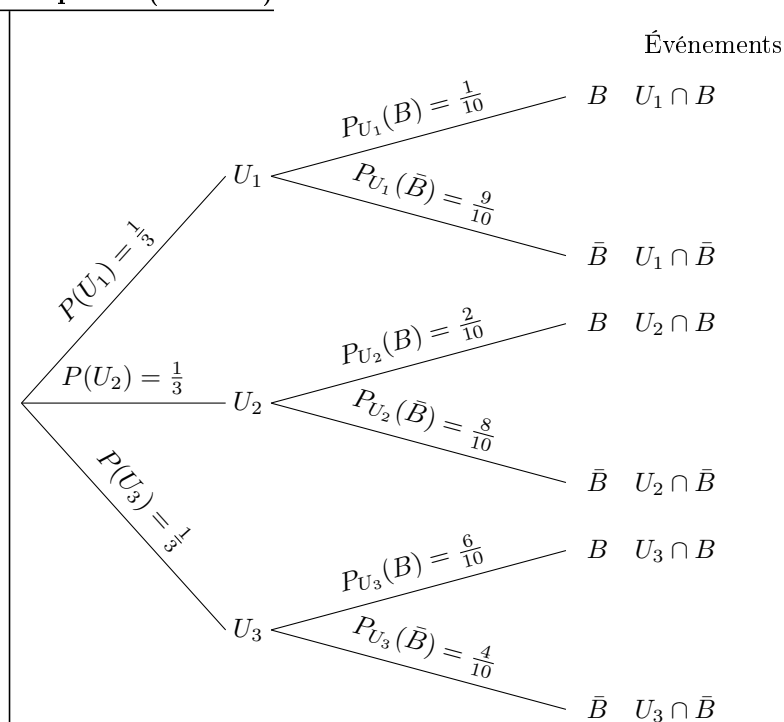
1. la somme des probabilités des branches issues d'un même sommet donne 1,
2. la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent,
3. la probabilités de la branche allant du sommet A vers le sommet B est la probabilité conditionnelle de B sachant que A est déjà réalisé $P_A(B)$.

On retrouve alors la propriété de la probabilité conditionnelle :

$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A).$$

Ainsi que la formule des probabilités totales, si A_1, A_2, \dots, A_n définit un système complet d'événements de probabilité non nulles, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Exemple 11 (3 urnes)

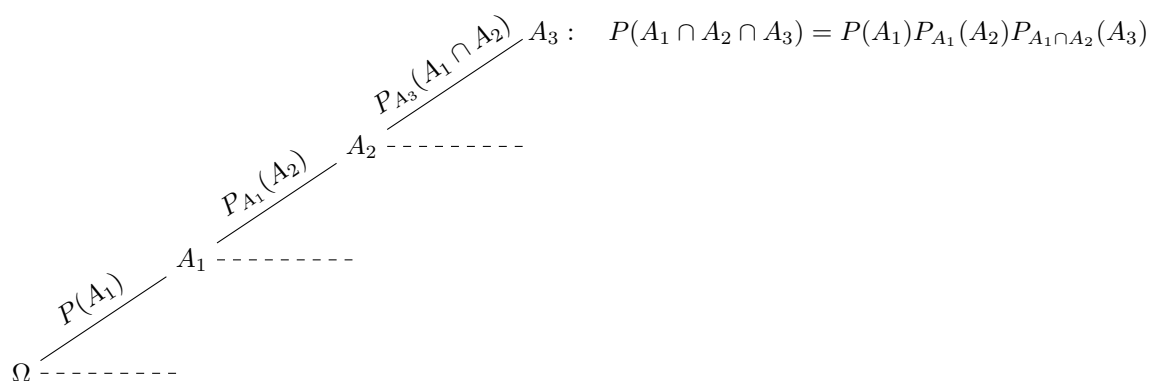
La probabilité de l'événement B est la somme des probabilités des parcours qui mènent à B , d'où

$$P(B) = P_{U_1}(B)P(U_1) + P_{U_2}(B)P(U_2) + P_{U_3}(B)P(U_3).$$

Proposition 1.1.7 (Formule des probabilités composées)

Soit A_1, A_2, \dots, A_n n événements vérifiant $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$



Démonstration : Il suffit de remonter le temps :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Puis :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

On itère jusqu'à A_1 . ■

Exemple 12

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

On note B_i l'événement : "La i -ème boule tirée est blanche (resp. noire)". On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(\bar{B}_3|B_1 \cap B_2).$$

Chacune des probabilités qui apparaît est facile à calculer, car $P(B_1) = 4/7$, $P(B_2|B_1) = 3/6$ (il reste 6 boules dont 3 blanches) et $P(\bar{B}_3|B_1 \cap B_2) = 3/5$. Finalement, on obtient $P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) = 6/35$.

1.1.3 Indépendance

On considère l'expérience aléatoire de lancer successivement deux fois un dé.

Soit A un événement relié au premier lancer, par exemple obtenir un chiffre pair sur le premier dé et soit B un événement relié au second lancer, par exemple obtenir un chiffre impair sur le second dé. L'information de savoir que l'événement A est réalisé, ne modifie pas la probabilité de l'événement B , autrement dit $P_A(B) = P(B)$. Mais, d'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. De ces deux égalités, on obtient $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et on dit que les deux événements sont indépendants.

Par analogie, la définition formelle est :

Définition 11 (Indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

— Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

— Une famille (A_1, \dots, A_n) d'événements sont **(mutuellement) indépendants** si pour toute partie $I \subset \{1, \dots, n\}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Exemple 13 (Lancer de deux dés)

A = "Obtenir 5 ou 6 sur le premier dé"

$A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

B = "Obtenir 6 sur le second dé"

$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$

$A \cap B$ = "Obtenir 5 ou 6 sur le premier dé et obtenir 6 sur le second dé".

$A \cap B = \{(5, 6), (6, 6)\}$. On a $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = P(A)P(B)$.

Donc les événements A et B sont indépendants.

Remarque 7

Trois événements peuvent être indépendants deux à deux, sans pour autant être mutuellement indépendants. Par exemple, on considère un dé équilibré à 4 faces ($\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ avec $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ et les événements :

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1 = 3\}, \quad C = \{1, 4\}.$$

On a :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

et

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C).$$

Les événements A , B et C sont deux à deux indépendants mais :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Donc les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition 1.1.8 (*Lien avec la probabilité conditionnelle*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque.

Alors les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration : Soit A et B deux événements tel que $P(A) \geq 0$.

$$\begin{aligned} A, B \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow P(B \cap A) = P(B)P(A) \\ &\Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \text{ car } P(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow P_A(B) = P(B). \end{aligned}$$

■

1.2 Variable aléatoire

Exemple 14 (*Jeu*)

Pour attirer les clients, un casino propose un nouveau jeu : le croupier lance simultanément 2 dés et calcule leur somme,

- si la somme est égale à 2 ou 12, le joueur gagne 2 euros,
- si la somme est égale à 7, le casino gagne 1 euro,
- dans les autres cas, c'est nul (le joueur gagne 0 euro).

A votre avis, ce jeu est-il favorable au joueur ou au casino ? A chaque partie quelle est le gain moyen du joueur ?

Dans ce jeu, on fait intervenir le hasard en observant la somme des points marqués par deux dés. Considérons le jet d'un dé bleu et d'un dé rouge et notons S la somme des points obtenus. On modélise cette expérience en prenant l'équiprobabilité sur l'univers

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \overbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}^{\text{Issues du premier dé}} \times \overbrace{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}^{\text{Issues du second dé}}.$$

Une issue, ω , est un couple (b, r) où b désigne le chiffre du dé bleu et r celui du rouge. La somme S est l'application :

$$S \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \{2, 3, \dots, 12\} \\ (b, r) \longmapsto b + r \end{array} \right.$$

Cette application est représentée par ce tableau :

$b \backslash r$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
2	5	6	7	8	9	10
1	6	7	8	9	10	11
2	7	8	9	10	11	12

On dit que S est une variable aléatoire sur $\{2, 3, \dots, 12\}$. En fait, l'observation qui nous intéresse dans cette expérience, ce n'est pas ω , mais seulement $S(\omega)$. On aimerait connaître la probabilité que la somme des points prenne une valeur donnée, soit $P(S = k)$ pour k entier fixé entre 2 et 12. En utilisant l'équiprobabilité sur et le tableau ci-dessus, on obtient

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Cela revient à considérer un nouvel univers :

$$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

et à munir cet ensemble de la probabilité P_S définie par le tableau des $P(S = k)$. Cette nouvelle probabilité s'appelle loi de la variable aléatoire S .

1.2.1 Généralités

Définition 12 (Variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
Une **variable aléatoire** est une application :

$$X \begin{cases} \Omega \longrightarrow E \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{cases}.$$

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle**.
On note $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des images de la variable aléatoire.

Définition 13 (Événements associés à une variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E .
Pour tout $A \subset E$, on définit l'événement $\{X \in A\}$ comme étant

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

Dans le cadre de ce chapitre, nous aurons recours aux notations suivantes (pour $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} (X \in A) &= X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\} \\ (X = x) &= X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\} \\ (X \leq x) &= X^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \\ (X < x) &= X^{-1}([-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\} \\ (X \geq x) &= X^{-1}([x, +\infty]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq x\} \\ (X > x) &= X^{-1}([x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) > x\} \end{aligned}$$

Exemple 15 (Jeu)

Par exemple, l'ensemble des issues donnant une somme à 7 est :

$$\{S = 7\} = S^{-1}(\{7\}) = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

et l'ensemble des issues donnant une somme à 2 ou 12 est :

$$\{S \in \{2, 12\}\} = S^{-1}(\{2, 12\}) = \{(1, 1), (6, 6)\}.$$

Définition 14 (Loi d'une variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble E fini.

L'application

$$P_X \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, 1] \\ A \longmapsto P(X^{-1}(A)) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur E , appelée **loi de la variable X** .

Proposition 1.2.1 (Déterminer une loi)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

Soit X une variable aléatoire.

Déterminer **la loi de probabilité P_X** de la variable aléatoire X , c'est donner

1. l'ensemble $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ des valeurs prises par X ,
2. pour chaque x_i de $X(\Omega)$, la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

:

Démonstration : La démonstration repose sur

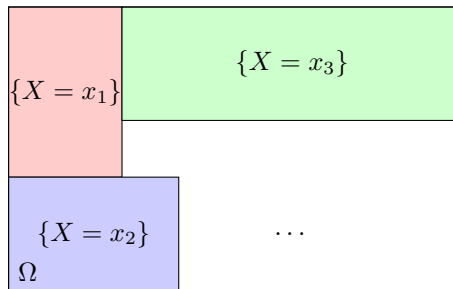
$$\forall A \subset \mathcal{P}(E) : P(X \in A) = P\left(\underbrace{\bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x)}_{\text{disjoints}}\right) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

■

Proposition 1.2.2

- $\forall x \in X(\Omega) : p_i = \sum_{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x_i} P(\{\omega\})$,
- Les événements $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ forme un système complet d'événements de Ω et donc :

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

**Exemple 16 (Jeu)**

La fonction $S : \{1, \dots, 6\}^2 \rightarrow \{2, \dots, 12\}$ est déterminée par ce tableau :

$b \backslash r$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
2	5	6	7	8	9	10
1	6	7	8	9	10	11
2	7	8	9	10	11	12

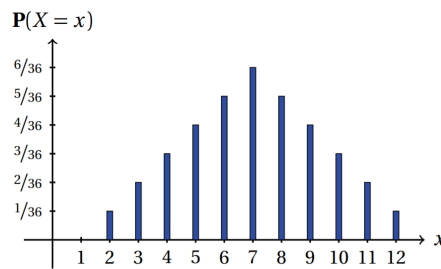
Du fait de l'équiprobabilité, on détermine la loi de probabilité S en calculant le nombre de cases. Par exemple,

$$P(S = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{\text{Card}(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\})}{\text{Card}(\{1, \dots, 6\}^2)} = \frac{3}{36}.$$

On obtient :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_k = P(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sa représentation graphique est :



Le théorème permet surtout définir une variable aléatoire par sa loi de probabilité sans avoir à étudier l'expérience aléatoire sous-jacente.

Théorème 1.2.3

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ une famille finie de réels et $\{p_1, \dots, p_n\}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Alors il existe une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(X = x_n) = p_n.$$

Définition 15 (Fonction d'une variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application quelconque. L'application ,

$$f \circ X \begin{cases} \Omega \longrightarrow F \\ \omega \longmapsto f(X(\omega)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire à valeurs dans F . L'usage veut qu'on la note abusivement $f(X)$ au lieu de $f \circ X$.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{X} & E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ X & & \end{array}$$

On a

$$P(f(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega) \text{ tel que } f(x)=y} P(X = x)$$

Exemple 17 (*Jeu*)

Le gain obtenu est fonction de la somme obtenue avec les deux dés. La modélisation est d'appliquer une fonction à la somme, S , des dés :

$$G \left| \begin{array}{l} \{2, 3, \dots, 12\} \longrightarrow \{-1, 0, 2\} \\ s \longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } s = 2 \text{ ou } 12 \\ -1 & \text{si } s = 7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

La variable aléatoire Gain est $G \circ X$.

Vérifions sur un exemple la modélisation. Si le jeté des dés donne $\omega = (1, 6)$, le gain de -1. On a $G \circ S(\omega = (1, 6)) = G(S(1, 6)) = G(1 + 6) = G(7) = -1$.

La loi de probabilité S est déterminé par :

k	-1	2	0
$P(G(S) = k)$	$\frac{6}{36} = P(S = 7)$	$\frac{2}{36} = P(S = 2) + P(S = 12)$	$\frac{28}{36} = 1 - P(G(S) = -1) + P(G(S) = 2)$

1.2.2 Vecteurs aléatoires

Définition 16 (*Loi conjointe*)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

On note (X, Y) le **couple de variables aléatoires** prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^2 .

La **loi conjointe** du couple (X, Y) est déterminé par :

1. $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}$, les valeurs prises par le couple
2. $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : P(X = x \cap Y = y)$,

On note $p_{i,j} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$.

Les événements $((X = x) \cap (Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ forment un système complet d'événements de Ω . En particulier, on a :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X = x \cap Y = y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{i,j} = 1.$$

Définition 17 (*Lois marginales*)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

La loi de X appelé **première loi marginale** et la loi de Y **second loi marginale** du couple.

Proposition 1.2.4 (*Relations*)

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On a :

$$\forall x \in X(\Omega) : P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

et

$$\forall j \in Y(\Omega) : P(Y = y) = \sum_{i \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)).$$

$X \backslash Y$	y_1	\dots	y_j	\dots	y_m	$P(X = x)$	
x_1	$p_{1,1}$	\dots	$p_{1,j}$	\dots	$p_{1,m}$	$P(X = x_1)$	$\leftarrow \sum_{k=1}^m p_{i,k}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	
x_i	$p_{i,1}$	\dots	$p_{i,j}$	\dots	$p_{i,m}$	$P(X = x_i)$	
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	
x_n	$p_{n,1}$	\dots	$p_{n,j}$	\dots	$p_{n,m}$	$P(X = x_n)$	
$P(Y = y)$	$P(Y = x_1)$	\dots	$P(Y = x_j)$	\dots	$P(Y = x_m)$	1	
	\uparrow $\sum_{k=1}^n p_{k,j}$						

Exemple 18

On tire deux nombres au hasard dans $\{-1, 1\}$. On note X leur somme, et Y leur produit. On cherche à déterminer la loi conjointe de (X, Y) . L'univers est $\{-1; 1\}^2$, que X prend ses valeurs dans $\{-2, 0, 2\}$ et Y dans $\{-1, 1\}$. Les variables aléatoires étant discrètes, il suffit de déterminer toutes les probabilités $P(X = x \text{ et } Y = y)$ pour tout couple $(x, y) \in \{-1; 1\}^2$. On a :

- $P(X = 2, Y = 1) = 1/4$ (correspond au cas on tire 1 et 1).
- $P(X = 2, Y = -1) = 0$.
- $P(X = 0, Y = 1) = 0$.
- $P(X = 0, Y = -1) = 1/2$.
- $P(X = -2, Y = 1) = 1/4$.
- $P(X = -2, Y = -1) = 0$.

$X \backslash Y$	-1	1	$P(X = x)$
-2	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
2	1/4	0	1/4
$P(Y = y)$	1/2	1/2	1

Exemple 19

Dans une classe, la répartition en fonction de l'âge et du genre est :

$\text{Age} \backslash \text{Genre}$	Fille	Garçon	Total
18	5	10	15
19	2	6	8
20	0	1	1
Total	7	17	24

On tire au hasard un élève dans la classe.

X représente l'âge de l'élève.

Y représente le genre de l'élève avec le label 0 pour une fille et le label 1 pour un garçon.

La loi de probabilité conjointe (X, Y) est déterminé par :

$X \backslash Y$	0	1	$P(X = x)$
18	5/24	10/24	15/24
19	2/24	6/24	8/24
20	0/24	1/24	1/24
$P(Y = y)$	7/24	17/24	1

1.2.3 Indépendance et lois conditionnelles

Définition 18 (*Lois conditionnelles*)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

1. On appelle **loi conditionnelle** de X sachant $(Y = y)$ pour $P(Y = y) \neq 0$, la probabilité définie par :

$$\forall x \in X(\Omega) : P_{Y=y}(X = x) = \frac{P(X = x \cap Y = y)}{P(Y = y)}$$

2. On appelle **loi conditionnelle** de Y sachant $(X = x)$ pour $P(X = x) \neq 0$, la probabilité définie par :

$$\forall y \in Y(\Omega) : P_{X=x}(Y = y) = \frac{P(X = x \cap Y = y)}{P(X = x)}$$

Remarque 8

Les lois marginales et les lois conditionnelles déterminent la loi conjointe :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : P(X = x \cap Y = y) = P_{X=x}(Y = y)P(X = x)$$

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : P(X = x \cap Y = y) = P_{Y=y}(X = x)P(Y = y)$$

Définition 19 (*Indépendance*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $X(\Omega)$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $Y(\Omega)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y).$$

Remarque 9

Dans la modélisation d'une expérience aléatoire, l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires est souvent une donnée de l'expérience et non pas une propriété à vérifier. Par exemple, la modélisation de l'expérience du jetter des deux dés serait :

- X_1 , la variable aléatoire représentant le chiffre du premier dé,
- X_2 , la variable aléatoire représentant le chiffre du second dé,
- X_1 et X_2 , supposées indépendantes,
- $S = X_1 + X_2$, la somme des deux dés.

Théorème 1.2.5

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et Y une variable aléatoire à valeurs dans F .

Si X et Y sont indépendantes, il en va de même pour les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ où $f : E \rightarrow E'$ et $g : F \rightarrow F'$ sont deux applications quelconques.

1.2.4 Espérance

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est la moyenne pondérée par les probabilités d'apparition de chaque valeur. Le théorème de la loi forte des grands nombres démontrera que l'espérance est la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.

Définition 20 (*Espérance d'une variable aléatoire*)

Soit X une valeur aléatoire réelle.

L'**espérance de X** est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Exemple 20 (*Somme de deux dés*)

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés en notant S la somme des chiffres obtenus. L'espérance de S vaut alors :

$$E(S) = \sum_{s \in S(\Omega)} sP(S = s) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Théorème 1.2.6 (*Formule de transfert*)

Si X est une variable aléatoire réelle, alors

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Plus généralement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : E \rightarrow F$, alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

Remarque 10

La formule de transfert permet de calculer $E(f(X))$ sans avoir à déterminer la loi de $f(X)$. Dans l'exemple du jeu, l'espérance de la variable aléatoire $G(X)$ représente le gain moyen du joueur. On applique la formule du transfert :

$$E(G(S)) = \sum_{s \in \{2,3,\dots,12\}} G(s)P(S = s) = 2P(S = 2) - 1P(S = 7) + 2P(S = 12) = 2 \cdot \frac{1}{36} - 1 \cdot \frac{6}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} = -\frac{1}{18}.$$

En conclusion, ce jeu n'est pas favorable au joueur.

Démonstration : Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les valeurs prises par la variables aléatoires.

Les événements $X^{-1}(x_1), \dots, X^{-1}(x_n)$ est un système complet d'événements. On a :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^n X^{-1}(x_i)} X(\omega)P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}} \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} X(\omega)P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}} \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} xP(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}} x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} P(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)
 \end{aligned}$$

■

Théorème 1.2.7

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Démonstration : On applique le théorème de transfert à la variable aléatoire $f(X, Y) = XY$ d'où

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x \cap Y = y) \\
 &\stackrel{\text{indépendance}}{=} \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) \\
 &= E(X)E(Y).
 \end{aligned}$$

■

Définition 21 (Centrée)

Une variable aléatoire est dite **centrée** si son espérance est nulle.

Proposition 1.2.8 (propriétés de l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $E(a) = a$.
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Si $P(X \geq 0) = 1$, alors $E(X) \geq 0$.
- Si $P(X \leq Y) = 1$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Exemple 21 (Centrée une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire.
Alors la variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est centrée.

1.2.5 Variance

La variance est une mesure de la dispersion des valeurs d'une loi de probabilité.

Définition 22 (variance d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire réelle. Sa **variance** est $E((X - E(X))^2)$ et on la note $V(X)$.
Son **écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 1.2.9 (Formule)

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$, on a

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exemple 22 (Somme de deux dés)

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés en notant S la somme des chiffres obtenus. On a :

$$E(S^2) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{s \in S(\Omega)} s^2 P(S = s) = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{6}.$$

La variance de S vaut alors :

$$V(S) = E(S^2) - (E(S))^2 = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}.$$

et son écart-type

$$\sigma(S) = \sqrt{V(S)} \approx 2,42.$$

Définition 23 (covariance de deux variables aléatoires)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Leur **covariance** est $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ et on la note $\text{Cov}(X, Y)$.

Proposition 1.2.10 (Propriétés)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles.

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.

Définition 24 (corrélation)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de variance non nulles. Leur **coefficient de corrélation** est

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proposition 1.2.11 (Propriétés)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de variance non nulles.

- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$
- $\rho(X, Y) = \pm 1$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que l'événement $(Y = aX + b)$ soit certain.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X, Y) = 0$. On dit qu'elles sont *décorrélées*. La réciproque est fausse.

1.2.6 Loïs usuelles

Définition 25 (loi uniforme)

Une variable aléatoire réelle X suit la **loi uniforme** sur $\{1, 2, \dots, n\}$ si

1. $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$,
2. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : P(X = k) = \frac{1}{n}$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$.

On a : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Définition 26 (loi de Bernoulli)

Une variable X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
2. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On a : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Proposition 1.2.12 (Loi indicatrice)

Soit A est un événement de Ω . La variable aléatoire réelle 1_A définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \in \bar{A} \end{cases}$$

est une variable de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$. On l'appelle **loi indicatrice** de l'événement A .

Définition 27 (loi binomiale)

Une variable X à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ suit la **loi binomiale** de paramètres n et p si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$,
2. $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

On a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Remarque 11

Pour $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p .

Proposition 1.2.13 (Loi des tirages avec remise)

Soit X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre p .

Alors $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n, p .

En d'autres termes, si l'expérience aléatoire est une répétition de n épreuves identiques et indépendantes tel que chaque épreuve est une expérience Bernoulli de paramètre p et si S est égale au nombre de succès des n épreuves de l'expérience, alors S suit une loi binomiale de paramètres n, p .

1.2.7 Convergence et approximations

Proposition 1.2.14 (Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires tel que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$.

Alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration : Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} (p_n)^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) (p_n)^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} 1 \cdot (1 - 1/n) \dots (1 - (k+1)/n) (p_n/n)^k (1 - p_n)^{n-k} \end{aligned}$$

D'une part $\overbrace{1 \cdot (1 - 1/n) \dots (1 - (k+1)/n)}^{k \text{ facteurs fixes}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, d'autre part $(p_n/n)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda^k$ et enfin $(1 - p_n)^{n-k} = e^{(n-k) \ln(1-p_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}$ car $(n-k) \ln(1-p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -np_n$. Finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

■

En pratique, si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 30$, $p \leq 0,10$ et $np \geq 15$, on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np . Ce théorème justifie le fait que la loi de Poisson est utilisée comme modèle de certaines expériences aléatoires (nombre de clients entrant dans un magasin, nombre de coquilles dans une page de journal,...).

Proposition 1.2.15 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle positive.
Pour tout $a > 0$, on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

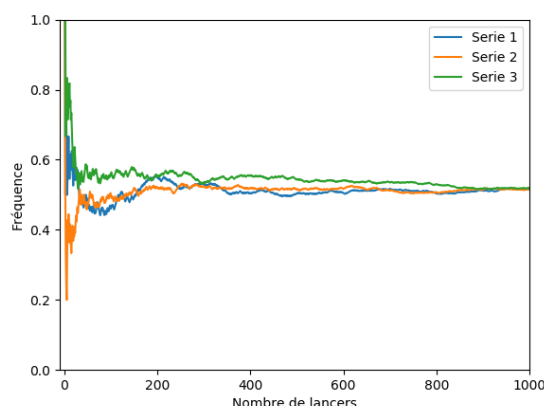
Proposition 1.2.16 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$, on a

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Cette inégalité présente un intérêt théorique en majorant la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne. Nous allons l'utiliser pour prouver la loi faible des grands nombres.

Lors d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, les deux côtés « pile » et « face » apparaissent de façon équiprobable pour des raisons de symétrie : on ne s'attend pas plus à l'un ou à l'autre côté. Cette mesure de l'attente s'appuie souvent sur une considération statistique : on observe que la fréquence des occurrences de chaque côté se rapproche de $1/2$.



Le théorème de la loi des grands nombres permet de justifier ce résultat en interprétant la probabilité comme une fréquence de réalisation.

La modélisation de cette expérience aléatoire est :

1. **n^{ième} lancer** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n , représente le résultat du n^{ième} lancer. Elle suit une loi Bernoulli de paramètre p (l'issue 0 représente le pile et l'issue 1 le face). Elles sont supposées indépendantes. On a $E(X_n) = (1-p).0 + p.1 = p$.
2. **fréquence** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n , représente la moyenne des résultats obtenus au cours des n premiers lancers, soit :

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

L'issue, ω , correspondant à une succession de faces existe, $X_n(\omega) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc 1 est une valeur possible de la variable aléatoire S_n . Cependant, le théorème de la loi faible des grands nombres prouve que la probabilité que S_n s'écarte de l'espérance $E(X_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Théorème 1.2.17 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose toutes les variables indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et un écart type σ . Posons $S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Alors

$$\forall \epsilon > 0 : P(|S_n - m| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et par indépendance des variables aléatoires,

$$\forall \epsilon > 0 : P(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\epsilon^2} = \frac{\frac{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n^2}}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 12

Le TP Python https://github.com/VincentTariel/cours/blob/master/probabilite/simulation_variable_aleatoire_activite_python.pdf permet de vous familiariser avec ce théorème sur des applications.