Chapitre 1

Série entière

Exemple 1 (***Série exponentielle***)

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad (E)$$

Par définition, l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre est l'application $x \to e^x$.

1. Déterminons les solutions de (E) sous forme polynomiale. Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Pour des raisons de degré, uniquement le polynôme nul convient.
2. Déterminons les solutions de (E) sous forme "polynomiale de degré infini". Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. "Soit x."
"Par dérivation", on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) \text{ "par interversion des symboles dérivée et somme"} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ par translation d'indice}
\end{aligned}$$

Comme $f'(x) = f(x)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

"Par identification", on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+1) a_{n+1} = a_n.$$

Par récurrence, on prouve que

$$a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

Comme la condition initiale est $f(0)=1$ et $f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$, on obtient $a_0=1$. Comme la fonction exponentielle est l'unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale, on trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3. Déterminons les solutions de (E) sur $\mathbb{C}$. Par un raisonnement similaire, l'unique solution sur $\mathbb{C}$ est la fonction exponentielle définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Une **série entière** est un "polynôme de degré infini" :

$$\sum a_n z^n$$

où les coefficients a_n forment une suite réelle ou complexe et z une variable complexe.
Dans ce chapitre, nous allons donner du sens aux guillemets de l'exemple précédent :

1. "Soit x." : déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, c'est à dire déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
2. "Par dérivation" : déterminer la dérivabilité de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
3. "Par interversion des symboles dérivée et somme" : démontrer l'égalité,
4. "Par identification" : démontrer l'unicité du développement sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Les séries entières sont

1. un outil :
   (a) dans la résolution d'équations différentielles, par exemple $(1+x)y' = \alpha y$, en cherchant les solutions sous la forme $y(x) = \sum a_n x^n$,
   (b) dans l'étude du comportement asymptotique d'un somme de variable aléatoires et la caractérisation d'une variable aléatoire par la fonction génératrice : $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0} P(X=k)t^k$,
   (c) dans la modélisation des systèmes dynamiques de manière discrète à l'aide de la transformée en Z, soit $s(n)$ l'état du système au temps n, sa transformée en Z est

$$S(z) = \mathcal{Z}\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) z^{-n}.$$

2. un objet préalable à l'analyse complexe des fonctions holomorphes et analytiques par exemple la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ dans l'exemple 1.

Les séries entières sont un exemple de séries de fonctions. Pour une cohérence mathématiques, il faudrait étudier d'abord le cadre général des suites et séries de fonctions avant l'exemple. Cependant, d'un point de vue pédagogique, nous commençons par cet exemple comme introduction du cadre général. Nous utiliserons voir chapitre $(f_n)_{n\in N}$ quand ferons référence au cadre général.

1.1 Généralités

Définition 1 (*Série entière*)

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n f_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{C}}$ est une

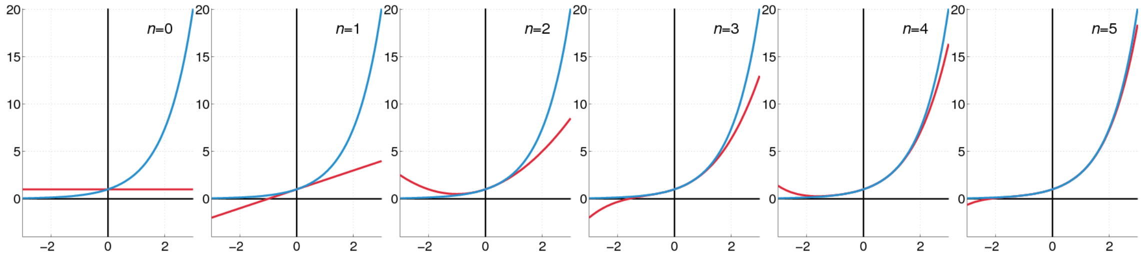

FIGURE 1.1 – La fonction exponentielle, $x \mapsto e^x$ en bleue, et les fonctions sommes partielles $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour différents n en rouge. On observe la convergence de la fonction somme partielle vers la fonction exponentielle.

suite numérique et où $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(z) = a_n z^n$. La **somme** de la série entière est la fonction

$$f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 2 (*Série exponentielle*)

Comme vu dans l'exemple 1, la somme de la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Exemple 3 (*Série géométrique*)

La somme de la série $\sum_n x^n$ est :

$$\forall x \in]-1,1[: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Lemme 1.1.1 (*Lemme d'Abel*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1. *La série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.*
2. *Plus précisément, voir le chapitre sur la s la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ dès que $0 \leqslant r < |z_0|$.*

Remarque 1

Il n'y a pas toujours convergence normale (ni uniforme) sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$.

Définition 2 (*rayon de convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Le **rayon de convergence** $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup \Big\{ r > 0 \text{ tel que la suite de terme général } |a_n|\, r^n \text{ est bornée} \Big\}.$$

Corollaire 1.1.2 (*Convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.
- *Si $|z_0| < R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ converge absolument.*
- *Si $|z_0| > R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ diverge grossièrement ; plus précisément, la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.*
- *Si $|z_0| = R$, la série peut ou non converger.*

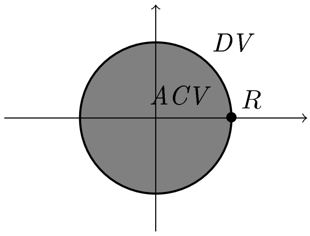

FIGURE 1.2 – Disque de convergence d'une série entière

Para
Définitions
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
- On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

- On appelle **cercle d'incertitude** (et parfois aussi, malheureusement, cercle de convergence) de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

1.2 Détermination du rayon de convergence

1.2.1 Avec le lemme d'Abel

Para
Proposition
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
- Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $R ? |z_0|$.
- Si $\sum_n |a_n z_0^n|$ diverge, alors $R ? |z_0|$.

Exemple 4

La rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1 car
- la suite (x^n) tend vers 0 si $|x| < 1$ (donc est bornée), donc $R?1$,
- la suite (x^n) diverge si $|x| > 1$, donc $R?1$,

En conclusion $R = 1$.

1.2.2 Avec d'Alembert

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. On suppose que :
- il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n?N$ on ait $a_n?0$,
- $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors $R = 1/?$ si $l \neq 0$ et $+\infty$ si $l = 0$.

Exemple 5

La rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ car

— la suite (x^n) tend vers 0 si $|x| < 1$ (donc est bornée), donc $R?1$,
— la suite (x^n) diverge si $|x| > 1$, donc $R?1$,

En conclusion $R = 1$.

1.2.3 Avec les règles de comparaison

Para
Théorème

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a et R_b.

1. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| = \mathrm{O}\left(n^\alpha |b_n|\right)$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a ? R_b$.

2. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $K > 0$ tel que $|a_n| \sim K n^\alpha |b_n|$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a = R_b$.

1.3 Opérations sur les séries entières

Para
Notations

— Étant donné une série entière $\sum_n a_n z^n$, on note R_a son rayon de convergence et f_a sa somme.
— De même pour $\sum_n b_n z^n$ et $\sum_n c_n z^n$.

1.3.1 Somme

Définition 3

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières. On définit la **somme** de ces deux séries entières comme étant la série entière $\sum_n c_n z^n$ où

$$?n \in \mathbb{N}, \quad c_n = a_n + b_n.$$

Para
Proposition

Dans ces conditions,
— $R_c ? \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a ? R_b$,
— pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $f_c(z) = f_a(z) + f_b(z)$.

1.3.2 Multiplication par un scalaire

Définition 4

Soit ? un scalaire et $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On définit le **produit** du scalaire et de la série entière comme étant la série entière $\sum_n b_n z^n$ où

$$?n \in \mathbb{N}, \quad b_n = ?a_n.$$

Para
Proposition

Dans ces conditions,
— $R_b = R_a$ si $??0$, et $R_b = +\infty$ si $? = 0$,
— pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, on a $f_b(z) = ?f_a(z)$.

1.3.3 Produit de Cauchy

Définition 5

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières. On définit le **produit de Cauchy** de ces deux séries entières comme étant la série entière $\sum_n c_n z^n = \sum_n a_n z^n \times \sum_n b_n z^n$ où

$$?n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Para
Proposition

Dans ces conditions,
— $R_c ? \min(R_a, R_b)$,
— pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $f_c(z) = f_a(z) f_b(z)$.

1.4 Propriétés de la somme

Para
Théorème[continuité sur le disque ouvert de convergence]
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Alors f est continue sur le disque ouvert de convergence

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Para
Proposition
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors les deux séries entières suivantes :

— la « dérivée formelle » $\sum_n b_n z^n$ où $b_n = (n+1)a_{n+1}$,
— la « primitive formelle » $\sum_n c_n z^n$ où $c_n = \frac{a_{n-1}}{n}$

ont également un rayon de convergence égal à R.
Para
Théorème[primitivation terme à terme]
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Une primitive de f sur $]-R, R[$ est donnée par

$$F\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Para
Proposition[dérivation terme à terme]
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Alors f est une fonction de classe C^1 sur $]-R, R[$ et $\forall x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1}\, x^n.$$

Para
Théorème[généralisation]
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Alors f est une fonction de classe C^1 sur $]-R, R[$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} \frac{(n+p)!}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Para
Corollaire
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

1.5 Fonctions développables en séries entières

Para
Notation
— I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, +\alpha[\subset I$.

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière** au voisinage de 0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R?\alpha$ tels que $]-\alpha, \alpha[\subset I$ et

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Para
Proposition
Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0, alors il existe $\alpha > 0$ tel que f soit de classe C^1 sur $]-\alpha, \alpha[$.

Définition 7

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On appelle **série de Taylor** de f au voisinage de 0 la série entière

$$\sum_n a_n z^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Para
Théorème[unicité du développement en série entière]
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0. Alors tout développement en série entière de f au voisinage de 0 est égal à sa série de Taylor au voisinage de 0.
Para
Corollaire
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0. Alors f admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre, et ce développement limité s'obtient en tronquant le développement en série entière.
Para
Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que
- f est de classe C^1 sur $]-\alpha, \alpha[$,
- la série de Taylor de f converge sur $]-\alpha, \alpha[$,
- f soit égale à la somme de se série de Taylor sur $]-\alpha, \alpha[$.

1.6 Fonctions usuelles

1.6.1 Exponentielle complexe

Para
Proposition
La série entière $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Notons $\phi : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ sa somme. On montre successivement :

1. $\phi(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $?(z_1 + z_2) = ?(z_1)?(z_2)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^x$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\phi(i\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

Définition 8

On appelle **exponentielle** la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence infini. On note fréquemment e^z au lieu de $\exp(z)$.

Para
Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé et $\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \exp(tz) \end{array} \right.$

Alors ϕ est de classe C^∞ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi^{(n)}(t) = z^n \exp(tz).$$

1.6.2 Trigonométrie

Para
Définitions

On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
- $\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$
- $\operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

Il s'agit de prolongement des fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, classiquement définies sur $\mathbb{R}$.

Para
Proposition

- Les formules usuelles de trigonométries restent valables, notamment $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$:
  - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- On peut passer de la trigonométrie directe à la trigonométrie hyperbolique sachant que ?$z \in \mathbb{C}$:
  - $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$
  - $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$
  - $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$
  - $\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$

Para
Proposition

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
- $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
- $\operatorname{ch} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$
- $\operatorname{sh} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Il s'agit de séries entières de rayon de convergence infini.

1.6.3 $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Para
Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$. Alors f est développable en série entière au voisinage de 0. Plus précisément, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

On note parfois $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 si $\alpha ? \mathbb{N}$, et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.

Para

Remarque

Si $\alpha \in ?$, le développement est également valable dans $\mathbb{C}$

$$?z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1, \quad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini comme ci-dessus.

Exemple 6

Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \arcsin x$.

1.6.4 Fractions rationnelles

Para

Méthode

Pour obtenir un développement en série entière (au voisinage de 0) d'une fraction rationnelle, on peut :

— la décomposer en éléments simples $\frac{1}{(x-a)^n}$ où $a \in \mathbb{C}^*$;

— remarquer que $\frac{1}{(x-a)^n} = (-a)^{-n} \left[1 + \left(-\frac{x}{a}\right)\right]^{-n}$;

— se ramener à $(1+u)^\alpha$.

On obtient une série entière de rayon de convergence $|a|$.