Dénombrement

Exercice 1 (*, Anagramme) Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE.

Exercice 2 (*, Code secret) Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Exercice 3 (*, Poker) Lors d'une partie de poker, un joueur reçoit 5 cartes d'un jeu de 32 cartes ; ce qui constitue une main.

1. Combien y a-t-il de mains possible ?
2. Combien y a-t-il de mains possible avec un carré ? ex. 1♣ 1♦ 1♡ 1♠ V ♡
3. Combien y a-t-il de mains avec un full ? ex. R♣ R♦ 8♡ 8♠ 8♣
4. Combien y a-t-il de mains avec une double paire ? ex. D♣ D♦ 8♡ 8♣ R♠
5. Combien y a-t-il de mains avec un brelan ? ex. V ♣ V ♦ V ♡ 1♠ 9♣
6. Combien y a-t-il de mains avec une paire ? ex. D♣ D♦ 7♡ 9♠ V ♣
7. Combien y a-t-il de mains avec une quinte flush ? ex. 7♣ 8♣ 9♣ 10♣ V ♣
8. Combien y a-t-il de mains avec une suite ? ex. 8♣ 9♦ 10♡ V ♠ D♦
9. Combien y a-t-il de mains avec une couleur ? ex. 1♡ 7♡ 10♡ D♡ R♡
10. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ?

Exercice 4 (*, géométrie) Soit n droites sur un plan non parallèles et sans triplet de droites concourantes. Combien peut-on obtenir de triangles au maximum ?

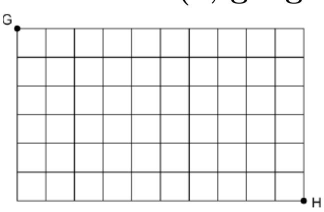
Exercice 5 (*, Mousquetaires) Les trois mousquetaires (donc quatre personnes avec d'Artagnan), ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève en premier et prend deux bottes au hasard.

1. Combien de possibilités s'offrent à lui ?
2. Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes forment une paire (une droite et une gauche quelconques) ?

Exercice 6 (*, démocratie) On élit les 2 délégués au hasard parmi une classe de 22 élèves avec 14 garçons/8 filles et 15 responsables et 7 irresponsables

1. Combien y a-t-il de manières de choisir les 2 délégués ?
2. avec la parité en plus ?
3. avec 2 personnes irresponsables ?

Exercice 7 (*, google) Voici le plan d ?une ville américaine, G étant la gare et H un hôtel :



Chaque bloc est un carré de 100 m sur 100 m. Quelle est la longueur minimale d ?un trajet qui va de la gare à l'hôtel indiqué ? Comment faut-il se déplacer sur ce quadrillage si on ne veut pas dépasser cette longueur minimale ? Combien de trajets différents y a-t-il pour aller de la gare à l'hôtel sans faire de détour ?

Exercice 8 (*, rangement) Mr T a 5 livres d'algèbre, 3 livres de géométrie et 4 livres d'analyse.

1. De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère de sa bibliothèque ?
2. Même question en les regroupant par sujet.

Exercice 9 (*, Nombre de parties d'un ensemble) Dénombrer l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$, noté $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$.

Dénombrement

Correction 1 Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Pour le premier mot MATHS, il n'y a pas de lettres identiques, d'où $5\,!$ combinaisons.
Pour le second mot, on a deux façons de compter :

1. R est présent deux fois et si on permute cette lettre, on trouve le même mot. On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques, d'où $4\,!/2\,!$ combinaisons.
2. en utilisant le principe de décomposition, on place d'abord la lettre R, soit 2 lettres parmi 4, d'où $4\,!/(2\,!2\,!)$ combinaisons, puis la lettre I (il reste 2 places), soit 2 combinaisons , et enfin la lettre E (il reste 1 place), soit 1 combinaison. En multipliant ces combinaisons, on obtient $4\,!/2\,!$ combinaisons.

Correction 2 On place le 0 soit au chiffre des unités, soit au chiffre des dizaines, soit au chiffre des centaines, soit au chiffre des milliers (mais pas au chiffre des dizaines de milliers) et le 0 étant placé, on n'y a plus droit. D'après le principe de décomposition, on : $4.9.9.9.9 = 4.9^4 = 4.6561 = 26244$.

Correction 3

1. Une main correspond à un tirage sans remise et sans ordre. Donc le nombre de mains est $\binom{52}{5}$
2. nombre de mains avec un carré = " choisir 1 carré (parmi 13) et une autre carte (parmi 48) ". D'après le principe de décomposition, on a $\binom{13}{1}\binom{48}{1} = 624$
3. nombre de mains avec un full= " choisir 1 brelan et choisir une paire " mais attention : choisir 1 brelan=" choisir une figure (parmi 13) et choisir 3 cartes (parmi les 4 de la figure) " et choisir 1 paire=" choisir une figure (parmi les 12 restantes) et choisir 2 cartes (parmi les 4 de la figure)". D'après le principe de décomposition, on a
$$\overbrace{\binom{13}{1}\binom{4}{3}}^{brelan}\overbrace{\binom{12}{1}\binom{4}{2}}^{paire} = 3744$$
4. nombre de mains avec une double paire= " choisir deux paires (différente sinon c'est un carré !) et choisir une cinquième carte ". D'après le principe de décomposition, on a
$$\overbrace{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}^{2paires\neq}\binom{48}{1} = 3744$$
Attention, le nombre de mains n'est pas = " choisir 1 paire, puis choisir une paire parmi 12 et une autre carte (parmi 44) " car on met de l'ordre dans les paires.
5. nombre de mains avec un brelan=" Choisir un brelan et deux autres cartes (mais sans paire) ". D'après le principe de décomposition, on a
$$\overbrace{\binom{13}{1}\binom{4}{3}}^{brelan}\overbrace{\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}^{2cartes} = 54912$$

6. nombre de mains avec une paire= " choisir une paire et choisir 3 autres cartes qui ne forment ni un brelan ni une autre paire ". D'après le principe de décomposition, on a

$$\overbrace{\binom{13}{1}\binom{4}{2}}^{brelan}\overbrace{\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}^{3cartes} = 1098240$$

7. nombre de mains avec une quinte flush=" choisir une couleur puis 5 cartes qui se suivent ". Pour choisir les 5 cartes à suivre il suffit de choisir la première. On peut choisir l ?as, le roi ,. . ., le 5 mais pas l'une des 4 dernières cartes. D'après le principe de décomposition, on a

$$\binom{4}{1} * 9 = 36$$

8. nombre de mains avec une suite=" choisir 5 cartes qui se suivent peu importe leur couleur et retrancher les quintes flush". On 9 choix de la première l ?as, le roi ,. . ., le 5 avec 4 choix de couleurs, puis pour la seconde 4 choix de couleurs et ainsi de suite ce qui donne : $9^5 \times 9?36 = 9180$
9. nombre de mains avec une couleur=" choisir une couleur puis 5 cartes dans la couleur et retrancher les quintes flush" ce qui donne : $4\binom{13}{4} - 36 = 5112$
10. nombre de mains avec au moins un as = nombre de mains possibles - nombre de mains sans as donc on a $\binom{52}{4} - \binom{48}{4} = 886656$

Correction 4 Un triangle appartient à trois droites distinctes, soit un tirage sans ordre et sans remises de 3 boules parmi n. Donc on a $\binom{n}{3}$

Correction 5

1. 2 bottes parmi 8, soit un tirage sans ordre et sans remises de 2 boules parmi 8. Donc on a $\binom{8}{2}$
2. choisir un mousquetaire et choisir 2 bottes parmi 2. Donc on a 4.

Correction 6

1. Une élection correspond à un tirage sans remise et sans ordre. Donc le nombre de manières est $\binom{22}{2}$
2. parité = " choisir 1 garçon (parmi 14) et choisir 1 fille (parmi 8) ". D'après le principe de décomposition, on a $\binom{14}{1}\binom{8}{1}$.
3. irresponsables = " choisir 2 irresponsables parmi 15. Soit $\binom{15}{2}$.

Correction 7 1600 m
16 déplacements
On pose B = "vers le bas" et D = "vers la droite". Un exemple de chemin de G à H est le mot BD...DBB...B où B est écrit 6 fois et D est écrit 10 fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent. Si on regarde la position du D dans un anagramme, on se ramène à un triage sans remise et sans ordre. Donc le nombre de chemins est 6 parmi 16, soit $\binom{16}{6}$

Correction 8 1. Un rangement correspond à un tirage sans remise et avec ordre de toutes les boules (le numéro de la boule correspond à la position du livre). Soit 12!.

2. nombre de regroupant par sujet="rangement par matière, puis rangement de chaque matière". Soit 3!5!3!4!.

Correction 9 Démontrons que cette fonction est bijective :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\{1,\dots,n\}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\{1,\dots,n\},\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

avec $\mathbf{1}_A$ fonction indicatrice de l'ensemble A

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{rcl} \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ i & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } i \in A \\ 0 \text{ si } i \notin A \end{cases} \end{array}$$

— injective : soit $A, B \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ tel que $f(A) = f(B)$, d'où $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ donc $A = B$.

— surjectivité : soit $\phi \in \mathcal{F}(\{1,\dots,n\},\{0,1\})$. On pose $A = \{i \in \{1,\dots,n\} : \phi(i) = 1\}$. on a bien $f(A) = \phi$.

Comme f est bijective $\text{Card}(\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})) = \text{Card}(\mathcal{F}(\{1,\dots,n\},\{0,1\})) = 2^n$.