Espace vectoriel

1 Espace vectoriel

1.1 Structure

Exercice 1 (Propriétés des espaces-vectoriels) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $x \in E$, on note $-x$ le symétrique de x pour la loi $+$. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$, montrer que :

1. $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$;
2. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$;
3. $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$;
4. $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

1.2 Sous-espace vectoriel

Exercice 2 (Sous espaces-vectoriels de R^n) Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$;
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

Exercice 3 (Sous espaces-vectoriels) Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 0\}$;
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \text{ divise } P\}$;
4. $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction.
6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$,où a est une fonction.

Exercice 4 (Sous espaces-vectoriels des suites) Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble des suites réelles convergentes vers 0.
3. L'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.

4. L'ensemble des suites réelles bornées.
5. L'ensemble des suites réelles croissantes.
6. L'ensemble des suites réelles monotones.
7. L'ensemble des suites réelles non convergentes.
8. L'ensemble des suites réelles périodiques à partir d'un certain rang.
9. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
10. L'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
11. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur β en α.

1.3 Espace vectoriel engendré par une famille

Exercice 5 (Polynôme) Démontrer que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right).$$

Exercice 6 (Système d'équations) Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1, 2, 3)$;
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$;
3. $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

Exercice 7 (, trigonométrie)** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \text{Vect}\,(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leqslant k \leqslant n} = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos^k x\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}.$$

2 Familles libres, génératrices et bases

2.1 Combinaison linéaire

Exercice 8 (Combinaison linéaire) Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$;
2. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$, $u_3 = (-4, 5)$;
3. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$;
4. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 9 (Combinaison linéaire) Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 euros.
Paulin achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 euros.
Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. Combien va-t-il la payer ?

2.2 Famille libre

Exercice 10 (Famille libre) Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille) ?

1. (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$;
2. (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$;
3. (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$;
4. (u, v, w, z) avec $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (5, 6, 7, 8)$, $w = (9, 10, 11, 12)$ et $z = (13, 14, 15, 16)$.

Exercice 11 (Famille libre) On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 12 (Famille libre) On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (2, -2, 2),\ v_3 = (2, -1, 2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 13 (Degrés échelonnés) Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$. Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 14 (Fonctions) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les familles suivantes, so,t-elles indépendantes ? :

1. $(x \to \sin x, x \to \cos x)$;
2. $(x \to \sin 2x, x \to \sin x, x \to \cos x)$;
3. $(x \to \cos 2x, x \to \sin^2 x, x \to \cos^2 x)$;
4. $(x \to x, x \to e^x, x \to \sin(x))$.

2.3 Base et dimension

Exercice 15 (dans $\mathbb{R}^2$) Montrer que $((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(4, -2)$ dans cette base.

Exercice 16 (, dans $\mathbb{R}^n$)** Montrer que $(1 + X, X + X^2, \ldots, X^{n-1} - X^n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17 (Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble F des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 18 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_3)$?
2. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_4, v_5)$?
3. $\text{vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{vect}(v_2, v_5)$?
4. $\text{vect}(v_1, v_4)$ et $\text{vect}(v_3, v_5)$?

Exercice 19 Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

1. Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
2. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
3. A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 20 Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $F = \{(x, y, z) \in R^3;\ x + 2y - z = 0\}$;
2. $G = \{(x, y, z) \in R^3;\ x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$.

Exercice 21 Soit

$$E = \{(u_n)_{n \in N} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n) \text{ converge.}\}$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 22 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$
$$G = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 23 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 24 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si elle est égale à l'opposée de sa transposée.
On appelle $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui formé des matrices antisymétriques.

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Exercice 25 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Exercice 26 Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Exercice 27 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F' \oplus G = E$.