Exercice : Convergence implique bornée

Montrer que toute suite convergente est bornée.
Correction Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Choisissons $\epsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$; autrement dit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=0,\ldots,N-1}\{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell + 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant M'$. De même en posant $m = \min_{n=0,\ldots,N-1}\{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m'$.

Exercice : Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice : Somme télescopique

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire la limite de la suite
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}.$$
3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

Exercice : Exemple de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice : Avec des quantificateurs

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
1. (u_n) est bornée.
2. (u_n) n'est pas croissante.
3. (u_n) n'est pas monotone.
4. (u_n) n'est pas majorée.
5. (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice : Moyenne de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On pose $S_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.

1. On suppose que (u_n) converge vers 0. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, on a $|u_n| \leqslant \varepsilon$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $n \geqslant n_0$, on a
   $$|S_n| \leqslant \frac{M(n_0-1)}{n} + \varepsilon.$$
   (b) En déduire que (S_n) converge vers 0.
2. On suppose que $u_n = (-1)^n$. Que dire de (S_n) ? Qu'en déduisez-vous ?
3. On suppose que (u_n) converge vers l. Montrer que (S_n) converge vers l.
4. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Montrer que (S_n) tend vers $+\infty$.

Trouver un exemple de suite qui diverge mais dont la moyenne de Cesàro converge.

Exercice : Convergence des suites extraites

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que (u_n) est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

Exercice : Suite Héron

Etudier la suite :
$$u_0 > \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$