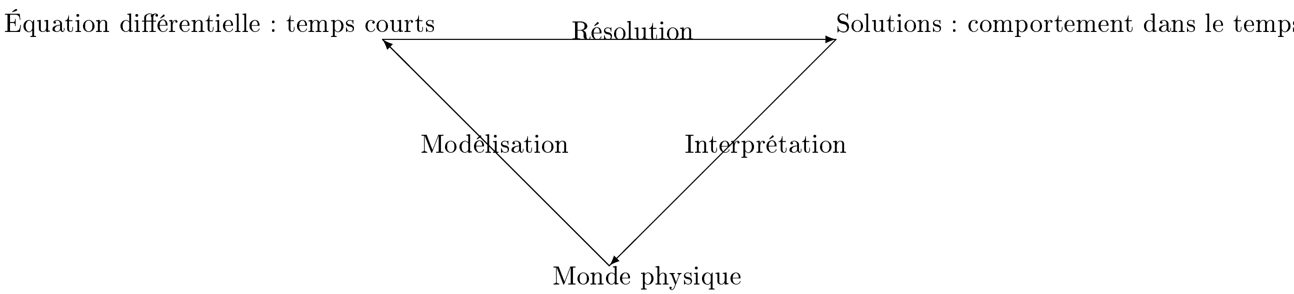
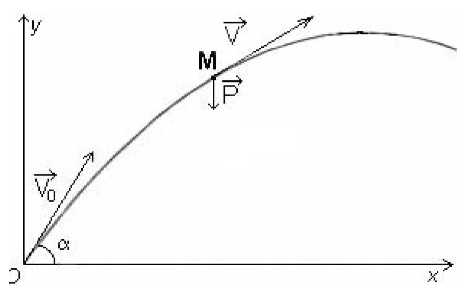
Story No 1 Équations différentielles ordinaires

Les équations différentielles forment le langage dans lequel les lois fondamentales de la science sont exprimées. La science nous dit comment le système actuel change "d'un instant à l'autre". Le défi relevé par le la théorie des équations différentielles est de prendre cette information à court terme et obtenir des informations sur le comportement général à long terme. L'art et la pratique des équations différentielles implique cette séquence d'étapes : on "modélise" un système (physique, chimique, biologique, économique, voire mathématique) au moyen d'une équation différentielle ; on tente ensuite d'obtenir des informations sur les solutions de cette équation ; et on traduit ensuite cette information mathématique dans le contexte scientifique.



Exemple

> Le problème est de déterminer l'angle d'un canon pour toucher une cible à la distance l.
>
> — *Monde physique* : trajectoire d'un boulet de canon.
>
> 
>
>
> — *Modélisation* : La deuxième loi de Newton "Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée." s'écrit :
> $$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
> avec $\vec{a}$ l'accélération, la dérivée seconde de la position. L'unique force s'exerçant sur le point matériel M est le poids en négligeant la force de frottement et la force de Coriolis.
>
> — *Équation différentielle* : on obtient les équations différentielles suivantes :
> $$(E) : x''(t) = 0 \text{ et } y''(t) = -g \quad \text{avec } x'(0) = v_0.\cos\alpha \text{ et } y'(0) = v_0.\sin\alpha.$$
>
> — *Résolution* : par intégrations successives, on obtient la solution :
> $$x(t) = \cos\alpha.v_0.t \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t.$$
>
> — *Solution* : y vérifie une équation d'une parabole et pour $t_1 = 2\frac{v_0.\sin\alpha.t}{g}$, on a $y(t_1) = 0$. D'où $l = x(t_1) = \cos\alpha.v_0.2\frac{v_0.\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2.\sin(\alpha/2)}{g}$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{lg}{v_0^2})$ si $\frac{lg}{v_0^2} \leqslant 1$ et pas de solution sinon.
>
> — *Interprétation* : si la longueur, l, est plus grande que $\frac{v_0^2}{g}$, alors le boulet de canon ne pourra pas atteindre sa cible, sinon l'angle doit être égale à $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{lg}{v_0^2})$

Ce chapitre reprend rapidement et étend l'étude des équations différentielles linéaires vues en première année.
Notations :

— $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
— I désigne un intervalle (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$,
— J désigne un intervalle (non vide et non réduit à un point) *inclus dans* I,
— toutes les fonctions qui interviennent sont (au moins) continues,
— $t \in I$ est la variable par rapport à laquelle on dérive,
— dans le cas scalaire, la fonction inconnue est $x\colon t \mapsto x(t) \in \mathbb{K}$,
— dans le cas vectoriel,
  — on identifie $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$,
  — la fonction inconnue est $X\colon t \mapsto X(t) \in \mathbb{K}^n$.

I Équations différentielles du premier ordre

A Généralités

Définition

Une **équation différentielle de premier ordre** est une équation de la forme :

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0$$

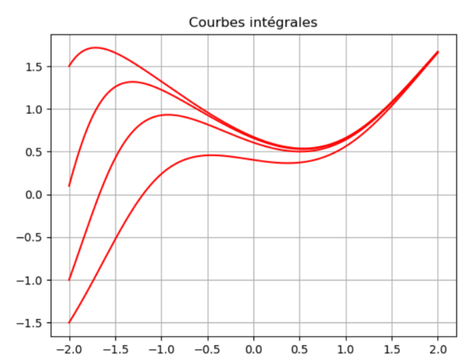
où F est une fonction quelconque.
Une **solution sur** $J \subset I$ de cette équation est une fonction f de J dans $\mathbb{K}$, dérivable en tout point de J, telle que pour tout $t \in J$, on ait

$$F(t, f(t), f'(t)) = 0).$$

On note $\mathcal{S}_J(E)$ l'ensemble des solutions de E sur J.
Résoudre E, c'est déterminer $\mathcal{S}_J(E)$ pour tout intervalle $J \subset I$.
Les courbes représentatives des solutions de E s'appellent **courbes intégrales** de E.

Exemple

Considérons l'équation différentielle non linéaire $x'(t) + (x(t))^2 = t^2$.



Définition Normalisée

Une équation différentielle de premier ordre est dite **normalisée** ou **résolue en** x' si elle est de la forme

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

où F est une fonction quelconque.

B Approximations de l'équation résolue $x'(t) = F(t, x(t))$

L'équation différentielle $x'(t) + (x(t))^2 = t^2$ n'admet pas de résolution analytique à l'aide des fonctions usuelles. L'approche géométrique et numérique sont des procédés pour déterminer des approximations des solutions exactes.

Approche géométrique

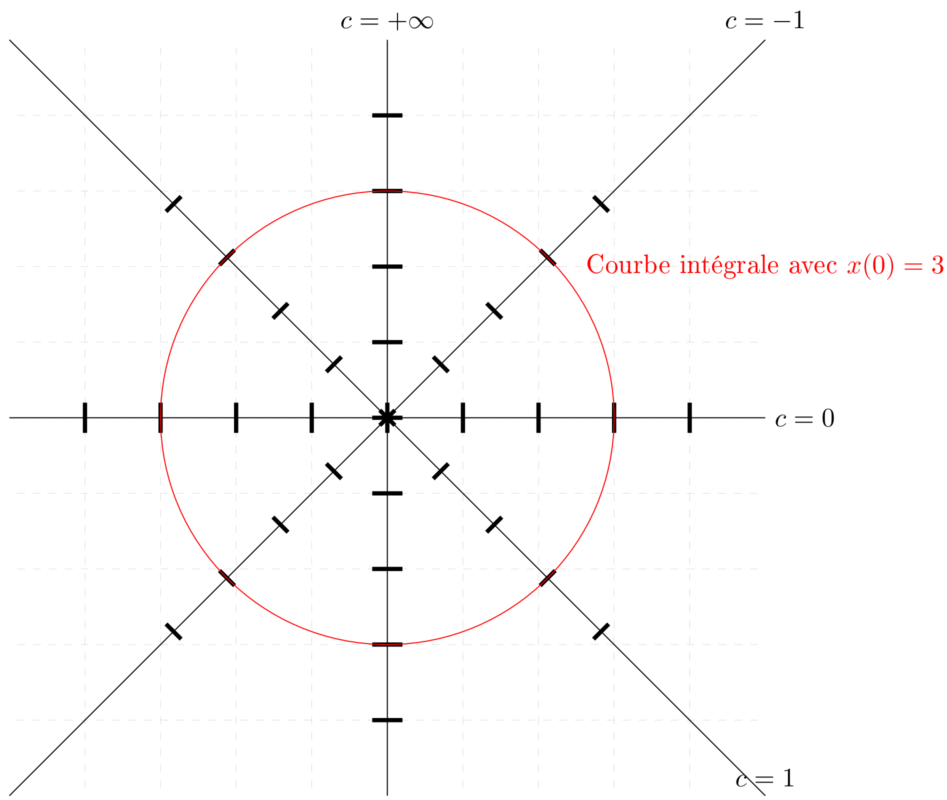
Comme l'équation $x'(t) = F(t, x(t))$ spécifie la dérivée, soit la pente à chaque point (t, x) du plan, on connaît ainsi la pente des fonctions solutions, x. Le **champ des directions** de l'équation différentielle est un graphe représentant par des petits segments les dérivées tangentes à la trajectoire en différents points. En partant d'un point (t_0, x_0) on peut tracer la courbe intégrale par approximation en suivant le champ des directions. On obtient une approximation de la solution particulière x qui satisfait à la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Pour tracer à la main le champs des directions par un humain, l'algorithme est :

1. Choisir une pente c
2. Résoudre l'équation $F(t, x) = c$
3. Tracer la solution.

Exemple : Cercle

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad x'(t) = -\frac{t}{x(t)}$.
Pour $c = 1$, on obtient l'équation de droite $x = -t$.
Pour $c = -1$, on obtient l'équation de droite $x = t$.
Pour $c = 0$, on obtient l'équation de droite $t = 0$.
Pour "$c = \infty$", on obtient l'équation de droite $x = 0$.



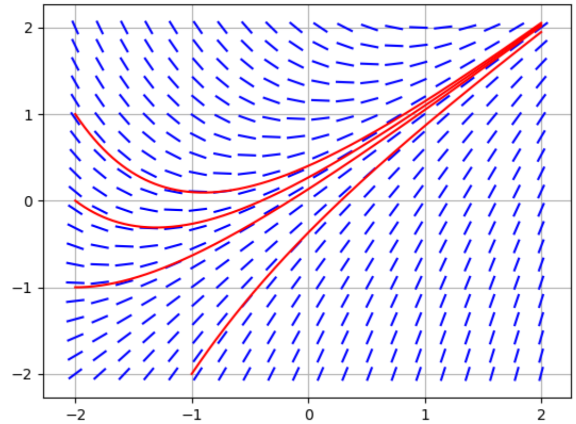
On observe que l'ensemble des solutions sont les cercles centrées en 0.

Pour tracer numériquement le champs des directions par un humain, l'algorithme est :

1. Choisir des points (t, x) régulièrement espacés
2. Calculer $F(t, x)$
3. Tracer un segment de droite de pente $F(t, x)$ au point (t, x)

Exemple

On considère l'équation $(E) : x'(t) = 1 + t - x(t)$.



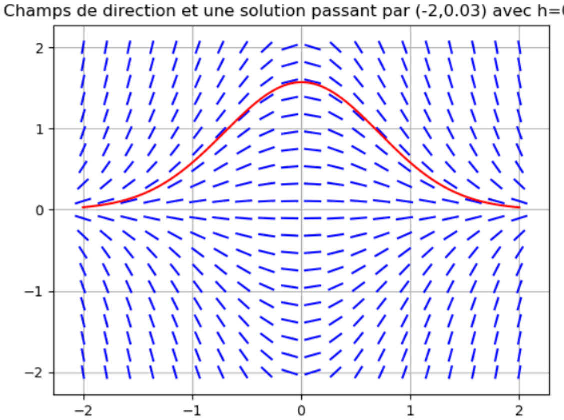
On observe que le comportement asymptotique de la trajectoire est $x(t) \underset{\infty}{\sim} t$. Aussi les courbes intégrables partitionnent le plan (une unique courbe intégrable passe en chaque point du plan) donc on peut conjecturer l'existence et l'unicité d'une solution ayant une condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Approche numérique

La méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation d'une solution particulière d'une équation différentielle donnée par $(E) : x'(t) = F(t, x(t))$.
A partir d'un point (t_0, x_0), on suit géométriquement[1] la pente p du champs de direction donnée par l'équation différentielle $p = x'(t_0) = F(t_0, x_0)$. Ainsi, à partir du point on obtient un deuxième point (t_1, x_1) avec $t_1 = t_0 + h$ et $x_1 = x_0 + h.p$, où h est un pas fixé d'avance. En continuant ainsi, on obtient une suite de points qui approchent la courbe intégrale passant par (t_0, x_0).

Exemple : Bosse

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad x'(t) = -2.t.x(t)$.



C Résolution analytique : le cas linéaire

1. De manière analytique, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t) = F(t, x).$$

Donc, si $h << 1$, on peut approximer

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx F(t, x).$$

D'où

$$x(t+h) \approx x(t) + h.F(t, x).$$

Soit $x_1 = x_0 + h.F(t_0, x_0)$.

Cadre

Définition

Une **équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre** est une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \tag{E}$$

où a, b et c sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, et x une fonction inconnue de I dans $\mathbb{K}$.
E est dite **à coefficients constants** si les fonctions a et b sont constantes.
E est dite **homogène** ou **sans second membre** si $c(t) = 0$ pour tout t.
On appelle **équation différentielle homogène associée** à E ou **équation différentielle sans second membre associée** à E l'équation différentielle

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \tag{E$_0$}$$

Remarque

Si a ne s'annule pas sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est égale à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle normalisée :

$$x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)}x(t) = \frac{c(t)}{a(t)}. \tag{E}$$

Définition Problème de Cauchy

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle du premier ordre normalisée et d'une condition initiale.
Un problème de Cauchy linéaire du premier ordre est donc de la forme

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \\ x(t_0) = x_0 \text{ où } t_0 \in I \text{ et } x_0 \in \mathbb{K}. \end{cases} . \tag{C}$$

Étude théorique

Proposition

Soit f une solution sur J de l'équation différentielle normalisée

$$x'(t) + b(t)x(t) = c(t). \tag{E}$$

Alors f est de classe C^1 sur J.
De plus, si b et c sont de classe C^p sur J, alors f est de classe C^{p+1} sur J ; si b et c sont de classe C^∞ sur J, alors f l'est également.

Théorème Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit $b : I \to \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.
Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}$.
Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{C}$$

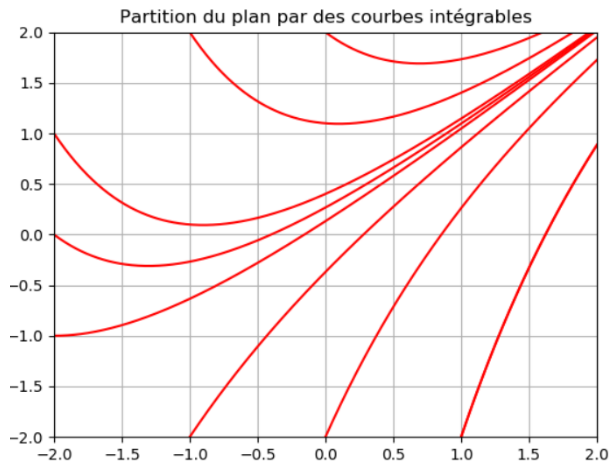
admet une unique solution sur tout intervalle J tel que $t_0 \in J$ et $J \subset I$.
De plus, la solution sur J n'est autre que la restriction à J de la solution sur I.

Corollaire Partition du plan

Soit E une équation différentielle linéaire scalaire normalisée du premier ordre sur I

$$x'(t) + b(t)x(t) = c(t). \tag{E}$$

Alors les courbes intégrales de E sont disjointes.
Plus précisément, elles forment une partition de $I \times \mathbb{R}$.



Partition du plan par les solutions de l'équation $x'(t) = 1 + t - x(t)$.

Démonstration

Du fait de l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, les courbes intégrales sont disjointes.
Du fait de l'existence, une courbe intégrale passe en chaque point du plan.

Corollaire

Soit f une solution sur J de l'équation différentielle linéaire scalaire normalisée homogène du premier ordre

$$x'(t) + b(t)x(t) = 0. \tag{E$_0$}$$

Alors

— soit f est identiquement nulle sur J,

— soit f ne s'annule pas sur J.

Démonstration

Supposons que f s'annule sur J, soit $f(x_0) = 0$. Comme la fonction nulle est solution de (E_0) et passe par le point $(x_0, 0)$, d'après l'unicité de la solution du théorème Cauchy-Lipschitz linéaire, $f = 0$.

Théorème Structure

On considère les équations différentielles linéaires scalaires normalisées du premier ordre

$$x'(t) + b(t)x(t) = c(t) \tag{E}$$

$$x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{E$_0$}$$

— $\mathcal{S}_J(E_0) = Vect(t \mapsto e^{-B(t)})$ sous-espace vectoriel de dimension 1 avec B primitive de b.

— $\mathcal{S}_J(E) = x_p + Vect(t \mapsto e^{-B(t)})$, sous-espace affine de dimension 1 avec x_p une solution particulière.

La « résolution » suivante peut permettre de retrouver la formule

1. $x'(t) + b(t)x(t) = 0$
2. $\frac{x'(t)}{x(t)} = -b(t)$

3. $\ln \|x(t)\| = -B(t) + C_0$ où $C_0 \in \mathbb{R}$
4. $x(t) = Ke^{-B(t)}$ où $K \in \mathbb{R}$

Néanmoins, **il ne s'agit pas d'une preuve** à cause

— de la division par $x(t)$ qui pourrait s'annuler, et

— du passage de $\|x(t)\|$ à $x(t)$ nécessite des justifications (on pourrait imaginer que x change de signe et donc que K soit une fonction de t...)

Bref, à éviter sur une copie, sauf si l'on sait déjà que $\forall x \in I$, $x(t) > 0$.

Exemple : Charge d'un condensateur d'un circuit RC

La tension d'un circuit RC en charge est gouvernée par l'équation différentielle :

$$RCu'(t) + u(t) = E \tag{E}$$

soit, en posant $\tau = RC$,

$$u'(t) + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{\tau} \tag{E}$$

L'ensemble des solution est :

$$t \mapsto E + \lambda e^{t/\tau} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En pratique

Principe de superposition Si E est de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t) + c_2(t), \tag{E}$$

pour trouver une solution particulière de E, il suffit de

— trouver une solution particulière $x_{p,1}$ de

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t), \tag{E$_1$}$$

— trouver une solution particulière $x_{p,2}$ de

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_2(t), \tag{E$_2$}$$

— poser $x_p = x_{p,1} + x_{p,2}$.

Dans ces conditions, x_p est une solution particulière de E.

Recherche d'une solution particulière d'une équation à coefficients constants On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + ax(t) = P(t)e^{\alpha t}, \tag{E}$$

où $P \in \mathbb{K}_d[X]$. Il existe une unique solution particulière de la forme

1. Si $\alpha \neq -a$, on prend $x_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{K}_d[X]$ à déterminer.
2. Si $\alpha = -a$, on prend $x_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{K}_d[X]$ à déterminer.

Bien sûr, si le second membre est une somme de termes de ce type, il suffit de superposer les solutions particulières correspondantes.

Exemple

1. Pour $x' + x = te^t$, on prend $x_p = (at + b)e^t$.
2. Pour $x' - x = (t + 1)e^t$, on prend $x_p = t(at + b)e^t$.
3. Pour $x' + x = \sin t$, on prend $x_p = a\cos t + b\sin t$.
4. Pour $x' + 3x = t\cos 2t$, on prend $x_p = (at + b)\cos 2t + (ct + d)\sin 2t$.
5. Pour $x' + x = te^t - e^{2t}$, on prend $x_p = (at + b)e^t + ce^{2t}$.

Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante On considère les équations différentielles

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t), \tag{E}$$

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0. \tag{E_0}$$

Soit ϕ une solution non nulle de E_0 sur J. On rappelle que ϕ ne s'annule pas et que la solution générale de E_0 est donnée par

$$x_0(t) = K\phi(t) \quad \text{où } K \in \mathbb{K}.$$

On recherche alors les solutions de E sous la forme $x(t) = k(t)\phi(t)$, et l'on obtient

$$k'(t)\phi(t) = b(t), \tag{E$'$}$$

qui est facile à résoudre.

Corollaire

La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad x'(t) + a(t)x(t) = b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$x(t) = e^{-A(t)} \left(e^{A(t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)} b(u) \mathrm{d}u \right),$$

où A est une primitive de a sur I. Cette formule *n'est pas à connaître*, mais à savoir retrouver au besoin.

Raccordement

Étant donné l'équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \tag{E}$$

on peut se ramener à une équation normalisée :

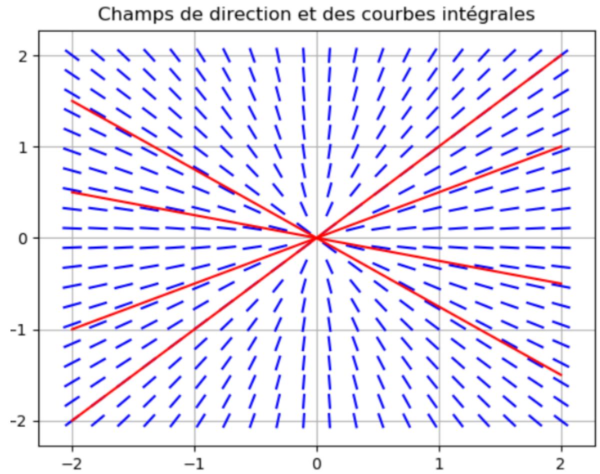
1. si a ne s'annule pas sur I, il suffit de diviser par $a(t)$;
2. par contre, si a s'annule, on découpe I en intervalles où a ne s'annule pas, puis on fait une étude sur chaque intervalle. À la fin, on cherche à « raccorder » les solutions.

Supposons par exemple que $I = \mathbb{R}$ et que a s'annule uniquement en 0.

- On pose alors $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. Sur ces deux intervalles, E est une équation normalisée, donc on peut la résoudre.
- On résout E sur I_1 et sur I_2.
- On détermine, généralement par la méthode d'analyse-synthèse, quelles sont les fonctions f solutions de E sur $\mathbb{R}$, sachant que la restriction de f à I_k est nécessairement une solution de E sur I_k.

Exemple

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad tx'(t) - x(t) = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.



On observe que les courbes intégrables s'intersectent et ne sont pas tangentes en l'origine.

Résolution analytique : on cherche à « recoller » certaines de ces solutions de façon à obtenir des fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Pour appliquer les résultats de l'étude précédente à cette équation, on commence par la mettre sous la forme normalisée

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = 0,$$

qui en limite l'étude à chacun des intervalles $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$. Sur chacun de ces intervalles, les solutions sont de la forme $t \mapsto at^2, a \in \mathbb{R}$.

Cherchons, s'il en existe, les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

— *Analyse :* si ϕ est une telle solution, alors c'est aussi une solution de l'équation (E) sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$, donc il existe deux scalaires a_1 et a_2 tels que

$$\forall t < 0, \phi(t) = a_1 t \text{ et } \forall t > 0, \phi(t) = a_2 t.$$

Cette fonction doit être continue en 0, ce qui n'impose aucune restriction sur a_1 et a_2 et on a $\phi(0) = 0$. La fonction doit être dérivable en 0. On a alors :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^+} a_2 \frac{t}{t} = a_2 \text{ et } \lim_{t\to 0^-} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^-} a_1 \frac{t}{t} = a_1.$$

ce qui montre que les coefficients $a_1 = a_2$, et que la fonction ϕ ainsi construite est dérivable.

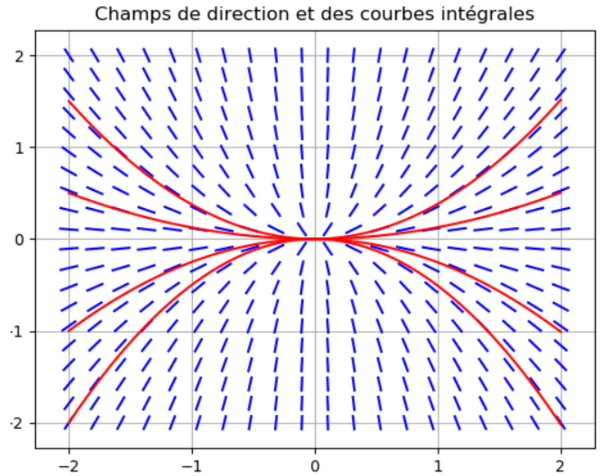
— *Synthèse* : pour tout réel a, la fonction ϕ définie par

$$\phi(t) = at$$

est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exemple

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad tx'(t) - 2.x(t) = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.



On observe que les courbes intégrables s'intersectent et sont tangentes en l'origine.

Résolution analytique : on cherche à « recoller » certaines de ces solutions de façon à obtenir des fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Pour appliquer les résultats de l'étude précédente à cette équation, on commence par la mettre sous la forme normalisée

$$x'(t) - \frac{2}{t}x(t) = 0,$$

qui en limite l'étude à chacun des intervalles $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$. Sur chacun de ces intervalles, les solutions sont de la forme $t \mapsto at^2, a \in \mathbb{R}$.

Cherchons, s'il en existe, les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation.
Analyse : si ϕ est une telle solution, alors c'est aussi une solution de l'équation (E) sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$, donc il existe deux scalaires a_1 et a_2 tels que

$$\forall t < 0, \phi(t) = a_1 t^2 \text{ et } \forall t > 0, \phi(t) = a_2 t^2.$$

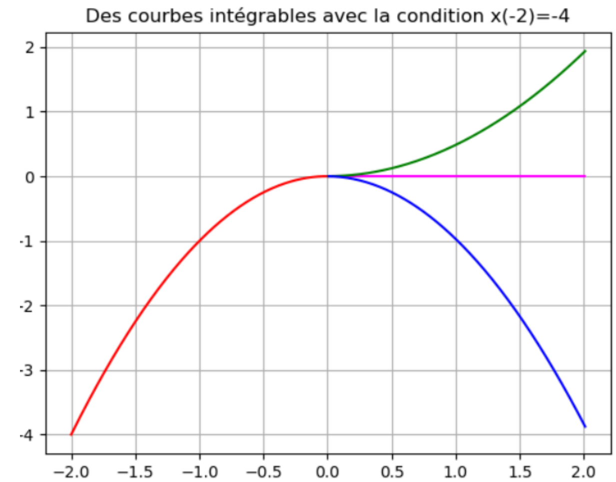
Cette fonction doit être continue en 0, ce qui n'impose aucune restriction sur a_1 et a_2 et on a $\phi(0) = 0$.
La fonction doit être dérivable en 0. On a alors :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} a_2 \frac{t^2}{t} = 0 \text{ et } \lim_{t \to 0^-} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} a_1 \frac{t^2}{t} = 0.$$

ce qui montre que les coefficients a_1 et a_2 peuvent être choisis de façon arbitraire, non nécessairement égaux, et que la fonction ϕ ainsi construite est dérivable.
Synthèse : pour tous réels a_1, a_2, la fonction ϕ définie par

$$\phi(t) = \begin{cases} a_2 t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ a_1 t & \text{si } t > 0 \end{cases} \text{ avec } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ (et ce sont les seules). En particulier, les fonctions de la forme $t \mapsto at^2$ sont des solutions de l'équation, mais ce ne sont pas les seules.



La condition initiale $(t_0 = -2, x_0 = -4)$ impose la courbe rouge correspond au $t < 0$. En revanche, pour les $t > 0$, une courbe intégrable est une parabole passant par l'origine, par exemple les courbes verte ou violet ou bleu . Il n'y a pas unicité de la solution. De plus, si la condition initial est $x(0) \neq 0$, il n'y a pas existence d'une solution.

Proposition **Problème de Cauchy**

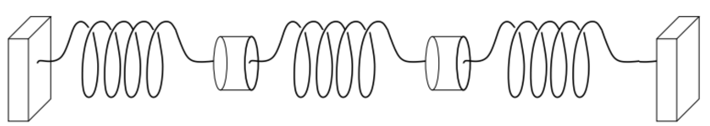
Soit $a : I \to \mathbb{K}$, $b : I \to \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ trois fonctions continues.
Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}$.
Alors le problème

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{C}$$

n'admet pas nécessairement une solution sur tout intervalle J et si elle existe et n'est pas nécessairement unique (voir le second exemple sur le raccordement).

II Systèmes différentiels linéaires

On étudie le mouvement d'un système de deux masses reliées par des ressorts, glissant le long d'une poutre soufflante.



Pour simplifier, les ressorts ont même raideur k et les corps même masse m. Notons $x_i(t)$ l'écart par rapport à la position d'équilibre pour le i-ème corps.
Le principe fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$mx_1''(t) = -2k.x_1(t) + k.x_2(t)$$

$$mx_2''(t) = k.x_1(t) - 2k.x_2(t)$$

On peut alors le mettre sous la forme $X''(t) = AX(t)$ avec :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Les physiciens ont compris qu'en général, le mouvement est une superposition de mouvements fondamentaux appelés modes propres. Ce sont les mouvements où tous les corps oscillent à la même fréquence. Dans ce système, les fréquence propres sont les racine carré de l'opposé des valeurs propres de A, soit $\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\sqrt{3\frac{k}{m}}$.

A Généralités

Définition

Un **système différentiel linéaire du premier ordre** est une équation de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{S}$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des fonctions continues, et $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une fonction inconnue.
Une **solution sur $J \subset I$** de ce système est une fonction f de J dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, dérivable en tout point de J, telle que pour tout $t \in J$, on ait

$$f'(t) = A(t)f(t) + B(t).$$

On note $\mathcal{S}_J(S)$ l'ensemble des solutions de S sur J.
Résoudre S, c'est déterminer $\mathcal{S}_J(S)$ pour tout intervalle $J \subset I$.

— S est dit **à coefficients constants** si la fonction A est constante.

— S est dit **homogène** ou *sans second membre* si

$$\forall t \in I : \quad B(t) = 0.$$

— On appelle **système différentiel homogène associe** à S le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t). \tag{S$_0$}$$

Définition **Problème de Cauchy**

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'un système différentiel linéaire du premier ordre et d'une condition initiale.
Un problème de Cauchy linéaire du premier ordre est donc de la forme

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \\ X(t_0) = X_0 \text{ où } t_0 \in I \text{ et } X_0 \in \mathbb{K}. \end{cases} \tag{C}$$

B Étude théorique

Proposition

Soit f une solution sur J du système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t). \tag{S}$$

Alors f est de classe C^1 sur J.
De plus, si B et C sont de classe C^p sur J, alors f est de classe C^{p+1} sur J ; si B et C sont de classe C^∞ sur J, alors f l'est également.

Théorème **Cauchy-Lipschitz linéaire**

Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions *continues*.
Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{C}$$

admet une unique solution sur tout intervalle J tel que $t_0 \in J$ et $J \subset I$.
De plus, la solution sur J n'est autre que la restriction à J de la solution sur I.

Théorème Structure

On considère les systèmes différentiels linéaires

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{S}$$

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{S$_0$}$$

Alors :

— $\mathcal{S}_J(S_0)$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension n.

— $\mathcal{S}_J(S)$ est un sous-espace *affine* de $C^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension n et de direction $\mathcal{S}_J(S_0)$.

C Résolution pratique $X'(t) = AX(t)$

A diagonalisable dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}()$

Considérons le système $\begin{cases} x_1'(t) = & -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = & x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ qui s'écrit sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car symétrique à coefficients réels. On trouve que

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

L'idée est de ramener la résolution du système $X'(t) = AX(t)$ à celle d'un système $Y'(t) = DY(t)$, où D est diagonale. On a

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

$Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$ car les coefficient de P^{-1} ne dépendent pas de t. Le nouveau système obtenue est $\begin{cases} y_1'(t) = & -y_1(t) \\ y_2'(t) = & -3y_2(t) \end{cases}$, soit $\begin{cases} y_1(t) = & k_1 e^{-t} \\ y_2(t) = & k_2 e^{-3t} \end{cases}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Comme $X = PY$, on obtient $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x_1(t) = & k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} \\ x_2(t) = & k_1 e^{-t} - k_2 e^{-3t} \end{cases}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

On généralise facilement le résultat précédent à une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}()$ quelconque.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution de

$$X'(t) = AX(t). \tag{S}$$

On suppose que A est diagonalisable : soit $(X_1, \dots X_n)$ une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors il existe $k_1, \dots k_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad X(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k t} X_k.$$

A diagonalisable dans $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}()$

Considérons le système $\begin{cases} x_1'(t) = & 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = & 3x_1(t) + 1x_2(t) \end{cases}$ qui s'écrit sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-(2+i\sqrt{5}))(X-(2-i\sqrt{5}))$ est scindé et simple. On trouve que

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} & \frac{1+i\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-i\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Après avoir résolue le système différentielle en posant $X = PY$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{(2+i\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + k_2 e^{(2-i\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

Or,

$$e^{(2+i\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(\sqrt{5}t)+i\sin(\sqrt{5}t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) \\ \cos(t)-\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{5}t) \\ \sin(t)+\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$$

Malgré le détour par $\mathbb{C}$, les solutions trouvées doivent être réelles. On obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = ae^{2t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) \\ \cos(t)-\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix} + be^{2t} \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{5}t) \\ \sin(t)+\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}.$$

A trigonalisable dans $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}()$

Si A est seulement la trigonalisable, on obtient : $A = PTP^{-1}$, on pose $X(t) = PY(t)$, et le système devient

$$Y'(t) = TY(t), \tag{S'}$$

ce qui donne un système triangulaire que l'on peut résoudre, en résolvant successivement les équations différentielles scalaires en partant de la dernière.

III Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

A Généralités

Définition

Une **équation différentielle linéaire scalaire du second ordre** est une équation de la forme

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t), \tag{E}$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, et x une fonction inconnue de I dans $\mathbb{K}$.
Une **solution sur $J \subset I$** de cette équation est une fonction f de J dans $\mathbb{K}$, deux fois dérivable en tout point de J, telle que pour tout $t \in J$, on ait

$$a(t)f''(t) + b(t)f'(t) + c(t)f(t) = d(t).$$

On note $\mathcal{S}_J(E)$ l'ensemble des solutions de E sur J.
Résoudre E, c'est déterminer $\mathcal{S}_J(E)$ pour tout intervalle $J \subset I$.
Les courbes représentatrices des solutions de E s'appellent **courbes intégrales** de E.

- E est dite **à coefficients constants** si les fonctions a, b et c sont constantes.
- E est dite **normalisée** ou **résolue en x''** si

$$\forall t \in I : \quad a(t) = 1.$$

- E est dite **homogène** ou **sans second membre** si

$$\forall t \in I : \quad d(t) = 0.$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée** à E ou **équation différentielle sans second membre associée** à E l'équation différentielle

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0. \tag{E$_0$}$$

Exemple : circuit RLC série

> La charge électric du condensateur est gouverné par l'équation : $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = U(t)$.

Définition Problème de Cauchy

Un **problème de Cauchy** du second ordre est la donnée d'une équation différentielle du second ordre normalisée et de deux conditions initiales.
Un problème de Cauchy linéaire du second ordre est donc de la forme

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t), \\ x(t_0) = \alpha, \\ x'(t_0) = \beta \text{ où } (t_0, \alpha, \beta) \in I\mathbb{K}^2. \end{cases} \tag{C}$$

B Étude théorique

Remarque

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t). \tag{E}$$

On peut se ramener à un système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{S}$$

en posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ d(t) \end{pmatrix}$

Théorème Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit $b : I \to \mathbb{K}$, $c : I \to \mathbb{K}$ et $d : I \to \mathbb{K}$ trois fonctions continues.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I : \quad x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t), \\ x(t_0) = \alpha, \\ x'(t_0) = \beta \end{cases} \tag{C}$$

admet une unique solution sur tout intervalle J tel que $t_0 \in J$ et $J \subset I$.
De plus, la solution sur J n'est autre que la restriction à J de la solution sur I.

Remarque

Les courbes intégrales de E ne sont pas disjointes.

Théorème Structure

On considère les équations différentielles linéaires scalaires normalisées du second ordre

$$x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t) \tag{E}$$

$$x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0 \tag{E$_0$}$$

— $\mathcal{S}_J(E_0)$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.
— $\mathcal{S}_J(E)$ est un sous-espace *affine* de $C^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2 et de direction $\mathcal{S}_J(E_0)$.

C Résolution pratique

Principe de superposition

Proposition

Étant donné une équation linéaire E, la solution générale de E est donnée par la somme de la solution générale de l'équation homogène E_0 et d'une solution particulière de l'équation complète E.
Plus précisément, soit x_p une solution particulière de E sur J. Alors toute solution x de E sur J est de la forme

$$x = x_0 + x_p,$$

où x_0 est une solution de E sur J.
Pour résoudre E, il suffit donc de résoudre E_0 et de trouver une solution particulière de E.

Résolution de l'équation homogène

Proposition cas des coefficients constants

Soit l'équation différentielle

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0, \tag{E}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a?0$.
On forme l'**équation caractéristique** de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{E_c}$$

Alors, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

— Si $\Delta > 0$, la solution générale est donnée par

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et r_1 et r_2 sont les racines distinctes de E_c.

— Si $\Delta = 0$, la solution générale est donnée par

$$x(t) = (At + B)e^{r_0 t},$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et r_0 est la racine double de E_c.

— Si $\Delta < 0$, la solution générale est donnée par

$$x(t) = e^{\alpha t}\Big(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\Big),$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de E_c.

Alors, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

— Si $\Delta \neq 0$, la solution générale est donnée par

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

où $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et r_1 et r_2 sont les racines distinctes de E_c.

— Si $\Delta = 0$, la solution générale est donnée par

$$x(t) = (At + B)e^{r_0 t},$$

où $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et r_0 est la racine double de E_c.

Proposition cas général

Il n'existe pas de méthode générale !

- Dans le cas d'une équation à coefficients constants, on a des formules.
- On peut tenter de chercher une solution sous la forme d'un monôme, d'un polynôme, d'une série entière, etc...
- L'énoncé peut suggérer un changement de variable.
- Si on a trouvé une solution f qui ne s'annule pas, on peut chercher les autres solutions sous la forme $x(t) = f(t)y(t)$ où y est la nouvelle fonction inconnue.

et c'est à peu près tout.

Recherche d'une solution particulière

Proposition cas d'une équation à coefficients constants

On considère l'équation différentielle

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = P(t)e^{\alpha t}, \tag{E}$$

où $a \neq 0$ et $P \in \mathbb{K}_d[X]$. On note $\mathrm{E_c}$ l'équation caractéristique.
Il existe une unique solution particulière de la forme

1. Si α n'est pas racine de $\mathrm{E_c}$, on prend $x_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{K}_d[X]$ à déterminer.
2. Si α est racine simple de $\mathrm{E_c}$, on prend $x_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{K}_d[X]$ à déterminer.
3. Si α est racine double de $\mathrm{E_c}$, on prend $x_p(t) = t^2Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{K}_d[X]$ à déterminer.

Bien sûr, si le second membre est une somme de termes de ce type, il suffit de superposer les solutions particulières correspondantes.