Application linéaire

Comme souvent en mathématiques, ce sont plus les transformations qui sont intéressantes et pertinentes que les objets eux-mêmes.
Une application linéaire est un cas particulier de transformation. Dans le langage courant, un phénomène est dit linéaire si les effets sont proportionnels aux causes.
Plus précisément, un phénomène peut être décrit par une transformation$x \mapsto f(x)$, où x représente la ou les causes (par exemple une différence de potentiel) et $f(x)$ un effet auquel on s'intéresse (par exemple l'intensité d'un courant électrique). On dit que le phénomène est linéaire quand l'effet est proportionnel à la cause (exemple : l'intensité de courant est proportionnel à la différence de potentiel, en d'autres termes, si on double la différence de potentiel, on double l'intensité du courant résultant, si on somme de deux différence de potentiel, on somme l'intensité du courant résultant). Beaucoup de phénomènes en sciences ne sont pas linéaires. Dans de tels cas, de "petites causes" peuvent avoir de "grands effets".
D'un point de vue mathématiques, une transformation préservant la structure d'espace vectoriel est une application linéaire. Les matrices sont des tableaux de nombres qui servent à interpréter en termes calculatoires et donc opérationnels les applications linéaires dont les espaces vectoriels sont de dimensions finies.

Exemple : Système d'équations linéaires

> La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0.5 mètres. Quel est la taille du fils ?
> Comme vu au chapitre précédent, la première étape est la modélisation avec un système d'équations linéaires.
> Soit la variable x représentant la taille du fils et la variable y représentant la taille du père.
> Le couple (x, y) vérifie le système suivant :
>
> $$(S) \quad \begin{cases} x+y & = 2,5 \\ -x+y & = 0,5 \end{cases}$$
>
> L'idée est de considérer les membres de gauche des équations comme l'image d'une fonction :
>
> $$\begin{cases} x+y & = 2,5 \\ -x+y & = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$
>
> avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\quad u \quad} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$
>
> Les solutions du système sont l'ensemble des antécédents $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ de la fonction à deux variables $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.
> L'étude générale des fonctions à plusieurs variables est compliquée et est fait dans un cours d'analyse. Cependant, comme la fonction u est linéaire :
>
> $$u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + u(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \quad \text{et} \quad u(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \lambda u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$
>
> on aura des outils pour démontrer que u est un isomorphisme. Ainsi il existe une unique vecteur antécédent au vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Le système admet une unique solution.

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

I Applications linéaires

A Définition

Définition Application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire**, si elle préserve la structure d'espace vectoriel, c'est à dire si :

- **additivité** : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$;
- **homogénéité** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E : \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$.

Exemple

- homothétie vectorielle de rapport λ : $\Phi_0 \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \lambda \vec{x} \end{array} \right.$
- Équation d'un plan : $\Phi_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+3z \end{array} \right.$,
- Intégration :$\Phi_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]), \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \end{array} \right.$,
- Dérivé de polynôme de degré au plus n : $\Phi_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$,

Définition-Proposition Modélisation d'une situation de proportionnalité

Deux quantités x et y réelles sont **proportionnelles** quand, en multipliant par une constante a, appelé **coefficient de proportionnalité**, une quantité, on obtient l'autre. La représentation fonctionnelle de cette relation est définie par

$$u : x \to ax =$$

où $y = u(x)$.
u est une fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

- additivité : Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
$$u(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = u(x_1) + u(x_2)$$
- homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.
$$u(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda a x = \lambda u(x).$$

Exemple : Essence

Le prix à la pompe est proportionnel du volume d'essence mis dans le réservoir.

Exemple : Différentielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. On a

$$\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\text{accroissement de la fonction}} = \overbrace{\mathrm{d}f_a(h)}^{\text{terme linéaire}} + \overbrace{h.\epsilon(h)}^{\text{petit terme correctif}}$$

où l'application $\mathrm{d}f_a$, appelé différentielle de f en a, est linéaire : $\mathrm{d}f_a(h) = f'(a).h$ avec $f'(a)$ le coefficient de proportionnalité.

Définition-Proposition Modélisation d'une situation de linéarité

Deux quantités $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont en relation **linéaires** quand chaque coefficient de Y s'exprime comme combinaison linéaire des coefficients de X, c'est à dire :

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots & \vdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$$

La représentation matricielle de cette relation est définie par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right. .$$

avec la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

u est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

— additivité : Soit $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^p$.

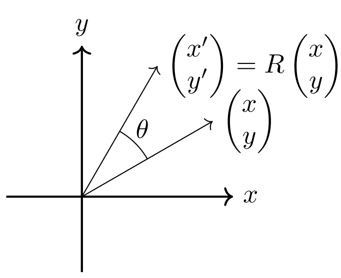
$$u(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = u(X_1) + u(X_2)$$

— homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^p$.

$$u(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda u(X).$$

Exemple : Transformation linéaire du plan

La rotations, l'homothétie, la transvection et la symétrie axiale sont des transformations linéaires du plan.



Pour une rotation anti-horaire autour de l'origine, on a $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ et $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$ et sous la forme matricielle : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Définition Endomorphisme

— Une application linéaire dont l'espace de départ est le même que celui d'arrivée est un **endomorphisme**.

— Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

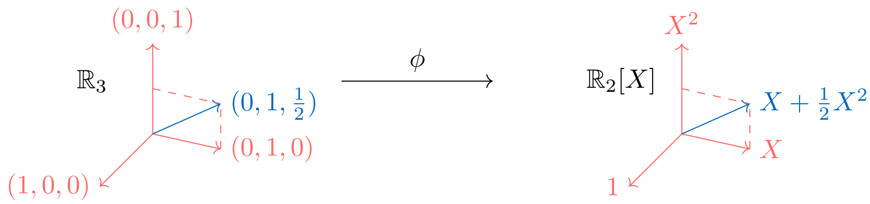
— Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Exemple

> Φ_3 et R_θ sont des endomorphismes. Comme R_θ est bijectif, R_θ est un automorphisme.

Un isomorphisme permet de transporter les propriétés vectoriels entre les deux espaces vectoriels, par exemple la dimension. Toute propriété “vectorielle” vraie pour un espace vectoriel donné sera vraie pour un espace vectoriel qui lui est isomorphe.

Par exemple, l'application linéaire $\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & a+bX+cX^2 \end{array} \right.$ est un isomorphisme qui "géométrise" $\mathbb{R}_2[X]$. La coplanarité des vecteurs $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ $(0,1,\frac{1}{2})$ et se traduit dans $\mathbb{R}_2[X]$ par celle des vecteurs X, X^2 et $X+\frac{1}{2}X^2$.



Aussi les isomorphismes nous permettent d'identifier deux espaces vectoriels, par exemple on identifie fréquemment les p-uplets avec les matrices colonnes car l'application

$$\Phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Par exemple, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{identification}} (x_1,x_2) = \vec{x}$.

Définition-Proposition Espace vectoriel des application linéaires et endomorphismes

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$; il s'agit d'un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions de E dans F muni des lois usuelles.
L'espace vectoriel des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$= $\mathcal{L}(E,E)$.

Démonstration

> Tous les axiomes se vérifient aisément.

Définition composition d'application linéaire

La **loi de composition interne** $\circ$ est définie comme une composition de fonctions, c'est à dire si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $\forall \vec{x} \in E : (v \circ u)(\vec{x}) = v(u(\vec{x}))$.
On a $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.

Exemple

> L'application $P \mapsto XP'(X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Les applications $P \mapsto P'$, $P \mapsto P(X^2)$ et $P \mapsto XP$ sont linéaire, donc par composition $P \mapsto XP'(X^2)$ l'est aussi.

Définition Structure d'algèbre des endomorphismes

L'**élément neutre** de la composition dans $\mathcal{L}(E)$ est l'application identité, $Id_E : x \mapsto x$. L'endomorphisme u^{-1} est appelé l' **endomorphisme inverse** de u si $u^{-1}u = uu^{-1} = Id_E$. Dans ce cas, l'endomorphisme u est dite **inversible**. $\mathcal{L}(E)$ possède une structure d'algèbre non commutative. L'espace vectoriel des automorphismes de E se note $\mathcal{GL}(E)$. $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire**.

B Propriétés

Proposition 0 image de 0

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Alors $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$

Démonstration

$u(\overrightarrow{0_E}) \overbrace{=}^{\text{Elt neutre}} u(\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} = u(\overrightarrow{0_E}) + u(\overrightarrow{0_E})$. En ajoutant $-u(\overrightarrow{0_E})$ aux deux membres de l'égalité, on obtient $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.

Exemple

L'application $f(x,y) \mapsto (x+y,1)$ n'est pas linéaire car $f(0,0) = (0,1)$. d'après la contraposée de la proposition précédente.

Proposition Caractérisation de la linéarité

$u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad u(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y}).$$

Démonstration

— ($\Longrightarrow$) soit $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{y} \in E$

$$u(\lambda \vec{x} + \vec{y}) \overbrace{=}^{\text{additivité}} u(\lambda \vec{x}) + u(\vec{y}) \overbrace{=}^{\text{homogénéité}} \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y}).$$

— ($\Longleftarrow$)

— additivité : soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a :

$$u(\vec{x} + \vec{y}) = u(1\vec{x} + \vec{y}) = 1u(\vec{x}) + u(\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$$

— homogénéité : soit $\vec{x} \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$u(\lambda \vec{x}) = u(\lambda \vec{x} + \vec{0}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{0}) \overbrace{=}^{u \text{ additive}} \lambda u(\vec{x}) + \vec{0} = \lambda u(\vec{x})$$

Proposition Propriétés algébriques

— **Associativité** :

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

— **Bilinéarité** :

$$(\lambda u + \mu v) \circ w = \lambda u \circ w + \mu v \circ w \text{ et } u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w.$$

Démonstration

La composition des fonctions est associative donc en particulier les fonctions linéaires aussi.
Les fonctions sont linéaires à gauche. En revanche, il faut l'hypothèse de linéarité pour la linéarité à droite.
En effet, soit $\vec{x} \in E$. On a :

$$u \circ (\lambda v + \mu w)(\vec{x}) = u(\lambda v(\vec{x}) + \mu w(\vec{x})) \overbrace{=}^{\text{linéarité de } u} = \lambda u(v(\vec{x})) + \mu u(w(\vec{x})).$$

Remarque

On omet le plus souvent le symbole $\circ$: $v \circ u = vu$.

II Image et noyau

A Généralités

Définition Image directe et image réciproque

Soit $f : A \to B$. Soit A' une partie de A et B' une partie de B.
L'ensemble $\{f(x) : x \in A'\}$ est appelé **image directe** de A' par f et noté $f(A')$.
L'ensemble $\{x \in A : f(x) \in B'\}$ est appelé **image réciproque** de B' par f et noté $f^{-1}(B')$.

Exemple : Carré

Soit $f : x \mapsto x^2$.
On a $f([-1,1]) = [0,1]$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Proposition Morphisme d'espace vectoriel

Soit E', F' deux sous-espace vectoriel de de E et F respectivement.

- $u(E')$ est un sous espace vectoriel de F,
- $u^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de E.

Démonstration

- - Non vide : Comme $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, $\overrightarrow{0_F} \in u(E')$.
  - Stabilité : Soit $\lambda \in \mathbb{K}, u(\vec{x}), u(\vec{x'}) \in u(E')$.

    On a $\lambda u(\vec{x}) + u(\vec{x'}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} u(\overbrace{\lambda\vec{x} + \vec{x'}}^{\in E'}) \in u(E')$.

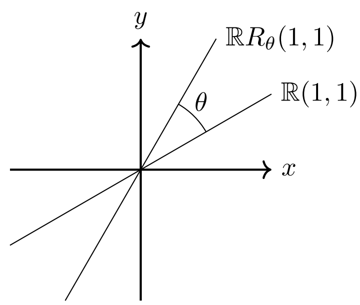
  Ainsi $u(E')$ est un sous espace vectoriel de F.
- - Non vide : comme $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F} \in F'$, $\overrightarrow{0_E} \in u^{-1}(F')$.
  - Stabilité : soit $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{x'} \in u^{-1}(F')$.

    On a $u(\lambda\vec{x} + \vec{x'}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \lambda \overbrace{u(\vec{x})}^{\in F'} + \overbrace{u(\vec{x'}}^{\in F'} \in F'$. Donc $\lambda\vec{x} + \vec{x'} \in u^{-1}(F')$.

  Ainsi $u^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de E.

Exemple

L'image de la droite vectoriel $\mathbb{R}(1,1)$ par R_θ est la droite vectoriel $\mathbb{R}R_\theta(1,1)$.



Définition Image

L'**image** de u est le sous espace vectoriel $u(E) = \{u(\vec{x}) : \vec{x} \in E\}$; on le note $\operatorname{Im} u$.
Par définition de la surjectivité, $\operatorname{Im} u = E$ si et seulement u est surjective.

Définition Rang

Le **rang** d'une application linéaire u est la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} u$; on le note $\operatorname{rg} u$.

Définition Noyau

Le **noyau** de u est le le sous espace vectoriel $u^{-1}\{\{\overrightarrow{0_F}\}\} = \{x \in E : u(\vec{x} = \overrightarrow{0_F}\}$; on le note $\operatorname{Ker} u$.

Proposition Caractérisation de l'injectivité par le noyau

u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration

— Supposons que u est injective.
  — $\operatorname{Ker} u \supset \{\overrightarrow{0_E}\}$: comme $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient $\overrightarrow{0_E}$
  — $\operatorname{Ker} u \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$: soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$. On a $u(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$. Comme u est linéaire, $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi $u(\vec{x}) = u(\overrightarrow{0_E})$. Comme u est injective, $\vec{x} = \overrightarrow{0_E}$.

  Du fait de la double inclusion $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

— Supposons que $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
  soit $\vec{x}, \vec{x'} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = u(\vec{x'})$. Alors $u(\vec{x}) - u(\vec{x'}) = \overrightarrow{0_F}$ et par linéarité $u(\vec{x} - \vec{x'}) = \overrightarrow{0_F}$. Donc $\vec{x} - \vec{x'} \in \operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$. Ainsi $\vec{x} - \vec{x'} = \overrightarrow{0_E}$. D'où $\vec{x} = \vec{x'}$.

Pour démontrer une égalité entre deux ensembles, il faut prouver la double inclusion. En tant que sous-espace vectoriel de E, $\operatorname{Ker} u$ contient $\vec{0}_E$, donc $\{\vec{0}_E\} \subset \operatorname{Ker} u$. Ainsi démontrer que $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et ainsi que u est injective, il suffit en réalité de montrer l'**inclusion** : $\{\overrightarrow{0_E}\} \subset \operatorname{Ker} u$.

Exemple

Soit $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$.
On a $u(x,y,z) = x(1,1) + y(1,-1) + z(0,1)$. Donc $\operatorname{Im} u$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $((1,1),(1,-1),(0,1))$ d'où $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$. Ainsi u est surjective et $\operatorname{rg} u = 2$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = & 0 \\ x-y = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = x(1,1,-2).$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(1,1,2)$. Ainsi u n'est pas injective.

Exemple : Dérivée polynomiale

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\Phi_3(P) = P' = a_1 + a_2.2X + \cdots + a_n.nX^{n-1}$. Donc $\operatorname{Im}\Phi_3$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(1, X, 2X, \ldots, nX^{n-1})$, soit $\operatorname{Im}\Phi_3 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Φ_3 n'est pas surjective $\operatorname{rg} u = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$.

$$P \in \operatorname{Ker}\Phi_3 \Leftrightarrow \Phi_3(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : P = a.$$

Donc $\operatorname{Ker}\Phi_3 = \mathbb{R}_0[X]$. Φ_3 n'est pas injective.

Proposition **Permutation de Vect et de l'image**

Soit $(\vec{x_i})_{i \leq i \leq n}$ une famille de E .
Alors
$$u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) = \operatorname{Vect}\left(u(\vec{x_i})\right)_{i \leq i \leq n}.$$

Démonstration

- $u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) \subset \operatorname{Vect}\left(u(\vec{x_i})\right)_{i \leq i \leq n}$:
  Soit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i} \in \operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})$.
  Comme $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{x_i})$, $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i})$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\left(u(\vec{x_i})\right)_{i \leq i \leq n}$ donc appartient à $\operatorname{Vect}\left(u(\vec{x_i})\right)_{i \leq i \leq n}$
- $u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) \supset \operatorname{Vect}\left(u(\vec{x_i})\right)_{i \leq i \leq n}$: Raisonnement similaire.

Du fait de la double inclusion, on a bien $u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) = \operatorname{Vect}\left(u(\vec{x_i})\right)_{i \leq i \leq n}$.

Corollaire **Image d'une base**

Soit $(\vec{e_i})_{i \leq i \leq n}$ une base de E .
Alors
$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}((u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n})).$$

Démonstration

Comme $\operatorname{Im} u = u(E)$ et $E = \operatorname{Vect}(\vec{e_i})_{i \leq i \leq n}$, d'après la proposition précédente, on obtient $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}((u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}))$.

Proposition **Linéarité de l'inverse**

Si u est un isomorphisme, alors u^{-1} est également linéaire.

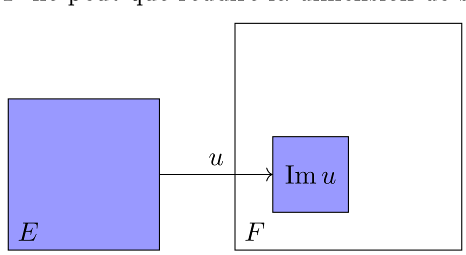
Démonstration

Soit $\vec{x}, \vec{x'} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

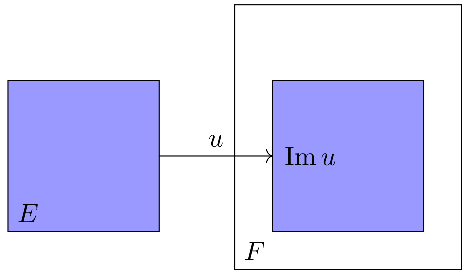
On a $u(u^{-1}(\lambda\vec{x} + \vec{x'})) = \lambda\vec{x} + \vec{x'}$. De plus, $u(\lambda u^{-1}(\vec{x}) + u^{-1}(\vec{x'})) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \lambda u(u^{-1}(\vec{x})) + u(u^{-1}(\vec{x'})) = \lambda\vec{x} + \vec{x'}$..
Ainsi $u(u^{-1}(\lambda\vec{x} + \vec{x'})) = u(\lambda u^{-1}(\vec{x}) + u^{-1}(\vec{x'}))$. Comme u est injective, $u^{-1}(\lambda\vec{x} + \vec{x'}) = \lambda u^{-1}(\vec{x}) + u^{-1}(\vec{x'})$.
u^{-1} est donc linéaire.

B Effet d'une applications linéaire sur la dimension

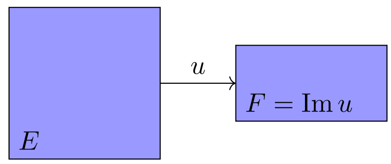
Une application linéaire, $u : E \to F$ ne peut que réduire la dimension de son ensemble de définition.



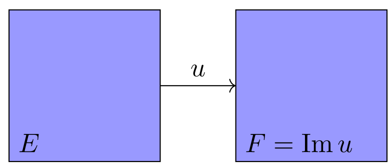
L'application est injective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim E$.



L'application est surjective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim F$.



L'application est un isomorphisme si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim F = \dim E$.



Proposition Inégalité et égalité sur le rang

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

— Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{rg} u \leq \dim F$, avec égalité si et seulement si u est surjective.

— Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{rg} u \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si u est injective.

Démonstration

— Comme $\operatorname{Im} u \subset F$, on a $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leq \dim F$. Pour l'égalité, on a u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$ si et seulement si $\dim \operatorname{Im} u \leq \dim F$.

— Soit n la dimension de E et $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_n}))$, $\dim \operatorname{Im} u \leq n$. Pour l'égalité, on a $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ si et seulement si $u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_n})$ est une famille libre de F.

  — Supposons que $(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_n}))$ est une famille libre de F.
  Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \in \operatorname{Ker} u$.

$$\begin{aligned}
u(\vec{x}) &= \overrightarrow{0_F} \\
u\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\Big) &= \overrightarrow{0_F} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e_i}) &= \overrightarrow{0_F} && \text{car u linéaire.} \\
\forall i \in [\![1, n]\!] : \quad x_i &= 0 && \text{car } (u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n})) \text{ libre} \\
\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \vec{e_i} &= \overrightarrow{0_E}
\end{aligned}$$

  Ainsi $\operatorname{Ker} u \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$. Donc u est injective.

  — Supposons que u est injective.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{e_i})) &= \overrightarrow{0_F} & & \\
u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i})) &= \overrightarrow{0_F} & & \text{car u linéaire} \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i} &= \overrightarrow{0_E} & & \text{car u } \operatorname{Ker} u = \{\vec{0_E}\} \\
\forall i \in [\![1, n]\!] : \quad \lambda_i = 0 & & & \text{car } (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) \text{ libre}
\end{aligned}.$$

Donc $(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_n}))$ est une famille libre de F.

Proposition Cas $\dim E = \dim F$

Soit $u : E \to F$ une application linéaire tel que $\dim E = \dim F$.

$$u \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow u \text{ est injective} \Leftrightarrow u \text{ est surjective.}$$

Soit $u : E \to E$ une application linéaire tel que $\dim E$ est finie.

$$\begin{array}{ccccc}
u \text{ est un isomorphisme} & \Leftrightarrow & u \text{ est injective} & \Leftrightarrow & u \text{ est surjective} \\
u \in \mathcal{GL}(E) & \Leftrightarrow & u \text{ est inversible à gauche} & \Leftrightarrow & u \text{ est inversible à droite} \\
\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E & \Leftrightarrow & \exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \mathrm{Id}_E & \Leftrightarrow & \exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \mathrm{Id}_E
\end{array}$$

Démonstration

- Par hypothèse $\dim E = \dim F$. On a u est injective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim E$ si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$ si et seulement si u est surjective.
- u est inversible à gauche si et seulement si $\exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si u est injective si et seulement si u est surjective si et seulement si $\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si u est inversible à droite.

Exemple

Démontrer que l'application linéaire $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array} \right.$ est un automorphisme.

Démonstration

Comme u est un endomorphisme, il suffit de démontrer qu'elle est injective.

$$(x, y) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{(0, 0)\}$.

Exemple

Démontrer que l'application linéaire $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P \end{array} \right.$ est un automorphisme.

Démonstration

Comme u est un endomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective.

$$P \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow P - P' = 0 \Leftrightarrow P = P'$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ car $\deg(P) = \deg(P')$ si et seulement $P = 0$.

C Théorème du rang : $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$

le théorème du rang lie le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau.

Lemme **Factorisation**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. Si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$,
Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$, c'est à dire que l'application linéaire

$$u|_S \left| \begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ \vec{x} & \longmapsto & u(\vec{x}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Démonstration

- Injective : Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u|_S$ donc $x \in \operatorname{Ker} u$ et $x \in S$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et S sont supplémentaires, $\operatorname{Ker} u \cap S = \{\overrightarrow{0_E}\}$. D'où $\vec{x} = \overrightarrow{0_E}$ et $\operatorname{Ker} u|_S = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
- Surjective : Soit $\vec{y} \in \operatorname{Im} u$ ainsi il existe $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = \vec{y}$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et S sont supplémentaires, il existe $\vec{k} \in \operatorname{Ker} u$ et $\vec{s} \in S$ tel que $\vec{x} = \vec{k} + \vec{s}$. On a :

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \vec{y} \\ u(\vec{k} + \vec{s}) &= \vec{y} \\ u(\vec{k}) + u(\vec{s}) &= \vec{y} && \text{car u linéaire} \\ u(\vec{s}) &= \vec{y} \quad \text{car} \quad \vec{k} && \in \operatorname{Ker} u. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{s}$ est un antécédent de $\vec{y}$ par l'application $u|_S$. Donc $u|_S$ est surjective.

Théorème **Théorème du rang**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u.$$

Démonstration

Comme E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} u$ possède un supplémentaire S dans E. D'après le lemme de factorisation, comme $u|_S$ est un isomorphisme, $\dim S = \dim \operatorname{Im} u$. Comme S et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires dans E, on a $\dim S + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$. Finalement, on a $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$.

III Dualité entre le point vue application linéaire et le point de vue matriciel en dimension finie

A Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans cette sous-section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Définition Coordonnées d'un vecteur

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
On sait que tout vecteur $\vec{x} \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \dots + x_p\overrightarrow{e_p}$ où $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$.
On appelle coordonnées de $\vec{x}$ dans la base E la matrice colonne

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemple : Polynôme

Soit $P = 1 - X^2 \in \mathbb{R}_n[X]$. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Définition Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, le vecteur $u(\overrightarrow{e_j})$ se décompose dans la base $\mathcal{B}'$:

$$u(\overrightarrow{e_j}) = a_{1j}.\overrightarrow{f_1} + \dots + a_{nj}.\overrightarrow{f_n}.$$

On appelle **matrice de l'application linéaire u** la matrice, $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, définie par :

$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & u(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{f_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_n} \end{array}$$

Les autres notations sont $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(u)$.
Dans le cas d'un endomorphisme, $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on la note $[u]_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple : Dérivée polynomial

La matrice de $\Phi_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est :

$$[\Phi_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

car $\Phi_3(X^i) = iX^{i-1}$.

Théorème Image d'une application linéaire et image d'une matrice

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\vec{x}$ un vecteur de E.
Alors
$$[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$
ou si on pose $Y = [u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'}, \quad A = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$, on a :
$$Y = AX.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
Soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.
Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ les coefficients de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
Soit $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p} \in E$.
On a :
$$u(\vec{x}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} = \sum_{j=1}^{p} x_j\overrightarrow{e_j} = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right)\overrightarrow{f_i},$$
d'où $[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} x_j a_{nj} \end{pmatrix}$.
Aussi on a :
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$
$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$
$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} x_j a_{nj} \end{pmatrix}.$$
Finalement on obtient bien $[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

Exemple : Dérivée polynomial

Soit $P = 1 - X^2$. On a $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$. D'où
$$[\Phi_3(P)]_{\mathcal{B}} = [\Phi_3]_{\mathcal{B}}[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'où le résultat escompté $\Phi_3(P) = -2X$.

Théorème Produit matriciel et composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie munis des bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Soit $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications linéaires.
Alors

$$[v \circ u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [v]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \times [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Démonstration

Soit $\vec{x} \in E$. On a :

$$[v \circ u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}[\vec{x}]_B = [v \circ u(\vec{x})]_{\mathcal{B}''}$$

et

$$[v]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \times [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\vec{x}]_B = [v]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [v(u(\vec{x}))]_{\mathcal{B}''}$$

Ainsi les matrices $[v \circ u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ et $[v]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \times [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sont égales.

Définition Application linéaire d'une matrice

Inversement, si l'on se donne une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, on peut définir une application linéaire, dite **canoniquement associée à M**, par

$$u_M \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array} \right. .$$

Si l'on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on vérifie que

$$[u_M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M.$$

Exemple : Matrice de rotation

La matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est canoniquement associée à l'application linéaire rotation

$$R_\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right. .$$

En résumé, soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ bases de E et F respectivement, nous avons :

Vectoriel		Matriciel
$\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + \dots + x_p.\vec{e}_p \in E$	$\longrightarrow$	$X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$
$u \in \mathcal{L}(E, F)$	$\longrightarrow$	$A = [u]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(\vec{e_1}) & \cdots & u(\vec{e_p}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{f_1} \\ \vdots \\ \vec{f_n} \end{array} \end{array}$
$\vec{y} = y_1.\vec{f}_1 + \dots + y_n.\vec{f}_n = u(\vec{x})$	$\longrightarrow$	$Y = [\vec{y}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \times X$
$u \circ v$ avec $u, v \in \mathcal{L}(E)$	$\longrightarrow$	$[u \circ v]_{\mathcal{B}} = A \times B$ avec $A = [u]_{\mathcal{B}}$ et $B = [v]_{\mathcal{B}}$
$u_M \left\vert \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array} \right.$	$\longleftarrow$	$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

B Dualité entre la représentation matricielle et l'application linéaire

Théorème Caractérisation par l'image d'une base

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les images d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Remarque

Pour déterminer une application quelconque, on n'a pas d'autre choix que de déterminer les images de chaque point $x \mapsto f(x)$. En revanche, une application linéaire est complètement déterminer par l'image d'une base. Par exemple, soit $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ une application linéaire avec les images de base canonique : $u(1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 1) = (1, -1)$. On a

$$u(x, y) = u(x(1, 0) + y(0, 1)) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} x.u(1, 0) + y.u(0, 1) = x.(1, 1) + y.u(1, -1) = (x + y, x - y).$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
Comme u est linéaire, on a :

$$u(\vec{x}) = u(\lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_p.\overrightarrow{e_p}) \quad (1)$$
$$u(\vec{x}) = \lambda_1.u(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + \lambda_p.u(\overrightarrow{e_p}) \quad (2)$$

Cela implique que l'application linéaire u est entièrement déterminée par les vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_p}))$.

Théorème Dualité

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
L'application

$$\Phi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Démonstration

On ajoute une seconde partie à la démonstration sur la caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
Soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.
Il existe une famille $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] : u(\overrightarrow{e_j}) = a_{1j}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{nj}\overrightarrow{f_n}.$$

Ainsi, les coefficient $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ caractérise entièrement l'application linéaire u d'où l'isomorphisme.

Corollaire Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration

Comme l'application Φ est un isomorphisme, la dimension de l'espace vectoriel de départ est égale à celle d'arrivé (voir la section image et noyau). Donc on a

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) = nq = \dim(F)\dim(E).$$

Proposition Inversibilité à gauche et à droite d'une matrice carré

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ alors A et B sont toutes deux inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. D'où $u_{AB} = u_{I_n}$. Comme $u_{AB}(X) = ABX = Au_B(X) = u_A(\circ u_B(X))$, on a $u_{AB} = u_A \circ u_B$. Ainsi on obtient $u_A \circ u_B = u_{I_n}$ donc que u_A est inversible à droite d'inverse u_B. Du fait de la dimension finie, u_A est inversible d'inverse u_B. Donc A et B sont toutes deux inversibles et inverses l'une de l'autre.

Proposition Dualité de l'inversibilité

Soit u un endomorphisme.

$$u \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow [u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Soit M une matrice carré.

$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow u_M \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n).$$

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{GL}(E)$. Donc il existe $v \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$ et $v \circ v = Id_E$. D'où
Comme l'application Φ est un isomorphisme d'anneau,

Définition Rang

Le **rang** d'une application linéaire u est la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} u$.
Le **rang** d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.

Proposition

Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Proposition Dualité

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}[u]_{\mathcal{B}} = \{0\}$.

Définition Noyau et image

- L'**image** de M est le sous espace vectoriel $u_M(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \{MX : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$; on le note $\operatorname{Im} M$.
- Le **noyau** de M est le le sous espace vectoriel $u_M^{-1}\{\{0\}\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : MX = 0\}$; on le note $\operatorname{Ker} M$.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ On a $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{Im} M$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ d'où $\operatorname{Im} M = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = & 0 \\ x-y = & 0 \end{cases} \overset{x=t}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{Ker} M = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Comme M est la matrice associée à l'application linéaire de l'exemple **??**, on retrouve les mêmes résultats en identifiant les n-uplets aux matrices colonnes.

Proposition Image d'une base

L'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes.

Théorème Théorème du rang version matricielle

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Alors
$$p = \operatorname{rg} M + \dim \operatorname{Ker} M.$$

C Changement de base

Il faut bien garder à l'esprit que la matrice d'une application linéaire est une "représentation" de celle-ci qui dépend du choix des bases au départ et à l'arrivée. Il est utile de savoir passer d'une représentation à une autre. Connaissant la matrice d'une application linéaire dans deux bases, il faut savoir la déterminer dans deux autres bases.

D D'une représentation à l'autre

Définition Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice
$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_E]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$
De façon plus explicite, notons $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$, $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}\}$ et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Dans ce cas, on a
$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \overrightarrow{f_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{e_i}.$$

Ainsi,
$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{f_1} & \cdots\cdots & \overrightarrow{f_n} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array} \end{array}$$

Proposition Inversible

Si P est une matrice de passage alors P est inversible.
Si P est inversible alors P est la matrice de passage de la base canonique à la base de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathcal{B}$ est la base canonique et si $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)$, alors :

$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ La première matrice de passage ne nécessite aucun calcul, la seconde résulte de la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{array}{rl}
 & \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
(L2) \leftarrow (L2) - 2(L1) & \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
(L2) \leftarrow \frac{1}{5}(L2) & \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \\
(L1) \leftarrow (L1) + (L2) & \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)
\end{array}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, considérons la base $\mathcal{B} = (X^i)_{0 \leq i \leq 2}$ et $\mathcal{B}' = ((X-1)^i)_{0 \leq i \leq 2}$.

$$\text{Comme } \left\{ \begin{array}{rl} 1 & = 1 \times 1 \\ (X-1) & = (-1) \times 1 + 1 \times X \\ (X-1)^2 & = 1 \times 1 + (-2) \times X + 1 \times X^2 \end{array} \right., \text{ on a } P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors

1. $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$;
2. $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est inversible, et son inverse est $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.

Proposition Vecteur colonne

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $\vec{x}$ un vecteur de E.
Alors

$$X = PX'$$

où

— $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$,

— $X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$,

— $X' = [\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit F un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Alors on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

où

— $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$,

— $Q = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}'}$,

— $A = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$,

— $A' = [u]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit u un endomorphisme de E. Alors on a

$$A' = P^{-1}AP$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,

— $A = [u]_{\mathcal{B}}$,

— $A' = [u]_{\mathcal{B}'}$.

E Similitude

Définition Similitude

Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si et seulement si existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représentant la symétrie orthogonal par rapport à la première bissectrice. Alors M est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a bien $M = PDP^{-1}$.

Proposition Propriétés

Il s'agit d'une relation d'équivalence, c'est à dire :

1. $A \sim A$;
2. si $A \sim B$, alors $B \sim A$;
3. si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors $A \sim C$.

Remarque

Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres. La réciproque est fausse.

Proposition

Soit u un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Alors les matrices $[u]_{\mathcal{B}}$ et $[u]_{\mathcal{B}'}$ sont semblables.

Proposition

Soit A et B deux matrices. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons u l'unique endomorphisme de E tel que $[u]_{\mathcal{B}} = A$. Alors A et B sont semblables si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}'} = B$.
C'est à dire que deux matrices semblables représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

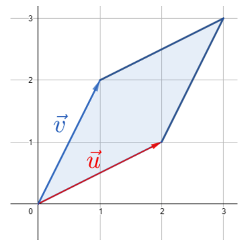
IV Equation linéaire

V Endomorphisme/Matrice carré

Dans cette section, on étudie le cas où l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques : $f : E \to E$ est un endomorphisme. Si $\dim E = n$, alors chaque matrice associée à f est une matrice carrée de taille n.

A Déterminant

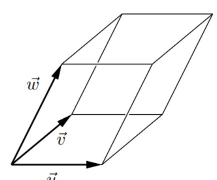
Point de vue géométrique : dans le plan, le déterminant, det, est une application permettant de calculer l'aire orientée du parallélogramme défini par deux vecteurs, $\vec{u}, \vec{v}$



On peut démontrer que l'aire orientée du parallélogramme est donnée par :

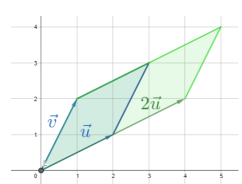
$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{array} \right. .$$

Le signe du déterminant s'interprète comme le signe de l'angle orienté entre les deux vecteurs. La valeur absolue du déterminant donne l'aire du parallélogramme engendré. Ceci se révèle crucial dans différents domaines des mathématiques, par exemple en analyse pour obtenir une formule de changement de variable pour les intégrales doubles.
On souhaite étendre l'application déterminant pour calculer le volume d'un parallélépipèdes défini par trois vecteurs dans l'espace : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



L'idée fondamentale est de prolonger l'application déterminant dans le plan à partir de ses propriétés.
Sur le plan, on remarque que cette application est :

1. **Normalisé** : l'aire du carré unité est 1, $\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 1$
2. **2-linéaire** : linéaire par rapport à chaque une de ces deux variables.



3. **Alternée** : l'aire d'un parallélogramme aplati est 0, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{v}$.

Donc dans l'espace, cette application devrait être :

1. **Normalisé** : le volume du cube unité est 1, $\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 1$
2. **3-linéaire** : linéaire par rapport à chaque une de ces trois variables.
3. **Alternée** : le volume d'un parallélépipèdes aplati est 0, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = \vec{w}$ ou $\vec{v} = \vec{w}$.

Un théorème important est qu'il existe une unique application respectant ces propriétés quelque soit la dimension.
Dans la suite, les vecteurs sont rangés sous forme d'une matrice, par exemple $\det((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \det(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix})$.

Théorème Unicité et existence du déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\det(\mathrm{I}_n) = 1$;
2. $\det(A) = 0$ si deux colonnes de A sont égales ;
3. Si on fixe $n-1$ colonnes de A, l'application qui à la dernière colonne associe $\det(A)$ est linéaire.

$$\lambda \det(C_1 \dots C_i \dots C_n) + \mu \det(C_1 \dots C_i' \dots C_n) = \det(C_1 \dots \lambda C_i + \mu C_i' \dots C_n).$$

Proposition Propriétés

Cette application det vérifie alors automatiquement les propriétés suivantes :

1. **antisymétrique** :
$$\det(C_1 \dots C_i \dots C_j \dots C_n) = -\det(C_1 \dots C_j \dots C_i \dots C_n) \text{ si } i \neq j$$
2. **stable par combinaison linéaire** :
$$\det(C_1 \dots C_i \dots C_n) = \det(C_1 \dots C_i + \lambda C_j \dots C_n) \text{ si } i \neq j$$
3. **homothétie d'une colonne** :
$$\det(C_1 \dots \lambda C_i \dots C_n) = \lambda \det(C_1 \dots C_i \dots C_n)$$
En particulier,
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$
4. **stable par transposition**
$$\det(A) = \det(A^\intercal)$$
5. **multiplication**
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
6. **inversible** $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible. Si A est inversible, son inverse est donnée par :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{com} A^\intercal$$
où $\mathrm{com} A^\intercal$ est la transposée de la comatrice de A.

Dans toutes les propriétés précédentes, on peut remplacer les opération sur les colonnes par des opération sur les lignes.

Proposition Matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, est égale au produit des coefficients de la diagonale, soit $a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$.

Définition Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
La quantité $\det(M)$ ne dépendant pas du choix de la base $\mathcal{B}$, mais seulement de u, on l'appelle **déterminant** de l'endomorphisme u et on note $\det(u) = \det(M)$.

Exemple : Déterminant de Vandermonde

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. La **matrice de Vandermonde** associée à $(a_1, \dots, a_n)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le **déterminant de Vandermonde** $V(a_1, \dots, a_n)$ est le déterminant de la matrice de Vandermonde ci-dessus. On a :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

En particulier,

— $V(a) = 1$,

— $V(a, b) = b - a$,

— $V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b)$.

La matrice de Vandermonde associée à $(a_1, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si les nombres $(a_1, \dots, a_n)$ sont deux à deux distincts.

B Trace

Définition Trace

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
La **trace** de la A est le scalaire

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Proposition Propriétés

1. La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, pour toutes matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

2. Pour toutes matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

3. Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elles ont la même trace.

Remarque

En général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

Définition Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. La quantité $\operatorname{tr}(M)$ ne dépendant pas du choix de la base $\mathcal{B}$, mais seulement de u, on l'appelle **trace** de l'endomorphisme u et on note $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(M)$.

Proposition Propriétés

1. La trace est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$.
2. Si u et v sont deux endomorphismes de E, alors $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

C Polynôme d'endomorphismes/de matrices carrés

Définition **Polynôme d'endomorphismes**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
On définit par récurrence u^n pour $n \in \mathbb{N}$ par $u^0 = Id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u \circ u^n$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$.

Définition **Polynôme de matrices carrés**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carré.
On définit par récurrence M^n pour $n \in \mathbb{N}$ par $M^0 = \mathrm{I}_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{n+1} = M \times M^n$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$.

Proposition **Binôme de Newton**

La formule du binôme est vérifiée quand les deux endomorphismes u et v commutent :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

La formule du binôme est vérifiée quand les deux matrices carrés A et B commutent :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k V^{n-k}$$

.

Proposition **Propriétés**

Soit P et Q sont deux polynômes et λ un scalaire, on a

1. $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$
2. $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$
3. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

Proposition **Propriétés**

Soit P et Q sont deux polynômes et λ un scalaire, on a

1. $(\lambda P)(M) = \lambda P(M)$
2. $(P+Q)(M) = P(M) + Q(M)$
3. $(PQ)(M) = P(M)Q(M)$

Proposition **Conjugaison**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $q \in \mathcal{GL}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$P\big(q^{-1}uq\big) = q^{-1}\, P(u)\, q.$$

Cela implique deux endomorphisme si u est semblable à v alors $P(u)$ est semblable à $P(v)$.

Proposition **Conjugaison**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$P\big(Q^{-1}uQ\big) = Q^{-1}\, P(u)\, Q.$$

Cela implique deux endomorphisme si A est semblable à B alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

Exemple : Polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que le polynôme $P = (X-2)(X-1)$ annule, c'est à dire $P(A) = 0$.
On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. D'où $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_2 = 0$. Soit $(A - 2\mathrm{I}_2)(A - \mathrm{I}_2) = 0$. En déduire que $\operatorname{Ker}(A - 2\mathrm{I}_2) \oplus \operatorname{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Analyse :

— Soit $X \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}()$ une matrice colonne tel que $X = Y + Z$ avec $Y \in \operatorname{Ker}(A - 2\mathrm{I}_2)$ ($(A - 2\mathrm{I}_2)Y = 0$, soit $AY = 2Y$) et $Z \in \operatorname{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}()$ ($AZ = Z$).

  On applique A à l'équation $X = Y + Z$. On obtient $AX \overbrace{=}^{\text{linéarité}} AY + AZ = 2Y + Z$. En combinant ces deux équations, on obtient $Y = AX - X$ et $Z = 2X - AX$. Ainsi, si Y et Z existent, ils s'écrivent nécessairement comme ci-dessus démontrant l'unicité de la décomposition.

Synthèse :

— $AX - X \in \operatorname{Ker}(A - 2\mathrm{I}_2)$: $(A - 2\mathrm{I}_2)(AX - X) = (A - 2\mathrm{I}_2)(A - \mathrm{I}_2)X = 0X = 0$.

— $2X - AX \in \operatorname{Ker}(A - \mathrm{I}_2)$: $(A - \mathrm{I}_2)(2X - AX) = (A - \mathrm{I}_2)(A - 2\mathrm{I}_2)X = 0X = 0$.

VI Catégories d'applications linéaires

A Forme linéaire : $E \mapsto \mathbb{K}$

Définition Forme linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire $\Phi E \to \mathbb{K}$.

— L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le **dual** de E et se note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

— Une **droite** de E est un sous espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, D est une droite (vectorielle) si et seulement si $\exists \vec{x} \in E \setminus \{\overrightarrow{0_E}\} \quad D = \mathbb{K}\vec{x}$.

— Un **hyperplan** de E est un sous espace vectoriel H qui admet une droite comme supplémentaire. Autrement dit, si H est un sous espace vectoriel de E, H est un hyperplan si et seulement si $\exists \vec{x} \in E \setminus \{\overrightarrow{0_E}\}$, $E = H \setminus \mathbb{K}\vec{x}$.

Exemple : Équation du plan vectoriel

Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$ un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x = (1, 0, 0)$ et $D = \mathbb{K}x$. On a $E = P \oplus D$.
Soit Φ la forme linéaire définie par $\Phi \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 2x + y - z \end{array} \right.$. On a $P = \operatorname{Ker} \Phi$ et $[\phi]_{\mathcal{B}} = (2, 1, -1)$ avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Proposition

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\phi \in E^*$. Alors

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = (\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n))$$

est une matrice ligne avec n composantes. Si $\phi \neq 0$, $\operatorname{rg} \phi = 1$ et $\operatorname{Ker} \phi = n - 1$.

Proposition Dimension

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\dim E^* = \dim E$.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous espace vectoriel de E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan, c'est à dire qu'il existe une droite D telle que $E = H \oplus D$;
2. $\dim H = n - 1$;
3. il existe une forme linéaire non nulle ϕ telle que $H = \operatorname{Ker} \phi$.

Remarque

En dimension quelconque, on a encore l'équivalence entre 1 et 3.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, Φ et Ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Alors

$$\operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{Ker} \Psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \quad \Phi = \lambda \Psi.$$

Autrement dit, deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Remarque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On a un isomorphisme entre :

— les hyperplans sur E, et

— les formes linéaires non nulles sur E, à multiplication par un scalaire non nul près.

B Projecteur/Symétrie

Projecteur $p(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1}$

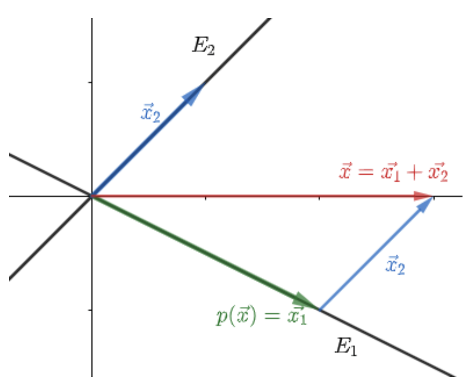
Définition Projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = E_1 \oplus E_2$).
Le **projecteur** p (ou la projection) sur E_1 parallèlement à E_2 est défini par :

$$p \left| \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in E_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in E_2} & \longmapsto & \vec{x_1} \end{array} \right. .$$

On dit que p est un **projecteur** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Exemple : Sur $\mathbb{R}^2$



Cette figure ci-dessus représente la projection, $p(\vec{x})$, du vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $E_1 = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ parallèlement à $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$, on a

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, la fonction qui à (x, y, z) associe $(x, y, 0)$ est la projection, p, sur la plan x-y parallèlement au à l'axe z. Dans la base canonique, $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^3$, on a

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $\mathcal{B} = (\overbrace{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_r}}^{\text{base de } E_1}, \overbrace{\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e_n}}^{\text{base de } E_2})$ une base adaptée à cette décomposition.
Soit le projecteur p sur E_1 parallèlement à E_2.
Alors la matrice de p dans cette base adaptée s'écrit :

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

Proposition Propriétés

Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$
2. $\text{Im}\, p = E_1$ et $\text{Ker}\, p = E_2$
3. $E_1 = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ c'est-à-dire : $\vec{x} \in E_1 \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$. Ainsi E_1 est ensemble des vecteurs invariants par p.

Proposition Caractérisation

Supposons $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Dans ce cas $\text{Im}\, p$ et $\text{Ker}\, p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p est le projecteur sur $\text{Im}\, p = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\, p$.

Symétrie : $s(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1} - \vec{x_2}$

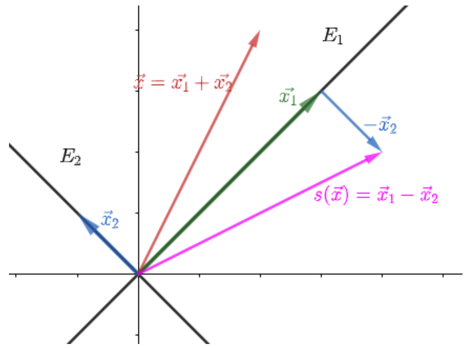
Définition Projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = E_1 \oplus E_2$).
La **symétrie** p par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est définie par :

$$p \left| \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in E_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in E_2} & \longmapsto & \vec{x_1} - \vec{x_2} \end{array} \right. .$$

On dit que s est un **symétrie** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exemple



Cette figure ci-dessus représente la symétrie, s par rapport à $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ parallèlement à $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Dans la base canonique $\mathcal{B}$, on a $[s]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. En revanche dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ on a $[s]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

Proposition Lien avec la projection

La symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est égale à $s = 2p - \text{Id}_E$ avec p projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Proposition Propriétés

Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$
2. $\text{Im}\, p = E_1$ et $\text{Ker}\, p = E_2$
3. $E_1 = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ c'est-à-dire : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} \in E_1 \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$. Ainsi E_1 est ensemble des vecteurs invariants par p.

Proposition Caractérisation

Supposons $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Dans ce cas $\text{Im}\, p$ et $\text{Ker}\, p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p est le projecteur sur $\text{Im}\, p = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\, p$.

Proposition Propriétés

Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{Id}_E$
2. $\text{Im}\, s = E$ et $\text{Ker}\, s = \{0_E\}$ (on retrouve le fait que s est un isomorphisme)
3. $E_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$
4. $E_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

Proposition Caractérisation

Supposons $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$s \text{ symétrie} \Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}_E.$$

Dans ce cas $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.