Chapitre 1

Espaces préhilbertiens réels

En algèbre linéaire, un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel avec une structure supplémentaire appelée produit scalaire. Cette structure supplémentaire associe chaque couple de vecteurs à une quantité scalaire connue sous le nom de produit scalaire des vecteurs. Le produit scalaire permet l'introduction rigoureuse de notions géométriques intuitives telles que la longueur d'un vecteur ou l'angle entre deux vecteurs. Il permet de définir la notion d'orthogonalité entre vecteurs (produit scalaire nul). Les espaces préhilbertiens réels généralisent les espaces euclidiens aux espaces vectoriels de toute dimension (éventuellement infinie), et sont étudiés en analyse fonctionnelle.
Un produit scalaire induit naturellement une norme associée donc un espace préhilbertien réel est également un espace vectoriel normé.

I Produit scalaire et norme

A Produit scalaire

Définition 1 (*Produit scalaire*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Autrement dit, un **produit scalaire** sur E est une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$

— *bilinéaire* : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{z}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \mu\varphi(\vec{y}, \vec{z}) \text{ par rapport à la première variable,}$$

$$\varphi(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{z}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \mu\varphi(\vec{x}, \vec{z}) \text{ par rapport à la seconde variable.}$$

— *symétrique* : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \varphi(\vec{y}, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

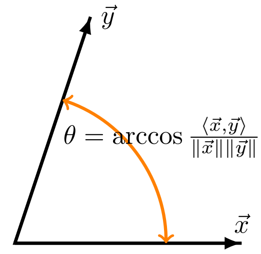
— *définie* : $\forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}_E$,

— *positive* : $\forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$.

Il suffit de vérifier la linéarité à gauche et la symétrie pour justifier la bilinéarité.

Remarque 1

A ce stade, les notions de norme et d'angle ne sont pas définies. Le produit scalaire est définie indépendamment d'une relation du type $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\vec{x}, \vec{y})$. En réalité, dans la théorie des espaces préhilbertiens réels, la définition du produit scalaire est première et les notion de norme et d'angle viennent après.
Norme : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle}$.
Angle : $\theta = \arccos \frac{\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$



Définition 2 (*Espace préhilbertien réel*)

Un **espace préhilbertien réel** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.
On note le produit scalaire généralement $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$, $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x} \mid \vec{y})$ ou encore $\vec{x}.\vec{y}$.
Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Définition-Proposition 1 (*Produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$)

Le **produit scalaire canonique** est défini par

$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^\intercal Y$.

Ainsi défini, nous retrouvons le produit scalaire usuel défini dans le plan $\mathbb{R}^2$. Par exemple si $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)$, on a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Démonstration :

— *symétrique* : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^\intercal Y \overbrace{=}^{\text{matrice carré de taille 1}} (X^\intercal Y)^\intercal = Y^\intercal X = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

— *bilinéaire* : par symétrie la linéarité par rapport à la seconde variable suffit,

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2 \rangle = X^\intercal (\lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda X^\intercal Y_1 + \mu X^\intercal Y_2 = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \mu \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle.$$

— *positive* : $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$.

— *définie* : $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{x_i^2}^{\geqslant 0} = 0$, alors $x_i = 0$ pour tout i, soit $\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$. ■

Exemple 1 (*Non unicité du produit scalaire*)

L'application $(X, Y) \to X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ distinct du produit scalaire canonique.

— *symétrique* : $X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \overbrace{=}^{\text{matrice carré de taille 1}} (X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y)^\intercal = Y^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal X = Y^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$.

— *bilinéaire* : par symétrie la linéarité par rapport à la seconde variable suffit,

$$X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (\lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y_1 + \mu X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y_2.$$

— *positive* : $X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geqslant 0$.

— *définie* : $X^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$, soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 (*Sur les fonctions continues*)

L'application $(f,g) \to \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Symétrie, bilinéaire et positivité évidentes.
Pour définie, $\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ implique que $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ car f^2 est une fonction continue et positive. Donc $f = 0$.

Exemple 3 (*Sur les polynômes*)

L'application $(P,Q) \to \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Symétrie, bilinéaire et positivité évidentes.
Pour définie, $\langle P,P\rangle = \sum_{k=0}^n P^2(k)$ implique que P admet $n+1$ racines donc $P = 0$ car $\deg P \leqslant n$.

Exemple 4 (*Sur les matrices carrés*)

L'application $(A,B) \to \mathrm{tr}(A^\mathsf{T}B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— *symétrique* : $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\mathsf{T}B) \overbrace{=}^{\mathrm{tr}(M^\mathsf{T})=\mathrm{tr}(M)} \mathrm{tr}((A^\mathsf{T}B)^\mathsf{T}) = \mathrm{tr}(B^\mathsf{T}A) = \langle B,A\rangle$

— *bilinéaire* : par symétrie la linéarité par rapport à la seconde variable suffit,

$$\langle A,\lambda B_1+\mu B_2\rangle = \mathrm{tr}(A^\mathsf{T}(\lambda B_1+\mu B_2)) = \lambda\,\mathrm{tr}(A^\mathsf{T}B_1)+\mu\,\mathrm{tr}(A^\mathsf{T}B_2) = \lambda\langle A,B_1\rangle+\mu\langle A,B_2\rangle.$$

— *positive* : Rappels : coefficient d'un produit de matrice $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ et trace $\mathrm{tr}(C) = \sum_{k=1}^n c_{kk}$.
On a

$$\langle A,A\rangle = \mathrm{tr}(A^\mathsf{T}A) = \sum_{j=1}^n (A^\mathsf{T}A)_{jj} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ij} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \geqslant 0$$

— *définie* : $\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 0$ implique que $a_{ij} = 0$ pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, donc $A = 0$.

B Norme associée à une produit scalaire

Définition 3

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
On appelle **norme associée** l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle}.$$

On appelle **distance** de $\vec{x}$ à $\vec{y}$ le réel positif $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$.
Le vecteur $\vec{x}$ est dit **unitaire** si $\|\vec{x}\| = 1$.

Remarque 2

Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, le vecteur $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ est unitaire.

Proposition I.1 (*Identités remarquables de la norme associée*)

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\vec{x},\vec{y} \in E$. On a

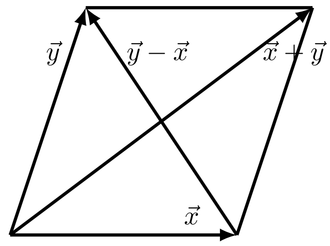
— $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y}\rangle$

— $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y}\rangle$

— ***identité du parallélogramme*** *:* $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\big(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\big)$

— ***identité de polarisation*** *:* $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\big(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\big)$.

L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des *longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.*



Démonstration : Pour la première identité, on a :

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle \overbrace{=}^{\text{distributivité}} \langle \vec{x},\vec{x}\rangle + \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle \vec{y},\vec{x}\rangle + \langle \vec{y},\vec{y}\rangle \overbrace{=}^{\text{symétrie}} \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y}\rangle.$$

La démonstration de la suivante est similaire. Les deux dernières identités sont des combinaisons des deux premières (+ et -). ∎

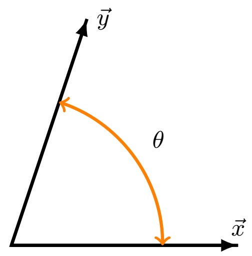
Théorème I.2 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
Alors pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in E$, on a :

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont liés.

Démonstration : Voir https://www.youtube.com/watch?v=0AVLW1bTpLw.
Dans $\mathbb{R}^2$, la démonstration est directe car $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\theta)$ et $|\cos(\theta)| \leqslant 1$.



Dans le cas générale, lorsque $\vec{y} = \vec{0}$, l'énoncé est clairement vrai, par conséquent on supposera $\vec{y}$ non nul.

— *Inégalité* Posons, pour tout réel t, $P(t) = \|\vec{x}+t\vec{y}\|^2$. Par construction, la fonction P est positive ou nulle. On a :

$$P(t) = \langle \vec{x}+t\vec{y}, \vec{x}+t\vec{y}\rangle \overbrace{=}^{\text{bilinéarité}} \|\vec{x}\|^2 + 2t\langle \vec{x},\vec{y}\rangle + t^2\|\vec{y}\|^2$$

Comme $\vec{y}$ est non nul, $\|\vec{y}\|^2$ est non nul également. P est donc une fonction polynomiale du second degré. P étant positive ou nulle, son discriminant est négatif ou nul :

$$4\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leqslant 0$$

Comme $t \to \sqrt{t}$ est croissante, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

— *Égalité* Si $(\vec{x},\vec{y})$ est une famille liée alors, il existe $\lambda \in\ R$ tel que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. On a :

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| = |\langle \lambda\vec{y},\vec{y}\rangle| = |\lambda|\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

Réciproquement, si $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine réelle (double) t, et pour ce t on a

$$\|\vec{x}+t\vec{y}\|^2 = 0 \overbrace{\Longrightarrow}^{\text{définie}} \vec{x}+t\vec{y}=\vec{0}.$$

Donc $(\vec{x},\vec{y})$ est une famille liée. ■

Exemple 5

Pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$: $\quad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n x_i$ avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.
Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ et $(1,\dots,1)$ de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Exemple 6

Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: $\quad |\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}$.
Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et $x \to 1$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire I.3 (*Norme sur E*)

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
*Alors la norme associée $\|.\|$ est une **norme** sur E, c'est-à-dire vérifie ces propriétés :*

- *Homogène :* $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.
- *Définie :* $\|\vec{x}\| = 0 \Longrightarrow \vec{x} = 0$.
- *Inégalité triangulaire :* $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Cette norme fournit une structure d'espace vectoriel normé sur E. On peut donc parler de convergence sur E, de topologie sur E, etc.

Démonstration : — *Homogène :* $\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{\langle\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = |\lambda|\|\vec{x}\|$.

- *Définie :* $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = 0 \Longrightarrow \langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Longrightarrow \vec{x} = 0$
- Inégalité triangulaire :

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2+2\langle\vec{x},\vec{y},+\rangle\|\vec{y}\|^2 \overbrace{\leqslant}^{\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}} \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2.$$

Comme $t \to \sqrt{t}$ est croissante, on obtient l'inégalité : $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ■

II Orthogonalité

On considère un un espace préhilbertien réel $(E,\langle .,.\rangle)$.

A Vecteurs orthogonaux

Définition 4 (*Vecteurs orthogonaux*)

Soit $\vec{x},\vec{y} \in E$.
On dit que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont *orthogonaux* si $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$.
On note $\vec{x} \perp \vec{y}$.