

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Dans un espace euclidien E , l'objectif est d'étudier les transformations de E qui préservent le produit scalaire. Ainsi on cherche à remplacer les notions de base, équation linéaire, forme linéaire, transposition etc. par les notions pertinentes en géométrie euclidienne à savoir, respectivement, de base orthonormée, de vecteurs normaux, de produit scalaire etc.

Les applications de ces transformations sont multiples :

- résoudre des équations différentielles linéaires, trouver une base orthogonale pour deux formes quadratiques si l'une est définie positive ou de classer les quadriques,
- en physique, résoudre de nombreuses équations aux dérivées partielles comme celle de la corde vibrante ou exprimer le moment d'inertie d'un solide,
- en apprentissage automatique, calibrer un modèle de régression à l'aide de la méthode des moindres carrés ou étudier un échantillon en réduisant la dimension à l'aide de l'analyse en composantes principales.

Dans ce chapitre, (E, \langle, \rangle) désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

A Isométrie vectorielle

Définition : Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** ou **automorphisme orthogonal de E** tout endomorphisme préservant le produit scalaire, i.e. si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

On appelle **groupe orthogonal** l'ensemble de ces endomorphismes et on le note $\mathcal{O}(E)$.

Proposition : Conservation de la norme

u est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|.$$

Démonstration

- *Implication* : Soit $\vec{x} \in E$. En prenant $\vec{x} = \vec{y}$, on obtient $\langle u(\vec{x}), u(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, soit $\|u(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$, d'où $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.
- *Réciproque* : Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a

$$\begin{aligned} \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle &\stackrel{\text{Identité de polarisation}}{=} \frac{1}{4} (\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| - \|u(\vec{x}) + u(\vec{y})\|) \\ &\stackrel{\text{Linéarité}}{=} \frac{1}{4} (\|u(\vec{x} - \vec{y})\| - \|u(\vec{x} + \vec{y})\|) \\ &\stackrel{\text{Conservation de la norme}}{=} \frac{1}{4} (\|\vec{x} - \vec{y}\| - \|\vec{x} + \vec{y}\|) \\ &\stackrel{\text{Identité de polarisation}}{=} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

Proposition : Conservation d'une base orthonormale

u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormale quelconque est une base

orthonormale.

Démonstration

— *Implication* : Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de E . Comme

$$\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle \stackrel{\text{Conservation du produit scalaire}}{=} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$$

, $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est bien une base orthonormale de E

— *Réciproque* : Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de E . Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \in E$. On a

$$\begin{aligned} \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle &= \left\langle u \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right), u \left(\sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j \right) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle \\ &\stackrel{(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)) \text{ B.O.N.}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\stackrel{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ B.O.N.}}{=} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

Proposition : Groupe

$\mathcal{O}(E)$ est un groupe, sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

Démonstration

$\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

— $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$ Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ Comme u est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de montrer que u est injective, $\text{Ker } u = \{0_E\}$.

Soit $\vec{x} \in \text{Ker } u$. Comme $\|u(\vec{x})\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|\vec{x}\|$ et $u(\vec{x}) = 0$, on a $\|\vec{x}\| = 0$, soit $\vec{x} = 0_E$ car une norme est définie.

— *Non vide* : $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$

— *Stabilité composition* : Soit $u, v \in \mathcal{O}(E)$. Soit $\vec{x} \in E$. La norme est conservée car :

$$\|u(v(\vec{x}))\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|v(\vec{x})\| \stackrel{v \in \mathcal{O}(E)}{=} \|\vec{x}\|.$$

— *Stabilité inversion* : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Comme u est un automorphisme, u^{-1} l'est aussi. De plus, la norme est conservée car :

$$\|\vec{x}\| = \|u(u^{-1}(\vec{x}))\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|u^{-1}(\vec{x})\|.$$

B Matrice orthogonale

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(R)$ est dit **orthogonal** si

$$M^T M = I_n.$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n .

Comme $M^T M = I_n$, la matrice M est inversible d'inverse M^T et on a aussi $MM^T = I_n$.

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 , la matrice de rotation plane d'angle θ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou dans \mathbb{R}^3 , la matrice de rotation autour de l'axe $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et d'angle θ ,

$$R_{\vec{e}_1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou les matrices de permutation, comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition

$O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est orthogonal si et seulement si la famille des colonnes de O (ou les lignes) est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^n .

Démonstration

Soit C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice O .

$$\begin{aligned} O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est orthogonal} &\Leftrightarrow M^T M = \begin{pmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{pmatrix} (C_1 \quad \dots \quad C_n) = \begin{pmatrix} C_1^T C_1 & \dots & C_1^T C_n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^T C_1 & \dots & C_n^T C_n \end{pmatrix} = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket : C_i^T C_j = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket : \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Du fait de l'égalité $OO^T = I_n$, on a le même résultat sur les lignes.

Exemple

Il est facile de vérifier qu'une matrice de permutation est une matrice orthogonale car ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.

Théorème : Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E .

u est une isométrie vectorielle si et seulement si $[u]_{\mathcal{B}}$ est une matrice orthogonale.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormale de E .

Soit C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}$. On a $[u(\vec{e}_i)]_{\mathcal{B}} = C_i$.

Le coefficient de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}^T [u]_{\mathcal{B}}$ d'indice i, j est :

$$C_i^T C_j \stackrel{\text{BON}}{=} \langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle.$$

Conservation d'une base orthonormale

- Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle \stackrel{=}{=} \delta_{ij}$ et donc $[u]_{\mathcal{B}}^T [u]_{\mathcal{B}} = I_n$, d'où $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Si $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $C_i^T C_j = \delta_{i,j}$, soit $\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{i,j}$ c'est à dire que l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale donc $u \in \mathcal{O}(E)$.

Proposition : Matrice de passage d'un changement de bases orthonormales

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E .

Alors la matrice de passage de base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, est une matrice orthogonale. Ainsi, son inverse est $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^T$.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme associée à la matrice de passage. Comme l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, f est une isométrie vectoriel, donc $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale.

Proposition : Groupe

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, sous groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Pour la démonstration, il suffit de se ramener à u l'endomorphisme associée à la matrice orthogonale qui est une isométrie vectorielle.

C Déterminant

Proposition : Déterminant

Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\det O = \pm 1$.

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.

Alors $\det u = \pm 1$.

Démonstration

Comme $O^T O = I_n$, on a $\det(O^T O) = \det(I_n) = 1$. Or $\det(O^T O) = \det O^T \det O = (\det O)^2$. Donc $\det O = \pm 1$.

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Comme $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det u = \det [u]_{\mathcal{B}}$, on conclut que $\det u = \pm 1$.

Remarque

Une matrice ou un endomorphisme de déterminant 1 ou -1 n'est pas nécessairement une matrice orthogonale ou une isométrie vectorielle. Par exemple $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, mais les colonnes ne forment pas une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Définition : Rotation et groupe spéciale orthogonale

Une matrice orthogonale [resp. isométrie] est **direct(e)** si son déterminant est 1, indirect(e) si son déterminant est -1.

Une isométrie vectorielle directe est également appelée **rotation**.

On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales directes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des rotations de E .

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Proposition : Groupe

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{SO}(E)$] est un groupe, sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{O}(E)$] appelé **groupe spécial orthogonal** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. E].

Démonstration

- *Non vide* : $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- *Stabilité* : Soit $S_1, S_2 \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(S_1 S_2^{-1}) = \det S_1 \det S_2^{-1} = \frac{\det S_1}{\det S_2} = 1.$$

D Symétrie orthogonale**Définition : Symétrie orthogonale**

On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F parallèlement à F^\perp .
Si F est un hyperplan de E , on parle alors de **réflexion**.

Proposition : Symétrie orthogonale

Soit u une isométrie vectorielle.
 u est une symétrie orthonormale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

- \Rightarrow : Soit une symétrie orthonormale par rapport à F et F^\perp . Soit \mathcal{B} une base orthonormale adaptée à décomposition $F \oplus F^\perp = E$. La matrice de u dans la base \mathcal{B} est de la forme :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \text{I}_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -\text{I}_{\dim(F_2)} \end{pmatrix}$$

Elle est symétrique. Soit \mathcal{B}' une base orthonormale quelconque. La matrice de passage de BON \mathcal{B} à la base BON \mathcal{B}' est orthogonale donc $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^T$. On a :

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^T \begin{pmatrix} \text{I}_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -\text{I}_{\dim(F_2)} \end{pmatrix} P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

Donc $[u]_{\mathcal{B}'}$ est symétrique.

- \Leftarrow : Voir théorème spectral.

E Orientation**Définition : Orientation**

Deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E ont même **orientation** si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.
Orienter E , c'est choisir une base \mathcal{B} de référence. Une base \mathcal{B}' est directe si elle a la même orientation que \mathcal{B} .

Exemple

Sur \mathbb{R}^2 . La base de référence est (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base canonique. Soit $\mathcal{B}' = (-\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$, \mathcal{B}' est une base indirecte.

Proposition

Soit \mathcal{B} une base orthonormée directe.

\mathcal{B}' est une base orthonormée directe si et seulement si la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale directe.

Démonstration

L'équivalence est due à l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})$$

Définition : Orientation d'un hyperplan

Orienter l'hyperplan H , c'est choisir un vecteur \vec{n} orthogonal à H .

Une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ de H est alors directe si la base $(\vec{n}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ est directe dans E .

Il y a deux orientations possibles de H .

Exemple

Soit \mathbb{R}^3 orientée par rapport à la base canonique. Soit H l'hyperplan définie par le vecteur normale $(1, 1, 1)$.

La base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ de H est directe car $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$.

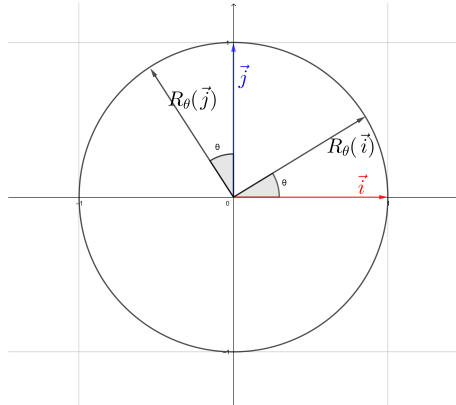
F Isométrie vectorielle du plan**Proposition : Classification**

Les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les R_θ , $\theta \in \mathbb{R}$.

Les matrices indirectes sont les S_θ , $\theta \in \mathbb{R}$.



Démonstration

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{[2]}(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T M = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \\ c = \cos \phi \text{ et } d = \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \\ c = \cos \phi \text{ et } d = \sin \phi \\ \cos(\theta - \phi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \{-1, 1\} \begin{cases} a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \\ c = \cos \phi \text{ et } d = \sin \phi \\ \phi = \theta + \epsilon \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \cos(\theta + \epsilon \frac{\pi}{2}) = -\epsilon \sin \theta \text{ et } \sin(\theta + \epsilon \frac{\pi}{2}) = \epsilon \cos \theta \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \{-1, 1\} : \quad M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix}$$

On conclut en remarquant que $\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix} = \epsilon$.

Proposition

$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ ($\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif) et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \\ \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}. \end{aligned}$$

$$R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = I_2 \text{ donc } R_\theta^{-1} = R_{-\theta}.$$

On considère \mathcal{P} un plan vectoriel orienté et \mathcal{B} une base orthonormale directe de \mathcal{P} .

Définition : Rotation

L'endomorphisme de \mathcal{P} dont la matrice dans \mathcal{B} est R_θ est appelé **rotation d'angle θ** et est noté r_θ .

Définition-Proposition : Angle d'une rotation

La matrice de r_θ dans toute BOND est R_θ .
 θ s'appelle **l'angle de la rotation**, il est défini modulo 2π .

Démonstration

Soit P la matrice de passage de la BOND \mathcal{B} à une base BOND \mathcal{B}' . Comme P appartient $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, il existe θ' tel que $P = R_{\theta'}$. La matrice de r_θ dans la base \mathcal{B}' est : $R_{\theta'}^{-1} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta$.

Proposition : Expression complexe d'une rotation

Soit r_θ la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\vec{x} \in \mathcal{P}$, on note z l'axe de M et z' celle de $r_\theta(\vec{x})$.

On a :

$$z' = e^{i\theta} z.$$

Démonstration

Soit (x, y) les coordonnées du vecteur \vec{x} . D'une part, on a :

$$[r_\theta(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix}$$

d'autre part,

$$z' = e^{i\theta} z = e^{i\theta} (x + iy) = (\cos \theta x - \sin \theta y) + i(\sin \theta x + \cos \theta y).$$

On conclut en identifiant la partie réel et imaginaire aux coordonnées de $[r_\theta(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$.

Définition : Reflexion

La **reflexion** d'axe D est la symétrie orthogonal par rapport à D .

Proposition : Représentation matricielle

Soit \mathcal{B} une BOND de \mathcal{P} .

L'endomorphisme dont la matrice dans \mathcal{B} est $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ est la **réflexion** d'axe la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ dans \mathcal{B} .

G Isométrie vectorielle dans un espace de dimension 3

Théorème : Réduction

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une BOND de E dans laquelle u a pour matrice :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ si $\det u = 1$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ si $\det u = -1$

avec le cas particulier $\theta = 0[2\pi] : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan).

Démonstration

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u . χ_u est de degré 3 donc la limite en plus l'infini est de signe opposé à la limite en moins l'infini. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine réelle λ .

Soit \vec{x} un vecteur propre associée à cette valeur propre. par définition, on a $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, d'où $\|u(\vec{x})\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$.

Comme u est une isométrie vectorielle $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Par conséquent $|\lambda| = 1$.

Considérons le supplémentaire orthogonal de la droite $\text{Vect}(\vec{x})$. Ce supplémentaire est stable sous u . En effet soit \vec{y} un élément du supplémentaire. Montrons que $u(\vec{y}) \in \text{Vect}(\vec{x})^\perp$. Soit \mathcal{B} une BON adaptée à $\text{Vect}(\vec{x}) \oplus \text{Vect}(\vec{x})^\perp = E$. On a :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \epsilon \in \{-1, 1\}.$$

Si $\epsilon = 1$, on a le premier cas du théorème. Si $\epsilon = -1$, la matrice de la restriction de u au sous espace $\text{Vect}(\vec{x})^\perp$ est une matrice de symétrie orthogonale par rapport à une droite $\text{Vect}(\vec{y})$. Soit \vec{z} un vecteur orthogonal à cette droite dans le plan $\text{Vect}(\vec{x})^\perp$. La matrice de u dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (qui est orthogonale et que nous

prenons orthonormée) est donc de la forme

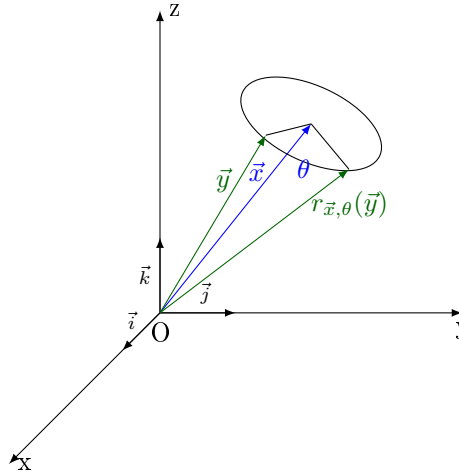
$$[u]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

qui a permutation des vecteurs de base près est du type voulu.

Définition : Rotation

La **rotation**, $r_{\vec{x}, \theta}$, d'axe \vec{x} et d'angle θ est l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

- $r_{\vec{x}, \theta}(\vec{x}) = \vec{x}$
- la restriction de f au plan $\text{vect} \vec{x}^\perp$ orienté par \vec{x} est la rotation (plane) d'angle θ .



Étude pratique d'une rotation r : détermination du couple axe-angle (\vec{x}, θ) .

1. axe : choisir un vecteur non nul \vec{x} appartenant à $\ker(r - Id_E)$
 2. rotation :
 - La trace étant un invariant de similitude, $\text{tr } r = 1 + 2 \cos \theta$ ce qui fournit $\cos \theta$
 - la signe de $\sin \theta$ est le même que $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y}))$ où \vec{y} est un vecteur non colinéaire à \vec{x} . En effet :
- $$\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y})) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 & x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ 0 & x_3 & x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{pmatrix} = (x_2^2 + x_3^2) \sin \theta.$$

Exemple

Caractériser l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- rotation vectoriel : les colonnes de A forment une base orthonormée donc f endomorphisme orthogonal. De plus $\det(A) = 1$, f est une rotation.
- axe : on obtient $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(1, 1, 1)$. Posons $\vec{x} = (1, 1, 1)$.
- angle :
 - $\text{tr}(A) = 2$, et donc $\cos \theta = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Pour déterminer le signe de θ , on pose $\vec{y} = (1, -1, 0)$ non colinéaire \vec{x} . $f(\vec{y}) = (1, 0, -1)$ et $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y})) = 3 > 0$. ce qui signifie $\theta \in]0, \pi[\text{modulo } 2\pi$. On en déduit donc que f est la rotation d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

II Endomorphismes symétriques et Matrices symétriques

A Généralités

Définition : Endomorphismes symétriques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est un endomorphisme **symétrique** (ou *autoadjoint*) si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y}) \rangle.$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Définition : Matrices symétriques

Une matrice **symétrique**, S , est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée, soit $S^T = S$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de taille n .

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple

La matrice suivante est symétrique :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Toute matrice diagonale est symétrique.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors XX^T est symétrique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^T A$ est symétrique.

Exemple : Matrice hessienne

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sa matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Exemple : Matrice de covariance

La matrice de covariance du vecteur aléatoire $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ définie par :

$$\text{Var}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Proposition : Endomorphisme symétrique et matrice symétrique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. u est un endomorphisme symétrique ;
- ii. pour toute base orthonormale \mathcal{B} de E , $[u]_{\mathcal{B}}$ est une matrice symétrique ;
- iii. il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E telle que $[u]_{\mathcal{B}}$ est une matrice symétrique.

Proposition

Muni du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , une matrice S est symétrique si et seulement si :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle.$$

Définition : Matrices antisymétriques

Une matrice **antisymétrique**, A , est une matrice carrée qui est égale à l'opposée de sa propre transposée, soit $A^T = -A$.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n .

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Proposition : Supplémentaires orthogonaux

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S_n\mathbb{R}$ sont des supplémentaires orthogonaux par rapport au produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$.

La décomposition d'une matrice M selon cette somme directe est :

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}.$$

B Produit scalaire**Définition : Positive**

Une matrice symétrique, S , est **positive** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad X^T S X \geq 0.$$

Définition : Définie

Une matrice symétrique, S , est **définie** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad X^T S X = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Proposition : Produit scalaire associée à une matrice symétrique positive et définie

Soit S une matrice symétrique, définie et positive.

Alors $\langle, \rangle \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \longmapsto X^T S Y \end{array} \right.$ est un produit scalaire.

Proposition : Expression d'une produit scalaire associée à l'aide une matrice symétrique positive et définie

Soit $(E, \langle, \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de E .

Alors

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}^T \times S \times [\vec{y}]_{\mathcal{B}} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Ainsi définie, S est une matrice symétrique définie et positive.

C Diagonalisation

Lemme : Stabilité et orthogonal

Soit u un endomorphisme symétrique de E . Soit F sous espace vectoriel stable par u .
Alors son orthogonal F^\perp est également stable par u .

Lemme : Sous espace propres orthogonaux

Soit u un endomorphisme symétrique de E .
Alors les sous-espaces propres de S sont deux à deux orthogonaux.

Théorème : Théorème spectral (endomorphisme symétrique)

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont toutes réelles.

Démonstration

Soit u un endomorphisme symétrique et

On montre d'abord qu'il existe au moins une valeur propre réelle, puis on restreint u par récurrence sur la dimension de l'espace :

- Tant que u est un endomorphisme de dimension non nulle
 - Existence d'une valeur propre réel : soit S la matrice de u dans une base quelconque. Il existe λ une racine a priori complexe de son polynôme caractéristique et X un vecteur propre complexe non nulle telle que $AX = \lambda X$.

Alors

$$\begin{cases} (SX)^\top \bar{X} = \lambda X^\top \bar{X} \\ (SX)^\top \bar{X} = X^\top S^\top \bar{X} = X^\top S \bar{X} = X^\top \bar{S} \bar{X} = X^\top \bar{\lambda} \bar{X} = \bar{\lambda} X^\top \bar{X} \end{cases}$$

Comme $X^\top \bar{X} \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$, donc λ est réel.

- Soit E_λ l'espace propre associée à la valeur propre λ . On a $E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp = E$. D'après le lemme, E_λ^\perp est stable par u . Alors u devient la restriction de u à E_λ^\perp .

Théorème : Théorème spectral (matrice symétrique)

Soit S une matrice symétrique réelle.

Alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice A est égale à $PDP^{-1} = PDP^\top$.

Proposition : Caractérisation de la projection orthogonale

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et s une symétrie.

Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.