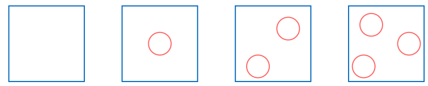
Structures algébriques

L'enfant, après avoir appris

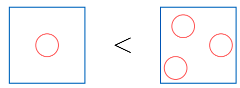
— à dénombrer en ajoutant des unités à partir de 0 c'est à dire en construisant l'ensemble $\mathbb{N}$ avec l'opération "suivant" (ou "successeur")



0 1 2 3

Désignation à l'aide d'un nombre de la quantité de cercles

— à ordonner en comparant des quantités c'est à munir d'une structure d'ordre à l'ensemble $\mathbb{N}$



Comparaison de deux quantités de cercles

I Loi de composition interne

A Définition

Définition Loi de composition interne

Soit A un ensemble.
Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array} \right. .$$

Exemple

— Sur $\mathbb{R}$, l'addition définie par $+\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$, la soustraction $-\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array} \right.$ et la multiplication $-\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \right.$ sont des lois de composition internes.

— Sur $\mathbb{N}$, la soustraction n'est pas une loi interne, mais elle l'est dans $\mathbb{Z}$.

— Sur $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation définie par $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (a, b) & \longmapsto & a^b \end{array} \right.$, le PGCD ou le PPCM sont des lois internes.

— Soit X un ensemble. Sur l'ensemble des parties de X, $\mathcal{P}(X)$, l'union définie par $\cup \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A, B) & \longmapsto & A \cup B \end{array} \right.$ et l'intersection $\cap \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A, B) & \longmapsto & A \cap B \end{array} \right.$ sont des lois de composition internes.

Définition Loi de composition externe

Soit X et A deux ensembles.
Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de X et un élément de A, associe un élément de A :

$$. \left| \begin{array}{ccc} X \times A & \longrightarrow & A \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda . x \end{array} \right.$$

Exemple : $(\mathbb{R}^2, .)$

> La multiplication par un scalaire sur l'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ définie par
>
> $$.\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda,(x_1,x_2)) & \longmapsto & (\lambda.x_1,\lambda.x_2) \end{array}\right..$$
>
> est une loi de composition externe.

B Propriétés éventuelles des lois de composition interne

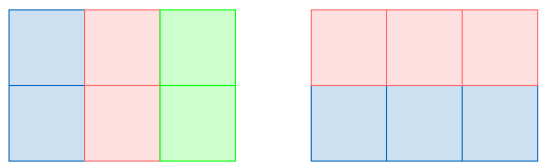
Définition Commutativité et associativité

$\triangle$ est

1. **associative** : si $\in (x,y,z)\in A^3$, $x\triangle(y\triangle z) = (x\triangle y)\triangle z$. On ne considèrera que des loi associatives.
2. **commutative** : si $\forall(x,y)\in A^2$, $x\triangle y = y\triangle x$.

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives. Ce n'est pas le cas de la soustraction car $1-0\neq 0-1$ et $1-(2-3) = 2\neq -4 = (1-2)-3$.



$$\overbrace{3}^{\text{Nombre de colonnes}} \times \overbrace{2}^{\text{Nombre de cubes par colonne}} = \overbrace{2}^{\text{Nombre de lignes}} \times \overbrace{3}^{\text{Nombre de cubes par ligne}}$$

Démonstration géométrique élémentaire de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{N}$ comme addition itérée.

- Sur $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation n'est pas commutative $1^2 = 1\neq 2 = 2^1$ et non plus associative $\left(2^2\right)^3 = 64 \neq 256 = 2^{(2^3)}$.
- Sur $\mathcal{P}(X)$, l'union et l'intersection sont commutatives et associatives.

Remarque

Quand la loi est associative, la **notation itérée** est

- en cas d'une loi de multiplication : $\forall a\in A, \forall n\in\mathbb{N}^*$: $x^n = \overbrace{x\times\cdots\times x}^{\text{n fois}}$
- en cas d'une loi d'addition : $\forall a\in A, \forall n\in\mathbb{N}^*$: $nx = \overbrace{x+\cdots+x}^{\text{n fois}}$.

Définition Distributivité d'une loi sur une autre

Soit A un ensemble et $\triangle$ et $\square$ deux lois de composition internes sur A.
On dit que $\triangle$ est **distributive** sur $\square$ si :

$$\forall x,y,z\in A: \quad x\triangle(y\square z) = (x\triangle y)\square(x\triangle z) \text{ et } (y\square z)\triangle x = (y\triangle x)\square(z\triangle x).$$

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive sur l'addition mais l'addition n'est pas distributive sur la multiplication car $1+(2\times 3) = 7\neq 5 = 1\times 2 + 1\times 3$.
- Sur $\mathcal{P}(X)$, l'union et l'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre.

C Symétrique et élément neutre

Définition Elément neutre

$\triangle$ admet **un élément neutre** si il existe $e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$.

Proposition Unicité de l'élément neutre

Si $\triangle$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe deux éléments neutres e et e'.
On a $e \triangle e' \overbrace{=}^{e \text{ elt neutre}} e'$ et $e \triangle e' \overbrace{=}^{e' \text{ elt neutre}} e$. Ainsi $e = e'$.

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, 1 est l'élément neutre de la multiplication et 0 de l'addition.
- Sur $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble vide $\emptyset$ est l'élément neutre de l'union et X de l'intersection.

Définition Élément symétrique et loi symétrique

Soit $x \in A$ et la loi $\triangle$ admettant un élément neutre e .
x admet un **symétrique** pour $\triangle$ si il existe $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Dans ce cas, x' est appelé le **symétrique** de x.

Proposition Unicité de l'élément symétrique

Soit $\triangle$ une loi associative et admettant un élément neutre e.
Si x admet un symétrique x', alors celui-ci est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe deux éléments symétriques x' et x''.
On a $(x' \triangle x) \triangle x'' = e \triangle x'' = x''$ et $(x' \triangle x) \triangle x'' \overbrace{=}^{\triangle \text{ associative}} x' \triangle (x \triangle x'') = x' \triangle e = x'$. Ainsi $x' = x''$.

Vocabulaire

Le symétrique est appelé :

- **opposé** en cas d'une loi additive $+$
- **inverse** en cas d'une loi multiplicative $\times$

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, l'inverse de la multiplication d'un réel non nul x est $\frac{1}{x}$ et l'opposé de l'addition d'un réel x est $-x$.

Définition Loi symétrique

La loi $\triangle$ est **symétrique** si la loi est associative et si tout élément de A admet un symétrique.

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, la multiplication n'est pas inversible car 0 n'a pas d'inverse. En revanche sur $\mathbb{R}^*$, la multiplication est inversible.

D Parties stables

Définition Partie stable

Soit B une partie non vide de A.
B est **stable** pour $\triangle$ si

$$\forall x, y \in B : \quad x \triangle y \in B.$$

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ et les nombres pairs sont stables pour l'addition.
- Sur $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 est stable pour la multiplication car le produit de deux nombres complexes de module 1 est un nombre complexe de module 1.

Définition Loi induite

Soit $\triangle$ une loi sur A et B une partie de A stable pour $\triangle$.
La **loi induite** $\tilde{\triangle}$ est définie par :

$$\tilde{\triangle}\left|\begin{array}{ccc} B \times B & \longrightarrow & B \\ (x, y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array}\right. .$$

Pour alléger les notations, on identifie $\tilde{\triangle}$ à $\triangle$.

Exemple

On munit l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 avec la loi induite $*$ sur $\mathbb{C}$.

II Groupes

A Définition

Définition Groupe

Un **groupe** est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi $*$. Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi $*$ est de plus commutative.

Proposition Groupes de référence

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs.
$(\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

Démonstration

Les hypothèses à vérifier ont été énoncées dans la section précédente.

Remarque

Lors de l'introduction d'un groupe $(G, *)$, on omet de mentionner la loi $*$ afin d'alléger les notations.
L'ensemble G ne peut pas être vide car il contient au moins l'élément neutre.

B Sous-groupes

Définition Sous-Groupe

Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G.
$(H, *)$ est un **sous-groupe** de $(G, *)$ si H est stable pour $*$ et, muni de la loi induite, est un groupe.

Définition Corps $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou C

Dans ce cours, un corps $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition Espace vectoriel : $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un triplet $(E, +, .)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une loi de composition externe sur E, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi . est compatible avec la structure de groupe $(E, +)$, i.e.
   (a) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x} \in E$, $(\lambda + \mu).\vec{x} = (\lambda.\vec{x}) + (\mu.\vec{x})$;
   (b) $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\lambda.(\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda.\vec{x}) + (\lambda.\vec{y})$;
   (c) $\forall\vec{x} \in E$, $1_{\mathbb{K}}.\vec{x} = \vec{x}$;
   (d) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x} \in E$, $\lambda.(\mu.\vec{x}) = (\lambda\mu).\vec{x}$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un **vecteur** et est noté dans ce cours avec une flèche $\vec{x}$. Un élément du corps $\mathbb{K}$ est un **scalaire** et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ.

Exemple

— les n-uplets $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles,
— les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,
— si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X, E)$ muni des lois usuelles.