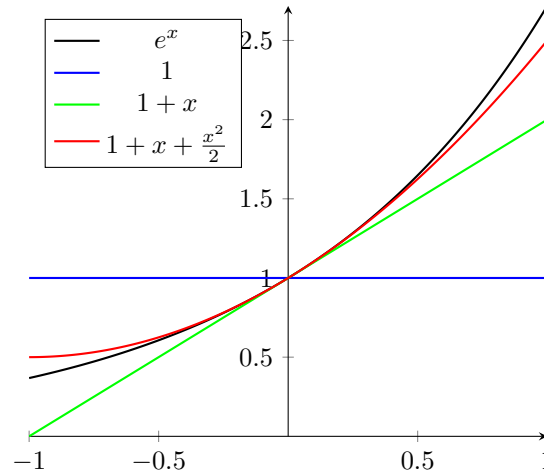


# Développement limité

Un développement limité (noté DL) d'une fonction en 0 est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme :

$$f(x) = \overbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}^{\text{une fonction polynomiale}} + \overbrace{x^n\epsilon(x)}^{\text{un reste}} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$



On "observe" que plus le degré augmente, plus la fonction polynomiale se rapproche rapidement de la fonction exponentielle **au voisinage de zéro** car le reste  $x^n\epsilon(x)$  est une puissance de  $n$ .

Basée sur cette propriété, les développements limités permettent de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.

## I Généralités

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  est un point de  $I$ .

### Définition-Proposition Développement limité

On dit que  $f$  admet un **développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$**  s'il existe des réels  $a_0, \dots, a_n$  tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + h^n\epsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

$a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$  s'appelle la **la partie régulière** du développement limité.

Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , celui-ci est unique.

### Remarque

De manière équivalente, la notation petit  $o$  est plus souvent utilisée :

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

### Proposition Existence : Formule de Taylor-Young

Si  $f$  est de classe  $C^n$ ,

alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en tout point  $a \in I$  donné par

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

### Exemple : Sinus

La fonction sinus est  $C^\infty$ . Comme  $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$ , on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

### Remarque : Au voisinage de 0

Dans la pratique, on se ramènera toujours à des développements limités en 0 par le changement de variable  $x = a + h$ .

Par exemple, la fonction  $x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x-\pi}$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $\pi$  égale à :

$$\frac{\sin(x)}{x-\pi} = \frac{\sin(h+\pi)}{h} = \frac{-\sin(h)}{h} \stackrel{\text{DL en 0 à l'ordre 2}}{=} \frac{-h + o(h^2)}{h} = -1 + o(h).$$

### Proposition Développements limités usuels

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

## II Opérations

Soit  $f$  et  $g$  admettant en 0 des développements limités à l'ordre  $n$  donnés par

$$f(h) = P(h) + o(h^n) \text{ et } g(h) = Q(h) + o(h^n) \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

### Proposition Somme

Alors  $f+g$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  donné par

$$(f+g)(h) = (P(h) + Q(h)) + o(h^n).$$

### Exemple

Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction suivante est :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

### Proposition Produit

Alors  $f.g$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  donné par

$$(f.g)(h) = R(h) + o(h^n).$$

où  $R$  est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit  $PQ$  que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Exemple**

Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction suivante est :

$$\sin(x) \cos(2x) = \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \overbrace{o(x^3)}^{\text{même ordre}} \right) = x - \frac{13x^3}{6} + o(x^3).$$

**Proposition Composition**

Si  $g$  s'annule en 0,

alors  $f \circ g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 donné par

$$f \circ g(h) = R(h) + o(h^n).$$

où  $R$  est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit  $P \circ Q$  que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Exemple : Développement limité du dénominateur**

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction suivante est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+(1+x+x^2+o(x^2))} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2))} \\ \frac{1}{1+e^x} &\stackrel{\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+o(u^2)}{=} \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + o(x^2). \end{aligned}$$

**Proposition Quotient**

Si  $g$  ne s'annule pas en 0,

alors  $\frac{f}{g}$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  donné par

$$\left( \frac{f}{g} \right)(h) = R(h) + o(h^n).$$

où  $R$  est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de  $P$  par  $Q$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

**Remarque**

Pour calculer un développement limité sous forme d'un quotient, il est souvent préférable d'utiliser cette méthode : développement limité du dénominateur puis développement limité du produit. Par exemple, le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction suivante est :

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le développement limité à l'ordre 3 du dénominateur :

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

puis le produit :

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - o(x^3) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

### Proposition Intégration

Si  $f$  est continue sur  $I$  avec  $F$  une primitive de  $f$ ,

Alors  $F$  admet un développement limité à l'ordre  $n + 1$  en 0 donné par

$$F(h) = F(0) + a_0 h + \frac{a_1}{2} h^2 + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!} h^{n+1} + o(h^{n+1}).$$

### Exemple : Quotient

La fonction  $F : x \rightarrow \ln(1-x)$  est une primitive de  $f : x \rightarrow -\frac{1}{1-x}$ . Comme  $F(0) = 0$  et  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$ , on a

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

## III Applications

### A Étude d'une fonction

1. *Calcul de limite d'une fonction* : déterminer la limite en 0 de la fonction  $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ . On a :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

2. *Étude locale d'une courbe* : déterminer la tangente au point d'abscisse 0 et démontrer que la tangente traverse la courbe de la fonction :  $x \rightarrow \frac{1}{1+e^x}$ .

En utilisant les technique opératoires classiques, on trouve que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3 \epsilon(x).$$

Comme  $f \in C^2$ , par identification avec la formule de Taylor Young, on obtient que  $f(0) = \frac{1}{2}$  et  $f'(0) = -\frac{1}{4}$ . Le graphe est donc tangent à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$ . De plus,

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = x^3 \overbrace{\left(\frac{1}{48} + \epsilon(x)\right)}^{\text{positif pour } x \text{ petit}}.$$

Donc, pour  $x$  petit, cette quantité est positive pour  $x > 0$ , et négative pour  $x < 0$  : la courbe traverse sa tangente. C'est un point d'inflexion.

### B Étude d'une suite

1. *Calcul de limite d'une suite* : déterminer la limite de la suite donnée par  $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ . On a :

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)} \stackrel{\ln(1+x)=x+o(x) \text{ avec } x=\frac{1}{n}}{=} e^{n\left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{a+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a \text{ car exp est continue.}$$

2. *Déterminer un équivalent* : déterminer la limite de la suite  $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ . On a :

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}} \stackrel{\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x) \text{ avec } x=\frac{1}{n}}{=} \frac{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ainsi

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \underset{\sim}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

On conclut que la vitesse de convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers 0 est de l'ordre de  $\frac{1}{n^{3/2}}$ . A titre d'exercice, donner la vitesse de convergence de la suite  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $e^a$ .