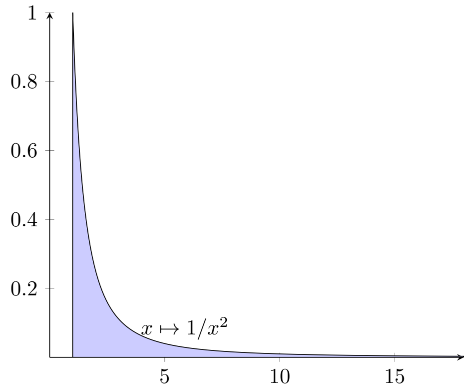
Chapitre 1

Intégrales généralisées

Ce chapitre a pour objectif d'étendre la notion d'intégrale sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment, par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$



I Généralités

L'intégrale impropre désigne l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. Elle est définie comme une extension de l'intégrale usuelle sur un segment par un passage à la limite sur les bornes d'intégration de l'intégrale.

A Définition

Définition 1 (*Intégrale impropre sur* $[a, b[$)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
Si $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque t tend vers b, on dit que l'**intégrale impropre** converge et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple 1

Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $t \in [1, +\infty[$.
On a $\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{x}]_1^t = 1 - \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

L'intégrale est convergente et son intégrale impropre est égale à 1.

Proposition I.1 (*Indépendance de la borne fermée*)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Soit $c \in [a, b[$. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Démonstration : Soit $t \in [a, b[$. On applique la relation de Chasles à l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x = A + \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par passage à la limite sur cette égalité, on obtient que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature. ■

Exemple 2

$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge car $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Définition 2 (*Intégrale impropre sur* $]a, b]$)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.
Si $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque t tend vers a, on dit que l'**intégrale impropre** converge et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple 3

Soit l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$. Soit $t \in]0, 1]$.
On a $\int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_t^1 = -\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Donc l'intégrale est divergente.

Définition 3 (*Intégrale impropre sur* $]a, b[$)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
Si $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent avec $c \in]a, b[$, on dit que l'**intégrale impropre** converge et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple 4

Soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- *En 0 :* Soit $t \in]0, 1]$.
  On a $\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2(1 - \sqrt{t}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2$.
  Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
- *En* $+\infty$ *:* Soit $t \in [1, +\infty[$.
  On a $\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_1^t = 2(\sqrt{t} - 1) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

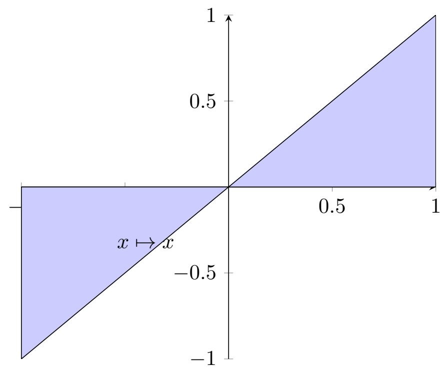
En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Remarque 1

Attention au passage à la limite ! Pour prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, il ne suffit pas de

calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$.
En effet soit $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$.
On a :

1. $x \mapsto x$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$,
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty} [\frac{x^2}{2}]_t^t = 0$ existe et est nulle,
3. pourtant, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ diverge car $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ est divergente.



Proposition I.2 (*Prolongeable par continuité*)

Si une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ avec $b \in \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b,
Alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$ où l'on a noté $\tilde{f}$ le prolongement de f.
L'intégrale est faussement impropre.

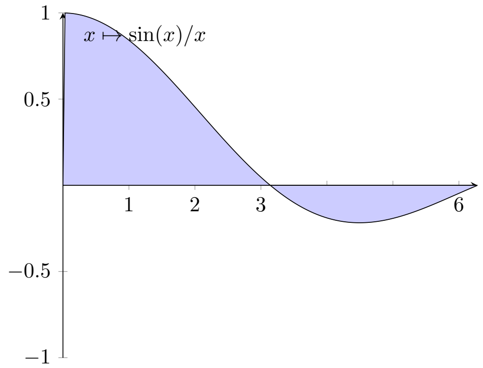
Démonstration : Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ prolongeable par continuité en b. On note $\tilde{f}$ le prolongement de f.
Comme $\tilde{f}$ est continue sur $[a, b]$, $\tilde{f}$ admet une primitive Φ sur $[a, b]$. Soit $t \in [a, b[$.

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^t \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \forall x \in [a, b[: f(x) = \tilde{f}(x)$$
$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(t) - \Phi(a) \underset{t\to b}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \Phi \text{ est continue sur } [a, b]$$

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge de limite $\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Exemple 5

L'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente car la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, 2\pi]$ et plongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.



Par analogie sur les séries numériques, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge, a-t-on si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge ?
La réponse est oui à condition d'avoir une hypothèse plus forte.

Théorème I.3 (*Divergence grossière à l'infini*)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue.
*Si f admet une limite non nulle en ∞ alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.*

Démonstration : La preuve anticipe les outils mis en place dans la section sur les fonctions positives.
Comme f admet une limite l non nulle en ∞, il existe $A > 0$ tel que $f(x)$ soit de signe constant pour tout $x > A$. Comme $f(x) \underset{+\infty}{\sim} l$ et $\int_A^{+\infty} l\,\mathrm{d}x$ diverge, $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. ■

Exemple 6

$\int_0^{+\infty} x\sin(1/x)\,\mathrm{d}x$ diverge grossièrement car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(1/x) = 1$.

B Intégrales de références

Proposition I.4 (*Intégrales de Riemann*)

1. *$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$,*
2. *$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*

Démonstration : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $t \in [1, +\infty[$. On a
— $\alpha \neq 1$
$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^t = \frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha} - 1) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$
— $\alpha = 1$
$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln(x)]_1^t = \ln(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
En conclusion $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
La démonstration est similaire pour $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. ■

Proposition I.5 (*Exponentielle et logarithme*)

— *$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 0$,*
— *$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge.*

Démonstration : On a $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $t \in]0,1]$.

$$\int_t^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\text{IPP avec } u(x)=\ln(x), v'(x)=1} [\ln(x)x]_t^1 - \int_t^1 \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x = -\ln(t)t + (t-1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -1 \text{ par croissance comparée.}$$

Donc $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. ■

C Propriétés

Proposition I.6 (*Linéarité*)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si les intégrales $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x$ converge et on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Les fonctions f et g sont continues sur $[a,b[$. Soit $t \in [a,b[$.
On a

$$\int_a^t (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\text{linéarité sur un segment}} \lambda \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x$ converge et l'égalité. ■

Exemple 7

On peut écrire

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

car les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ convergent.
En revanche on ne peut pas écrire

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

car l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.
Ici il faut intégrer sur le segment $[a,t]$ avec $t \in [a,b[$ avant de passer à la limite. On a :

$$\int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^t \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(2) + \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

Corollaire I.7 (*Cas complexe*)

Soit f continue par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{C}$.
$\int_a^b Re(f(x))\mathrm{d}x$ et $\int_a^b Im(f(x))\,\mathrm{d}x$ convergent si et seulement si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b Re(f(x))\,\mathrm{d}x + i\int_a^b Im(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Proposition I.8 (*Relation de Chasles*)

Soit f une fonction continue par morceaux de $]a,b[$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Alors, pour tout $c \in]a,b[$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition I.9 (*Positivité*)

Soit f une fonction continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$ et positive telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
De plus, si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors $f = 0$, c'est à dire $f(x) = 0, \forall x \in [a,b[$.

Démonstration : De nouveau, il faut intégrer sur le segment $[a,t]$ avec $t \in [a,b[$

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{\geqslant}^{\text{positivité sur un segment}} 0$$

puis le passage à la limite. ■

Corollaire I.10 (*Croissance*)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b[$ telles que les intégrales $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ convergent.
Si $\forall x \in [a,b[$: $\quad f(x) \leqslant g(x)$, Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : Comme $g - f \geqslant 0$, du fait de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ■

D Calcul d'intégrale

Théorème I.11 (*Changement de variables*)

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $\phi : [\alpha,\beta[\to [a,b[$ une bijection strictement croissante de classe C^1.
Alors l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : Supposons que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Soit $t \in [\alpha,\beta[$. Par changement de variable sur le segment $[\alpha,t]$,

$$\int_\alpha^t f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\phi(t)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme ϕ est une bijection croissante, $\phi(t) \underset{t\to\beta}{\longrightarrow} b$. Donc par passage à la limite,

$$\int_\alpha^t f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to\beta}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc $\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ converge et est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Idem si l'on suppose que $\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ converge. ■

Exemple 8

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
On suppose que l'intégrale converge (voir la prochaine sous-section pour la démonstration).
Le changement de variables $u = 1/t$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{0} \frac{-\ln u}{1+1/u^2}\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

Théorème I.12 (*Intégration par parties*)

Soit u et v deux fonctions $[a,b[\to \mathbb{K}$ dérivables telles que u' et v' sont continues par morceaux.
On suppose que uv a une limite en b.
Alors les intégrales $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

où $[u(x)v(x)]_a^b = \lim_{t\to b^-} [u(x)v(x)]_a^t$.

Démonstration : Supposons que $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Soit $t \in [a,b[$. Par intégration par parties sur le segment $[a,t]$,

$$\int_a^t u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^t - \int_a^t u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme uv a une limite en b, par passage à la limite, $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ converge et est égale à $[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.
Idem $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ converge. ■

II Intégrale de fonctions réelles et positives : $f \geqslant 0$

A Croissance de la fonction intégrale

L'étude de la convergence d'une intégrale comme passage à la limite n'est pas toujours possible. Cependant lorsque f est positive, certaines règles permettent d'étudier la nature de l'intégrale. L'étude est semblable à celle des séries numériques.

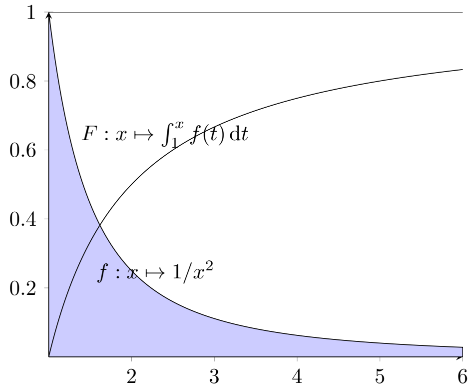
Remarque 2

Si f est négative, on se ramène à positive avec $-f$.

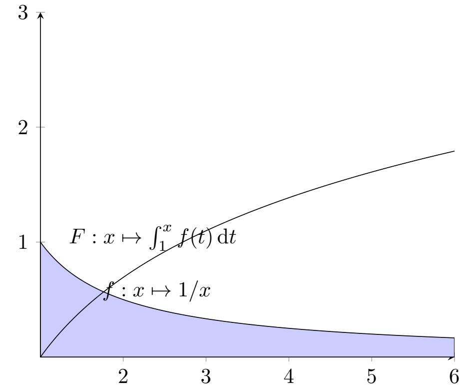
Les intégrales de fonctions positives jouent un rôle clé dans la théorie de l'intégration. Si elle diverge, alors la limite de l'intégrale sur un segment tend vers $+\infty$. Les possibilités de divergence sont bien plus diverses pour une intégrale dont le signe de la fonction change une infinité de fois.

Proposition II.1 (*Caractérisation de la majoration*)

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si seulement si la fonction $F : t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ est majorée, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que : $\forall t \in [a,b[: \quad F(t) \leqslant M$.
De plus, si elle converge, son intégrale est égale à la borne supérieure de F.
Et si elle diverge, elle diverge vers l'infinie.



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge car F est majorée par 1.



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$ car F n'est pas majorée.

Démonstration : F est croissante car $F'(x) = f(x) \geqslant 0$. D'après le théorème de la limite monotone, F admet une limite en ∞ qui est finie si et seulement si F est majorée. ■

B Règles de convergence

Théorème II.2 (*Règle de comparaison*)

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives tel que

$$\forall x \in [a, b[: f(x) \leqslant g(x).$$

Alors

- *si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge également, et alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

- *si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge également.*

Démonstration : Soit $t \in [a, b[$.

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{\leqslant}^{\text{coissance sur un segment}} \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{\leqslant}^{\text{Majoration du théorème de la limite monotome}} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc la fonction $F : t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante et majorée donc admet une limite en l'infini. Par passage à la limite, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

Exemple 9

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$?
$x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. On a

$$\forall t \in [1,+\infty[: \quad \frac{\sin^2(x)}{x^2+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Théorème II.3 (*Règle de petit 0 et grand O*)

Soit $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives tel que

$$f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x)) \text{ ou } f(x) = \underset{x\to b}{O}(g(x))$$

Alors
- *si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge également,*
- *si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge également.*

Démonstration : Comme $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$, il existe $t \in [a,b[$ tel que $f(x) \leqslant g(x), \forall x \geqslant t$. Comme $\int_t^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge par règle de comparaison. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge par raccordement. ■

Exemple 10

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$?
$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. On a

$$\frac{\ln(x)}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge par règle du petit o.

Théorème II.4 (*Règle de l'équivalent*)

Soit $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et de signe constant au voisinage de b tel que

$$f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x).$$

Alors les intégrales $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Démonstration : Supposons f positive au voisinage de b. Comme $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, il existe alors $t \in [a,b[$ tel que tel que

$$\forall x \in [t,b[: \quad \frac{1}{2}f(x) \leqslant g(x) \leqslant \frac{3}{2}f(x).$$

On conclut par application de la règle de comparaison.
Dans le cas négatif, la preuve est identique pour $-f$ et $-g$. ■

Exemple 11

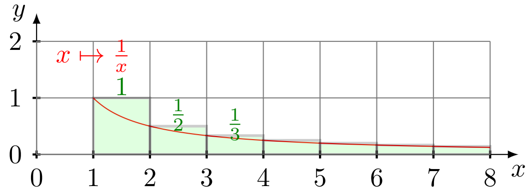
Quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^2}\,dx$?
$x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ est continue et positive sur $]0,1]$. On a

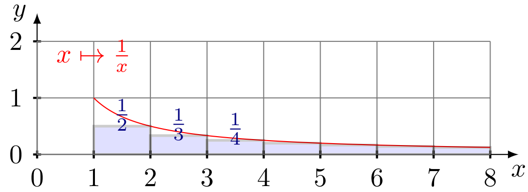
$$\frac{\sin(\sqrt{x})}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ diverge, $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^2}\,dx$ diverge par règle d'équivalent.

C Comparaison série-intégrale

Les séries sont un procédé de sommation de grandeurs discrètes, l'intégrale de grandeurs continues. L'analogie formelle entre les deux domaines permet de faire passer des idées intéressantes de l'une à l'autre. On compare ces deux objets mathématiques à l'aide d'inégalités.





L'aire entre 1 et n est :

- sous la courbe rouge : $\int_1^N f(x)dx$,
- des rectangles verte : $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$,
- des rectangles bleues : $\sum_{n=2}^{N} f(n)$.

Géométriquement, on a les inégalités :

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Si $\sum f(n)$ diverge alors $t \mapsto \int_1^t f(x)\,dx$ n'est pas majorée. Comme $t \mapsto \int_1^t f(x)\,dx$ est croissante, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Idem si $\sum f(n)$ diverge.
En conclusion, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Théorème II.5 (*Comparaison séries/intégrales*)

Soit f une application continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$.
Alors la série $\sum_{n\geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

Théorème II.6 (*Séries de Riemann*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : On a :

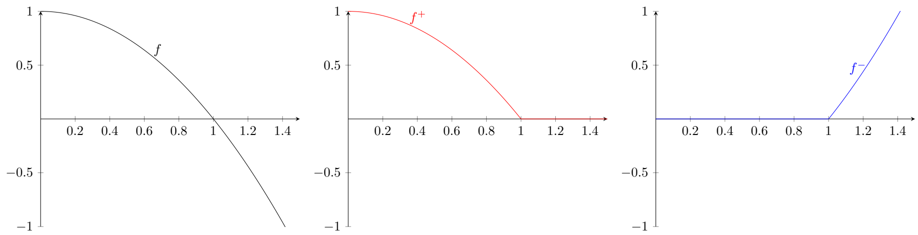
- $\alpha \leqslant 0$: comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$, la série diverge grossièrement.
- $\alpha > 0$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ et la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. Donc la série converge si et seulement si $\alpha > 1$. ■

III Intégrale de fonctions réelles de signe variable

A Absolument convergente

Nous passons maintenant à l'étude d'intégrale de fonctions réelles de signe variable. Pour expliquer le titre de cette section, il convient de remarquer que si le signe de f est constant à partir d'un certaine valeur c, l'étude de la convergence de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se ramène à celle d'une intégrale de signe constant. En effet, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
Ce que nous allons voir dans cette section n'est donc réellement nouveau que pour les intégrales de fonctions qui changent de signe une infinité de fois.
Une première idée pour l'étude des intégrales de signe variable est de décomposer la fonction f sur sa partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ où

$$\forall x \in [a, b[: \quad f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ et } f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$



Soit $c \in [a, b[$. L'intégrale sur le segment $[a, c]$ est :

$$\int_a^v f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c (f^+(x) - f^-(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^c f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f^-(x))\,\mathrm{d}x.$$

Par passage à la limite, une condition suffisante pour que $\int_a^v f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que les deux intégrales $\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x$ convergent.
Compte tenu des inégalités

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f|, \quad 0 \leqslant f^- \leqslant |f|,$$

le théorème de comparaison des intégrales à fonctions positives nous permet de conclure qu'une condition suffisante pour la convergence de $\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x$ et donc aussi $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. Nous venons ainsi d'établir le résultat le plus important pour la convergence d'une intégrale de fonctions réelles de signe variable.

Théorème III.1

Si $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Définition 4 (*Absolue convergence*)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.
On dit que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est **absolument convergente** lorsque $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

Exemple 12

Démontrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. On a :

$$\forall x \in [1, +\infty[: \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente par intégrale de Riemann, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Théorème III.2

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Définition 5 (*Intégrable*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.
On dit que f est **intégrable** sur I si $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Proposition III.3 (*Espace vectoriel*)

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un espace vectoriel.

Définition 6 (*semi-convergente*)

Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Exemple 13 (*Intégrale de Dirichlet*)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

— Non absolument convergente :
$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en la prolongeant par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \inf_{x\in[n\pi,(n+1)\pi]} \frac{1}{|x|} \times \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\pi} \times 2.$$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N} : \quad \int_0^{p\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=0}^{p-1} \frac{2}{(n+1)\pi} \overbrace{\xrightarrow[p\to\infty]{}}^{\text{Série harmonique}} +\infty.$$

— Convergente :
Par intégration par parties, les fonctions $u : x \mapsto 1 - \cos x$ et $v : x \mapsto 1/x$ sont C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et le produit $u.v$ admet des limites finies en 0 et en $+\infty$, donc les intégrales $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
Or $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ par règle de comparaison. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge également.

Proposition III.4 (*Inégalité de la moyenne*)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{K}$ telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Comme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes. On a :

$$\forall x \in [a, b[: \quad f(x) \leqslant |f(x)| \text{ et } -f(x) \leqslant |f(x)|$$

On obtient l'inégalité car $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$ et $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x..$ ■