Chapitre 1

Espace vectoriel normé

La chronologie adoptée pour écrire ce cours complet n'est pas logique. Pour une cohérence mathématiques, il faudrait étudier d'abord ce chapitre avant les chapitres d'analyse ou d'algèbre. Cependant, ce chapitre "Topologie" décourage de nombreux élèves dès le début d'année car il est abstrait. C'est pourquoi d'un point de vue pédagogique, il est étudier à la fin.
Les résultats de la topologie de première année sont : la définition de la convergence d'une suite réelle, la notion d'intervalle ouvert (notion qui intervient dans le théorème de Rolles ou fermé (notion qui intervient théorème "si f est continue sur un intervalle fermé borné, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f admet un minimum et un maximum »).
Le problème est de généraliser les notions de topologie sur la droite des réels à d'autres ensembles, par exemples les points du plan, les polynômes, les fonctions continues... Quelle serait la définition d'un intervalle ouvert dans le plan ? Cette topologie nous permettra de définir formellement la notion de convergence. Dans le cadre de ce cours, on limite l'abstraction à une topologie définie à partir d'une norme. Une norme est un objet mathématique donnant du sens à la notion de "longueur".
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espace vectoriel normé

A Norme

Généralités

Définition 1 (*Norme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une **norme** sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivants.

1. **positivité :** $\forall \vec{x} \in E : \quad N(\vec{x}) \geqslant 0$
2. **séparation :** $\forall \vec{x} \in E : \quad N(\vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \vec{0_E}$
3. **homogénéité :** $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad N(\lambda \vec{x}) = |\lambda| N(\vec{x})$
4. **inégalité triangulaire :** $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad N(\vec{x} + \vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$

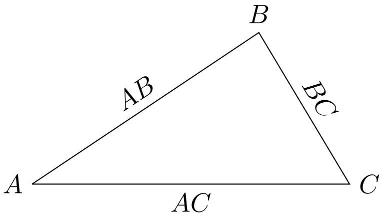
On note fréquemment $\|\vec{x}\|$ au lieu de $N(\vec{x})$.

Remarque 1

Une conséquence des axiomes précédent est que $N(\vec{0}) = 0$ (en appliquant 3) avec $\lambda = 0$.

Le nom d'inégalité triangulaire vient du fait que dans un triangle ABC on a nécessairement

$$AC \leqslant AB + BC.$$



Définition 2 (*Espace vectoriel normé*)

Un **espace vectoriel normé** est un couple (E, N) où E est un espace vectoriel et N un norme sur E. On note parfois E au lieu de (E, N) si le choix de la norme est clair d'après le contexte.

Proposition I.1 (*Inégalité triangulaire inversée*)

Soit E un espace vectoriel, N une norme sur E. On a :

$$\vec{x}, \vec{y} \in E : |N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leqslant N(\vec{x} - \vec{y}).$$

Démonstration : Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a

$$N(\vec{x}) = N(\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}) \quad \overbrace{\leqslant}^{\text{inégalité triangulaire}} \quad N(\vec{x} - \vec{y}) + N(\vec{y}).$$

Ainsi $N(\vec{x}) - N(\vec{y}) \leqslant N(\vec{x} - \vec{y})$. En permutant $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on obtient $N(\vec{y}) - N(\vec{x}) \leqslant N(\vec{x} - \vec{y})$. Finalement $|N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leqslant N(\vec{x} - \vec{y})$. ■

Exemple 1 (*Trois normes sur* $\mathbb{K}^n$)

Pour $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

1. $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
2. $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$
3. $\|\vec{x}\|_\infty = \max\Big(|x_1|, \ldots, |x_n|\Big)$

Exemple 2 (*Trois normes sur les espaces de fonctions*)

— Soit $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

$\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ appelée **norme de la convergence uniforme.**

— Soit $L_1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in L_1(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\, \mathrm{dx}.$$

$\|\ \|_1$ est une norme sur $L_1(I, \mathbb{K})$ appelée **norme de la convergence en moyenne.**

— Soit $L_2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de carré intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in L_2(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\, \mathrm{dx}.$$

$\| \|_2$ est une norme sur $L_2(I, \mathbb{K})$ appelée **norme de la convergence quadratique.** Comme l'ensemble des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ est une partie des ensembles $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, $L_1(I, \mathbb{K})$ et $L_2(I, \mathbb{K})$, $\| \|_\infty$, $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont trois normes de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.