

## Espace préhilbertien réel

### Produit scalaire

**Exercice 1 (\*)** Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  dans les cas suivants.

1.  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\langle A, B \rangle = \text{tr } A^T B$ .
2.  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  et  $PSfg = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .
3.  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues} : f^2 \text{ intégrable sur } \mathbb{R}\}$  et  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$ .
4.  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .
5.  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}$ .

**Exercice 2 (\*)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé,  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $F = \{P \in E : P(0) = P(1) = 0\}$ . Pour  $(P, Q) \in E$ , on pose

$$\phi(P, Q) = - \int_0^1 (PQ'' + P''Q).$$

1. Vérifier que  $F$  est un espace vectoriel.
2. Donner une base et la dimension de  $F$ .
3.  $\phi$  définit-il un produit scalaire sur  $E$  ? sur  $F$  ?

**Exercice 3 (\*)** Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que la série de terme général  $u_n^2$  converge. Pour  $u$  et  $v$  dans  $E$ , on pose

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel. On le note usuellement  $l^2$ .
2. Montrer que  $\langle u, v \rangle$  existe.
3. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

**Exercice 4 (Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)** Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

1. Démontrer que

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que  $x_k > 0$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$  et que  $x_1 + \dots + x_n = 1$ . Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

**Exercice 5 (Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)** Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^*)$ . Déterminer  $\inf_{f \in E} \left( \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \right)$ . Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

# Orthogonalité

**Exercice 6 (\*)** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une BON de  $E$ . On pose

$$\phi \left| \begin{array}{ll} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto \sum_{i=1}^n \langle u(\vec{e}_i), v(\vec{e}_i) \rangle \end{array} \right.$$

Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{L}(E)$ , et déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.

**Exercice 7 (Matrice symétrique)** Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ .

Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux, où  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques.

**Exercice 8 (Polynômes de Legendre)** On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire usuel défini par

$$\forall (f, g) \in E^2 : \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n]$$

Les polynômes  $(L_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  s'appellent **polynômes de Legendre**. On pourra introduire  $H_n(X) = (X^2 - 1)^n$ .

1. Montrer que  $L_n$  est un polynôme de degré  $n$  dont on précisera le coefficient dominant.
2. En utilisant la formule de Leibniz, calculer  $L_n(1)$  et  $L_n(-1)$ .
3. Avec une intégration par parties multiple, calculer  $\langle L_n, L_n \rangle$ .
4. Calculer  $\langle Q, L_n \rangle$  lorsque  $Q$  est un polynôme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
5. En déduire  $\langle L_n, L_m \rangle$  lorsque  $n \neq m$ .
6. Comparer  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à l'orthonormalisée de la base canonique.

**Exercice 9 (Polynômes de Tchebychev)** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ .

On pose, pour  $(P, Q) \in E^2$ ,

$$\langle P, Q \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bien un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $U_n$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \quad \sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)U_n(\cos \theta).$$

Les polynômes  $(U_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  s'appellent **polynômes de Tchebychev de seconde espèce**.

3. Comparer  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à l'orthonormalisée de la base canonique.

# Projection orthogonale

**Exercice 10 (Orthonormalisation de Schmidt)** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, -1, 0).$$

**Exercice 11 (Trouver une base orthonormale)** Déterminer une base orthonormale de  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

**Exercice 12 (Projection orthogonale dans  $\mathbb{R}^4$ )** Soit  $E = \mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . On considère  $G$  le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de  $G$ .
2. Déterminer la matrice dans  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale  $p_G$  sur  $G$ .
3. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  un élément de  $E$ . Déterminer la distance de  $x$  à  $G$ .

**Exercice 13 (Matrice symétrique)** Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  sont supplémentaires orthogonaux, où  $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices antisymétriques.
2. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{E} : \quad \text{tr } A \leq \sqrt{n \text{tr}(A^\top A)}.$$

Étudier le cas d'égalité.

3. Pour  $A \in \mathcal{E}$ , on pose

$$f_A \left| \begin{array}{l} \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \\ S \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - s_{i,j})^2 \end{array} \right.$$

Déterminer le minimum de  $f_A$  et la matrice qui réalise ce minimum.

**Exercice 14 (Optimum)** Déterminer  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tels que l'intégrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \sin x - ax^3 - bx^2 - cx - d \right)^2 dx$$

soit minimale.

## Espace préhilbertien réel

---