Chapitre 1

Dénombrement

Le dénombrement s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis. Il est né de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développé sous l'influence du calcul des probabilités, notamment dans une situation d'équiprobabilité : dans ce cas, en effet, de façon assez intuitive, la probabilité d'un événement est le rapport entre le nombre d'issues favorables et le nombre total d'issues possibles. Pour cette raison, le dénombrement semble trouver sa place naturelle au début d'un cours de probabilité, même si ses applications sont beaucoup plus diverses dans l'ensemble des mathématiques.
La cardinalité est une notion de taille pour les ensembles. Lorsqu'un ensemble est fini, c'est-à-dire si ses éléments peuvent être listés par une suite finie, son cardinal est la longueur de cette suite, autrement dit il s'agit du nombre d'éléments de l'ensemble. En particulier, le cardinal de l'ensemble vide est zéro. Lorsqu'on décompte une collection "sur ses doigts", on crée une bijection entre la collection et ses doigts. On définit naturellement le cardinal comme le nombre de doigts. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.

1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition 1 (*Cardinal*)

Un ensemble E est **fini** si $E = \emptyset$ ou si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$. Cet entier, n, est unique, il est appelé le **cardinal** de E noté $\operatorname{Card} E$. Si $E = \emptyset$, on pose $\operatorname{Card} E = 0$.

Exemple 1

Le cardinal des couleurs d'un jeu de carte $\{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ est 4. La fonction f définie par

$$f(1) = \clubsuit, f(2) = \spadesuit, f(3) = \diamondsuit, f(4) = \heartsuit$$

est bien une bijection entre l'ensemble des couleurs et l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

Définition 2 (*Dénombrable*)

Un ensemble est **dénombrable** s'il est fini ou s'il est en bijection $\mathbb{N}$.

Exemple 2

L'ensemble des entiers pairs, noté $2\mathbb{N}$, est dénombrable et infini car la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & 2\mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$

est bijective.

Remarque 1

Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. On identifiera tout ensemble fini de cardinal n à l'ensemble $\{1, 2 \ldots, n\}$ et tout ensemble dénombrable à $\mathbb{N}$. Par exemple pour les couleurs d'un jeu de carte, on a $\clubsuit \to 1, \spadesuit \to 2, \diamondsuit \to 3, \heartsuit \to 4$.

Définition 3 (*Équipotent*)

Deux ensembles (fini ou non) sont **équipotents** ou de **même cardinal** s'il existe une bijection entre eux.

Exemple 3

Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

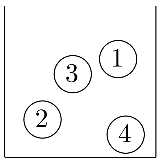
— Il existe une application surjective de E sur F, mais pas d'application injective.
— Il existe application injective de F sur E, mais pas d'application surjective.

En fait, il n'y a pas assez d'éléments dans F (ou trop peu dans E).

1.2 Principes fondamentaux de dénombrement

Principe 1 (*Modélisation avec une urne*)

Un problème d'urne est une représentation d'expériences aléatoires par un tirage aléatoire uniforme de boules dans une urne. L'urne est supposée contenir un nombre de boules numérotés de 1 à n, qui sont indiscernables au toucher, c'est-à-dire que lorsque l'on tire une boule à l'intérieur, le tirage est aléatoire et chaque boule à l'intérieur de l'urne a la même chance d'être tirée.



Urne de 4 boules

Il y a deux critères pour distinguer ces tirages au sort :

— l'**ordre** dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon on parle d'un « tirage sans ordre ». Avec ordre, le tirage est noté avec des parenthèses pour un p-uplet[1] et sans ordre, avec des accolades pour un ensembles (l'ensemble des boules du tirage est une partie de l'ensemble des boules de l'urne[2]). Par exemple, pour le tirage des boules 7, 33 et 24, avec ordre, on note $(7, 33, 24)$ et sans ordre $\{7, 33, 24\}$. Remarque, on a bien entendu $\{7, 33, 24\} = \{33, 24, 7\}$ par contre $(7, 33, 24) \neq (33, 24, 7)$.
— la **répétition** si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec remise et dans la cas contraire on parle d'un tirage sans remise.

Exemple 4

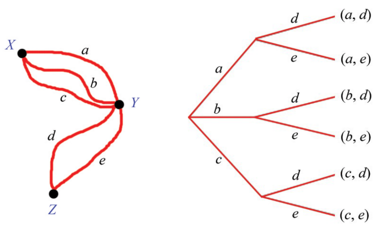
La question : « Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier pour le tierce ? » peut être reformulée de la manière suivante : « De combien de façons peut-on tirer avec ordre et sans remise 3 boules d'une urne qui en contient 10 ? ».

Principe 2 (*Décomposition*)

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de $n_1, n_2, ..., n_k$ manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 n_2 ... n_k$ manières différentes.

Exemple 5

Les localités X et Y sont reliées par trois routes a, b et c et les localités Y et Z par deux routes d et e. Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?



Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d) et (c, e).

Principe 3 (*Double-comptage*)

Il consiste à établir une égalité en comptant de deux manières différentes une certaines quantité.

Exemple 6

Un berger ne voyant que les pattes de ses moutons pourra déterminer le nombre d'animaux en divisant le nombre de pattes par quatre. Le berger a compté le nombre de pattes de deux manières différentes : l'un directement, l'autre avec le principe de décomposition.

1.3 Tirage avec ordre et avec remise

Proposition 1.3.1

Le nombre de tirages différents avec remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant p boules est n^p.

Démonstration : Il y a n façons de tirer la première boule, puis n façons de tirer la première boule et ainsi de suite, d'où, après le principe de décomposition, en totalité $\overbrace{n.n.\dots.n}^{p \text{ fois}} = n^p$ façons. ■

Corollaire 1.3.2

Soit E de cardinal n. Alors $card(E^p) = n^p$.

Démonstration : Soit un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. Pour chaque coordonnée x_i, i représente le numéro du tirage et x_i le numéro de la boule. $(x_1, \dots, x_p)$ représente un tirage avec ordre et avec remise dans une urne n boules en tirant p fois. ■

Corollaire 1.3.3

Soit E de cardinal p et F de cardinal n. Alors le cardinale de l'ensemble des applications de E dans F, $\mathcal{F}(E, F)$, est égale à n^p.

Démonstration : D'après la remarque 1, l'ensemble E de cardinal p est identifié à $\{1, 2, \dots, p\}$ et l'ensemble F de cardinal n à $\{1, 2, \dots, n\}$. La fonction ϕ défini par :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \{\{1, 2 \dots, p\} \mapsto \{1, 2 \dots, n\} & \longrightarrow & \{1, 2 \dots, n\}^p \\ f & \longmapsto & (f(1), f(2), \dots, f(p)) \end{array} \right.$$

est une bijection où l'on associe à la variable, i le numéro du tirage, et à l'image, $f(i)$ l'index de la boule. Comme l'ensemble d'arrivée de la fonction ϕ est l'ensemble des tirages avec remise et avec ordre, de cardinale n^p, le cardinal de l'ensemble des applications E dans F est bien n^p. ■

Exemple 7

Combien de nombres à quatre chiffres peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 ? C'est 10^4.

1.4 Tirage avec ordre et sans remise

Définition 4

Le nombre $n.(n-1)\dots 2.1$ est appelé factorielle n et est noté $n!$.

Proposition 1.4.1

Le nombre de tirages différents sans remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant p boules avec $p \leqslant n$ est $\frac{n!}{(n-p)!}$. On l'appelle arrangement de p boules parmi n et on le note A_p^n.

Démonstration : Comme on a n façons de tirer la première boule, puis $n-1$ façons de tirer la première boule et ainsi de suite, d'après le principe de décomposition, on obtient $n.(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n.(n-1)\dots(n-p+1).(n-p).(n-p-1)\dots 2.1}{(n-p).(n-p-1)\dots 2.1} = \frac{n!}{(n-p)!}$. ■

Corollaire 1.4.2

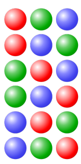
Soit E de cardinal p et F de cardinal n avec n et p deux entiers non nuls. Alors le cardinale de l'ensemble des applications injectives de E dans F, $\mathcal{F}(E,F)$, est égale à A_p^n.

Démonstration : Idem que la démonstration du corolaire 1.3.3 sauf que, comme le tirage est sans remise, les numéros de chaque boule sont différents deux à deux. Cela implique l'injectivité de la fonction. ■

Corollaire 1.4.3 ($n = p$)

Le nombre de tirages différents sans remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant toutes boules est $n!$.

Exemple 8

Pour 3 boules, on a $6 = 3.3.1$ manières 

Proposition 1.4.4

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments. Soit une bijection de l'ensemble E des n éléments sur lui-même. Lorsque l'ensemble $E = \{1,\dots,n\}$, on note S_n l'ensemble des permutations. On a $\mathrm{Card}(S_n) = n!$ Cet ensemble possède une structure de groupe, on l'appelle groupe symétrique.

Exemple 9

Par exemple la liste $(1,3,2,5,4)$ est la permutation σ telle que $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 4$ que l'on peut écrire $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

1.5 Tirage sans ordre et sans remise

Proposition 1.5.1

Le nombre de tirages différents sans remise et sans ordre dans une urne n boules en tirant p boules avec $p \leqslant n$ est appelé coefficient binomial, noté $\binom{n}{p}$, *et on a*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Il s'appelle aussi le nombre de combinaisons de p boules parmi n boules, p parmi n. Pour $p > n$, on pose $\binom{n}{p} = 0$

Démonstration : Avec le principe de double-comptage, on dénombre le nombre d'arrangements de deux façons différentes. L'un d'après la proposition 1.4.1, on a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, et l'autre on commence par choisir une combinaison de p boules parmi n ($\binom{n}{p}$ configurations possibles de choisir) et on l'ordonne par permutation des boules pour obtenir tous les arrangements simples ($p!$ configurations possibles de les ordonner), soit d'après le principe de décomposition $p!\binom{n}{p}$. D'où $p!\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, donc $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. ■

Exemple 10

Le nombre de tirages au Loto (5 numéros parmi 49) est $\binom{49}{5} = 1906884$.

Exemple 11

Le nombre d'anagrammes 0001111 est $\binom{7}{3}$. Pour chaque anagramme, les positions des 1 dans le mot correspond au résultat d'un tirage sans remise et sans ordre dans une urne numérotée de 7 boules en tirant 3 boules.

Corollaire 1.5.2

Le nombre de configurations de sous-ensemble à p éléments d'un ensemble à n éléments est

$\binom{n}{p}$.

Démonstration : Soit $E = \{1, \ldots, n\}$. Soit $A = \{i_1, i_2, i_p\}$ un sous-ensemble de p éléments de E. L'ensemble A correspond bien à un tirage sans ordre et sans remise dans une urne n boules en tirant p boules. CQFD. ■

Proposition 1.5.3

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3. $\forall n, p \in \mathbb{N},$ *avec* $p \leqslant n$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

4. Formule de Pascale : $\forall n, p \in \mathbb{N},$ *avec* $p \leqslant n,$ $\quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Démonstration : Argumentation combinatoires :

1. une urne à n boules a un unique tirage à zéro boule, l'ensemble vide $\emptyset$, et un unique tirage de n boule, lui-même
2. une urne de n boules a n tirage à une boule (tirage de la première boule, puis tirage de la seconde boule etc)
3. choisir p boules parmi n revient à sélectionner les
4. Dénombrons par principe de double-comptage l'ensemble des combinaison de p boules parmi n. D'abord, la proposition 1.5.1 nous donne $\binom{n}{p}$. Puis on sépare en deux cas : ceux contenant la boule n qui sont l'ensemble des combinaison de $p-1$ boules parmi $n-1$ au nombre $\binom{n-1}{p-1}$ et ceux ne contenant pas la boule n qui sont l'ensemble des combinaison de p boules parmi $n-1$ au nombre $\binom{n-1}{p}$. Au total on a donc $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ des combinaison de p boules parmi n d'où le résultat.

La formule de Pascal nous permet ensuite de construire le triangle de Pascal. La case située dans la p-ième colonne de la n-ième ligne contient le coefficient binomial.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

■

Proposition 1.5.4

Formule du binôme de Newton. Soit x, y des nombres réels et $n > 1$ un entier. Alors :

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

Démonstration : Lorsqu'on développe $(x+y).(x+y)\ldots(x+y)$, pour trouver le coefficient devant $x^p y^{n-p}$, parmi les n termes $(x+y)$, il faut en choisir p pour lesquels on garde le x et qui vont donner un terme x^p, et les $n-p$ autres termes pour lesquels on sélectionne y (et qui sont fixés par le choix des p premiers) vont donner le terme y^{n-p}. Le résultat s'ensuit. ■

Synthèse :

Tirage de p boules dans une urne en contenant n.

	avec remise	sans remise
avec ordre	n^p	$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$, si $n = p$ $A_n^p = n!$
sans ordre		$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$