

---

# Application linéaires : exercices

---

## I Applications linéaires

### A Proportionnalité

#### Exercice 1 (*Dilution*)

Quelle quantité d'alcool à 70° dois-je mettre dans 1L l'alcool a 90° pour diluer 75° ?

### B Calcul matriciel

#### Exercice 2 (*Des calculs de produits*)

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits  $AB$  et  $BA$  dans chacun des cas suivants :

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

#### Exercice 3 (*Commutant*)

Soient  $a$  et  $b$  des réels non nuls, et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Trouver toutes les matrices  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire telles que  $AB = BA$ .

#### Exercice 4 (*Annulateur*)

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $AB$ ,  $AC$ . Que constate-t-on ? La matrice  $A$  peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices  $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $AF = 0$  (où 0 désigne la matrice nulle).

#### Exercice 5 (*Produit non commutatif*)

Déterminer deux éléments  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tels que :  $AB = 0$  et  $BA \neq 0$ .

#### Exercice 6 (*Matrices stochastiques en petite taille*)

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de  $A$  est égale à 1. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique si  $n = 2$ . Reprendre la question si  $n \leq 1$ .

#### Exercice 7 (*Puissance $n$ -ième, par récurrence*)

Calculer la puissance  $n$ -ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 8 (*Puissance $n$ -ième - avec la formule du binôme*)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En déduire  $A^n$ .

### Exercice 9 (*Puissance $n$ -ième - avec un polynôme annulateur*)

1. Pour  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Déduire de la question précédente la valeur de  $A^n$ , pour  $n \geq 2$ .

### Exercice 10 (*Inverser une matrice sans calculs !*)

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 = 2I_3 - A$ , en déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .
3. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2 - 3A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible, et calculer  $A^{-1}$ .

### Exercice 11 (*Inverse avec calculs !*)

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 12 (*Matrice nilpotente*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $p \geq 1$  tel que  $A^p = 0$ . Démontrer que la matrice  $I_n - A$  est inversible, et déterminer son inverse.

## C Applications linéaires

### Exercice 13 (*Applications linéaires ou non ?*)

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$  ;
2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$  ;
3.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$  ;
4.  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P'(1))$ .

### Exercice 14 (*Définie par une base*)

On considère dans  $\mathbb{R}^2$  les trois vecteurs  $u = (1, 1)$ ,  $v = (2, -1)$  et  $w = (1, 4)$ .

1. Démontrer que  $(u, v)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $a$  existe-t-il une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(u) = (2, 1)$ ,  $f(v) = (1, -1)$  et  $f(w) = (5, a)$  ?

**Exercice 15 (*Du local au global...*)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$ , il existe un entier  $n_x \in \mathbb{N}$  tel que  $f^{n_x}(x) = 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $n$  tel que  $f^n = 0$ .

**D Dualité****Exercice 16 (*Application linéaire définie sur les matrices*)**

Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application de  $M_2(\mathbb{R})$  dans  $M_2(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = AM$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ .

**II Images et noyaux****Exercice 17 (*Noyau et image*)**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de  $f$ , son image.  $f$  est-elle injective? surjective?

**Exercice 18 (*Application linéaire donnée par l'image d'une base*)**

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On note  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $E$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de  $\ker u$ .  $u$  est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?
2. Déterminer une base de  $\text{Im } u$ . Quel est le rang de  $u$ ?
3. Montrer que  $E = \ker u \oplus \text{Im } u$ .

**Exercice 19 (*Noyau prescrit ?*)**

Soit  $E = \mathbb{R}^4$  et  $F = \mathbb{R}^2$ . On considère  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}$ . Existe-t-il des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  dont le noyau est  $H$ ?

**Exercice 20 (*A noyau fixé*)**

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $u = (1, 0, 0)$  et  $v = (1, 1, 1)$ . Trouver un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont le noyau est  $E$ .

**Exercice 21 (*Application linéaire à contraintes*)**

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  tel que, si  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  désigne la base canonique, alors on a

1.  $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$  et  $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$ .
2.  $\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$ .

**Exercice 22 (*Espace vectoriel des polynômes de dimension infinie*)**

1. Montrer que l'application  $\phi \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto (P(0), P') \end{array} \right.$  est un isomorphisme.
2. En déduire que  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie.

### III Matrices par blocs

#### Exercice 23 (\*, Trace du produit tensoriel de deux matrices)

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , on définit le produit tensoriel de  $A$  et  $B$  par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Quelle est la taille de la matrice  $A \otimes B$ ? Démontrer que  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ .

#### Exercice 24 (\*\*, Matrices de Walsh)

La suite de matrices de Walsh,  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , est définie par :

$$W_0 = (1) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : W_{n+1} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer la taille de  $W_n$  et calculer  $w_n^2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Exercice 25 (\*\*, Déterminant d'une matrice triangulaire supérieur par blocs)

On définit par blocs une matrice  $A$  par  $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices carrées de formats respectifs  $n$ ,  $p$  et  $q$  avec  $p + q = n$ . Montrer que  $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$ .

### IV Symétrie et projection

#### Exercice 26 (Noyau et image)

On considère  $s : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, -y) \end{matrix}$ .

1. Montrer que  $s$  est une symétrie. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Démontrer  $p = \frac{\text{Id} + s}{2}$  est une projection.

#### Exercice 27 (Noyau et image)

On considère les espaces  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$ .

1. Déterminer une base de  $F$ , puis démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer les coordonnées de  $p(x, y, z)$ . Déterminer la matrice de  $p$  dans la base canonique.  
Même question avec  $q$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

#### Exercice 28

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  et  $p \neq q$ . Démontrer que  $(p, q)$  est une famille libre de  $\mathcal{L}(E)$ .

#### Exercice 29

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$ . On note  $p_i$  le projecteur sur  $E_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ .

Montrer que  $p_i \circ p_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$ .