

I Espace vectoriel normé

A Norme

Exercice 1 (*Normes sur \mathbb{K}^n*)

Pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

1. $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$
2. $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$
3. $\|\vec{x}\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont trois normes de \mathbb{K}^n .

Exercice 2 (*Normes sur des espaces de fonctions*)

1. Soit $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

2. Soit $L_1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Pour $f \in L_1(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, dx.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L_1(I, \mathbb{K})$.

3. Soit $L_2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de carré intégrables sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Pour $f \in L_2(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, dx.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L_2(I, \mathbb{K})$.

Exercice 3 (*Normes sur des espaces de suites*)

1. Soit $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

2. Soit $L_1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Pour $f \in L_1(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, dx.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L_1(I, \mathbb{K})$.

3. Soit $L_2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de carré intégrables sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} . Pour $f \in L_2(I, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, dx.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L_2(I, \mathbb{K})$.

Exercice 4 (*normes sur les matrices*)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose :

- $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$;
- $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\bar{A}^\top A)}$;
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$;

— $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

1. Montrer qu'il s'agit de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que la norme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme d'algèbre, c.-à-d. que

$$\forall A, B \in E, \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Exercice 5 (*Normes de polynômes*)

Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose :

— $N_1(P) = \sum_{k=0}^d |a_k|$;

— $N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^d |a_k|^2}$;

— $N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$;

— $N(P) = \sup_{x \in [0,1]} |a_k|$.

Démontrer qu'il s'agit de normes sur E .

Exercice 6 (*Normes d'applications linéaires*)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F .

Démontrer

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$

Exercice 7 (*Intérieur*)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E . Montrer que l'intérieur de F est l'ensemble vide.

Exercice 8 (*Intérieur*)

Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

B Suite

Exercice 9 (*Unicité de la limite*)

Démontrer que si une suite converge, alors sa limite est unique.

Exercice 10 (*Bornée*)

Démontrer que si une suite converge, alors elle est bornée.

Exercice 11 (*Suite extraite*)

Si une suite converge, alors toute suite extraite converge.

C Fonctions lipschitziennes

Exercice 12 (*Application norme*)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Démontrer que l'application norme est 1-lipschitzienne.

Exercice 13 (*Application norme*)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Démontrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, tout sous-espace vectoriel est un fermé.