Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

Dans le chapitre sur les séries numériques, nous avons étudié la série de Riemann, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ dépendant du paramètre. Si $\alpha = 1$, la série de Riemann s'appelle série harmonique et diverge. Si $\alpha = 2$, la série de Riemann converge et est égale $\frac{\pi^2}{6}$. On peut définir la fonction zêta de Riemann en considérant le paramètre α comme la variable, x, de la fonction, c'est à dire :

$$\zeta \left| \begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. .$$

On a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Ainsi définie comme la somme de la série, la fonction ζ est-elle continue, dérivable ? La première partie de ce cours définira les notions de suites et séries de fonctions ainsi que les différents modes de convergence. La fonction limite de la convergence simple sera définie comme la limite point à point. Ainsi définie, la fonction limite n'est pas garantie d'être continue, dérivable, etc. C'est pourquoi, nous définirons une convergence plus forte appelée convergence uniforme afin de garantir des propriétés de continuités, de dérivabilité, de permutation de la limite et de l'intégrale. Les théorèmes associés à ces propriétés constitueront la dernière partie de ce cours.
Notations :

— I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point
— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
— $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}-$espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

I Généralités

A Définitions

Définition 1 (*Suite de fonctions*)

On appelle **suite de fonctions** toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. Autrement dit, une suite de fonctions est une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$.

Exemple 1

Soit les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. , \quad g_n \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \end{array} \right. , \quad h_n \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xn^a e^{-nx} \end{array} \right. .$$

Définition 2 (*Série de fonctions*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On pose

$$S_n \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array} \right. .$$

On appelle **série de fonctions** de I dans $\mathbb{K}$ de terme général f_n, noté $\sum_n f_n$, la suite des **sommes partielles** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2 (*Série entière*)

Les séries de la forme $\sum a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe. Par exemple, la série géométrique $\sum x^n$.

Exemple 3 (*Série trigonométrique*)

Les séries de la forme $\sum a_n \cos(nx)$ et $\sum b_n \sin(nx)$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites réelles ou complexes.

B Modes de convergence

Convergence simple

La convergence simple permet de définir une fonction comme limite d'une suite de fonctions ou d'une série de fonctions.

Définition 3 (*Convergence simple* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f sur I si

$$\forall x \in I, \text{ la suite numérique } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge,}$$

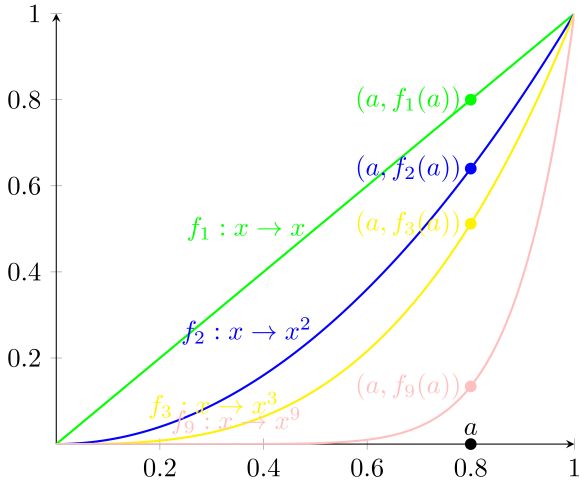
c'est à dire que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, pour tout $x \in I$. Dans ce cas, on peut définir la fonction :

$$f \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array} \right. ,$$

appelée **limite simple** sur I de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode 1 (*Prouver la convergence simple*)

Pour prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I, il faut fixer la variable de la fonction, **Fixons** $a \in I$, et chercher à prouver que la **suite numérique** $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Il s'agit donc d'un problème de convergence d'une suite numérique.
L'exemple ci dessous représente la convergence simple pour la suite $(f_n : x \to x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On fixe a et on étudie la convergence de la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.



Exemple 4

Démontrons la convergence simples des suites de fonctions de l'exemple 1.

1. Fixons $a \in [0, 1]$.

   — Si $a = 1$, on a $a^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
   — Si $a \neq 1$, la suite numérique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $q = a$. Comme $|a| < 1$, la suite converge vers 0.

   En conclusion, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction limite $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0, 1]$.

2. Fixons $a \in \mathbb{R}$.
   — Si $a = 0$, on a $(1 + \frac{0}{n})^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = e^0$.
   — Si $a \neq 0$, on a :

   $$\begin{array}{rcl} (1 + \frac{a}{n})^n & = & e^{n \ln(1+a/n)} \\ (1 + \frac{a}{n})^n & = & e^{n(a/n+o(1/n))} \\ (1 + \frac{a}{n})^n & = & e^{a+o(1)} \end{array}$$

   Donc $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$ car la fonction exponentielle est continue.

   En conclusion, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

3. Fixons $b \in \mathbb{R}^+$.
   — Si $b = 0$, on a $bn^a e^{-nb} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   — Si $b \neq 0$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} bn^a e^{-nb} = 0$ par croissance comparée.

   En conclusion, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 1

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ et pourtant sa limite simple $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue sur $[0,1]$.

Définition 4 (*Convergence simple $\sum f_n$*)

On dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement** sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
Autrement dit, la série $\sum f_n$ converge simplement sur I si

$$\forall x \in I, \text{la série numérique } \sum_n f_n(x) \text{ converge.}$$

Dans ce cas, la fonction :

$$f \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est appelé **limite simple** sur I de la série $\sum f_n$.

Exemple 5 (*Série géométrique*)

Soit la série de fonctions $\sum x^n$.
Fixons $a \in]-1,1[$.
On a $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-a}$ car $|a| < 1$.
En conclusion, la série $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers la limite simple $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Proposition I.1 (*Unicité de la limite simple*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f et vers g alors $f = g$.

Démonstration : Supposons par l'absurde que $f \neq g$. Il existe donc $x \in I$ tel que $f(x) \neq g(x)$. D'après l'hypothèse de convergence simple, en particulier, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Cela implique d'après l'unicité de la limite d'une suite numérique $f(x) = g(x)$. D'où la contradiction. ∎

Convergence uniforme

La convergence uniforme est une convergence plus forte que la convergence simple permettant de garantir des propriétés de continuité, de dérivabilité, etc, sur la fonction limité définie à l'aide de la convergence simple.

Définition 5 (*Convergence uniforme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, et soit $f \colon I \to \mathbb{K}$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon,$$

ou de façon équivalente, si la suite numérique $(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est à dire :

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition I.2

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Démonstration : Fixons $a \in I$. On a :

$$|f_n(a) - f(a)| \leqslant \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \quad \overbrace{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}}^{\text{convergence uniforme}} 0.$$

Donc la suite numérique $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f. ■

Méthode 2 (*Prouver la convergence uniforme*)

On définit la limite simple, f, de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de la convergence simple. Puis, on vérifie que le suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers cette limite f car si la limite de convergence uniforme existe, elle est égale à celle de la convergence simple par

1. *méthode 1* : une étude de fonction pour déterminer $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$
2. *méthode 2* : une majoration $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ par une quantité indépendante de x et qui tend vers 0.

Exemple 6 (*Méthode 1*)

Soit

$$h_n \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & n^a x e^{-nx} \end{array} \right. .$$

— *Conjecture :* l'animation geogebra `https://www.geogebra.org/graphing/bm5hggxd`, illustre la notion de convergence pour $a = 0,5, a = 1$ ou $a = 1,5$.
Pour la **convergence simple**, on fixe x (ici =0.3). On observe qu'à partir d'un certain rang de n, le point x est à droite de la bosse quelque soit la valeur de a. Donc la suite numérique $(h_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$ quelque soit les valeurs de a. La limite simple est la fonction nulle $h : x \to 0$.
Pour la **convergence uniforme**, x n'est plus fixé et appartient à l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |h_n(x)|$$

correspond à la hauteur de la bosse. On a convergence uniforme si et seulement si la hauteur tend vers 0 quand quand n tend vers $+\infty$. Pour $a = 0,5$, la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément car la bosse s'aplatit. En revanche, pour $a = 1$, la hauteur de la bosse reste constante et pour $a = 1,5$, la hauteur tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément pour ces deux dernières valeurs. On conjecture que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

— *Preuve :* pour étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (h_n), on étudie la suite numérique $\left(\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |h_n(x)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme h_n est une fonction dérivable, on étudie le signe de sa dérivée. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$h'_n(x) = n^a(e^{-nx} - nxe^{-nx}) = n^a e^{-nx}(1 - n).$$

D'où $h'_n(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{n}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$		$+$	0	$-$	
Variations h_n	0	$\nearrow$	$h_n\left(\frac{1}{n}\right)$	$\searrow$	0

$|h_n|$ atteint son maximum en $1/n$, d'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |h_n(x)| = h_n(1/n) = n^{a-1}e^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a<1 \\ e^{-1} & \text{si } a=1 \\ +\infty & \text{si } a>1 \end{cases}.$$

Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si $a<1$.

Exemple 7 (*Méthode 2*)

Soit la suite de fonctions $(f_n : x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers la fonction nulle $x \mapsto 0$ sur $[0,a]$ avec $0<a<1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,a] : \quad |x^n| \leqslant a^n$$

c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[0,a]} |x^n| \leqslant a^n.$$

Comme $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on déduit que $\sup_{x\in[0,a]} |x^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par théorème de comparaison.
En conclusion, la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle $x \mapsto 0$ sur $[0,a]$.

Définition 6 (*Convergence uniforme $\sum f_n$*)

On dit que la série $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I si la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

Proposition I.3 (*Critère du reste*)

Soit $\sum f_n$ une série de fonction qui converge simplement vers f sur I.
Cette série converge uniformément vers f sur I si et seulement si la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur I où

$$R_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x).$$

Ainsi, montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I revient à montrer l'existence d'une suite réelle $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|R_n(x)| \leqslant \epsilon_n$;*
- *la suite numérique (ϵ_n) tend vers 0.*

Démonstration : Cette égalité prouve l'équivalence :

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=0}^{n} f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in I}\left|\sum_{k=0}^{n} f_n(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x)\right| = \sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)\right|$$ ■

Exemple 8

Soit la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$.
La série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, car à $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ respecte le critère de convergence des séries alternées : $(\frac{1}{x+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite 0. Pour la convergence uniforme, la valeur absolue du reste d'une série alternée est majorée par celle de son premier terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |R_n(x)| \leqslant \left|\frac{1}{x+(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Convergence normale

Uniquement pour les séries de fonctions, la convergence normale est une convergence plus forte que la convergence uniforme. Elle est avant tout un outil pour démontrer la convergence uniforme car démontrer qu'une série converge normalement est souvent évident.

Définition 7 (*Convergence normale* $\sum f_n$)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur I si la série numérique de terme général $u_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge.

Proposition I.4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Montrer que la série converge normalement sur I revient à montrer l'existence d'une suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$;
- *la série numérique* $\sum \alpha_n$ *converge.*

Démonstration : La série numérique $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ est une série à termes positifs dont le terme général est bornée par α_n. Comme la série numérique $\sum \alpha_n$ converge, la série numérique $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ par règle de comparaison. ■

Proposition I.5

La convergence normale entraîne la convergence uniforme (qui entraîne la convergence simple).

Démonstration : Soit $n < N$.

$$\forall x \in I : \quad \left|\sum_{k=n+1}^{N} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \sup_{x\in I} |f_n(x)| \overbrace{\leqslant}^{\text{Série à termes positifs}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| .$$

Par passage à la limite, l'inégalité devient :

$$\forall x \in I : \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| .$$

Comme la série converge normalement, la série $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge et son reste $(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi la série $\sum f_n$ converge absolument par le critère des restes. ■

Exemple 9

Soit la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement donc uniformément.

Remarque 2

La convergence uniforme n'implique pas la convergence normale. La série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais pas normalement. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{n}.$$

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

II Régularité de la limite d'une suite/série de fonctions

A Continuité

Théorème II.1 (*Théorème de la permutation des limites*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- *a est un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) ;*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$ existe et est finie ;*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

Alors :
- *la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons l sa limite.*
- *$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, c'est à dire*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Démonstration Hors programme (utilisation du critère de Cauchy) : On a :
- *$(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy :* Soit $\varepsilon > 0$.
  Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe N tel que,
  $$\forall n > N : \quad \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
  Soit $x \in I$, $n > N$ et $k \in \mathbb{N}$.
  $$|f_{n+k}(x)-f_n(x)| \leqslant |f_{n+k}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)| \leqslant \sup_{x\in I} |f_{n+k}(x)-f(x)|+\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$
  Dans cette inégalité, prenons la limite quand x tend vers a,
  $$|l_{n+k} - l_n| \leqslant 2\varepsilon.$$
  En conclusion, $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{K}$ est complet, $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.
- *$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$:* Soit $\varepsilon > 0$.

■

Théorème II.2 (*Théorème de permutation limite-somme*)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- *a est une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) ;*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$ existe et est finie ;*
- *$\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I.*

Alors :
- *la série numérique $\sum_n l_n$ est absolument convergente ;*
- *f admet une limite en a ;*
- *$\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$, c'est à dire*

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Exemple 10

La série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ avec $a > 1$. On a :

$$\lim_{x\to\infty}\zeta(x) = \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x} = \lim_{x\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k^x} = \lim_{n\to\infty}(1+0+\cdots+0) = 1.$$

Théorème II.3 (*Théorème de continuité de la limite*)

La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est elle-même continue.
Plus précisément, si
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I,*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Alors f est continue sur I.

Démonstration : Ce théorème est un corollaire du théorème de la double limite. Soit $a \in I$. On a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \underset{\text{th double limite}}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \underset{f_n \text{ continue}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

■

Remarque 3

Par contraposition, le théorème précédent permet, dans certains exemples, de montrer la non-convergence uniforme.
Par exemple, la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ mais ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car chaque $x \mapsto x^n$ est continue et sa limite simple ne l'est pas.

Théorème II.4 (*Théorème de continuité de la somme*)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;*
- *$\sum f_n$ converge uniformément sur I.*

Alors la somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction définie et continue sur I.

Remarque 4

La notion de continuité est une notions **locale**. Cela signifie que pour montrer qu'une fonction f est continue sur un intervalle I, il faut montrer que f est continue en tout point a de l'intervalle.
Ainsi, dans les théorèmes sur la continuité , on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I par la convergence uniforme sur tout segment K inclus dans I.
Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$ mais converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 1$. Donc, la fonction limite, ζ est continue $[a,+\infty[$, pour tout $a > 1$ donc continue sur $]1,+\infty[$.

B Permutation avec une intégrale

Théorème II.5 (*Théorème de permutation limite/intégrale*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a,b]$;*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors f est continue (donc intégrable) sur $[a,b]$ et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

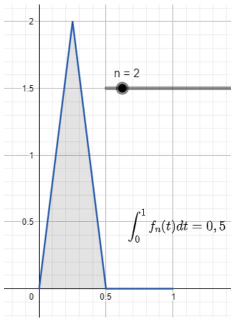
Démonstration :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \\
&\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \int_a^b dt = (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 5

Si il n'y pas convergence uniforme, on ne peut pas permuter en générale limite et intégrale. Par exemple, on observe dans cette animation géogébra `https://www.geogebra.org/graphing/qwwbjxgv`,



que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. L'intégrale de la fonction nulle sur $[0,1]$ est 0. Comme l'intégrale de chaque fonctions f_n est $\frac{1}{2}$, la limite des intégrales est $\frac{1}{2}$. L'égalité n'est donc pas vérifiée car

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 0dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt.$$

On peut vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad f_n \left| \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2n^2x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

converge et simplement vers la fonction nulle et que $\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{2}$.

Théorème II.6 (*Théorème de permutation somme/intégrale*)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a,b]$*
- *la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f*

Alors f est continue sur $[a,b]$ (donc intégrable) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration : Le théorème de permutation de limite/intégrale sur les suites nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_n(t)dt$$

En substituant dans cette égalité

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_n(t)dt \overbrace{=}^{\text{somme finie}} \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_n(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b f_k(t)dt$$

et

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)dt$$

on obtient le résultat. ■

Exemple 11 (*Série géométrique*)

La série $\sum x^n$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$. Comme

$$\forall x \in [0,1[, \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt \overbrace{=}^{Th} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

et

$$\forall x \in [0,1[, \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x),$$

Par intégration de

$$\forall x \in [0,1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

on obtient le développement en série entière de la fonction $x :\mapsto \ln(1-x)$:

$$\forall x \in [0,1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

C Dérivabilité

Théorème II.7 (*Dérivation de la limite*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ;*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;*
- *$(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I.*

Alors :

- *f est de classe C^1 sur I ;*
- *$f' = g$ c'est à dire :*

$$\forall x \in I : \quad \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

Théorème II.8 (*Dérivation de la somme*)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I*
- *$\sum_n f_n$ converge simplement sur I vers f*

— $\sum_n f_n'$ *converge uniformément sur* I
Alors f *est de classe* C^1 *sur* I *et*

$$\forall x \in I : \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Exemple 12

La série $\sum x^n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $[-a,a]$ avec $0<a<1$. La série dérivée $\sum nx^{n-1}$ converge uniformément sur $[0,a]$ avec $0<a<1$ car elle converge normalement sur $[-a,a]$. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{x\in[-a,a]} |nx^{n-1}| = na^{n-1},$$

or la série $\sum na^{n-1}$ converge en utilisant le critère de d'Alembert ($\lim \frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = a < 1$). Donc la série $\sum nx^{n-1}$ converge uniformément vers $f' : x \mapsto \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ sur $[-a,a]$.

D Généralisation

Théorème II.9 (*Dérivation de la limite*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On suppose que :*
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est de classe* C^p *sur* I, $p > 1$ *;*
- *pour tout* $k \in \{0,\dots,p-1\}$, *la suite* $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* g_k *sur* I *;*
- *la suite* $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* g_p *sur* I.

Alors :
- $f = g_0$ *est de classe* C^p *;*
- $\forall k \in \{0,\dots,p\}$, $f^{(k)} = g_k$.

Théorème II.10 (*Théorème de dérivation de la somme*)

Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On suppose que :*
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est de classe* C^p, $p?1$
- *pour tout* $k \in \{0,\dots,p-1\}$, $\sum_n f_n^{(k)}$ *converge simplement sur* I
- f *est la somme de la série* $\sum f_n$, *c.-à-d.* $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$
- $\sum_n f_n^{(p)}$ *converge uniformément sur* I

Alors f *est de classe* C^p *sur* I *et*

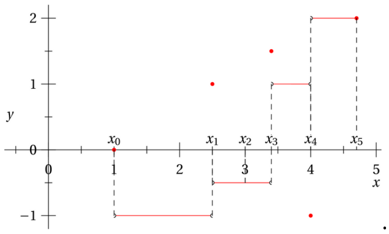
$$\forall k \in \{0,\dots,p\}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

III Approximations et développements (hors-programme)

Dans cette partie, on introduit des applications des notions de suites et séries de fonctions.

A Fonctions en escaliers

Définition 8 (*Fonctions en escalier*)

Une fonction réelle définie sur un intervalle [a,b] de R est dite **en escalier** s'il existe des points $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, tels que sur chaque segment $]x_i, x_{i+1}[$, la fonction soit constante, par exemple, 

.
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Définition 9 (*Riemnan intégrable*)

Une fonction f définie sur $[a,b]$ est Riemnan intégrable si il existe une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Dans ce cas, on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(t)dt \underset{\text{par définition}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt$$

B Polynomial

Théorème III.1 (*Approximation de Stone-Weierstrass*)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Alors il existe une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers la fonction f.

Définition 10 (*Développement en série entière (voir le chapitre)*)

Une **série entière** réelle est une série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$ où les coefficients a_n forment une suite réelle. On dit qu'une fonction $f\in\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière en 0 si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ tel que $f : x\mapsto \sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

C Trigonométrique

Théorème III.2 (*Approximation de Stone-Weierstrass*)

Soit f une fonction complexe, continue et 2π-périodique.
Alors il existe une suite de fonctions polynômes trigonométrique convergeant uniformément vers la fonction f.

Théorème III.3 (*Développement en séries trigonométriques*)

Soit f une fonction complexe, $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. On définit la série de polynôme trigonométrique par : $P_n(x)=\sum_{k=-n}^{+n} c_k(f)e^{ikx}$ avec $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikx}\mathrm{d}t$, appelés coefficients de fourrier.
Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Une application est le calcul de $\zeta(2)$. Soit $f : x\mapsto 1-\frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,+\pi]$, 2π-périodique. Après calculs des coefficients de fourrier, on obtient que :

$$\forall x\in[-\pi,+\pi] : f(x) = 1-\frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Donc $f(\pi)=0=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, d'où $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.