

Chapitre 1

Problème introductif de l'algèbre linéaire

Problème :

La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0.5 mètres. Quel est la taille du fils ?

I Modélisation

Soit l'inconnue x représentant la taille du fils et l'inconnue y représentant la taille du père. La somme est 2,5 donc $x + y = 2,5$.

La différence est 0,5 donc $y - x = 0,5$.

On cherche x et y vérifiant ces deux équations.

II Représentation : système d'équations

Le système d'équation s'écrit :

$$\begin{cases} y + x &= 2,5 \\ y - x &= 0,5 \end{cases}$$

II.A Résolution algébrique

Pour déterminer l'ensemble des solutions x et y vérifiant ce système, une idée est de découpler les dépendances entre les inconnues dans les équations. C'est la méthode du pivot de Gauss qui transforme un système d'équations en un autre équivalent (ayant les mêmes solutions). Par exemple, en transformant la ligne 2 par ligne 2 plus la ligne 1, on obtient :

$$\begin{cases} y + x &= 2,5 \\ 2y &= 3 \end{cases}$$

Puis, en divisant la ligne 2 par 2, on obtient :

$$\begin{cases} y + x &= 2,5 \\ y &= 1,5 \end{cases}$$

Enfin, en transformant la ligne 1 par ligne 1 moins la ligne 2, on obtient :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1,5 \end{cases}$$

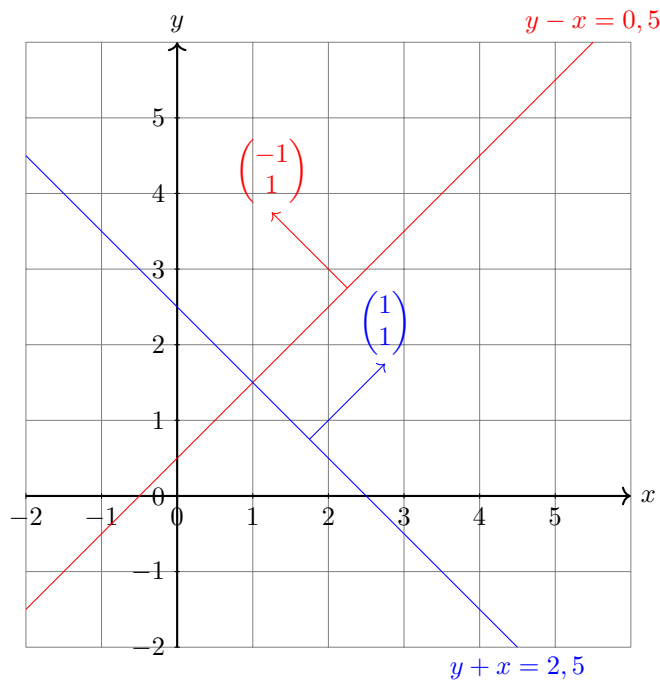
Ainsi l'ensemble des solution est l'unique solution $x = 1$ et $y = 1,5$.

II.B Résolution géométrique

Le système équation :

$$\begin{cases} y + x = 2,5 \\ y - x = 0,5 \end{cases}$$

est constitué de deux équations de deux droites. Comme les vecteurs normaux aux deux droites



$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles et donc admettent un unique point d'intersection $(1; 1,5)$.

Ainsi l'ensemble des solution est l'unique solution $x = 1$ et $y = 1,5$.

III Représentation : matricielle

Une idée est de transformer ce système deux équations à deux inconnues en un système d'une équation à une inconnue dont on sait résoudre par de simple opérations algébriques. Par exemple, pour l'équation $2x + 1 = 5$, on additionne l'opposé de 1, soit -1

$$2x + 1 + (-1) = 5 + (-1)$$

ce qui donne $2x = 4$, puis on multiplie par l'inverse de 2, soit $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}4$$

ce qui donne $x = 2$.

On représente cette opération à l'aide de tableaux de nombres :

$$\begin{pmatrix} 120 & 50 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

IV Représentation : espace vectoriel

V Représentation : application linéaire