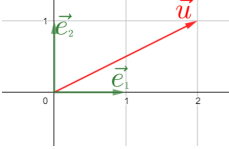
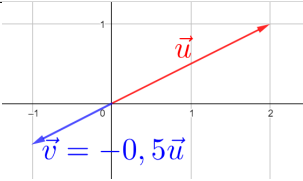
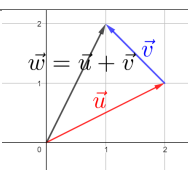


Espaces vectoriels

Exemple : $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Tout d'abord, commençons par les vecteurs du plan :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$
Multiplication par un scalaire		$\begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} = -0.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = -0.5\vec{u}$
Addition		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Du fait de l'équivalence entre ces trois représentations, géométrique, numérique et algébrique, tout ce qui est vrai ou faux pour l'un l'est aussi pour l'autre¹. Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel pour bien comprendre l'algèbre linéaire.

Exemple : Exemples d'ensembles de vecteurs : $E = \{\vec{x}\}$

Il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer une addition et une homothétie soit une combinaison linéaire, par exemples :

- l'ensemble des n-uplet réels : $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $E = \mathbb{R}^n$ et , où chaque x_i est un réel,
- l'ensemble des matrices carrés réels : $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque $a_{i,j}$ est un un réel,
- l'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaire d'ordre 1 homogène : $\vec{x} = f$ une fonction \mathcal{C}^1 tel que $f' + a_0 f = 0$ et $E = \{f \in \mathcal{C}_1 : f' + a_0 f = 0\}$,
- l'ensemble des polynômes réels : $\vec{x} = a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ et $E = \mathbb{R}[X]$,
- l'ensemble des suites réels : $\vec{x} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
- etc.

Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique abstraite constituée de propriétés partagés par tous les ensembles : cette structure s'appelle **l'espace vectoriel** et permet d'effectuer des combinaisons linéaires,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers.

1. Il y a des limites à cette équivalence. La représentation géométrique est uniquement pertinente dans le plan et l'espace. La représentation numérique est limitée aux espaces vectoriels de dimension finie.

I Structure algébrique

Définition : Loi de composition interne : $\vec{x} \triangle \vec{y}$

Soit A un ensemble. Une **loi de composition interne**, \triangle , est une application qui, à deux éléments de A , associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (x, y) \longmapsto x \triangle y \end{array} \right.$$

Définition : Propriétés

On dit que \triangle

1. est **associative** : si $(x, y, z) \in A^3$, $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$. On ne considérera que des loi associatives.
2. est **commutative** : si $\forall (x, y) \in A^2$, $x \triangle y = y \triangle x$;
3. admet un **élément neutre** si $\exists e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$. Il existe au plus un élément e vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le neutre** de la loi \triangle .
4. est **symétrique** (ou **inverse** si loi est \times , ou **opposé** si la loi est $+$) Si \triangle est une loi associative qui admet un neutre e , et si $x \in A$, on appelle de x pour la loi \triangle tout élément $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Si \triangle est également associative, il existe au plus un élément x' vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le** symétrique de x pour la loi \triangle .

Définition : Groupe

Un **groupe** est un couple (G, \triangle) où G est un ensemble et \triangle une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi \triangle . Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi \triangle est de plus commutative.

Exemple : Le Groupe $(\mathbb{R}^n, +)$

La loi d'addition sur \mathbb{R}^n est définie par

$$+ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)) \longmapsto \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{array} \right.$$

- **associative** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned} \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \end{aligned}$$

- **commutative** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= \vec{y} + \vec{x} \end{aligned}$$

- **élément neutre** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
Montrons que $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ est l'élément neutre

On a :

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{0} &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \vec{x}\end{aligned}$$

- **symétrique** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
Montrons que $-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ est l'opposé de \vec{x} .
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x} + (-\vec{x}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif.

Définition : Loi de composition externe : $\lambda. \vec{x}$

Soit \mathbb{K} et A deux ensembles. Une **loi de composition externe**, $.$, est une application qui, à un élément de \mathbb{K} et un élément de A , associe un élément de A :

$$\begin{array}{l} \mathbb{K} \times A \longrightarrow A \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda.x \end{array}$$

Exemple : $(\mathbb{R}^n, .)$

La loi de multiplication sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)) \longmapsto \lambda. \vec{x} = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \dots, \lambda.x_n) \end{array}$$

Par exemple sur \mathbb{R}^2 , $2.(1, -2) = (2, -4)$.

Définition : Corps \mathbb{K} : \mathbb{R} ou \mathbb{C}

Dans ce cours, un corps \mathbb{K} désigne soit l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ou soit l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

Définition : Espace vectoriel : $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$

Soit \mathbb{K} un corps.

Un **\mathbb{K} -espace vectoriel** est un triplet $(E, +, .)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et $.$ est une loi de composition externe sur E , vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi $.$ est compatible avec la structure de groupe $(E, +)$, i.e.
 - (a) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{x} \in E, (\lambda + \mu). \vec{x} = (\lambda. \vec{x}) + (\mu. \vec{x})$;
 - (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \lambda.(\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda. \vec{x}) + (\lambda. \vec{y})$;
 - (c) $\forall \vec{x} \in E, 1_{\mathbb{K}}. \vec{x} = \vec{x}$;
 - (d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{x} \in E, \lambda.(\mu. \vec{x}) = (\lambda\mu). \vec{x}$.

Un élément d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est appelé un vecteur et est noté dans ce cours avec une flèche \vec{x} . Un élément du corps \mathbb{K} est un scalaire et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ .

Exemple

- les n -uplets \mathbb{K}^n muni des lois usuelles,
- les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,
- si X est un ensemble et E un \mathbb{K} -espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X, E)$ muni des lois usuelles.

II Construire des espaces vectoriels

A Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ et F e.v.

Définition

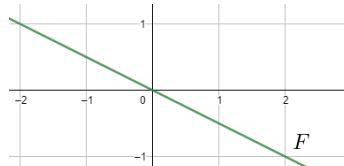
Définition-Proposition : Sous espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si

- F est non vide,
- F est stable par $+$, i.e. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \vec{y} \in F$,
- F est stable par \cdot , i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in F, \lambda \cdot \vec{x} \in F$.

Muni des lois induites, F est alors un espace vectoriel.

Exemple



$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 car :

- *non vide* :
 $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ car $0 + 2 \cdot 0 = 0$.
- *stable par $+$* :
 Soit $\vec{x}_1 = (x_1, y_1), \vec{x}_2 = (x_2, y_2) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
 Montrons que $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$.
 i.e. montrons que $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$.
 On a :

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0 + 0 = 0.$$
- *stable par \cdot* :
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x, y) \in F$ d'où $x + 2y = 0$.
 Montrons que $\lambda \vec{x} = (\lambda x, \lambda y) \in F$.
 i.e. montrons que $(\lambda x) + 2(\lambda y) = 0$.
 On a

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Proposition : Critère d'un sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

- $\vec{0}_E \in F$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

Engendré par une famille finie : $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \{\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{x}_p\}$

Définition : Famille finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Une **famille finie** de vecteurs de E est un p -uplet $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ formée de vecteurs de E , où $p \in \mathbb{N}$.

Définition : Combinaison linéaire

Avec les mêmes notations, une **combinaison linéaire** de la famille \mathcal{F} est un vecteur $\vec{x} \in E$ de la forme $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

On note **Vect**(\mathcal{F}) l'ensemble des combinaison linéaires de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$.

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

Par convention, $\text{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

Définition-Proposition : Espace engendré

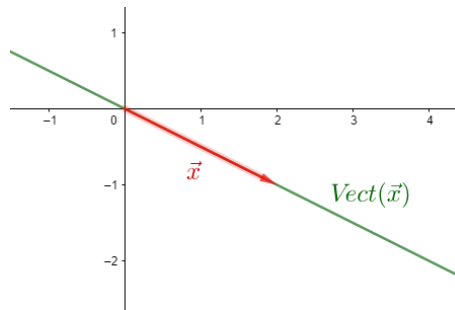
Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E .

L'ensemble $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est un sous espace vectoriel de E , appelé **espace engendré** par la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$.

Exemple : Droite vectoriel

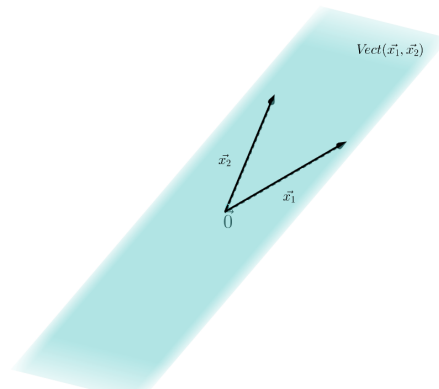
Lorsque que $p = 1$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\text{Vect}(\vec{x}) = \{\lambda \vec{x} : \forall \lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par \vec{x} . On la note $\mathbb{R} \vec{x}$.

Une droite vectorielle dans \mathbb{R}^2 est

**Exemple : Plan vectoriel**

Lorsque que $p = 2$ avec \vec{x}_1 non colinéaire à \vec{x}_2 , $\text{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \{\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2 : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectorielle** engendrée par (\vec{x}_1, \vec{x}_2) . On le note $\mathbb{R} \vec{x}_1 + \mathbb{R} \vec{x}_2$.

Un plan vectorielle dans \mathbb{R}^3 est



Intersection $F_1 \cap F_2$

Proposition

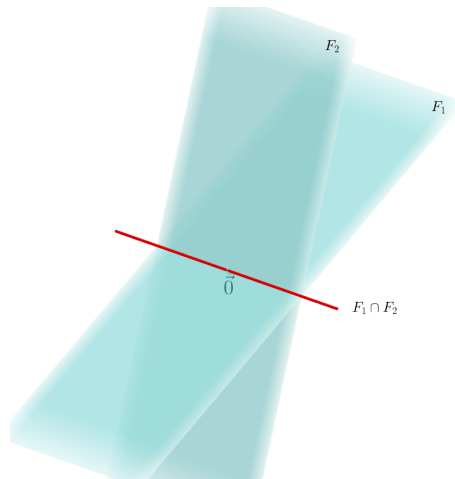
Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_p des sous espaces vectoriels de E .
Alors l'intersection $\cap_{i=1}^p F_i$ est également un sous espace vectoriel.

Démonstration

- *non vide* :
 $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \vec{0} \in F_i$ donc $\vec{0} \in \cap_{i=1}^p F_i$
- *stable par +* :
Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^p F_i$ d'où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F_i$.
Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F_i$ donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^p F_i$.
- *stable par .* :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\vec{x} \in \cap_{i=1}^p F_i$ d'où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \vec{x} \in F_i$.
Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \lambda \vec{x} \in F_i$ donc $\lambda \vec{x} \in \cap_{i=1}^p F_i$.

Exemple

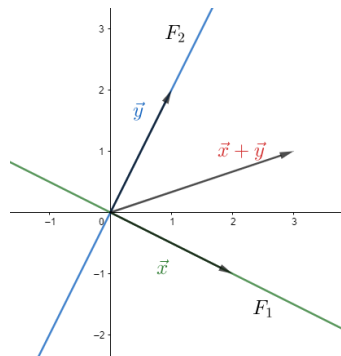
$F = \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}}^{=F_1} \cap \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}}^{=F_2}$ l'intersection de deux plans vectoriels, F_1 et F_2 dans \mathbb{R}^3



Somme de sous-espaces vectoriels : $F_1 + F_2 = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}$

Remarque

L'union $\cup_{i=1}^p F_i$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



Sur cette figure, les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in F_1 \cup F_2$ et on a $\vec{x} + \vec{y} \notin F_1 \cup F_2$. La somme permet de construire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2 .

Définition-Proposition : Somme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

On appelle **somme** de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de la forme $\vec{x} + \vec{y}$ où $\vec{x} \in F_1$ et $\vec{y} \in F_2$; autrement dit,

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}.$$

$F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E .

Plus précisément $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2 .

Démonstration

— *non vide* :

$$\vec{0} \in F_1, F_2 \text{ d'où } \vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{0}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2.$$

— *stable par +* :

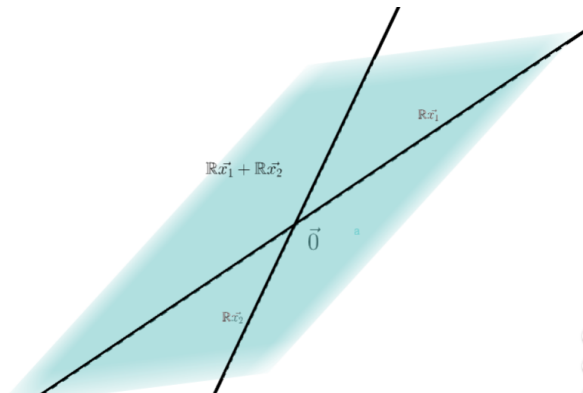
$$\begin{aligned} \text{Soit } \vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2 \in F_1 + F_2. \\ \vec{x}_1 + \vec{y}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_2 = \underbrace{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}_{\in F_2} \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

— *stable par .* :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{x} + \vec{y} \in F_1 + F_2. \\ \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \underbrace{\lambda\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda\vec{y}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\mathbb{R}\vec{x}_1$ et $\mathbb{R}\vec{x}_2$ deux droite vectorielles distinctes. La somme de ces deux espace vectoriels forme le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{x}_1 + \mathbb{R}\vec{x}_2$.



Définition : Somme directe

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose de **façon unique** sous la forme $\vec{x} + \vec{y}$ où $\vec{x} \in F_1$ et $\vec{y} \in F_2$. On note alors la somme $F_1 \oplus F_2$.

Proposition : Critère 1

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in F_1, \forall \vec{y} \in F_2 : \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}_E \Rightarrow \vec{x} = \vec{y} = \vec{0}_E.$$

Démonstration

- (\implies) :
Soit $\vec{x} \in F_1$ et $\vec{y} \in F_2$ tel que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. On a aussi $\underbrace{\vec{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{0}}_{\in F_2} = \vec{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\vec{x} = \vec{0}$ et $\vec{y} = \vec{0}$.
- (\impliedby) :
Supposons qu'un $\vec{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons : $\vec{z} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y}}_{\in F_2}$ et $\vec{z} = \underbrace{\vec{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y'}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :

$$\vec{0} = \underbrace{\vec{x} - \vec{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y} - \vec{y'}}_{\in F_2}.$$
D'après l'hypothèse, on a $\vec{x} - \vec{x'} = \vec{0}$ et $\vec{y} - \vec{y'} = \vec{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\vec{x} = \vec{x'}$ et $\vec{y} = \vec{y'}$.

Proposition : Critère 2

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$.

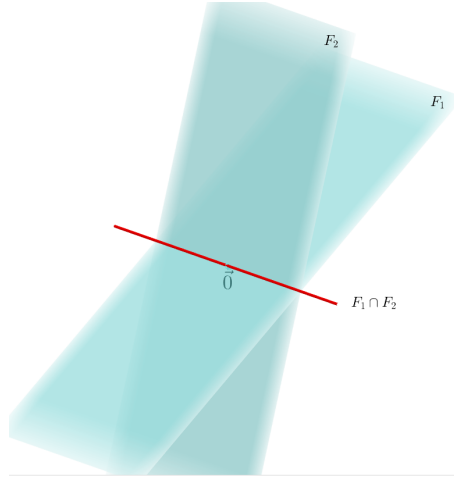
Démonstration

- (\implies) :
 - * $\{\vec{0}_E\} \subset F_1 \cap F_2$: $\vec{0}_E \in F_1, F_2$ donc $\vec{0}_E \in F_1 \cap F_2$.
 - * $F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0}_E\}$: Soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$. On a $\vec{0} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{-\vec{x}}_{\in F_2} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{0}}_{\in F_2}$. Par unicité de la décomposition, on identifie $\vec{x} = \vec{0}$.
Du fait de la double inclusion, on a $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$.
- (\impliedby) :
Supposons qu'un $\vec{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons : $\vec{z} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y}}_{\in F_2}$ et $\vec{z} = \underbrace{\vec{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y'}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :

$$\underbrace{\vec{x} - \vec{x'}}_{\in F_1} = \underbrace{\vec{y} - \vec{y'}}_{\in F_2}.$$
Comme $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$, on a $\vec{x} - \vec{x'} = \vec{0}$ et $\vec{y} - \vec{y'} = \vec{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\vec{x} = \vec{x'}$ et $\vec{y} = \vec{y'}$.

Exemple

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F_1 et F_2 , est une droite vectoriel, $F_1 \cap F_2$, donc la somme n'est pas directe.



Si $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{x} = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow z = \lambda, x = -\lambda, y = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(-1, 0, 1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}(-1, 0, 1)
 \end{aligned}$$

Finalement $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$.

Définition : Supplémentaires

Avec les mêmes notations, si la somme $F_1 + F_2$ est directe et égale à E , on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**, et on note

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Exemple

Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \text{Vect}(X^n)$.

— $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] + \text{Vect}(X^n)$:

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$P = \overbrace{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}}^{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \overbrace{a_nX^n}^{\in \text{Vect}(X^n)}.$$

— $\mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \text{Vect}(X^n) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\}$:

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \text{Vect}(X^n)$.

Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\deg(P) < n$. Comme $P \in \text{Vect}(X^n)$, on a $P = \lambda X^n$. Si $\lambda \neq 0$, on a $\deg(P = \lambda X^n) = n$, d'où une contradiction. Donc $P = 0$.

Définition-Proposition : Somme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E .

On appelle **somme** de F_1, \dots, F_p l'ensemble $\sum_{k=1}^p F_k$ des vecteurs de la forme $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_p$ où $\vec{x}_1 \in F_1$,

$\vec{x}_2 \in F_2, \dots, \vec{x}_p \in F_p$; autrement dit,

$$\sum_{k=1}^p F_k = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_p : \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2, \dots, \vec{x}_p \in F_p\}.$$

Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E ; plus précisément S est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1, \dots, F_p .

Définition : Somme directe

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_p$ où $\vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2, \dots, \vec{x}_p \in F_p$. On note alors la somme $\oplus_{k=1}^p F_k$.

Proposition : Critère 1

Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si

$$\vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2, \dots, \vec{x}_p \in F_p, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_p = \vec{0}_E \implies \vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_p = \vec{0}_E.$$

Remarque

Le critère 2 ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.

$E = \mathbb{R}^2$, $\vec{x}_1 = (1, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1)$ et $\vec{x}_3 = (1, 1)$. On a $\mathbb{R}\vec{x}_1 \cap \mathbb{R}\vec{x}_2 = \mathbb{R}\vec{x}_1 \cap \mathbb{R}\vec{x}_3 = \mathbb{R}\vec{x}_2 \cap \mathbb{R}\vec{x}_3 = \{(0, 0)\}$. Cependant la somme $\mathbb{R}\vec{x}_1 + \mathbb{R}\vec{x}_2 + \mathbb{R}\vec{x}_3$ n'est pas directe car $(1, 1) = 1(1, 1)$ et $(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$.

B Espace vectoriel produit : $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$

Définition : Produit cartésien

Soit $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On pose

$$E = E_1 \times E_2 = \{(\vec{x}_1, \vec{x}_2) : \vec{x}_1 \in E_1, \vec{x}_2 \in E_2\}.$$

E est le **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2 .

On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :

$$\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E, (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in E, (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 +_1 \vec{y}_1, \vec{x}_2 +_2 \vec{y}_2).$$

De même, on définit la loi de composition externe \cdot sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E, \lambda \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda \cdot_1 \vec{x}_1, \lambda \cdot_2 \vec{x}_2).$$

Exemple

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un \mathbb{K} -espace vectoriel, on définit E^p par

$$E^p = \prod_{k=1}^p E.$$

Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

Proposition

E ainsi défini est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition

On définit de manière analogue le \mathbb{K} -espace vectoriel E , produit cartésien des ensembles E_1, \dots, E_n . $(E_1, +_1, \cdot_1), (E_2, +_2, \cdot_2), \dots, (E_p, +_p, \cdot_p)$ de \mathbb{K} -espaces vectoriels $E = \prod_{k=1}^p E_k = \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) : \vec{x}_1 \in E_1, \dots, \vec{x}_p \in E_p\}$.

III Base : $\forall \vec{x} \in E, \exists !(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p$

A Définition

Famille génératrice : existence

Définition : Famille génératrice

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de \mathcal{F} , c'est à dire si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p.$$

Exemple

La famille $\{(1, 1), (0, 1), (1, -1)\}$ est génératrice de \mathbb{R}^2 . En effet, soit $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1).$$

En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car $(x, y) = x(1, 1) + (y-1)(0, 1)$.

Famille libre : unicité

Définition : Famille libre

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est **libre** si tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel engendré par la famille s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in \text{Vect}((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p), \exists ! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p.$$

Autrement dit aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition : Critère

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de \mathcal{F} nulle est triviale, c'est à dire

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration

La démonstration est similaire au critère 2 de la somme directe (voir démonstration A).

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a démontré qu'un vecteur pouvait s'exprimer à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes. Avec ce dernier critère, la démonstration serait :

Soit $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(1, 1) + \beta(0, 1) + \alpha(1, -1) = (0, 0).$$

On a :

$$\begin{cases} \lambda + \alpha &= 0 \\ \lambda + \beta - \alpha &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda &= 1 \\ \alpha &= -1 \\ \beta &= -2 \end{cases}.$$

On vérifie que $(1, 1) - 2(0, 1) - (1, -1) = (0, 0)$.

Base : existence et unicité

Définition

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.
De façon équivalente, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une base de E si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p.$$

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n , $\mathbb{K}_n[X]$, admet une base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, appelée base canonique.

Exemple

L'espace vectoriel des matrices carrés de taille 2, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet une base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, appelée base canonique.

Remarque

On n'a pas unicité de la base. Par exemple pour $\mathbb{K}_n[X]$, avec les x_i $n+1$ scalaires distincts, les polynômes de Lagrange

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(X) = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

B Existence d'une base

Définition : Dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E , et **de dimension infinie** sinon.

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.
En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{L} une famille libre de E .
Alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration

La démonstration repose sur l'algorithme suivant :

Soit la partie libre initiale \mathcal{L} .

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille finie, \mathcal{G} , génératrice de E .

Tant que \mathcal{L} n'est pas génératrice de E :

1. Puisque \mathcal{G} engendre E et que \mathcal{L} n'est pas génératrice de E , il existe un vecteur \vec{g} de \mathcal{G} qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{L} .
2. On remplace \mathcal{L} par $\mathcal{L} \cup \{\vec{g}\}$, qui est encore libre car le nouveau vecteur n'est pas une combinaison linéaire des précédents.

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de \mathcal{G} différent des précédents et que \mathcal{G} est fini. \mathcal{L} est alors une partie génératrice, donc une base de E .

Théorème : Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{G} une famille génératrice de E .
Alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration

La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$.

C Unicité du cardinal de la base**Proposition**

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Démonstration

Démontrons cette proposition par récurrence.

— *Initialisation* :

Soit (\vec{g}_1) une famille génératrice de E .

Soit (\vec{v}_1, \vec{v}_2) une famille de E . Il existe λ_1 et λ_2 dans \mathbb{R} tel que $\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{g}_1$ et $\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{g}_1$.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors la famille $(\vec{v}_1 = \vec{0}, \vec{v}_2 = \vec{0})$ est liée.

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\vec{v}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2$. Les vecteurs sont colinéaires donc liées.

Idem si $\lambda_2 \neq 0$.

— *Hérédité* :

Soit $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n)$ une famille génératrice de E .

Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n+1})$ une famille de $n + 1$ vecteurs de E .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, il existe $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\vec{v}_i = \lambda_{i,1} \vec{g}_1 + \lambda_{i,2} \vec{g}_2 + \dots + \lambda_{i,n} \vec{g}_n$$

Quitte à réorganiser les deux familles, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\vec{v}_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1} \in \text{Vect}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n-1}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel générée par la famille $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n-1})$. Donc

la famille $\left(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}, \dots, \vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}\right)$ est liée. Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\beta_1 \left(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}\right) + \dots + \beta_n \left(\vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}\right) = \vec{0}.$$

d'où

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n - \left(\beta_1 \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} + \dots + \beta_n \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\right) \vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

La famille est donc liée.

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.

Démonstration

Si la famille a strictement plus de n vecteurs, on peut en enlever pour constituer une famille de $n+1$ vecteurs qui est donc liée d'après la proposition précédente. A fortiori, la famille initiale est liée.

Proposition : Unicité du cardinal d'une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ deux bases de E . Alors $p = q$.

Démonstration

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une famille génératrice de E . Comme $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ est libre d'après la proposition précédente, $q \leq p$. Par symétrie, on a aussi $p \leq q$. Finalement $p = q$.

Cette proposition nous permet cette définition.

Définition-Proposition : Dimension

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est égale au cardinal d'une base quelconque de E .

Proposition : Critère

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre, alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E .

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice, alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E .

Exemple

Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$, la combinaison linéaire des polynômes de Lagrange $\sum_{j=0}^n P(x_j) l_j(X)$ avec x_0, \dots, x_n $n+1$ scalaires distincts est égale au polynôme P aux points x_0, \dots, x_n , donc égal à P . Les polynômes de Lagrange forment une famille génératrice de $n+1$ vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E .

Alors F est également de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

D Base adaptée

Définition : Base adaptée

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E .

La base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est dite **adaptée** à F si et seulement s'il existe $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ soit une base de F .

Exemple

La base $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ est adaptée à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 car $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ est une base de F .

Proposition : Existence d'une base adaptée

La base ainsi définie existe.

Démonstration

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de F . Cette famille est libre dans E . On la complète en une base de E d'après le théorème de la base incomplète.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et \mathcal{B} une base de E .

La base \mathcal{B} est dite **adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ si et seulement si \mathcal{B} peut s'écrire comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ où \mathcal{B}_k est une base de F_k pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Proposition

La base ainsi définie existe.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} une base de E .

On suppose que \mathcal{B} s'écrit comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$.

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons F_k le sous espace vectoriel engendré par \mathcal{B}_k .

Alors les sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_p sont supplémentaires.

IV Théorèmes en dimension finie**Proposition : Existence d'un supplémentaire**

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous espace vectoriel admet un supplémentaire.

Autrement dit, soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E .

Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration

Soit \mathcal{B}_1 une base de F que l'on complète avec \mathcal{B}_2 pour former une base de E .

D'après la proposition D, si on pose G l'espace vectoriel engendré par \mathcal{B}_2 , alors $E = F \oplus G$.

Proposition

Soit E_1, \dots, E_p des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^p E_k$ est de dimension finie si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, E_k est de dimension finie.

De plus, dans ce cas,

$$\dim\left(\prod_{k=1}^p E_k\right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k).$$

Démonstration

On suppose $p = 2$.

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E_1 et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ une base de E_2 .

Alors $((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_n, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f}_q))$ est une base de $E_1 \times E_2$.

— *Génératrice* :

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E_1 \times E_2$.

Comme $\vec{x} \in E_1$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E_1 , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$.

Comme $\vec{y} \in E_2$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ est une famille génératrice de E_2 , il existe $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_q \vec{f}_q$.

D'où $(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1(\vec{e}_1, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\vec{e}_n, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \vec{f}_1) + \dots + \beta_q(\vec{0}_E, \vec{f}_q)$.

— *Libre* :

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que

$$\lambda_1(\vec{e}_1, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\vec{e}_n, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \vec{f}_1) + \dots + \beta_q(\vec{0}_E, \vec{f}_q) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

D'où :

$$(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n, \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_q \vec{f}_q) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

Par identification, on obtient $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}_E$ et $\beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_q \vec{f}_q = \vec{0}_F$. Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ sont des familles libres de E_1 et de E_2 respectivement, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$.

Corollaire

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

L'espace vectoriel E^p est de dimension finie si et seulement si E l'est ; dans ce cas, on a $\dim(E^p) = p \cdot \dim(E)$.

Proposition : Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel dimension finie et F_1, F_2 deux sous espace vectoriel de E . On a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Démonstration

Une idée est de remarquer l'analogie avec la formule ensembliste :

$$\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B).$$

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de $F_1 \cap F_2$. On la complète en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_{p+1}, \dots, \vec{f}_{p+k})$ de F_1 et en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{g}_{p+1}, \dots, \vec{g}_{p+m})$ de F_2 . $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_{p+1}, \dots, \vec{f}_{p+k}, \vec{g}_{p+1}, \dots, \vec{g}_{p+m})$ est une base $F_1 + F_2$.

Comme le cardinal d'une base est égale à la dimension de l'espace vectoriel, on obtient bien l'égalité souhaitée.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors la somme $\sum_{k=1}^p F_k$ est également de dimension finie, et

$$\dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{k=1}^p F_k$ est directe.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriels de dimensions finies et F_1, \dots, F_p des sous espaces vectoriels de E . On suppose que

$$\sum_{k=1}^p \dim F_k = \dim E.$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. les sous espaces vectoriels F_1, \dots, F_p sont supplémentaires,
2. les sous espaces vectoriels F_1, \dots, F_p sont en somme directe,
3. $\sum_{k=1}^p F_k = E$.

V Retour aux matrices

Proposition : Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration

Tous les axiomes se vérifient aisément.

Définition-Proposition : Base canonique

La **base canonique** est $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ où la matrice $E_{i,j}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) , qui vaut 1.

Les coordonnées dans la base canonique d'une matrice A sont ses coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1p} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{np} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{ij}.$$

On a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Démonstration

Du fait de l'égalité, $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$, $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $(\lambda_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de scalaires tel que

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{ij} E_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}.$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, $\lambda_{ij} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc la famille est libre.

La famille est donc une base. Comme la cardinal de la base $\text{card}((E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p})$ est np , on a bien

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np.$$

Example

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$