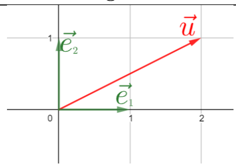
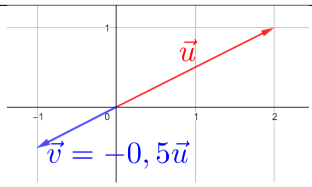
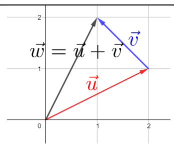
Chapitre 1

Espace vectoriel E

Exemple 1 ($\vec{x} \in \mathbb{R}^2$)

Tout d'abord, commençons par les vecteurs du plan :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$
Multiplication par un scalaire		$\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = -0.5.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = -0.5.\vec{u}$
Addition		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Du fait de l'équivalence entre ces trois représentations, géométrique, numérique et algébrique, tout ce qui est vrai ou faux pour l'un l'est aussi pour l'autre . Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel pour bien comprendre l'algèbre linéaire.

Exemple 2 (*Exemples d'ensembles de vecteurs : $E = \{\vec{x}\}$*)

Il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer une addition et une homothétie soit une combinaison linéaire, par exemples :

— l'ensemble des n-uplets réels : $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $E = \mathbb{R}^n$ et , où chaque x_i est un réel,

— l'ensemble des matrices carrés réels : $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque $a_{i,j}$ est un un réel,

— l'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaire d'ordre 1 homogène : $\vec{x} = f$ une fonction $\mathcal{C}^1$ tel que $f' + a_0 f = 0$ et $E = \{f \in C_1 : f' + a_0 f = 0\}$,

— l'ensemble des polynômes réels : $\vec{x} = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ et $E = \mathbb{R}[X]$,
— l'ensemble des suites réels : $\vec{x} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
— etc.

Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique abstraite constituée de propriétés partagés par tous les ensembles : cette structure s'appelle **l'espace vectoriel** et permet d'effectuer des combinaisons linéaires,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers.

1.1 Structure algébrique

Définition 1 (***Loi de composition interne :*** $\vec{x} \triangle \vec{y}$)

Soit A un ensemble. Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{rcl} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array} \right. .$$

Définition 2 (***Propriétés***)

On dit que $\triangle$

1. est **associative** : si $\in (x, y, z) \in A^3$, $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$. On ne considèrera que des loi associatives.
2. est **commutative** : si $\forall (x, y) \in A^2$, $x \triangle y = y \triangle x$;
3. admet **un élément neutre** si $\exists e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$. Il existe au plus un élément e vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le neutre** de la loi $\triangle$.
4. est **symétrique** (ou **inverse** si loi est $\times$, ou **opposé** si la loi est $+$) Si $\triangle$ est une loi associative qui admet un neutre e, et si $x \in A$, on appelle de x pour la loi $\triangle$ tout élément $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Si $\triangle$ est également associative, il existe au plus un élément x' vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le** symétrique de x pour la loi $\triangle$.

Définition 3 (***Groupe***)

Un **groupe** est un couple $(G, \triangle)$ où G est un ensemble et $\triangle$ une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\triangle$. Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi $\triangle$ est de plus commutative.

Exemple 3 (***Le Groupe*** $(\mathbb{R}^n, +)$)

La loi d'addition sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$+ \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto & \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{array} \right. .$$

— **associative** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+((y_1,y_2,\ldots,y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n))\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\ldots,x_n+y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n)\\ &= ((x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n))+(z_1,z_2,\ldots,z_n)\\ &= (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}\end{aligned}$$

— **commutative** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y} &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,\ldots,y_n+x_n)\\ &= \vec{y}+\vec{x}\end{aligned}$$

— **élément neutre** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$ est l'élément neutre
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{0} &= (x_1+0,x_2+0,\ldots,x_n+0)\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ &= \vec{x}\end{aligned}$$

— **symétrique** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ est l'opposé de $\vec{x}$.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+(-\vec{x}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\\ &= (x_1-x_1,x_2-x_2,\ldots,x_n-x_n)\\ &= (0,0,\ldots,0)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{R}^n,+)$ est un groupe commutatif.

Définition 4 (*Loi de composition externe :* $\boldsymbol{\lambda.\vec{x}}$)

Soit $\mathbb{K}$ et A deux ensembles. Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de $\mathbb{K}$ et un élément de A, associe un élément de A :

$$.\left|\begin{array}{rcl}A\times A & \longrightarrow & A\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}\right.$$

Exemple 4 ($(\mathbb{R}^n,.)$)

La loi de multiplication sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$.\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ (\lambda,\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)) & \longmapsto & \lambda.\vec{x}=(\lambda.x_1,\lambda.x_2,\ldots,\lambda.x_n)\end{array}\right..$$

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $2.(1,-2)=(2,-4)$.

Définition 5 (*Corps* $\mathbb{K}$ *:* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$)

Dans ce cours , un corps $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 6 (*Espace vectoriel :* $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$)

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E,+,.)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une loi de composition externe sur E, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi . est compatible avec la structure de groupe $(E,+)$, i.e.
   (a) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x}\in E$, $(\lambda+\mu).\vec{x}=(\lambda.\vec{x})+(\mu.\vec{x})$;
   (b) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, $\lambda.(\vec{x}+\vec{y})=(\lambda.\vec{x})+(\lambda.\vec{y})$;
   (c) $\forall\vec{x}\in E$, $1_{\mathbb{K}}.\vec{x}=\vec{x}$;
   (d) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x}\in E$, $\lambda.(\mu.\vec{x})=(\lambda\mu).\vec{x}$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un vecteur et est noté dans ce cours avec une flèche $\vec{x}$. Un élément du corps $\mathbb{K}$ est un scalaire et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ.

Exemple 5

— les n-uplets $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles,
— les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,
— si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X,E)$ muni des lois usuelles.

1.2 Construire des espaces vectoriels

1.2.1 Sous-espace vectoriel : $F\subset E$ et F e.v.

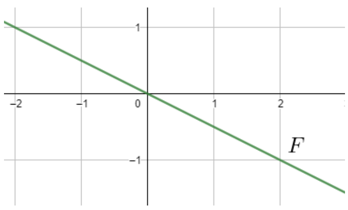
Définition

Définition 7

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E £ssi.

1. F est non vide ;
2. F est stable par $+$, i.e. $\forall\vec{x},\vec{y}\in F$, $\vec{x}+\vec{y}\in F$;
3. F est stable par . , i.e. $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in F$, $\lambda.\vec{x}\in F$.

Exemple 6

$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+2y=0\}$ 

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

1. <u>non vide :</u>
   $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ car $0+2.0=0$.
2. <u>stable par + :</u>

Soit $\vec{x}_1 = (x_1, y_1), \vec{x}_2 = (x_2, y_2) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$.
i.e. montrons que $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$.
On a

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0 + 0 = 0.$$

3. F est stable par . :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x, y) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\lambda\vec{x} = (\lambda x, \lambda y) \in F$.
i.e. montrons que $(\lambda x) + 2(\lambda y) = 0$.
On a

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda 0 = 0.$$

Proposition 1.2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

1. $\vec{0}_E \in F$;
2. $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda.\vec{x} + \vec{y} \in F$.

Engendré par une famille finie : $Vect(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \{\lambda_1.\vec{x}_1 + \dots + \lambda_p.\vec{x}_p\}$

Définition 8 (*famille finie*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une **famille finie** de vecteurs de E est un p-uplet $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ formée de vecteurs de E, où $p \in \mathbb{N}$.

Définition 9 (*combinaison linéaire*)

Avec les mêmes notations, une **combinaison linéaire** de la famille $\mathcal{F}$ est un vecteur $\vec{x} \in E$ de la forme $\vec{x} = \lambda_1.\vec{x}_1 + \dots + \lambda_p.\vec{x}_p$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.
Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire. On note $Vect(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaison linéaires de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$.

$$Vect(\mathcal{F}) = \{\lambda_1.\vec{x}_1 + \dots + \lambda_p.\vec{x}_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

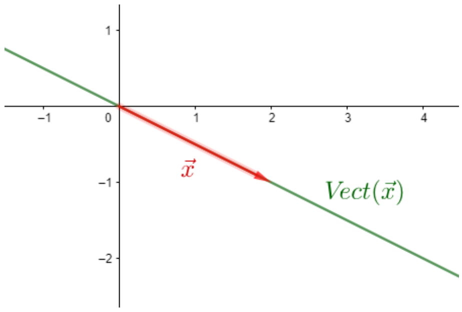
Par convention, $Vect(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

Définition-Proposition 1 (*espace engendré*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble $Vect(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **espace engendré** par la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$.

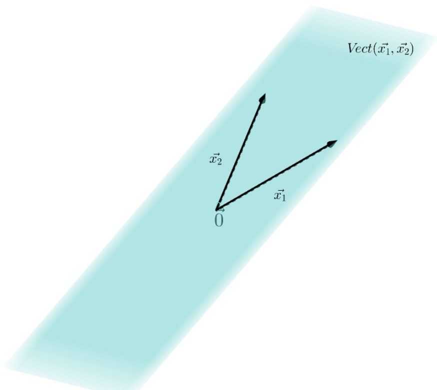
Exemple 7 (*Droite vectoriel*)

Lorsque que $p = 1$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, $Vect\vec{x} = \{\lambda.\vec{x} : \forall\lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\vec{x}$. On la note $\mathbb{R}\vec{x}$.
Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est



Exemple 8 (*Plan vectoriel*)

Lorsque que $p = 2$ avec $\vec{x_1}$ non colinéaire à $\vec{x_2}$, $\overrightarrow{(}\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \{\lambda.\vec{x_1} + \mu.\vec{x_2} : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectorielle** engendrée par $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$. On le note $\mathbb{R}\vec{x_1} + \mathbb{R}\vec{x_2}$.
Un plan vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est



Intersection $F_1 \cap F_2$

Proposition 1.2.2

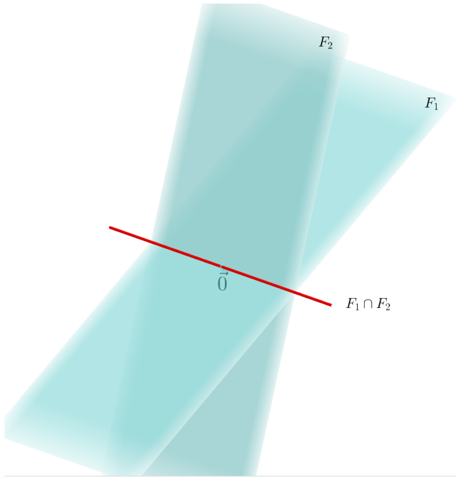
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
Alors l'intersection $\cap_{i=1}^p F_i$ est également un sous espace vectoriel.

Démonstration : Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
Montrons que $\cap_{i=1}^p F_i$ est également un sous espace vectoriel.

1. non vide :
   $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{0} \in F_i$ donc $\vec{0} \in \cap_{i=1}^p F_i$
2. stable par $+$:
   Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^p F_i$ d'où $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F_i$.
   $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F_i$ donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^p F_i$.
3. F est stable par .
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\vec{x} \in \cap_{i=1}^p F_i$ d'où $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{x} \in F_i$.
   $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \lambda\vec{x} \in F_i$ donc $\lambda\vec{x} \in \cap_{i=1}^p F_i$. ∎

Exemple 9

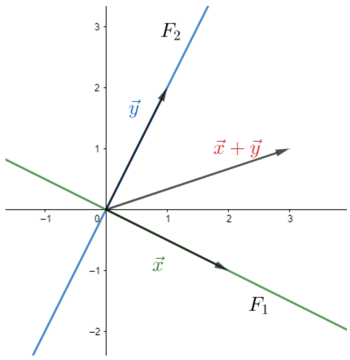
$F = \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}}^{=F_1} \cap \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}}^{=F_2}$ l'intersection de deux plans vectoriels, F_1 et F_2 dans $\mathbb{R}^3$



Somme de sous-espaces vectoriels : $F_1 + F2 = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} : \vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2\}$

Remarque 1

L'union $\cup_{i=1}^{p} F_i$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



Sur cette figure, les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in F_1 \cup F_2$ et on a $\vec{x} + \vec{y} \notin F_1 \cup F_2$. La somme permet de construire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Définition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2}$ où $\vec{x_1} \in F_1$ et $\vec{x_2} \in F_2$; autrement dit,

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} : \vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2\}.$$

Proposition 1.2.3

$F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
Plus précisément $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Démonstration : Soit F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E.
Montrons que $F_1 + F_2$ est également un sous espace vectoriel.

1. non vide :

$\vec{0} \in F_1, F_2$ d'où $\vec{0} = \overbrace{\vec{0}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{0}}^{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

2. <u>stable par + :</u>

   Soit $\vec{x} + \vec{y}, \vec{x'} + \vec{y'} \in F_1 + F_2$.

   $\vec{x} + \vec{y} + \vec{x'} + \vec{y'} = \overbrace{\vec{x} + \vec{x'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{y} + \vec{y'}}^{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

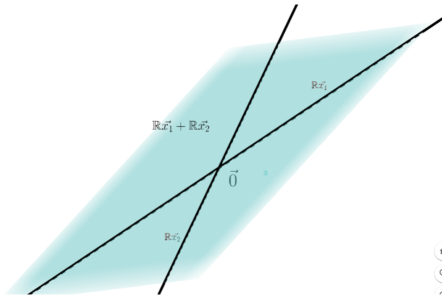
3. <u>F est stable par .</u>

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\vec{x} + \vec{y} \in F_1 + F_2$.

   $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \overbrace{\lambda\vec{x}}^{\in F_1} + \overbrace{\lambda\vec{y}}^{\in F_2} \in F_1 + F_2$. ■

Exemple 10

Soit $\mathbb{R}\vec{x_1}$ et $\mathbb{R}\vec{x_2}$ deux droite vectorielles distinctes. La somme de ces deux espace vectoriels forme le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{x_1} + \mathbb{R}\vec{x_2}$.



Définition 11

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2}$ où $\vec{x_1} \in F_1$ et $\vec{x_2} \in F_2$. On note alors la somme $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 1.2.4 (*Critère 1*)

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si

$$\forall \vec{x_1} \in F_1, \forall \vec{x_2} \in F_2, \vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0_E} \Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} = \vec{0_E}.$$

Démonstration :

($\Longrightarrow$) :

Supposons que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

Soit $\vec{x_1} \in F_1$ et $\vec{x_2} \in F_2$ tel que $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0}$. On a aussi $\overbrace{\vec{0}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{0}}^{\in F_2} = \vec{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\vec{x_1} = \vec{0}$ et $\vec{x_2} = \vec{0}$.

($\Longleftarrow$) :

Supposons que $\forall \vec{x_1} \in F_1, \forall \vec{x_2} \in F_2, \vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0_E} \Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} = \vec{0_E}$..

Soit $\vec{x} \in F_1 + F_2$ tel que $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in F_2}$ et $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2'}}^{\in F_2}$

Montrons que $\vec{x_1} = \vec{x_1'}$ et $\vec{x_2} = \vec{x_2'}$.

On a :

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} - (\vec{x_1'} + \vec{x_2'}) = \overbrace{\vec{x_1} - \vec{x_1'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2} - \vec{x_2'}}^{\in F_2}.$$

D'après l'hypothèse, on a $\vec{x_1} - \vec{x_1'} = \vec{0}$ et $\vec{x_2} - \vec{x_2'} = \vec{0}$, d'où $\vec{x_1} = \vec{x_1'}$ et $\vec{x_2} = \vec{x_2'}$. ■

Proposition 1.2.5 (*Critère 2*)

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$.

Démonstration :

($\Longrightarrow$) :

Supposons que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

$F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0_E}\}$:

Soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$. On $\vec{0} = \overbrace{\vec{x}}^{\in F_1} + \overbrace{-\vec{x}}^{\in F_2} = \overbrace{\vec{0}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{0}}^{\in F_2}$. Par unicité de décomposition, on identifie $\vec{x} = \vec{0}$.

$F_1 \cap F_2 \supset \{\vec{0_E}\}$:

$\vec{0_E} \in F_1, F_2$ donc $\vec{0_E} \in F_1 \cap F_2$.

Du fait de la double inclusion, on a $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$.

($\Longleftarrow$) :

Supposons que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$.

Soit $\vec{x} \in F_1 + F_2$ tel que $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in F_2}$ et $\vec{x} = \overbrace{\vec{x'_1}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x'_2}}^{\in F_2}$

Montrons que $\vec{x_1} = \vec{x'_1}$ et $\vec{x_2} = \vec{x'_2}$.

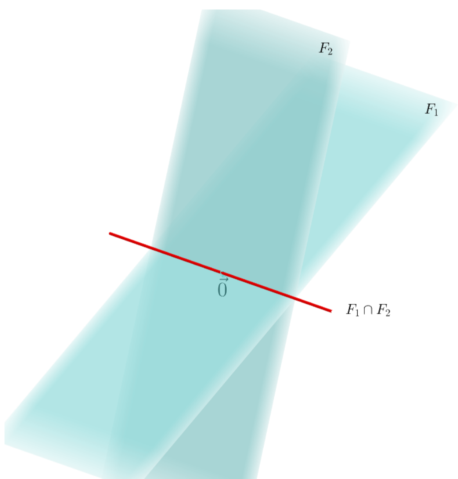
On a :

$$\overbrace{\vec{x_1} - \vec{x'_1}}^{\in F_1} = \overbrace{\vec{x'_2} - \vec{x_2}}^{\in F_2}.$$

Comme $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$, on a $\vec{x_1} - \vec{x'_1} = \vec{0}$ et $\vec{x'_2} - \vec{x_2} = \vec{0}$, d'où $\vec{x_1} = \vec{x'_1}$ et $\vec{x_2} = \vec{x'_2}$. ■

Exemple 11

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F_1 et F_2, est une droite vectoriel, $F_1 \cap F_2$, donc la somme n'est pas directe.



Si $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ et $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\vec{x} = (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z=\lambda, x=-\lambda, y=0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda(-1,0,1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in Vect(-1,0,1)
\end{aligned}$$

Finalement $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(-1,0,1)$.

Définition 12

Avec les mêmes notations, si la somme $F_1 + F_2$ est directe et égale à E, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**, et on note

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Exemple 12

Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus Vect(X^n)$.

$\underline{\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] + Vect(X^n)}$:

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a $P = \overbrace{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}}^{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \overbrace{a_nX^n}^{\in Vect(X^n)}$.

$\underline{\mathbb{R}_{n-1}[X] \cap Vect(X^n) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\}}$:

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap Vect(X^n)$. Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $deg(P) < n$. Comme $P \in Vect(X^n)$, on a $P = \lambda X^n$. Si $\lambda \neq 0$, on a $deg(P = \lambda X^n) = n$, d'où une contradiction. Donc $P = 0$.

Définition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$ l'ensemble $\sum_{k=1}^{p} F_k$ des vecteurs de la forme $\vec{x_1}+\vec{x_2}+\cdots+\vec{x_p}$ où $\vec{x_1} \in F_1$, $\vec{x_2} \in F_2$, ..., $\vec{x_p} \in F_p$; autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p} : \vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2, \ldots, \vec{x_p} \in F_p\}.$$

Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E ; plus précisément S est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$.

Définition 14

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p}$ où $\vec{x_1} \in F_1$, $\vec{x_2} \in F_2$, ..., $\vec{x_p} \in F_p$. On note alors la somme $\oplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition 1.2.6

Critère 1 Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si

$$\vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2, ..., \vec{x_p} \in F_p, \vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p} = \vec{0_E} \implies \vec{x_1} = \cdots = \vec{x_p} = \vec{0_E}.$$

Remarque 2

Le critère 2 ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.
$E = \mathbb{R}^2$, $\vec{x_1} = (1,0)$, $\vec{x_2} = (0,1)$ et $\vec{x_3} = (1,1)$. On a $\mathbb{R}\vec{x_1} \cap \mathbb{R}\vec{x_2} = \mathbb{R}\vec{x_1} \cap \mathbb{R}\vec{x_3} = \mathbb{R}\vec{x_2} \cap \mathbb{R}\vec{x_3} = \{(0,0)\}$. Cependant la somme $\mathbb{R}\vec{x_1} + \mathbb{R}\vec{x_2} + \mathbb{R}\vec{x_3}$ n'est pas directe car $(1,1) = 1(1,1)$ et $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.

1.2.2 Espace vectoriel produit : $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$

Définition 15

Soit $(E_1, +_1, ._1)$ et $(E_2, +_2, ._2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On pose
$$E = E_1 \times E_2 = \{(\vec{x_1}, \vec{x_2}) : \vec{x_1} \in E_1, \vec{x_2} \in E_2\}.$$
E est le produit cartésien des ensembles E_1, E_2.
On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :
$$\forall (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E, (\vec{y_1}, \vec{y_2}) \in E, \quad (\vec{x_1}, \vec{x_2}) + (\vec{y_1}, \vec{y_2}) = (\vec{x_1} +_1 \vec{y_1}, \vec{x_2} +_2 \vec{y_2}).$$
De même, on définit la loi de composition externe . sur E par :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E, \lambda.(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\lambda ._1 \vec{x_1}, \lambda ._2 \vec{x_2}).$$

Exemple 13

Pour $p \in \mathbb{N}*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit E^p par
$$E^p = \prod_{k=1}^{p} E.$$
Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

Proposition 1.2.7

E ainsi défini est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 16

On définit de manière analogue le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, produit cartésien des ensembles $E_1, \dots, E_n$. $(E_1, +_1, ._1)$, $(E_2, +_2, ._2)$, ..., $(E_p, +_p, ._p)$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E = \prod_{k=1}^{p} E_k = \{(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_p}) : \vec{x_1} \in E_1, \dots, \vec{x_p} \in E_p\}$.

1.3 Base : $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \dots \lambda_p), \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \cdots + \lambda_p \vec{e_p}$

1.3.1 Définition

Famille génératrice : existence

Définition 17 (*famille génératrice*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est génératrice de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, c'est à dire si $Vect(\mathcal{F}) = E$, c'est à dire si
$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \cdots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Exemple 14

La famille $\{(1,1),(0,1),(1,-1)\}$ est générateur de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\vec{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$(x,y)=\frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1).$$

En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car $(x,y)=x(1,1)+(y-1)(0,1)$.

Famille libre : unicité

Définition 18 (*famille libre*)

Une famille finie $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p})$ est **libre** si tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel engendré par la famille s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall\vec{x}\in Vect((\vec{e_1},\dots,\vec{e_p}),\exists!\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K},\quad \vec{x}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\cdots+\lambda_p\vec{e_p}.$$

Autrement dit aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition 1.3.1 (*Critère*)

Une famille finie $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p})$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ nulle est triviale, c'est à dire

$$\forall\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\quad \lambda_1\vec{e_1}+\cdots+\lambda_n\vec{e_n}=\vec{0_E}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration : La démonstration est similaire au critère 2 de la somme directe (voir démonstration 1.2.1). ■

Exemple 15

Dans l'exemple précédent, on a démontré qu'un vecteur pouvait s'exprimer à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes. Avec ce dernier critère, la démonstration serait :
Soit $\lambda,\beta,\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(1,1)+\beta(0,1)+\alpha(1,-1)=(0,0).$$

On a :

$$\begin{cases}\lambda+\alpha & =0\\ \lambda+\beta-\alpha & =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda & =1\\ \alpha & =-1\\ \beta & =-2\end{cases}.$$

On vérifie que $(1,1)-2(0,1)-(1,-1)=(0,0)$.

Base : existence et unicité

Définition 19

On dit que la famille $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p})$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.
De façon équivalente, la famille $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p})$ est une base de E si

$$\forall\vec{x}\in E,\exists!\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\quad \vec{x}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\cdots+\lambda_p\vec{e_p}.$$

Exemple 16

L'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{K}_n[X]$, admet une base $(1,X,X^2,\dots,X^n)$, appelée base canonique.

Exemple 17

L'espace vectoriel des matrices carrés de taille 2, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, admet une base $\left(\begin{pmatrix}1,0\\0,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0,1\\0,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0,0\\1,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix}\right)$, appelée base canonique.

Remarque 3

On n'a pas unicité de la base. Par exemple pour $\mathbb{K}_n[X]$, les polynômes de Lagrange

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(X) = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

pour $0 \leqslant i \leqslant n$ avec les x_i $n+1$ scalaires distincts forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3.2 Existence d'une base

Définition 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E, et **de dimension infinie** sinon.

Exemple 18

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.
En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple 19

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

Théorème 1.3.2 (*Théorème de la base incomplète*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration : La démonstration repose sur l'algorithme suivant :
Soit la partie libre initiale $\mathcal{L}$.
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille génératrice $\mathcal{G}$ de E. Tant que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E :

1. Il existe (puisque $\mathcal{G}$ engendre E) un vecteur $\vec{g}$ de $\mathcal{G}$ qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$. Nécessairement, $\vec{g}$ n'appartient pas à $\mathcal{L}$;
2. On remplace $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} \cup \{\vec{g}\}$, qui est encore libre (car le nouvel élément n'est pas une combinaison linéaire des précédents).

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes (puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de $\mathcal{G}$ différent des précédents et que $\mathcal{G}$ est fini). $\mathcal{L}$ est alors une partie génératrice, donc une base de E. ■

Théorème 1.3.3 (*Théorème de la base extraite*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration : La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$. ■

1.3.3 Unicité du cardinal de la base

Proposition 1.3.4

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. ■

Démonstration :