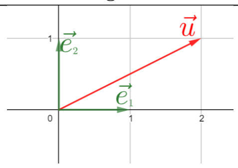
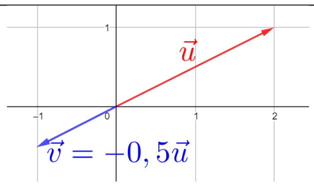
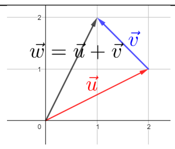
Chapitre 1

Espace vectoriel E

Exemple 1 ($\vec{x} \in \mathbb{R}^2$)

Tout d'abord, commençons par les vecteurs du plan :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$
Multiplication par un scalaire		$\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = -0.5. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = -0.5.\vec{u}$
Addition		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Du fait de l'équivalence entre ces trois représentations, géométrique, numérique et algébrique, tout ce qui est vrai ou faux pour l'un l'est aussi pour l'autre [1]. Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel pour bien comprendre l'algèbre linéaire.

1. Il y a des limites à cette équivalence. La représentation géométrique est uniquement pertinente dans le plan et l'espace. La représentation numérique est limitée aux espaces vectoriels de dimension finie.

Exemple 2 (*Exemples d'ensembles de vecteurs : $E = \{\vec{x}\}$*)

Il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer une addition et une homothétie soit une combinaison linéaire, par exemples :

- l'ensemble des n-uplets réels : $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $E = \mathbb{R}^n$ et , où chaque x_i est un réel,
- l'ensemble des matrices carrés réels : $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque $a_{i,j}$ est un un réel,
- l'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaire d'ordre 1 homogène : $\vec{x} = f$ une fonction $\mathcal{C}^1$ tel que $f' + a_0 f = 0$ et $E = \{f \in C_1 : f' + a_0 f = 0\}$,

— l'ensemble des polynômes réels : $\vec{x} = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ et $E = \mathbb{R}[X]$,
— l'ensemble des suites réels : $\vec{x} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
— etc.

Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique abstraite constituée de propriétés partagés par tous les ensembles : cette structure s'appelle **l'espace vectoriel** et permet d'effectuer des combinaisons linéaires,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers.

1.1 Structure algébrique

Définition 1 (*Loi de composition interne : $\vec{x} \triangle \vec{y}$*)

Soit A un ensemble. Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array} \right. .$$

Définition 2 (*Propriétés*)

On dit que $\triangle$

1. est **associative** : si $\in (x, y, z) \in A^3$, $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$. On ne considèrera que des loi associatives.
2. est **commutative** : si $\forall(x, y) \in A^2$, $x \triangle y = y \triangle x$;
3. admet **un élément neutre** si $\exists e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$. Il existe au plus un élément e vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le neutre** de la loi $\triangle$.
4. est **symétrique** (ou **inverse** si loi est $\times$, ou **opposé** si la loi est $+$) Si $\triangle$ est une loi associative qui admet un neutre e, et si $x \in A$, on appelle de x pour la loi $\triangle$ tout élément $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Si $\triangle$ est également associative, il existe au plus un élément x' vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le** symétrique de x pour la loi $\triangle$.

Définition 3 (*Groupe*)

Un **groupe** est un couple $(G, \triangle)$ où G est un ensemble et $\triangle$ une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\triangle$. Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi $\triangle$ est de plus commutative.

Exemple 3 (*Le Groupe* $(\mathbb{R}^n, +)$)

La loi d'addition sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto & \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{array} \right. .$$

— **associative** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+((y_1,y_2,\ldots,y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n))\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\ldots,x_n+y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n)\\ &= ((x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n))+(z_1,z_2,\ldots,z_n)\\ &= (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}\end{aligned}$$

— **commutative** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y} &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,\ldots,y_n+x_n)\\ &= \vec{y}+\vec{x}\end{aligned}$$

— **élément neutre** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$ est l'élément neutre
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{0} &= (x_1+0,x_2+0,\ldots,x_n+0)\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ &= \vec{x}\end{aligned}$$

— **symétrique** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ est l'opposé de $\vec{x}$.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+(-\vec{x}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\\ &= (x_1-x_1,x_2-x_2,\ldots,x_n-x_n)\\ &= (0,0,\ldots,0)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{R}^n,+)$ est un groupe commutatif.

Définition 4 (*Loi de composition externe :* $\lambda.\vec{x}$)

Soit $\mathbb{K}$ et A deux ensembles. Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de $\mathbb{K}$ et un élément de A, associe un élément de A :

$$.\left|\begin{array}{ccc}A\times A & \longrightarrow & A\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}\right.$$

Exemple 4 ($(\mathbb{R}^n,.)$)

La loi de multiplication sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$.\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ (\lambda,\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)) & \longmapsto & \lambda.\vec{x}=(\lambda.x_1,\lambda.x_2,\ldots,\lambda.x_n)\end{array}\right..$$

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $2.(1,-2)=(2,-4)$.

Définition 5 (*Corps* $\mathbb{K}$ *:* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$)

Dans ce cours [2], un corps $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 6 (*Espace vectoriel :* $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$)

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un triplet $(E, +, .)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une loi de composition externe sur E, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi . est compatible avec la structure de groupe $(E, +)$, i.e.
   (a) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x} \in E$, $(\lambda + \mu).\vec{x} = (\lambda.\vec{x}) + (\mu.\vec{x})$;
   (b) $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\lambda.(\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda.\vec{x}) + (\lambda.\vec{y})$;
   (c) $\forall\vec{x} \in E$, $1_{\mathbb{K}}.\vec{x} = \vec{x}$;
   (d) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x} \in E$, $\lambda.(\mu.\vec{x}) = (\lambda\mu).\vec{x}$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un vecteur et est noté dans ce cours avec une flèche $\vec{x}$. Un élément du corps $\mathbb{K}$ est un scalaire et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ.

Exemple 5

- les n-uplets $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles,
- les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,
- si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X, E)$ muni des lois usuelles.

1.2 Construire des espaces vectoriels

1.2.1 Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ et F e.v.

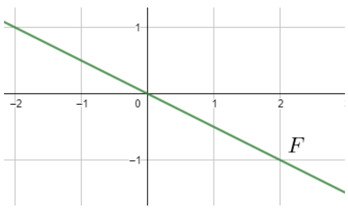
Définition

Définition 7 (*Sous espace vectoriel*)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si

1. F est non vide,
2. F est stable par $+$, i.e. $\forall\vec{x}, \vec{y} \in F$, $\vec{x} + \vec{y} \in F$,
3. F est stable par . , i.e. $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\vec{x} \in F$, $\lambda.\vec{x} \in F$.

Exemple 6

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ 

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

1. <u>non vide :</u>
   $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ car $0 + 2.0 = 0$.
2. <u>stable par + :</u>

Soit $\vec{x}_1 = (x_1, y_1), \vec{x}_2 = (x_2, y_2) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$.
i.e. montrons que $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$.
On a :

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0 + 0 = 0.$$

3. F est stable par . :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x, y) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\lambda\vec{x} = (\lambda x, \lambda y) \in F$.
i.e. montrons que $(\lambda x) + 2(\lambda y) = 0$.
On a

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda 0 = 0.$$

Proposition 1.2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

1. $\vec{0_E} \in F$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda.\vec{x} + \vec{y} \in F$.

Engendré par une famille finie : $Vect(\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p}) = \{\lambda_1.\vec{x_1} + \dots + \lambda_p.\vec{x_p}\}$

Définition 8 (*Famille finie*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une **famille finie** de vecteurs de E est un p-uplet $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p})$ formée de vecteurs de E, où $p \in \mathbb{N}$.

Définition 9 (*Combinaison linéaire*)

Avec les mêmes notations, une **combinaison linéaire** de la famille $\mathcal{F}$ est un vecteur $\vec{x} \in E$ de la forme $\vec{x} = \lambda_1.\vec{x_1} + \dots + \lambda_p.\vec{x_p}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.
Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire. On note $Vect(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaison linéaires de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p})$.

$$Vect(\mathcal{F}) = \{\lambda_1.\vec{x_1} + \dots + \lambda_p.\vec{x_p} : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

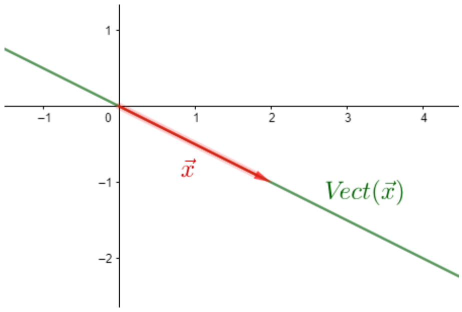
Par convention, $Vect(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

Définition-Proposition 1 (*Espace engendré*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p})$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble $Vect(\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p})$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **espace engendré** par la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p})$. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_p}$.

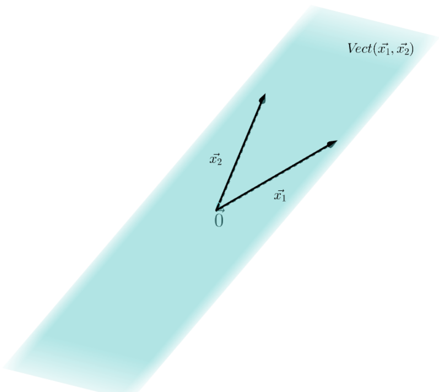
Exemple 7 (*Droite vectoriel*)

Lorsque que $p = 1$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, $Vect(\vec{x}) = \{\lambda.\vec{x} : \forall \lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\vec{x}$. On la note $\mathbb{R}\vec{x}$.
Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est



Exemple 8 (*Plan vectoriel*)

Lorsque que $p = 2$ avec $\vec{x_1}$ non colinéaire à $\vec{x_2}$, $Vect(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \{\lambda.\vec{x_1} + \mu.\vec{x_2} : \forall\lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectorielle** engendrée par $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$. On le note $\mathbb{R}\vec{x_1} + \mathbb{R}\vec{x_2}$.
Un plan vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est



Intersection $F_1 \cap F_2$

Proposition 1.2.2

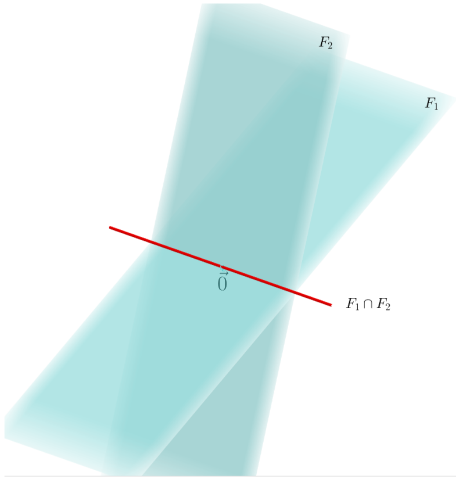
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
Alors l'intersection $\cap_{i=1}^{p} F_i$ est également un sous espace vectoriel.

Démonstration : Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
Montrons que $\cap_{i=1}^{p} F_i$ est également un sous espace vectoriel.

1. non vide :
   $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{0} \in F_i$ donc $\vec{0} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$
2. stable par + :
   Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^{p} F_i$ d'où $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F_i$.
   $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F_i$ donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^{p} F_i$.
3. F est stable par .
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\vec{x} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$ d'où $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \vec{x} \in F_i$.
   $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \lambda\vec{x} \in F_i$ donc $\lambda\vec{x} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$. ■

Exemple 9

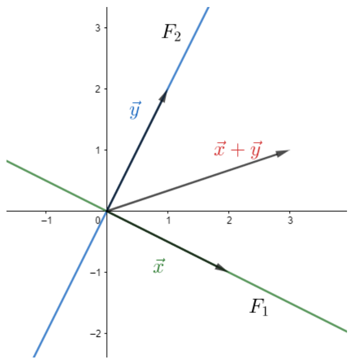
$F = \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}}^{=F_1} \cap \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}}^{=F_2}$ l'intersection de deux plans vectoriels, F_1 et F_2 dans $\mathbb{R}^3$



Somme de sous-espaces vectoriels : $F_1 + F2 = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} : \vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2\}$

Remarque 1

L'union $\cup_{i=1}^{p} F_i$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



Sur cette figure, les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in F_1 \cup F_2$ et on a $\vec{x} + \vec{y} \notin F_1 \cup F_2$. La somme permet de construire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Définition 10 (*Somme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2}$ où $\vec{x_1} \in F_1$ et $\vec{x_2} \in F_2$; autrement dit,

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} : \vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2\}.$$

Proposition 1.2.3

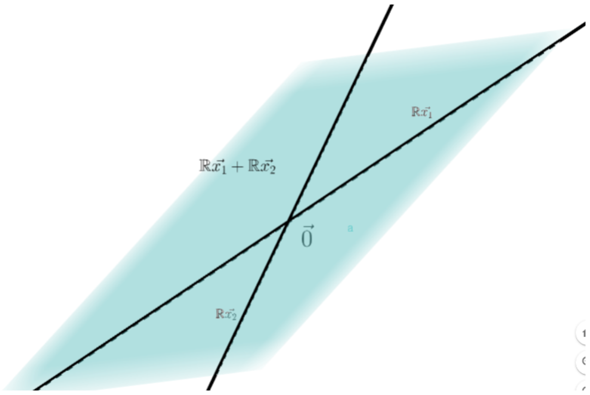
$F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
Plus précisément $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Démonstration : Soit F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de E.
Montrons que $F_1 + F_2$ est également un sous espace vectoriel.

1. non vide :
$\vec{0} \in F_1, F_2$ d'où $\vec{0} = \overbrace{\vec{0}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{0}}^{\in F_2} \in F_1 + F_2$.
2. stable par + :
Soit $\vec{x} + \vec{y}, \vec{x'} + \vec{y'} \in F_1 + F_2$.
$\vec{x} + \vec{y} + \vec{x'} + \vec{y'} = \overbrace{\vec{x} + \vec{x'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{y} + \vec{y'}}^{\in F_2} \in F_1 + F_2$.
3. F est stable par .
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\vec{x} + \vec{y} \in F_1 + F_2$.
$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \overbrace{\lambda\vec{x}}^{\in F_1} + \overbrace{\lambda\vec{y}}^{\in F_2} \in F_1 + F_2$. ■

Exemple 10

Soit $\mathbb{R}\vec{x_1}$ et $\mathbb{R}\vec{x_2}$ deux droite vectorielles distinctes. La somme de ces deux espace vectoriels forme le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{x_1} + \mathbb{R}\vec{x_2}$.



Définition 11 (*Somme directe*)

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2}$ où $\vec{x_1} \in F_1$ et $\vec{x_2} \in F_2$. On note alors la somme $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 1.2.4 (*Critère 1*)

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si

$$\forall \vec{x_1} \in F_1, \forall \vec{x_2} \in F_2 : \quad \vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0_E} \Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} = \vec{0_E}.$$

Démonstration :

— $(\Longrightarrow)$:
Supposons que la somme $F_1 + F_2$ est directe.
Soit $\vec{x_1} \in F_1$ et $\vec{x_2} \in F_2$ tel que $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0}$. On a aussi $\overbrace{\vec{0}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{0}}^{\in F_2} = \vec{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\vec{x_1} = \vec{0}$ et $\vec{x_2} = \vec{0}$.

— $(\Longleftarrow)$:
Supposons que $\forall \vec{x_1} \in F_1, \forall \vec{x_2} \in F_2, \vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0_E} \Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} = \vec{0_E}$..
Soit $\vec{x} \in F_1 + F_2$ tel que $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in F_2}$ et $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2'}}^{\in F_2}$
Montrons que $\vec{x_1} = \vec{x_1'}$ et $\vec{x_2} = \vec{x_2'}$.

On a :

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} - (\vec{x_1'} + \vec{x_2'}) = \overbrace{\vec{x_1} - \vec{x_1'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2} - \vec{x_2'}}^{\in F_2}.$$

D'après l'hypothèse, on a $\vec{x_1} - \vec{x_1'} = \vec{0}$ et $\vec{x_2} - \vec{x_2'} = \vec{0}$, d'où $\vec{x_1} = \vec{x_1'}$ et $\vec{x_2} = \vec{x_2'}$. ■

Proposition 1.2.5 (*Critère 2*)

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$.

Démonstration :

— $(\Longrightarrow)$:
Supposons que la somme $F_1 + F_2$ est directe.
  — $\{\vec{0_E}\} \subset F_1 \cap F_2$:
  $\vec{0_E} \in F_1, F_2$ donc $\vec{0_E} \in F_1 \cap F_2$.
  — $F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0_E}\}$: Soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$. On $\vec{0} = \overbrace{\vec{x}}^{\in F_1} + \overbrace{-\vec{x}}^{\in F_2} = \overbrace{\vec{0}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{0}}^{\in F_2}$. Par unicité de décomposition, on identifie $\vec{x} = \vec{0}$.
Du fait de la double inclusion, on a $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$.

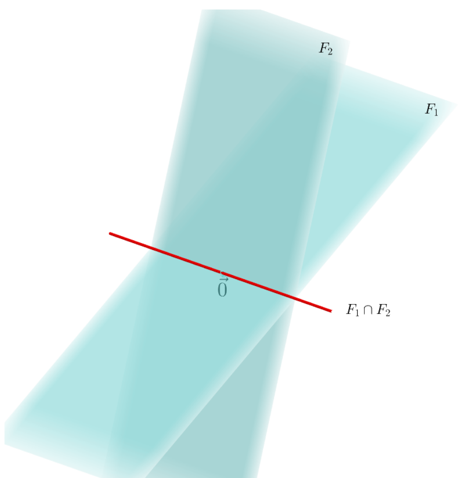
— $(\Longleftarrow)$:
Supposons que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$.
Soit $\vec{x} \in F_1 + F_2$ tel que $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in F_2}$ et $\vec{x} = \overbrace{\vec{x_1'}}^{\in F_1} + \overbrace{\vec{x_2'}}^{\in F_2}$
Montrons que $\vec{x_1} = \vec{x_1'}$ et $\vec{x_2} = \vec{x_2'}$.
On a :

$$\overbrace{\vec{x_1} - \vec{x_1'}}^{\in F_1} = \overbrace{\vec{x_2'} - \vec{x_2}}^{\in F_2}.$$

Comme $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0_E}\}$, on a $\vec{x_1} - \vec{x_1'} = \vec{0}$ et $\vec{x_2'} - \vec{x_2} = \vec{0}$, d'où $\vec{x_1} = \vec{x_1'}$ et $\vec{x_2} = \vec{x_2'}$. ■

Exemple 11

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F_1 et F_2, est une droite vectoriel, $F_1 \cap F_2$, donc la somme n'est pas directe.



Si $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ et $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\vec{x} = (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z=\lambda, x=-\lambda, y=0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda(-1,0,1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in Vect(-1,0,1)
\end{aligned}$$

Finalement $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(-1,0,1)$.

Définition 12 (*Supplémentaires*)

Avec les mêmes notations, si la somme $F_1 + F_2$ est directe et égale à E, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**, et on note

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Exemple 12

Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus Vect(X^n)$.

— $\underline{\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] + Vect(X^n)}$:
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$P = \overbrace{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}}^{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \overbrace{a_nX^n}^{\in Vect(X^n)}.$$

— $\underline{\mathbb{R}_{n-1}[X] \cap Vect(X^n) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\}}$:
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap Vect(X^n)$.
Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $deg(P) < n$. Comme $P \in Vect(X^n)$, on a $P = \lambda X^n$. Si $\lambda \neq 0$, on a $deg(P = \lambda X^n) = n$, d'où une contradiction. Donc $P = 0$.

Définition 13 (*Somme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$ l'ensemble $\sum_{k=1}^{p} F_k$ des vecteurs de la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p}$ où $\vec{x_1} \in F_1$, $\vec{x_2} \in F_2$, ..., $\vec{x_p} \in F_p$; autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p} : \vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2, \ldots, \vec{x_p} \in F_p\}.$$

Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E ; plus précisément S est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$.

Définition 14 (*Somme directe*)

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p}$ où $\vec{x_1} \in F_1$, $\vec{x_2} \in F_2$, ..., $\vec{x_p} \in F_p$. On note alors la somme $\oplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition 1.2.6

Critère 1 Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si

$$\vec{x_1} \in F_1, \vec{x_2} \in F_2, ..., \vec{x_p} \in F_p, \vec{x_1} + \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_p} = \vec{0_E} \implies \vec{x_1} = \cdots = \vec{x_p} = \vec{0_E}.$$

Remarque 2

Le critère 2 ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.
$E = \mathbb{R}^2$, $\vec{x_1} = (1,0)$, $\vec{x_2} = (0,1)$ et $\vec{x_3} = (1,1)$. On a $\mathbb{R}\vec{x_1} \cap \mathbb{R}\vec{x_2} = \mathbb{R}\vec{x_1} \cap \mathbb{R}\vec{x_3} = \mathbb{R}\vec{x_2} \cap \mathbb{R}\vec{x_3} = \{(0,0)\}$. Cependant la somme $\mathbb{R}\vec{x_1} + \mathbb{R}\vec{x_2} + \mathbb{R}\vec{x_3}$ n'est pas directe car $(1,1) = 1(1,1)$ et $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.

1.2.2 Espace vectoriel produit : $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$

Définition 15 (*Produit cartésien*)

Soit $(E_1, +_1, ._1)$ et $(E_2, +_2, ._2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On pose
$$E = E_1 \times E_2 = \{(\vec{x_1}, \vec{x_2}) : \vec{x_1} \in E_1, \vec{x_2} \in E_2\}.$$
E est le **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2.
On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :

$$\forall (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E, (\vec{y_1}, \vec{y_2}) \in E, \quad (\vec{x_1}, \vec{x_2}) + (\vec{y_1}, \vec{y_2}) = (\vec{x_1} +_1 \vec{y_1}, \vec{x_2} +_2 \vec{y_2}).$$

De même, on définit la loi de composition externe . sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E, \lambda.(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\lambda ._1 \vec{x_1}, \lambda ._2 \vec{x_2}).$$

Exemple 13

Pour $p \in \mathbb{N}*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit E^p par

$$E^p = \prod_{k=1}^{p} E.$$

Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

Proposition 1.2.7

E ainsi défini est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 16

On définit de manière analogue le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, produit cartésien des ensembles $E_1, \ldots, E_n$. $(E_1, +_1, ._1)$, $(E_2, +_2, ._2)$, ..., $(E_p, +_p, ._p)$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E = \prod_{k=1}^{p} E_k = \{(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_p}) : \vec{x_1} \in E_1, \ldots, \vec{x_p} \in E_p\}$.

1.3 Base : $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots \lambda_p), \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \cdots + \lambda_p \vec{e_p}$

1.3.1 Définition

Famille génératrice : existence

Définition 17 (*Famille génératrice*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p})$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, c'est à dire si $Vect(\mathcal{F}) = E$, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Exemple 14

La famille $\{(1,1), (0,1), (1,-1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1).$$

En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car $(x, y) = x(1,1) + (y-1)(0,1)$.

Famille libre : unicité

Définition 18 (*Famille libre*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est **libre** si tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel engendré par la famille s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in Vect((\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p}), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Autrement dit aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition 1.3.1 (*Critère*)

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ nulle est triviale, c'est à dire

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0_E} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration : La démonstration est similaire au critère 2 de la somme directe (voir démonstration 1.2.1). ■

Exemple 15

Dans l'exemple précédent, on a démontré qu'un vecteur pouvait s'exprimer à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes. Avec ce dernier critère, la démonstration serait :
Soit $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(1,1) + \beta(0,1) + \alpha(1,-1) = (0,0).$$

On a :

$$\begin{cases} \lambda + \alpha & = 0 \\ \lambda + \beta - \alpha & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & = 1 \\ \alpha & = -1 \\ \beta & = -2 \end{cases}.$$

On vérifie que $(1,1) - 2(0,1) - (1,-1) = (0,0)$.

Base : existence et unicité

Définition 19

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.
De façon équivalente, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une base de E si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Exemple 16

L'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{K}_n[X]$, admet une base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, appelée base canonique.

Exemple 17

L'espace vectoriel des matrices carrés de taille 2, $M_2(\mathbb{R})$, admet une base $(\begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix})$, appelée base canonique.

Remarque 3

On n'a pas unicité de la base. Par exemple pour $\mathbb{K}_n[X]$, les polynômes de Lagrange

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(X) = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

pour $0 \leqslant i \leqslant n$ avec les x_i $n+1$ scalaires distincts forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3.2 Existence d'une base

Définition 20 (*Dimension finie*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E, et **de dimension infinie** sinon.

Exemple 18

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.
En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple 19

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

Théorème 1.3.2 (*Théorème de la base incomplète*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration : La démonstration repose sur l'algorithme suivant :
Soit la partie libre initiale $\mathcal{L}$.
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille finie, $\mathcal{G}$, génératrice de E.
Tant que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E :

1. Puisque $\mathcal{G}$ engendre E, il existe un vecteur $\vec{g}$ de $\mathcal{G}$ qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$. Nécessairement, $\vec{g}$ n'appartient pas à $\mathcal{L}$.
2. On remplace $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} \cup \{\vec{g}\}$, qui est encore libre car le nouveau vecteur n'est pas une combinaison linéaire des précédents.

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de $\mathcal{G}$ différent des précédents et que $\mathcal{G}$ est fini. $\mathcal{L}$ est alors une partie génératrice, donc une base de E. ■

Théorème 1.3.3 (*Théorème de la base extraite*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration : La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$. ■

1.3.3 Unicité du cardinal de la base

Proposition 1.3.4

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration : Démontrons cette proposition par récurrence.

— Initialisation :
Soit $(\vec{g}_1)$ une famille génératrice de E.
Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ une famille de E. Il existe α_1 et α_2 dans $\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{g}_1$ et $\vec{v}_2 = \alpha_2 \vec{g}_1$.
Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ alors la famille $(\vec{v}_1 = \vec{0}, \vec{v}_2 = \vec{0})$ est liée.
Si $\alpha_1 \neq 0$, alors $\vec{v}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2$. Les vecteurs sont colinéaires donc liées.
Idem si $\alpha_2 \neq 0$.

— Hérédité :
Soit $(\vec{g_1}, \dots, \vec{g_n})$ une famille génératrice de E.
Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, il existe $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\vec{v}_i = \lambda_{i,1} \vec{g}_1 + \lambda_{i,2} \vec{g_2} + \dots + \lambda_{i,n} . \vec{g_n}$$

Quitte à réorganiser les deux familles, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\vec{v}_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1} \in Vect(\vec{g_1}, \dots, \vec{g}_{n-1}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel générée par la famille $(\vec{g_1}, \dots, \vec{g}_{n-1})$. Donc la famille $\left(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}, \dots, \vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}\right)$ est liée. Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\beta_1 (\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}) + \dots + \beta_n (\vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}} \vec{v}_{n+1}) = \vec{0}.$$

d'où

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n - (\beta_1 \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} + \dots + \beta_n \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}) \vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

La famille est donc liée. ■

Proposition 1.3.5

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.

Démonstration : Si la famille a strictement plus de n vecteurs, on peut en enlever pour constituer une famille de $n+1$ vecteurs qui est donc liée d'après la proposition précédente. A fortiori, la famille initiale est liée. ■

Proposition 1.3.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f_q})$ deux bases de E. Alors $p = q$.

Démonstration : $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une famille génératrice de E. Comme $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f_q})$ est libre d'après la proposition précédente, $q \leqslant p$. Par symétrie, on a aussi $p \leqslant q$. Finalement $p = q$. ■

Cette proposition nous permet cette définition.

Définition-Proposition 2 (*Dimension*)

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est égale au cardinal d'une base quelconque de E.

Proposition 1.3.7 (*Critère*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une famille libre, alors $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base de E.
Si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une famille génératrice, alors $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base de E.

Exemple 20

Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$, la combinaison linéaire des polynômes de Lagrange $\sum_{j=0}^{n} P(x_j)l_j(X)$ avec $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ scalaires distincts est égale au polynôme P aux points $x_0, \dots, x_n$, donc égal à P. Les polynômes de Lagrange forment une famille génératrice de $n+1$ vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 1.3.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors F est également de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

1.3.4 Base adaptée

Définition 21 (*Base adaptée*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E.
La base $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est dite **adaptée** à F si et seulement s'il existe $p \in \{1, n\}$ tel que $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ soit une base de F.

Exemple 21

La base $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ est adaptée à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ car $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ est une base de F.

Proposition 1.3.9

La base ainsi définie existe.

Démonstration : Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ de F. Cette famille est libre dans E. On la complète en une base de E d'après le théorème de la base incomplète. ■

Définition 22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et B une base de E.
La base $\mathcal{B}$ est dite **adaptée** à la décomposition $E = \oplus_{k=1}^{p} F_k$ si et seulement si $\mathcal{B}$ peut s'écrire comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ où $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k pour tout $k \in \{1, p\}$.

Proposition 1.3.10

La base ainsi définie existe.

Proposition 1.3.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
On suppose que $\mathcal{B}$ s'écrit comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_p$.
Pour $k \in \{1, \dots, p\}$, notons F_k le sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_k$.

Alors les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires.

1.4 Théorèmes en dimension finie

Proposition 1.4.1

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous espace vectoriel admet un supplémentaire.
Autrement dit, soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F que l'on complète avec $\mathcal{B}_2$ pour former une base de E.
D'après la proposition 1.3.11, si on pose G l'espace vectoriel engendrée par $\mathcal{B}_2$, alors $E = F \oplus G$. ■

Proposition 1.4.2

Soit $E_1, \dots E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, E_k est de dimension finie.
De plus, dans ce cas,

$$\dim(\prod_{k=1}^{p} E_k) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Démonstration : On suppose $p = 2$.
Soit $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E_1 et $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_q})$ une base de E_2.
Alors $((\vec{e_1}, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e_n}, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f_1}), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f_q}))$ est une base de $E_1 \times E_2$.

— Génératrice :
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E_1 \times E_2$.
Comme $\vec{x} \in E_1$ et $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une famille génératrice de E_1, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \cdots + \lambda_n \vec{e_n}$.
Comme $\vec{y} \in E_2$ et $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_q})$ est une famille génératrice de E_2, il existe $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \beta_1 \vec{f_1} + \cdots + \beta_q \vec{f_q}$.
D'où $(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1(\vec{e_1}, \vec{0}_F) + \cdots + \lambda_n(\vec{e_n}, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \vec{f_1}) + \cdots + \beta_q(\vec{0}_E, \vec{f_q})$.

— Libre :
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_q \in K$ tel que

$$\lambda_1(\vec{e_1}, \vec{0}_F) + \cdots + \lambda_n(\vec{e_n}, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \vec{f_1}) + \cdots + \beta_q(\vec{0}_E, \vec{f_q}) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

D'où :

$$(\lambda_1 \vec{e_1} + \cdots + \lambda_n \vec{e_n}, \beta_1 \vec{f_1} + \cdots + \beta_q \vec{f_q}) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

Par identification, on obtient $\lambda_1 \vec{e_1} + \cdots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}_E$ et $\beta_1 \vec{f_1} + \cdots + \beta_q \vec{f_q} = \vec{0}_F$. Comme $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une famille libre de E_1 et $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_q})$ de E_2 , $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$. ■

Corollaire 1.4.3

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'espace vectoriel E^p est de dimension finie si et seulement si E l'est ; dans ce cas, on a $\dim(E^p) = p. \dim(E)$.

Proposition 1.4.4 (*Formule de Grassmann*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie et F_1, F_2 deux sous espace vectoriel de E. On a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_1).$$

Démonstration : Une idée est de remarquer l'analogie avec cette formule ensembliste :

$$\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B).$$

Soit C une base de $F \cap G$. On la complète en une base A de F et en une base B de G.
$A \cup B$ est une base $F + G$ et $A \cap B = C$ est une base de $F \cap G$. ■

Proposition 1.4.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est également de dimension finie, et

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe.

Proposition 1.4.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies et $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
On suppose que

$$\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E.$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. *les sous espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires,*
2. *les sous espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe,*
3. $\sum_{k=1}^{p} F_k = E$.