Probabilité discrète

Variable aléatoire

Calculs de lois, d'espérances, de variances

EXERCICE 1 - Loi de Pascal

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?
Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec 10 clefs dont une seule est la bonne. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais jusqu ?à ce que la porte s'ouvre.

1. Il met de côté celles qu'il a déjà essayées. Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer l'espérance ainsi que la variance. Donner la probabilité de réussir en moins de 8 coups.
2. Lorsqu'il est ivre, il n'isole pas les clefs essayées et donc les mélanges à chaque fois. Il tire à chaque fois une nouvelle clef au hasard entre les 10. Quelle est la loi de probabilité ? Donner la probabilité de réussir en moins de 8 coups

2

EXERCICE 2 - Deux fois pile

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geqslant 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

EXERCICE 3 - Une certaine variable aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

EXERCICE 4 - Une certaine variable aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 5 - Permis de conduire

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i.

1. Question préliminaire : soit $x \in]-1,1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que
$$\sum_{n\geqslant r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T ? Son espérance ?

Loi de Poisson

Exercice 6 - Décroissance d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X=k))$ soit décroissante.

Exercice 7 - Maximum d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X=k)$ est maximale ?

Exercice 8 - Retrouver une loi connaissant son conditionnement

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée par $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 9 - Tirage et loi de Poisson

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p+q$ et $p-q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Loi géométrique

Exercice 10 - Diagonalisable ?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 11 - Un problème chinois !

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X.
2. On suppose qu'une génération en âge de procréer est constituée de N couples, et on note $X_1, \cdots, X_N$ le nombre d'enfants respectif de chaque couple. On note enfin P la proportion de garçons issus de cette génération. Exprimer P en fonction de $X_1, \dots, X_N$.
3. Quelle est la limite de P lorsque N tend vers l'infini. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 12 - Service de dépannage

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
   (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.
   (b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".
   (c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
3. En 2020, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?