Matrices

Les matrices sont des tableaux des éléments (nombres, caractères) qui servent à interpréter en termes calculatoires, et donc opérationnels, les résultats théoriques de l'algèbre linéaire et même de l'algèbre bilinéaire. Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices.
Notations : $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres n,p, $\ldots$ désignent des entiers naturels non nuls. Le mot **scalaire** désigne un réel ou un complexe.

I Exemples introductifs de modélisation matricielle

Exemple **Système d'équations linéaires**

La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0.5 mètres. Quel est la taille du fils ?
Comme vu au chapitre précédent, la première étape est la modélisation avec un système d'équations linéaires.
Soit la variable x représentant la taille du fils et la variable y représentant la taille du père.
Le couple (x, y) vérifie le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y & = 2,5 \\ -x + y & = 0,5 \end{cases}$$

On sait résoudre par de simples opérations algébriques une équation linéaire à une inconnue à coefficient **réels**. Par exemple, pour l'équation $2x = 4$, on multiple par l'inverse de 2, ce qui donne $x = 2$.
Une idée est de transformer le système de deux équations à deux inconnues à une équation à une inconnue.
Cette transformation est une abstraction sur la nature des coefficients et des variables des équations : de **réels** à **tableaux de nombres**.
Ainsi, l'équation équivalente au système d'équations linéaires est :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1\times x} \; \times \; \boxed{1\times y} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Autrement dit, on

$$A \times X = B$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, c'est à dire qu'il existe une matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ telle que, en multipliant, par A^{-1} les deux membres de l'équation $A \times X = B$, on obtient :

$$X = A^{-1} \times B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Par identification, l'ensemble des solution est de nouveau l'unique solution $x = 1$ et $y = 1,5$.

Exemple **Fonction linéaire**

Une usine fabrique des vélos, des trottinettes et des rollers. Le prix payé, y, pour x_1 vélos, x_2 trottinettes et x_3 rollers est une fonction linéaires des prix unitaires d'achat 150 euros, 40 euros et 20 euros respectivement. On a donc :

$$y = 150x_1 + 40x_2 + 20x_3.$$

La représentation matricielle de cette opération est :

$$\overset{150 \times x_1 \;+\; 40 \times x_2 \;+\; 20 \times x_3}{y = \begin{pmatrix} 150 & 40 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

Les prix unitaires d'envoi sont respectivement égaux à 55 e pour un vélo, 2 euros pour la trottinette et 1 euros pour les rollers. Le prix payé est encore une fonction linéaire :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150x_1 + 40x_2 + 20x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 1x_3 \end{pmatrix}.$$

avec y_1 prix des marchandises et y_2 prix d'envoi.
La représentation avec un tableau de nombres (matricielle) de cette opération est :

$$\overset{5 \times x_1 \;+\; 2 \times x_2 \;+\; 1 \times x_3}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 50 & 25 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

II Les matrices

A Définition

Définition Matrice

Une **matrice**, A, de taille $n \times p$ à coefficients $\mathbb{K}$ est une famille d'élément de $\mathbb{K}$, $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, présentée sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Le scalaire a_{ij} est appelé **coefficient de A de position (i,j)**, noté aussi $(A)_{ij}$.

La matrice $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la j^{ime} **colonne** de A. On note $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix}$.

La matrice $L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est appelée la i^{ime} **ligne** de A. On note $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On a :

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3$$
$$a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6$$
$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

B Matrices particulières

Définition Matrices colonnes

Une matrice à une colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est appelée **matrice colonne**.

L'ensemble des matrices colonnes de taille n est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^n$ par identification avec l'ensemble des n-uplets.

Exemple

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$.

Définition Matrices lignes

Une matrice à une ligne $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$ est appelée **matrice ligne**.
L'ensemble des matrices ligne de taille p est noté $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^p$ par identification avec l'ensemble des p-uplets.

Exemple

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$.

Définition **Matrice nulle**

Une matrice ayant tous les coefficients nuls est appelée **matrice nulle**.
On la note 0_{np} si elle a n lignes et p colonnes, ou 0 s'il n'y a pas d'ambigüité.

Exemple

$$0_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition **Matrices carrés**

Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelée **matrice carré**.
La famille $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelé **diagonale de A**.
L'ensemble des matrices carrés de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est carrée.

Définition **Matrices triangulaires supérieurs**

Une matrice carrée ayant tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale sont nuls

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice triangulaire supérieur**.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieur.

Définition **Matrices triangulaires inférieurs**

Une matrice carrée ayant tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale sont nuls

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice triangulaire inférieur**.

Définition Matrices diagonales

Une matrice carrée étant à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures, c'est à dire les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice diagonale**.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale.

Définition Matrice identité

La **matrice identité**, noté I_n, est une matrice diagonale dont les coefficients les diagonaux sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III Calcul matriciel

A Égalité

Définition Égalité des matrices

Deux matrices A et B sont égales, ce qu'on note $A = B$ si

— même nombre de lignes,

— même nombre de colonnes,

— les coefficients à la même position sont égaux.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B Addition matricielle

Définition Somme

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant même nombre de lignes n et même nombre de colonnes p.
La **somme** $A+B$ de A et B est égale la matrice dont chaque coefficient est la somme des coefficients de même position de A et de B, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & 1-1 & 2+1 \\ 3+0 & 4+1 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposition Structure de groupe commutatif

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— **Commutative** : $A+B = B+A$

— **Associative** : $(A+B)+C = A+(B+C)$

— **Élément neutre** 0_{np} : $A + 0_{np} = 0_{np} + A = A$

— **Symétrique** : en notant $(-A) = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, on a :

$$A + (-A) = 0_{np}.$$

Démonstration

— Commutative :

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{Déf Addition matricielle}} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1p}+a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}+a_{n1} & \cdots & b_{np}+a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$$A+B = B+A.$$

— Associative : démonstration similaire à la commutativité

— Élément neutre : à droite

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \cdots & a_{1p}+0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+0 & \cdots & a_{np}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On ferait de même à gauche.

— Symétrique :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & \cdots & a_{1p}-a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-a_{n1} & \cdots & a_{np}-a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

C Multiplication d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$

Définition Produit externe

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
La **produit λA** de λ par A est égale la matrice dont chaque coefficient est obtenu en multipliant le coefficient de même position de A par λ :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 4 & 2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition Propriétés

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors,

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1A = A$

Démonstration

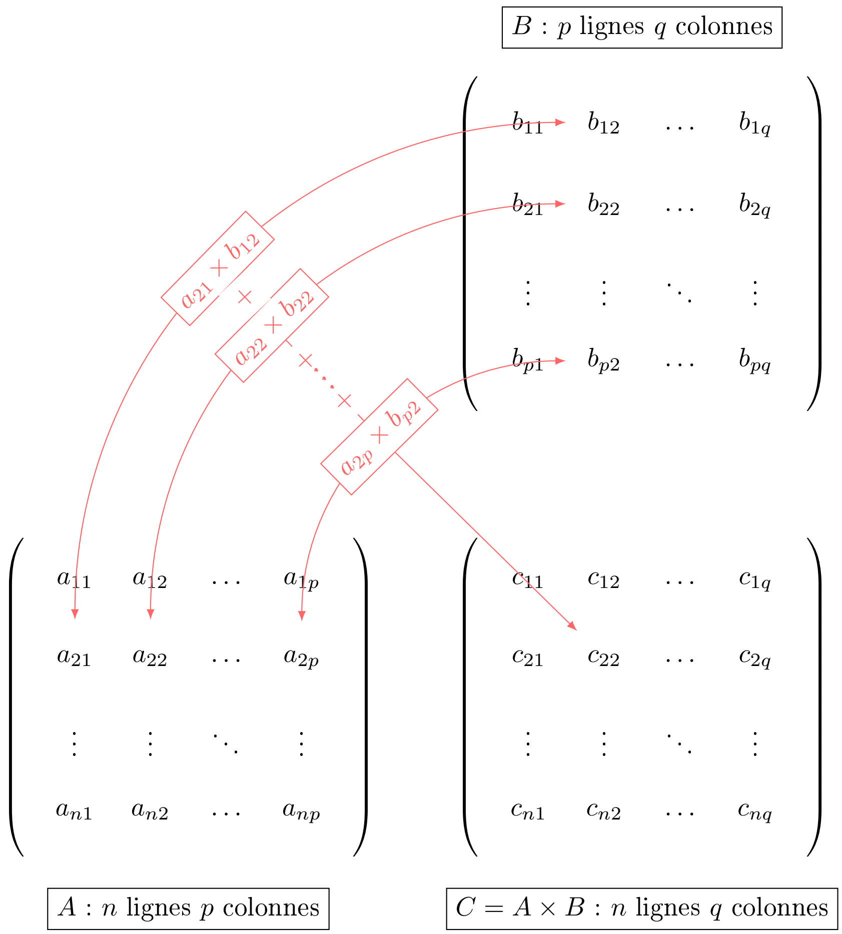
La démonstration est évidente.

D Multiplication matricielle

Définition Produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Le **produit matriciel** $A \times B$ est la matrice $C = \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, q]\!] : \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$



On omettra souvent symbole $\times$ dans les expressions : $AB = A \times B$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 3 + 2 \times 5 & 2 \times 2 + (-1) \times 4 + 2 \times 6 \\ 1 \times 1 + 0 \times 3 + 3 \times 5 & 1 \times 2 + 0 \times 4 + 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Remarque **Algèbre non commutative et non intègre**

En générale, le produit matriciel n'est pas commutatif ($AB = BA$). Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
De plus, en générale, le produit matriciel n'est pas intègre (si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$). C'est à dire un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition Lignes et colonnes d'un produit matriciel

On a :

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_j$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 & \ldots & L_i & \ldots & L_n \end{pmatrix} = L_i.$$

Et plus généralement :

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \overbrace{\sum_{j=1}^{p} x_j C_j}^{\substack{\text{Combinaison linéaire} \\ \text{des vecteurs } C_1,\ldots,C_p}}$$

et

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \times A = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i$$

Exemple

La chaine youtube 3Blue1Brown donne un point de vue géométrique du calcul matriciel (voir `https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab&index=1`)

Proposition Propriétés

1. **Associative** :
$$(AB)C = A(BC).$$
2. **Distributivité par rapport à l'addition** :
$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{et} \quad A(B+C) = AB + AC.$$
3. **Élément neutre** : la matrice identité est l'élément neutre, c'est à dire
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) : \quad I_n A = A I_q = A.$$

Démonstration

1. *Associative* : Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a :
$$\begin{aligned} ((A \times B) \times C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} (A \times B)_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{p} a_{il} (B \times C)_{lj} = (A \times (B \times C))_{ij} \end{aligned}$$
2. Les deux autres propriétés se démontrent aisément.

E Puissance d'une matrice carrée

Définition Puissance

La **puissance** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la multiplication itérée de A, soit

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad A^k = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{\text{k fois}} \quad \text{et} \quad A^0 = I_n.$$

Exemple **Puissance d'une matrice de 1**

Déterminer la puissance $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration

On a $J^2 = nJ$ puis par récurrence, pour $k \geq 1$, $J^k = n^{k-1}J$.

Proposition Propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k, l \in \mathbb{N}$.
On a :
- $A^k A^l = A^{k+l}$
- $\left(A^k\right)^l = A^{kl}$
- $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$ mais seulement $A^2 + AB + BA + B^2$.

Proposition Formule du binôme

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est à dire $AB = BA$.
Alors, pour tout entier $p > 0$, on a les formules

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

et

$$A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

où $\binom{p}{n}$ désigne le coefficient du binôme.

Démonstration

La démonstration par récurrence est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a+b)^p$, avec a, b des réels.

Définition Matrice nilpotente

On dit que A est **nilpotente** si il existe $k \in \mathbb{N}^* : A^k = 0$.
Le plus petit entier k pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'**indice de nilpotence** de A.

Exemple

Déterminer la puissance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration

On a $A = I_3 + 2N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice N est donc nilpotente d'indice 2 et commute avec I_3. On a :

$$A^p = (2N + I_3)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (2N)^k I_3^{p-k} = \binom{p}{0} (2N)^0 + \binom{p}{1} (2N)^1 + \overbrace{(2N)^2 + \dots}^{=0} = I_3 + 2pN.$$

F Transposée

Définition **Transposée**

La **matrice transposée** (ou la **transposée**) d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $A^\mathsf{T} = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition **Propriétés**

— **Linéaire** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda A + \mu B)^\mathsf{T} = \lambda A^\mathsf{T} + \mu B^\mathsf{T}$

— **Involutive** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : \quad \left(A^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = A$

— **Ordre inversé produit** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall b \in \mathcal{M}_{p,q}(K) : \quad (AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$

Démonstration

— Linéaire :

$$((\lambda A + \mu B)^\mathsf{T})_{ij} \overbrace{=}^{\text{Def transposée}} (\lambda A + \mu B)_{ji} = \lambda (A)_{ji} + \mu (B)_{ji} = \lambda (A^\mathsf{T})_{ij} + \mu (B^\mathsf{T})_{ij}$$

— Involutive :

$$((A^\mathsf{T})^\mathsf{T})_{ij} = (A^\mathsf{T})_{ji} = (A)_{ij}$$

— Ordre inversé produit :

$$((AB)^\mathsf{T})_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{jk} (B)_{ki} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (B^\mathsf{T})_{ik} (A^\mathsf{T})_{kj} = (B^\mathsf{T} A^\mathsf{T})_{ij}.$$

Définition **Matrice symétrique et antisymétrique**

On dit que A est **symétrique** si : $A^\mathsf{T} = A$.
On dit que A est **antisymétrique** si : $A^\mathsf{T} = -A$.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ est symétrique.

G Trace d'une matrice carrée

Définition **Trace**

La **trace** d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux , soit

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Exemple

On a $\operatorname{tr}(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 11 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & -5 \end{pmatrix}) = -1 + 5 + (-5) = -1.$

Exemple **Norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

L'application $A \mapsto \operatorname{tr}(A^\intercal A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir chapitre espace pré-hilbertien).

Proposition **Propriétés**

- **Linéaire** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$
- **Ordre inversé produit** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall b \in \mathcal{M}_{p,b}(K) : \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Démonstration

On a :

- $$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{kk} + \mu b_{kk}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$$
- $$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{kp} b_{pk} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{pk} a_{kp} = \sum_{p=1}^{n} (AB)_{pp} = \operatorname{tr}(BA).$$

Remarque

En général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

H Rang

IV Matrices inversibles

On sait résoudre une équation $ax = b$ à une inconnue à coefficient **réels**. Cette équation :

- si $a \neq 0$: admet l'unique solution $a^{-1}b$ si $a \neq 0$,
- si $a \neq 0$

— si $b \neq 0$ n'admet pas de solution ,

— si $b = 0$ admet l'ensemble $\mathbb{R}$ comme solutions.

Pour déterminer l'ensemble des solutions, on se pose la question de l'existence de l'inverse de a. Pour les matrices, résoudre $AX = B$ revient à se poser le même question sur existence de l'inverse de A.

A Définition

Définition-Proposition Inverse

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$AB = BA = I_n.$$

Si elle existe, la matrice B est unique et appelée **inverse** de A, noté A^{-1}.
L'ensemble des matrice inversibles de taille n se note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé **groupe linéaire**.

Démonstration

Pour l'unicité, on suppose l'existence de deux matrices B et B' inverse de A. On a :

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'.$$

Ainsi $B = B'$.

Exemple **Matrice identité**

L'inverse de la matrice identité est elle-même car $I_nI_n = I_n$.

Exemple **Matrice nulle**

La matrice nulle 0_n n'est pas inversible car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A0_n = 0_n$ donc le produit d'une matrice avec la matrice 0_n n'est jamais égale à la matrice identité.

B Propriétés

Proposition A gauche ou à droite

Il suffit de vérifier que $AB = I_n$ ou bien $BA = I_n$ pour prouver que A est inversible d'inverse B.

Démonstration

Voir chapitre sur les applications linéaires.

Proposition Opérations sur les matrices inversibles

Soit A et B deux matrices **inversibles**.

— **Inversibilité de l'inverse** : A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

— **Inversibilité du produit** : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

— **Inversibilité de la transposée** : $A^\intercal$ est inversible et $\left(A^\intercal\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$.

Démonstration

— Inversibilité de l'inverse : comme $AA^{-1} = I_n$, l'inverse de A^{-1} est A.

— Inversibilité du produit : $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) \overbrace{=}^{\text{Associative}} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B = B^{-1}B = I_n$.

— Inversibilité de la transposée : $\left(A^{-1}\right)^\intercal A^\intercal = \left(AA^{-1}\right)^\intercal = I_n^\intercal = I_n$.

Proposition Simplification d'une équation

Soit C une matrice inversible.
Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

Démonstration

On multiplie à droite par l'inverse de C. On a $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$. Comme le produit matricielle est associative, on a $A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, d'où $A = B$.

Proposition Caractérisation de l'inversibilité 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Une colonne (ou une ligne) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (ou des autres colonnes) si et seulement si A n'est pas inversible.

Démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Sans perte de généralité, supposons que la première colonne est combinaison linéaire des autres, c'est à dire qu'il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que :

$$C_1 = \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n.$$

Supposons par l'**absurde** que A est inversible.
On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = C_1 - \lambda_2 C_2 - \cdots - \lambda_n C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. En multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où la contradiction.

— Pour la condition suffisante, voir le chapitre sur les applications linéaires.

Proposition Caractérisation de l'inversibilité 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.

Démonstration

— Supposons que A est inversible. $AX = Y$ si et seulement si $A^{-1}(AX) = A^{-1}Y$ si et seulement si $X = A^{-1}Y$. Ainsi l'unique solution du système est $A^{-1}Y$.

— Supposons que pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe C_i tel que $AC_i = \begin{array}{r} \\ \\ \text{pos } i \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose la matrice B des colonnes

$C_1, \dots, C_n$. On a :

$$AB = A \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_1 & \cdots & AC_n \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc A est inversible d'inverse B.

C Calcul de l'inverse

Une **première méthode** est de supposer l'existence de l'inverse et de déterminer des conditions nécessaires sur les coefficients de la matrice inverse.

Exemple

Démontrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Analyse : Supposons que A est inversible. Donc il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_n$, soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}.$$

Par substitution, on trouve que $a = 1, b = -\frac{2}{3}, c = 0, d = \frac{1}{3}$.

Synthèse : On vérifie bien que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple

Démontrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Absurde : Supposons que A est inversible. Donc il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_n$, soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient la contradiction $1 = 0$. Donc A n'est pas inversible.

Une **seconde méthode** est de résoudre un système linéaire puis de conclure d'après la seconde caractérisation de l'inversibilité.

Exemple

Démontrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Déterminons l'ensemble des solutions du système $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss (voir chapitre système linéaire) au système suivant :

$$
\begin{aligned}
AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x + + z = a \\ x + y + z = b \\ 2y + z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + + z = a \\ y = b - a & L_2 = L_2 - L_1 \\ 2y + z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + + z = a \\ y = b - a \\ z = c - 2b + 2a & L_3 = L_3 - 2L_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + = -a + 2b - c & L_1 = L_1 - 2L_3 \\ y = b - a \\ z = c - 2b + 2a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice A est donc inversible car le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution et son inverse est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition Matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration

La condition $ad - bc \neq 0$ signifie que les deux colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires. D'après la caractérisation de l'inversibilité, la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Si $ad - bc \neq 0$, on a bien :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = I_2.$$

V Application à l'étude théorique des systèmes linéaires

Muni de l'objet matrice, nous pouvons démontrer plus facilement les théorèmes du chapitre sur les systèmes linéaires.

Théorème Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit un système de n équations linéaires à p variables de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- ou bien le système n'admet pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**,
- ou bien le système admet au moins une solution $(x_1, \dots, x_n)$, appelée **solution particulière**, on dit qu'il est **compatible**. Dans ce cas, les solutions sont de la forme :

$$S = \{ \overbrace{(x_1, \dots, x_n)}^{\text{Solution particulière}} + \overbrace{(y_1, \dots, y_p)}^{\text{Solution homogène}} : (y_1, \dots, y_p) \in S_H \}.$$

Démonstration

Soit S l'ensemble des solutions du système d'équations.
Supposons que les système possède une solution, noté X_p.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_n & = & b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow AX = B \overbrace{\Leftrightarrow}^{AX_p = B} AX = AX_p \Leftrightarrow A(X - Xp) = 0$$

$\Leftrightarrow X - Xp$ est solution du sytème homogène

$\Leftrightarrow X$ est la somme de la solution particulère et d'une solution du système homogène

Proposition Équivalence par opérations élémentaires

Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Démonstration

Soit Q inversible.
X est solution d'un système linéaire si et seulement si $AX = Y$ si et seulement si $QAX = QY$.
Donc si les matrices associées aux transformations élémentaires sont inversibles alors les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent. On a :

— $L_i \leftrightarrow L_j$: Soit $Q_{L_i \leftrightarrow L_j} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& \overset{\textbf{pos ij}}{1} &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& \overset{\textbf{pos ji}}{1} &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$.

On a $Q_{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. Comme $Q_{L_i \leftrightarrow L_j} Q_{L_i \leftrightarrow L_j} = I_n$,$Q_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est inversible et égale à son inverse.

— $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: Soit $\lambda \neq 0$ et $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \overset{\textbf{pos ii}}{1} &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$.

On a $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. Comme $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} Q_{L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i} = I_n$,$Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est inversible.

— $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ avec $i \neq j$: Soit $i \neq j$ et $Q_{L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ && \overset{\textbf{pos ii}}{1} && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$.

On a $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. Comme $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} Q_{L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i} = I_n$,$Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est inversible.

Remarque

> La preuve de cette proposition nous donne une méthode pour déterminer si une matrice est inversible ou non et calculer son inverse le cas échéant. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'un point de vue matricielle l'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer A par des opérations élémentaires $Q_1, \dots, Q_r$, c'est à dire : $(Q_1 \dots Q_r)A$. Deux cas de figures se présentent à la fin de l'algorithme, soit on obtient la matrice identité, soit on obtient
>
> — Comme les opérations élémentaires sont des matrices inversibles, $(Q_1 \dots Q_r)$ est inversible. Si

VI Annexe

A Matrice par blocs

Définition Décomposition par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.
Sa **décomposition par blocs** suivant le découpage $(n_1, \dots, n_s)$ pour les lignes et $(p_1, \dots, p_t)$ pour les colonnes est

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,t} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \end{matrix} \ \Big\updownarrow n$$

$$\underset{p_1}{\longleftrightarrow} \cdots \underset{p_t}{\longleftrightarrow}$$

$$\underset{p}{\longleftrightarrow}$$

Exemple

> La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ peut être partitionnée en quatre blocs 2×2 avec
>
> $$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
>
> On peut alors écrire la matrice par bloc comme :
>
> $$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

Proposition Addition par blocs

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ exprimées par blocs selon les mêmes découpages. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors la matrice $\lambda A + \mu B$ s'exprime par blocs selon les mêmes découpages que A et B, et les blocs s'obtiennent en combinant les blocs situés aux mêmes places.

Proposition **Produit par blocs**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On suppose que A a une décomposition par blocs suivant le découpage $(n_1, \dots, n_s)$ pour les lignes et $(p_1, \dots, n_t)$ pour les colonnes.
On suppose que B a une décomposition par blocs suivant le découpage $(p_1, \dots, n_t)$ pour les lignes et $(q_1, \dots, q_u)$ pour les colonnes.
Alors le produit $C = AB \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ admet une décomposition par blocs suivant le découpage $(n_1, \dots, n_s)$ pour les lignes et $(q_1, \dots, q_u)$ pour les colonnes

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,u} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s,1} & \dots & C_{s,u} \end{pmatrix}$$

où pour tous $i \in [\![1, s]\!]$ et $j \in [\![1, u]\!]$,

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{t} A_{i,k} B_{k,j}$$

Cette formule est identique au produit matricielle en considérant les blocs comme des scalaires.

Remarque

> Le cas qui nous intéressera le plus fréquemment est celui des matrices carrées ayant le même découpage pour les lignes et pour les colonnes. Dans ce cas, les blocs diagonaux sont également des matrices carrées.