Chapitre 1

Probabilité discrète

Lors du cours sur les probabilité finies, nous avons posé le cadre probabiliste afin de modéliser une expérience aléatoire dans les issues sont finies. Ce cours étend le cadre pour aussi modéliser une expérience aléatoire dans les issues sont **dénombrables finies ou infinies**, c'est à dire que l'on peut effectuer une énumération finie ou infinie des issues de l'expérience aléatoire.

1.1 Extension de la modélisation probabilistes pour un univers dénombrable

1.1.1 Axiomes des probabilité. Premières propriétés

Exemple 1 (*Première fois pile*)

Pour le lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile. L'univers est dénombrable $\mathbb{N}$ où une issue $\omega \in \mathbb{N}$ représente le temps du premiers succès.

Définition 1 (*Réunion et intersection dénombrables*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de Ω. On définit les ensembles $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par :

$$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \quad \omega \in A_n$$

et

$$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \quad \omega \in A_n$$

Exemple 2 (*Première fois pile*)

L'événement A_p="l'expérience se termine après le p-ième lancer" est le singleton $\{p\}$.

L'évènement "l'expérience se termine après le p-ième lancer" s'écrit $\bigcup\limits_{n=p}^{+\infty} A_p$.

L'évènement "l'expérience se termine après un temps infini" s'écrit $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bar{A}_p$.

Définition 2 (*Axiomes des tribus*)

La probabilité P est une fonction qui à un événement associe un nombre compris entre 0 et 1 quantifiant la chance de réalisation de cet événement. Pour des raisons sortant du cadre de ce cours, il n'est pas toujours possible d'attribuer ainsi de manière cohérente une probabilité à chaque partie de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

En d'autres termes, P ne peut pas être considérée comme une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ mais comme une fonction ayant un domaine de définition $\mathcal{A}$ généralement plus petit que , noté $\mathcal{P}(\Omega)$.
Voici les propriétés qu'il est raisonnable d'exiger de $\mathcal{A}$:
- $\mathcal{A}$ contient $\emptyset$ (et tous les singletons $\{\omega\}$),
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si A est un événement de $\mathcal{A}$, A^c l'est aussi,
- $\mathcal{A}$ est stable par les opérations de réunion et d'intersection sur les suites d'événements
- Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite finie ou infinie d'événements de $\mathcal{A}$, sa réunion et son intersection sont encore des événements de $\mathcal{A}$.

Nous appellerons **tribu** toute famille $\mathcal{A}$ de parties de vérifiant les conditions ci-dessus.
$(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**. L'objectif de ce cours n'est pas de savoir construire mathématiquement la tribu $\mathcal{A}$. On supposera que l'on sait construire à partir de l'univers la tribu ayant les "bonnes propriétés".

Définition 3 (*Axiomes des probabilités*)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (incompatibles) :

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle un **espace probabilisé**.

Proposition 1.1.1

Une probabilité P sur un univers dénombrable est complètement déterminée par les $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$. $P(\{\omega\})$, appelé poids de probabilité.
En effet, pour $A \subset \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bigcup_{\omega\in A}\{w\}), \\ &= \sum_{\omega\in A} P(\{w\}). \end{aligned}$$

Exemple 3 (*Première fois pile*)

Soit p la probabilité d'obtenir pile. On pose $p_k = P(\{k\}) = \overbrace{(1-p)^{k-1}}^{\text{proba d'obtenir d'abord k-1 piles}} p.$. On doit vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \overbrace{=}^{\text{somme d'une série géométrique}} = p.\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Proposition 1.1.2

1. *$P(\emptyset) = 0$.*
2. *Pour toute suite finie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (incompatibles) :*

$$P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. *Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tel que $A \subset B$, on a :*

$$P(A) \leqslant P(B)$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

4. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $P(A) \in [0, 1]$.*
5. *Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a*

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

6. *Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a*

$$P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B).$$

7. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a*

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

8. ***Continuité monotone séquentielle :***
   (a) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$, c'est à dire $A_n \subset A_{n+1}$, on a*

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

   (b) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$, c'est à dire $A_{n+1} \subset A_n$, on a*

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

9. ***Sous additivité*** *: Pour toute suite finie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'événements de $\mathcal{A}$, on a :*

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Démonstration : 1. Soit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit par $A_1 = \Omega$ et $A_n = \emptyset$ si $n > 1$. Les événements de cette suite sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \Omega$.

$$\begin{aligned}
P(\Omega) =& P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n)\\
P(\Omega) =& P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots \text{ car deux à deux disjoints}\\
0 =& P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots\\
P(\emptyset) =& 0.
\end{aligned}$$

2. Soit la suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définit par $B_i = A_i$ si $i \leqslant n$ et $B_i = \emptyset$ si $i > n$. On a :

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) =& P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i)\\
P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) =& \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)\\
P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) =& P(A_1) + \cdots + P(A_n) + P(\emptyset) + \dots\\
P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i)
\end{aligned}$$

3. Comme $A \underset{\text{disjoints}}{\bigcup} (B \setminus A) = B$, on a :
$$P(A) + P(B \setminus A) = P(B).$$
4. Comme $A \subset \Omega$, on a $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.
5. Comme $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \underset{\text{disjoints}}{\bigcup} B$, on a $P(A \cup B) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(B)$. Comme $(A \cap B) \subset A$, on a bien : $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$.
6. Comme $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, on a $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.
7. Comme $A \underset{\text{disjoints}}{\bigcup} A^c = \Omega$, on a
$$P(A) + P(A^c) = 1.$$
8. **Continuité monotone séquentielle :**
   (a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$. On pose la suite (B_n) défini $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Les éléments de cette suite sont deux à deux disjoints et $\cup_{k=0}^n A_k = \cup_{k=0}^n B_k$. On a :
$$\begin{aligned} P(\cup_{k=0}^n A_k) =& P(\cup_{k=0}^n B_k) \\ =& \sum_{k=0}^{n} P(B_k) \end{aligned}$$
   La série numérique $\sum P(B_n)$ est à termes positifs et majoré par 1 $\left(\sum_{k=0}^n P(B_k) = P(\cup_{k=0}^n B_k) \leqslant P(\Omega) = 1\right)$ donc convergente. Par passage à la limite on a
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k=0}^n B_k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k) \\ &= P(\cup_{k=0}^{+\infty} B_k) \\ &= P(\cup_{k=0}^{+\infty} A_k) \end{aligned}$$
   (b) On a :
$$\begin{aligned} P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) &= 1 - P((\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n)^c) \\ &= 1 - P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n^c)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$
9. **Sous additivité** : Pour toute suite finie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'événements de $\mathcal{A}$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad P(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \underbrace{\leqslant}_{\text{termes positifs}} \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$
   De plus $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\cup_{i=1}^n A_i)$ et la suite $(\cup_{i=1}^n A_i)$ est croissante d'où :
$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \underbrace{=}_{\text{Continuité monotone}} \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
■

Proposition 1.1.3 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
Pour tout événement B, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Proposition 1.1.4 (*formule de Bayes usuelle*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout événement B de probabilité non nulle, et pour tout $k \in \{1, n\}$, on a

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P_{A_i}(B)P(A_i)}.$$

1.2 Variables aléatoire

Exemple 4 (*Martingale Roulette*)

La Roulette, inventée par Blaise Pascal, est un des jeux les plus populaires des casinos. Le pari simple est de parier la couleur de la case sur laquelle la bille lancée dans le cylindre va s'arrêter parmi 37 cases (18 rouges, 18 noirs et un vert).
La martingale est : le joueur doit, suite à chaque perte, tripler sa mise. S'il perd à nouveau, il mise la somme initiale triplée et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il gagne. Par exemple, le joueur joue 1 euro à la première partie et perd. Puis il joue donc 3 euros et perd encore. Après, il joue donc 9 et gagne. Finalement, son gain est $9 - 3 - 1 = 5$ euros.
A votre avis, ce jeu est-il favorable au joueur ou au casino ? A chaque partie quelle est le gain moyen du joueur ?
Étape 1 : comme pour l'expérience aléatoire du lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile, on pose X la variable aléatoire représentant le nombre de partir joué jusqu'à gagner. Par exemple, $X = 3$ signifie que l'on a perdu les deux premières parties et gagné la troisième. La loi de la variable aléatoire est T est :

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1}p \text{ avec } p = \frac{18}{37}.$$

Étape 2 : on calcule nos gains en fonction de T.

X	1	2	3	4	...	n	...
G	1	3-1	9-(1+3)	27-(1-3-9)	...	$3^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} 3^k = \frac{3^{n-1}+1}{2}$	

Le gain moyen est donc :

$$E(G(X)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+1}{2}(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(3^{n-1}+1)(1-p)^{n-1}$$

La série géométrique $\sum(1-p)^{n-1}$ converge car $|1-p| < 1$. Par contre, la série numérique $\sum(3(1-p))^{n-1}$ diverge vers l'infini car $|3(1-p)| > 1$. En conclusion, $E(G(X)) = +\infty$ et donc ce jeu est "très" favorable au joueur. L'unique condition pour jouer à ce jeu est de n'avoir pas de limite sur son compte en banque. . . .

Exemple 5 (*Bayes*)

Un magasin possède n caisses. Les clients se répartissent de façon indépendante et équiprobable

entre les différentes caisses. On suppose que la probabilité qu'il y ait k clients dans le magasin est $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
La caisse numéro 1 a vu passer m clients un jour donné.
Quelle est la probabilité qu'il y ait eu dans le magasin $n\Delta m$ clients ?