# Chapitre 1

# Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Dans un espace euclidien $E$, l'objectif est d'étudier les transformations de $E$ qui préservent le produit scalaire. Ainsi on cherche à remplacer les notions de base, équation linéaire, forme linéaire, transposition etc. par les notions pertinentes en géométrie euclidienne à savoir, respectivement, de base orthonormée, de vecteurs normaux, de produit scalaire etc.
Les applications de ces transformations sont multiples :

— résoudre des équations différentielles linéaires, trouver une base orthogonale pour deux formes quadratiques si l'une est définie positive ou de classifier les quadriques,

— en physique, résoudre de nombreuses équations aux dérivées partielles comme celle de la corde vibrante ou exprimer le moment d'inertie d'un solide,

— en apprentissage automatique, calibrer un modèle de régression à l'aide de la méthode des moindres carrés ou étudier un échantillon en réduisant la dimension à l'aide de l'analyse en composantes principales.

Dans ce chapitre, $(E, \langle , \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

## I Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

### A Isométrie vectorielle

**Définition 1 (*Isométrie vectorielle*)**

On appelle **isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal de E** tout endomorphisme préservant le produit scalaire, i.e. si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

On appelle **groupe orthogonal** l'ensemble de ces endomorphismes et on le note $\mathcal{O}(E)$.

**Proposition I.1 (*Conservation de la norme*)**

*$u$ est une isométrie vectorielle si et seulement si*

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|.$$

**Démonstration :** — *Implication :* Soit $\vec{x} \in E$. En prenant $\vec{x} = \vec{y}$, on obtient $\langle u(\vec{x}), u(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, soit $\|u(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$, d'où $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.

— *Réciproque :* Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\langle u(\vec{x}), u(\vec{y})\rangle &\overbrace{=}^{\text{Identité de polarisation}} \frac{1}{4}(\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| - \|u(\vec{x}) + u(\vec{y})\|) \\
&\overbrace{=}^{\text{Linéarité}} \frac{1}{4}(\|u(\vec{x} - \vec{y})\| - \|u(\vec{x} - \vec{y})\|) \\
&\overbrace{=}^{\text{Conservation de la norme}} \frac{1}{4}(\|\vec{x} - \vec{y}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\|) \\
&\overbrace{=}^{\text{Identité de polarisation}} \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle
\end{aligned}$$

■

**Proposition I.2 (*Conservation d'une base orthonormale*)**

> *$u$ est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormale quelconque est une base orthonormale.*

**Démonstration :** — *Implication :* Soit $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base orthonormale de $E$. Comme

$$\langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j})\rangle \overbrace{=}^{\text{Conservation du produit scalaire}} \langle \vec{e_i}, \vec{e_j}\rangle$$

, $(u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n}))$ est bien une base orthonormale de $E$

— *Réciproque :* Soit $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base orthonormale de $E$. Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}, \vec{y} \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e_i} \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\langle u(\vec{x}), u(\vec{y})\rangle =& \langle u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}\right), u\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e_j}\right)\rangle \\
\overbrace{=}^{\text{bilinéarité}}& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j})\rangle \\
\overbrace{=}^{(u(\vec{e_1}),\dots,u(\vec{e_n}))\text{BON}}& \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\overbrace{=}^{(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\text{BON}}& \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle
\end{aligned}$$

■

**Proposition I.3 (*Groupe*)**

> *$\mathcal{O}(E)$ est un groupe, sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$.*

**Démonstration :** $\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

— $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$ Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ Comme $u$ est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de montrer que $u$ est injective, $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0_E}\}$.

Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$. Comme $\|u(\vec{x})\| \overbrace{=}^{u\in\mathcal{O}(E)} \|\vec{x}\|$ et $u(\vec{x}) = 0$, on a $\|\vec{x}\| = 0$, soit $\vec{x} = \vec{0_E}$ car une norme est définie.

— *Non vide :* $Id_E \in \mathcal{O}(E)$

— *Stabilité composition :* Soit $u, v \in \mathcal{O}(E)$. Soit $\vec{x} \in E$. La norme est conservée car :

$$\|u(v(\vec{x}))\| \overbrace{=}^{u\in\mathcal{O}(E)} \|v(\vec{x})\| \overbrace{=}^{v\in\mathcal{O}(E)} \|\vec{x}\|.$$

— *Stabilité inversion :* Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Comme $u$ est un automorphisme, $u^{-1}$ l'est aussi. De plus, la norme est conservée car :

$$\|\vec{x}\| = \|u(u^{-1}(\vec{x}))\| \overbrace{=}^{u\in\mathcal{O}(E)} \|u^{-1}(\vec{x})\|.$$

■

## B Matrice orthogonale

**Définition 2 (*Matrice orthogonale*)**

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dit **orthogonal** si

$$M^\top M = I_n.$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n$.
Comme $M^\top M = I_n$, la matrice $M$ est inversible d'inverse $M^\top$ et on a aussi $MM^\top = I_n$.

**Exemple 1**

Dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de rotation plane d'angle $\theta$ :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ou dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de rotation autour de l'axe $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$ et d'angle $\theta$ ,

$$R_{\vec{e_1}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ou les matrices de permutation, comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition I.4**

*$O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est orthogonal si et seulement si la famille des colonnes de $O$ (ou les lignes) est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$.*

**Démonstration :** Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice $O$.

$$\begin{aligned} O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est orthogonal } &\Leftrightarrow M^\top M = \begin{pmatrix} C_1^\top \\ \vdots \\ C_n^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^\top C_1 & \dots & C_1^\top C_n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^\top C_1 & \dots & C_n^\top C_n \end{pmatrix} = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad C_i^\top C_j = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Du fait de l'égalité $OO^\top = I_n$, on a le même résultat sur les lignes. ■

**Exemple 2**

Il est facile de vérifier qu'une matrice de permutation est une matrice orthogonal car ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.

**Théorème I.5 (*Isométrie vectorielle et matrice orthogonale*)**

*Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $E$.*
*$u$ est une isométrie vectorielle si et seulement si $[u]_\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale.*

**Démonstration :** Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base orthonormale de $E$.
Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice $[u]_\mathcal{B}$. On a $[u(\vec{e_i})]_\mathcal{B} = C_i$.

Le coefficient de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}[u]_{\mathcal{B}}$ d'indice $i,j$ est :

$$C_i^{\mathsf{T}} C_j \overbrace{=}^{\mathcal{B}\text{ BON}} \langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j})\rangle.$$

— Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j})\rangle \overbrace{=}^{\text{Conservation d'une base orthonormale}} \delta_{ij}$ et donc $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}[u]_{\mathcal{B}} = I_n$, d'où $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

— Si $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $C_i^{\mathsf{T}} C_j = \delta_{i,j}$, soit $\langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j})\rangle = \delta_{ij}$ c'est à dire que l'image d'une base orthonormale et une base orthonormale donc $u \in \mathcal{O}(E)$. ∎

**Proposition I.6 (*Matrice de passage d'un changement de bases orthonormales*)**

*Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de $E$.*
*Alors la matrice de passage de base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, est une matrice orthogonale. Ainsi, son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{\mathsf{T}}$.*

**Démonstration :** Soit $u$ l'endomorphisme associée à la matrice de passage. Comme l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, $f$ est une isométrie vectoriel, donc $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale. ∎

**Proposition I.7 (*Groupe*)**

*$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, sous groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. C'est pourquoi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé le **groupe orthogonal**.*

**Démonstration :** Pour la démonstration, il suffit de se ramener à $u$ l'endomorphisme associée à la matrice orthogonale qui est une isométrie vectorielle. ∎

## C Déterminant

**Proposition I.8 (*Déterminant*)**

*Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*
*Alors $\det O = \pm 1$.*
*Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*
*Alors $\det u = \pm 1$.*

**Démonstration :** Comme $O^{\mathsf{T}}O = I_n$, on a $\det(O^{\mathsf{T}}O) = \det(I_n) = 1$. Or $det(O^{\mathsf{T}}O) = detO^{\mathsf{T}} \det O = (\det O)^2$. Donc $\det O = \pm 1$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$. Comme $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det u = \det[u]_{\mathcal{B}}$, on conclut que $\det u = \pm 1$. ∎

**Remarque 1**

Une matrice ou un endomorphisme de déterminant 1 ou -1 n'est pas nécessairement une matrice orthogonale ou une isométrie vectorielle. Par exemple $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, mais les colonnes ne forment pas une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

**Définition 3 (*Rotation et groupe spéciale orthogonale*)**

Une matrice orthogonale [resp. isométrie] est **direct(e)** si son déterminant est 1, indirect(e) si son déterminant est -1.
Une isométrie vectorielle directe est également appelée **rotation**.
On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales directes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des rotations de $E$.

**Exemple 3**

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

**Proposition I.9 (*Groupe*)**

*$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{SO}(E)$ ] est un groupe, sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{O}(E)$)] appelé **groupe spécial orthogonal** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. $E$].*

**Démonstration :**
— *Non vide* : $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
— *Stabilité* : Soit $S_1, S_2 \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(S_1 S_2^{-1}) = \det S_1 \det S_2^{-1} = \frac{\det S_1}{\det S_2} = 1.$$

■

## D Symétrie orthogonale

**Définition 4 (*Symétrie orthogonale*)**

On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à $F$ parallèlement à $F^\perp$.
Si $F$ est un hyperplan de $E$, on parle alors de **réflexion**.

**Proposition I.10 (*Symétrie orthogonale*)**

*Soit $u$ une isométrie vectorielle.*
*$u$ est une symétrie orthonormale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.*

**Démonstration :**
— $\Longrightarrow$: Soit une symétrie orthonormale par rapport à $F$ et $F^\perp$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale adaptée à décomposition $F \oplus F^\perp = E$. La matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{\dim(F_2)} \end{pmatrix}$$

Elle est symétrique. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale quelconque. La matrice de passage de BON $\mathcal{B}$ à la base BON $\mathcal{B}'$ est orthogonale donc $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{\mathsf{T}}$. On a :

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{\dim(F_2)} \end{pmatrix} P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Donc $[u]_{\mathcal{B}'}$ est symétrique.
— $\Longleftarrow$: Voir théorème spectral.

■

## E Orientation

**Définition 5 (*Orientation*)**

Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $E$ ont même **orientation** si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.
Orienter $E$, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ de référence. Une base $\mathcal{B}'$ est directe si elle a la même orientation que $\mathcal{B}$.

**Exemple 4**

Sur $\mathbb{R}^2$. La base de référence est $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique. Soit $\mathcal{B}' = (-\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$, $\mathcal{B}'$ est une base indirecte.

**Proposition I.11**

*Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.*
*$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée directe si seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale directe.*

**Démonstration :** L'équivalence est due à l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})$$

■

**Définition 6 (*Orientation d'un hyperplan*)**

Orienter l'hyperplan $H$, c'est choisir un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $H$.
Une base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_{n-1}})$ de $H$ est alors directe si la base $(\vec{u}, \vec{e_1}, ..., \vec{e_{n-1}})$ est directe dans $E$.
Il y a deux orientations possibles de H.

**Exemple 5**

Soit $\mathbb{R}^3$ orientée par rapport à la base canonique. Soit $H$ l'hyperplan définie par le vecteur normale $(1,1,1)$. La base $((1,-1,0),(1,0,-1)$ de $H$ est directe car $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = 3$.

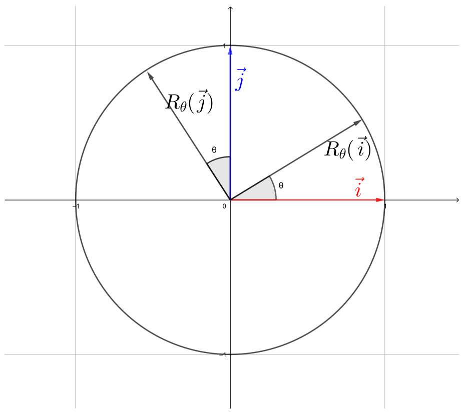
## F Isométrie vectorielle du plan

**Proposition I.12 (*Classification*)**

*Les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :*

$$R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} ; S_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

*Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les $R_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.*
*Les matrices indirectes sont les $S_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.*




**Démonstration :** Soit $M = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^\mathsf{T} M = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1\\ c^2+d^2=1\\ ab+cd=0\end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta\\ c = \cos\phi \text{ et } d = \sin\phi\\ \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\phi \text{ et } d = \sin\phi \\ \cos(\theta - \phi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \{-1, 1\} \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\phi \text{ et } d = \sin\phi \\ \phi = \theta + \epsilon\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{\cos(\theta+\epsilon\frac{\pi}{2})=-\epsilon\sin\theta \text{ et } \sin(\theta+\epsilon\frac{\pi}{2})=\epsilon\cos\theta} \exists \theta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \{-1, 1\} : \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix}$$

On conclut en remarquant que $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix} = \epsilon$. ■

**Proposition I.13**

*$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ ($\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif)et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.*

**Démonstration :** On a :

$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}.$$

$R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = I_2$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. ■

On considère $\mathcal{P}$ un plan vectoriel orienté et $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de $\mathcal{P}$.

**Définition 7 (*Rotation*)**

L'endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $R_\theta$ est appelé **rotation d'angle $\theta$** et est noté $r_\theta$.

**Définition-Proposition 1 (*Angle d'une rotation*)**

La matrice de $r_\theta$ dans toute BOND est $R_\theta$.
$\theta$ s'appelle **l'angle de la rotation**, il est défini modulo $2\pi$.

**Démonstration :** Soit $P$ la matrice de passage de la BOND $\mathcal{B}$ à une base BOND $\mathcal{B}'$. Comme $P$ appartient $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, il existe $\theta'$ tel que $P = R_{\theta'}$. La matrice de $r_\theta$ dans la base $\mathcal{B}'$ est : $R_{\theta'}^{-1} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta$. ■

**Proposition I.14 (*Expression complexe d'une rotation*)**

*Soit $r_\theta$ la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\vec{x} \in \mathcal{P}$, on note $z$ l'affixe de $M$ et $z'$ celle de $r_\theta(\vec{x})$. On a :*

$$z' = e^{i\theta} z.$$

**Démonstration :** Soit $(x, y)$ les coordonnées du vecteur $\vec{x}$. D'une part, on a :

$$[r_\theta(\vec{x})]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix}$$

d'autre part,

$$z' = e^{i\theta} z = e^{i\theta}(x + iy) = (\cos\theta x - \sin\theta y) + i(\sin\theta x + \cos\theta y).$$

On conclut en identifiant la partie réel et imaginaire aux cordonnées de $[r_\theta(\vec{x})]_\mathcal{B}$. ■

**Définition 8 (*Reflexion*)**

La **reflexion** d'axe $D$ est la symétrie orthogonal par rapport à $D$.

**Proposition I.15 (*Représentation matricielle*)**

*Soit $\mathcal{B}$ une BOND de $\mathcal{P}$.*
*L'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est la réflexion d'axe la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ dans $\mathcal{B}$.*

## G Isométrie vectorielle dans un espace de dimension 3

**Théorème I.16 (*Réduction*)**

*Soit $E$ un espace euclidien de dimension 3 et $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une BOND de $E$ dans laquelle $u$ a pour matrice :*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *si* $\det u = 1$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *si* $\det u = -1$

*avec le cas particulier $\theta = 0[2\pi]$ : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan).*

**Démonstration :** Soit $\chi_u$ le polynôme caractéristique de $u$. $\chi_u$ est de degré 3 donc la limite en plus l'infini est de signe opposé à la limite en moins l'infini. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine réelle $\lambda$.
Soit $\vec{x}$ un vecteur propre associée à cette valeur propre. par définition, an a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, d'où $\|u(\vec{x})\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$. Comme $u$ est une isométrie vectorielle $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Par conséquent $|\lambda| = 1$.
Considérons le supplémentaire orthogonal de la droite $Vect(\vec{x})$. Ce supplémentaire est stable sous $u$. En effet soit $\vec{y}$ un élément du supplémentaire. Montrons que $u(\vec{y}) \in Vect(\vec{x})^\perp$. Soit $\mathcal{B}$ une BON adaptée à $Vect(\vec{x}) \oplus Vect(\vec{x})^\perp = E$. On a :

$$[u]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \epsilon \in \{-1, 1\}.$$

Si $\epsilon = 1$, on a le premier cas du théorème. Si $\epsilon = -1$, la matrice de la restriction de $u$ au sous espace $Vect(\vec{x})^\perp$ est une matrice de symétrie orthogonale par rapport à une droite $Vect(\vec{y})$. Soit $\vec{x}$ un vecteur orthogonal à cette droite dans le plan $Vect(\vec{x})^\perp$. La matrice de $u$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (qui est orthogonale et que nous prenons orthonormée) est donc de la forme

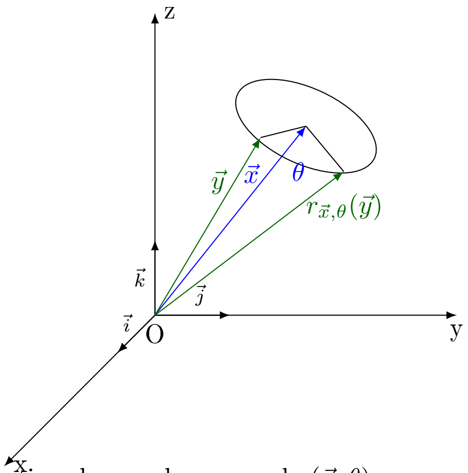
$$[u]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

qui a permutation des vecteurs de base près est du type voulu. ∎

**Définition 9 (*Rotation*)**

La **rotation**, $r_{\vec{x},\theta}$, d'axe $\vec{x}$ et d'angle $\theta$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

- $r_{\vec{x},\theta}(\vec{x}) = \vec{x}$
- la restriction de $f$ au plan $vect\vec{x}^{\perp}$ orienté par $\vec{x}$ est la rotation (plane) d'angle $\theta$.




Étude pratique d'une rotation $r$ : détermination du couple axe-angle $(\vec{x},\theta)$.

1. axe : choisir un vecteur non nul $\vec{x}$ appartenant à $\ker(r - Id_E)$
2. rotation :
   - La trace étant un invariant de similitude, $\operatorname{tr} r = 1 + 2\cos\theta$ ce qui fournit $\cos\theta$
   - la signe de $\sin\theta$ est le même que $\det(\vec{x},\vec{y},r(\vec{y}))$ où $\vec{y}$ est un vecteur non colinéaire à $\vec{x}$.
   
     En effet : $\det(\vec{x},\vec{y},r(\vec{y})) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 & x_2\cos\theta - x_3\sin\theta \\ 0 & x_3 & x_2\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix} = (x_2^2 + x_3^2)\sin\theta.$

**Exemple 6**

Caractériser l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- rotation vectoriel : les colonnes de $A$ forment une base orthonormée donc $f$ endomorphisme orthogonal. De plus $\det(A) = 1$, $f$ est une rotation.
- axe : on obtient $\operatorname{Ker}(A - I_3) = Vect(1,1,1)$. Posons $\vec{x} = (1,1,1)$.
- angle :
  - $\operatorname{tr}(A) = 2$, et donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Pour déterminer le signe de $\theta$, on pose $\vec{y} = (1,-1,0)$ non colinéaire $\vec{x}$. $f(\vec{y}) = (1,0,-1)$ et $\det(\vec{x},\vec{y},r(\vec{y})) = 3 > 0$. ce qui signifie $\theta\theta \in ]0,\pi[modulo 2\pi$. On en déduit donc que $f$ est la rotation d'axe dirigé par $(1,1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

# II Endomorphismes symétriques et Matrices symétriques

## A Généralités

**Définition 10 (*Endomorphismes symétriques*)**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que $u$ est un endomorphisme **symétrique** (ou *autoadjoint*) si

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y})\rangle.$$

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $E$.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

**Définition 11 (*Matrices symétriques*)**

Une matrice **symétrique**, $S$, est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée, soit $S^\top = S$.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de taille $n$.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Exemple 7**

La matrice suivante est symétrique :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Toute matrice diagonale est symétrique.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors $XX^\top$ est symétrique.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^\top A$ est symétrique.

**Exemple 8 (*Matrice hessienne*)**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sa matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

est symétrique.

**Exemple 9 (*Matrice de covariance*)**

La matrice de covariance du vecteur aléatoire $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ définie par :

$$\mathrm{Var}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$

est symétrique.

**Proposition II.1 (*Endomorphisme symétrique et matrice symétrique*)**

*Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
*Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i. $u$ est un endomorphisme symétrique ;*
*ii. pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$, $[u]_\mathcal{B}$ est une matrice symétrique ;*
*iii. il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $[u]_\mathcal{B}$ est une matrice symétrique.*

**Proposition II.2**

*Muni du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, une matrice $S$ est symétrique si et seulement si :*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle.$$

**Définition 12 (*Matrices antisymétriques*)**

Une matrice **antisymétrique**, $A$, est une matrice carrée qui est égale à l'opposée de sa propre transposée, soit $A^\top = -A$.
On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n$.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

**Proposition II.3 (*Supplémentaires orthogonaux*)**

*$\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $SnR$ sont des supplémentaires orthogonaux par rapport au produit scalaire $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$.*
*La décomposition d'une matrice $M$ selon cette somme directe est :*

$$M = \frac{M + M^\top}{2} + \frac{M - M^\top}{2}.$$

## B Produit scalaire

**Définition 13 (*Positive*)**

Une matrice symétrique, $S$, est **positive** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad X^\top S X \geqslant 0.$$

**Définition 14 (*Définie*)**

Une matrice symétrique, $S$, est **définie** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad X^\top S X = 0 \Rightarrow X = 0.$$

**Proposition II.4 (*Produit scalaire associée à une matrice symétrique positive et définie*)**

*Soit $S$ une matrice symétrique, définie et positive.*
*Alors* $\langle , \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & X^\top S Y \end{array} \right.$ *est un produit scalaire.*

**Proposition II.5 (*Expression d'une produit scalaire associée à l'aide une matrice symétrique positive*)**

*Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de $E$.*
*Alors*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}^\top \times S \times [\vec{y}]_{\mathcal{B}} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

*Ainsi définie, $S$ est une matrice symétrique définie et positive.*

## C Diagonalisation

**Lemme II.6 (*Stabilité et orthogonal*)**

*Soit $u$ un endomorphisme symétrique de $E$. Soit $F$ sous espace vectoriel stable par $u$.*
*Alors son orthogonal $F^\perp$ est également stable par $u$.*

**Lemme II.7** (***Sous espace propres orthogonaux***)

*Soit $u$ un endomorphisme symétrique de $E$.*
*Alors les sous-espaces propres de $S$ sont deux à deux orthogonaux.*

**Théorème II.8** (***Théorème spectral (endomorphisme symétrique)***)

*Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont toutes réelles.*

**Démonstration :** Soit $u$ un endomorphisme symétrique et
On montre d'abord qu'il existe au moins une valeur propre réelle, puis on restreint $u$ par récurrence sur la dimension de l'espace :

- Tant que $u$ est un endomorphisme de dimension non nulle
  - Existence d'une valeur propre réel : soit $S$ la matrice de $u$ dans une base quelconque. Il existe $\lambda$ une racine a priori complexe de son polynôme caractéristique et $X$ un vecteur propre complexe non nulle telle que $AX = \lambda X$.
    Alors
    $$\begin{cases} (SX)^\mathsf{T}\overline{X} = \lambda X^\mathsf{T}\overline{X} \\ (SX)^\mathsf{T}\overline{X} = X^\mathsf{T}S^\mathsf{T}\overline{X} = X^\mathsf{T}S\overline{X} = X^\mathsf{T}\overline{SX} = X^\mathsf{T}\overline{\lambda X} = \overline{\lambda}X^\mathsf{T}\overline{X} \end{cases}$$
    Comme $X^\mathsf{T}\overline{X} \neq 0$, $\lambda = \overline{\lambda}$, donc $\lambda$ est réel.
  - Soit $E_\lambda$ l'espace propre associée à la valeur propre $\lambda$. On a $E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp = E$. D'après le lemme, $E_\lambda^\perp$ est stable par $u$. Alors $u$ devient la restriction de $u$ à $E_\lambda^\perp$. ■

**Théorème II.9** (***Théorème spectral (matrice symétrique)***)

*Soit $S$ une matrice symétrique réelle.*
*Alors il existe une matrice $P$ orthogonale et une matrice $D$ diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice $A$ est égale à $PDP^{-1} = PDP^\mathsf{T}$.*

**Proposition II.10** (***Caractérisation de la projection orthogonale***)

*Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $s$ une symétrie.*
*Alors $p$ est une projection orthogonale si et seulement si $p$ est un endomorphisme symétrique.*
*Alors $s$ est une symétrie orthogonale si et seulement si $s$ est un endomorphisme symétrique.*