

Exercice Convergence implique bornée

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Correction Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| < \epsilon.$$

Choisissons $\epsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geq N$, nous avons $|u_n - l| < 1$; autrement dit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=0, \dots, N-1} \{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell + 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M'$. De même en posant $m = \min_{n=0, \dots, N-1} \{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m'$.

Exercice Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt[3]{n} + 5n} & 2. u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \\ 3. u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)} & 4. u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \\ 5. u_n = 3^n e^{-3n}. \end{array}$$

Exercice Somme télescopique

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}.$$

2. En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}.$$

3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

Exercice Exemple de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

$$\begin{array}{ll} 1. & u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} \\ 2. & u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}. \end{array}$$

Exercice Avec des quantificateurs

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. (u_n) est bornée.
2. (u_n) n'est pas croissante.
3. (u_n) n'est pas monotone.
4. (u_n) n'est pas majorée.
5. (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice Moyenne de Cesàro

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On pose $S_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

1. On suppose que (u_n) converge vers 0. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \varepsilon$.

(a) Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + \varepsilon.$$

(b) En déduire que (S_n) converge vers 0.

2. On suppose que $u_n = (-1)^n$. Que dire de (S_n) ? Qu'en déduisez-vous?
3. On suppose que (u_n) converge vers l . Montrer que (S_n) converge vers l .
4. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Montrer que (S_n) tend vers $+\infty$.
5. Trouver un exemple de suite qui diverge mais dont la moyenne de Cesàro converge.

Exercice Convergence des suites extraites

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que (u_n) est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

Exercice Suite Héron

Etudier la suite :

$$u_0 > \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$