Chapitre 1

Série entière

Exemple 1 (***Série exponentielle***)

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad (E)$$

Par définition, l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre est l'application $x \to e^x$.

1. Déterminons les solutions de (E) sous forme polynomiale. Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Pour des raisons de degré, uniquement le polynôme nul convient. Comme $f(0) = 1$, il n'existe pas de solutions.
2. Déterminons les solutions de (E) sous forme "polynomiale de degré infini". Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. "Soit x."
   "Par dérivation", on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big) \\
\frac{d}{dx}f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) \text{ "par interversion des symboles dérivée et somme"} \\
\frac{d}{dx}f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
\frac{d}{dx}f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ par translation d'indice}
\end{aligned}$$

   Comme $f'(x) = f(x)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

   "Par identification", on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+1) a_{n+1} = a_n.$$

   Par récurrence, on prouve que

$$a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

Comme la condition initiale est $f(0)=1$ et $f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$, on obtient $a_0=1$. Comme la fonction exponentielle est l'unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale, on trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans ce chapitre, nous allons donner du sens aux guillemets de l'exemple précédent :

1. "Soit x." : déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, c'est à dire déterminer le domaine de convergence de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
2. "Par dérivation" : déterminer la dérivabilité de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
3. "Par interversion des symboles dérivée et somme" : démontrer l'égalité,
4. "Par identification" : démontrer l'unicité du développement sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Une **série entière** est un "polynôme de degré infini" :

$$\sum a_n z^n$$

où les coefficients a_n forment une suite réelle ou complexe et z une variable complexe.

Les séries entières sont

1. un outil :
   (a) dans la résolution d'équations différentielles, par exemple $(1+x)y' = \alpha y$, en cherchant les solutions sous la forme $y(x) = \sum a_n x^n$,
   (b) dans l'étude du comportement asymptotique d'un somme de variable aléatoires et la caractérisation d'une variable aléatoire par la fonction génératrice : $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0} P(X=k)t^k$,
   (c) dans la modélisation des systèmes dynamiques de manière discrète à l'aide de la transformée en Z, soit $s(n)$ l'état du système au temps n, sa transformée en Z est

$$S(z) = \mathcal{Z}\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) z^{-n}.$$

2. un objet préalable à l'analyse complexe des fonctions holomorphes et analytiques par exemple la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$.

L'étude du cadre général des suites et séries de fonctions est un préalable à l'étude des séries entières qui sont un exemple de suites et de séries de fonctions.

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

Définition 1 (*Série entière*)

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n f_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{C}}$ est une suite numérique et où $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(z) = a_n z^n$. La **somme** de la série entière est la fonction

$$f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

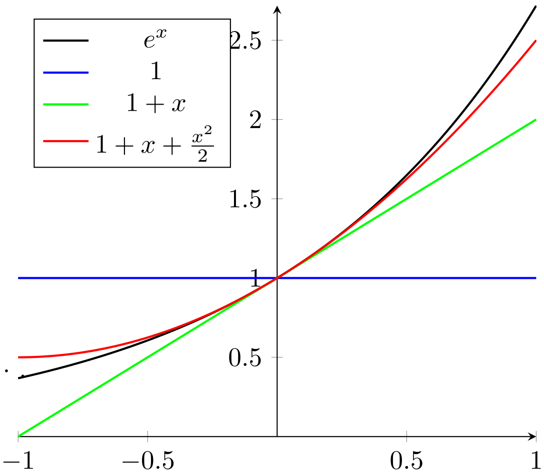
Remarque 1

Il faut bien distinguer la série entière $\sum a_n z^n$ qui est une **série de fonctions** (z étant une "variable muette") et la **série numérique** $\sum a_n z^n$ pour z complexe fixé.

Exemple 2 (***Série exponentielle***)

Comme vu dans l'exemple 1, la somme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$



La fonction exponentielle, $x \mapsto e^x$ en bleue, et les fonctions sommes partielles $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour différents valeurs de n. On observe la convergence de la fonction somme partielle vers la fonction exponentielle.

Exemple 3 (***Série géométrique***)

Soit $x \in]-1,1[$.
Par passage à la limite dans l'égalité,

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k,$$

on obtient que la somme de la série $\sum x^n$ est :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

1.1.2 Rayon de convergence

Définition 2 (***Domaine de convergence***)

On appelle **domaine de convergence** l'ensemble de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exemple 4 (***Série géométrique***)

Le domaine de convergence de la série géométrique $\sum x^n$ est $]-1,1[$.

Lemme 1.1.1 (***Lemme d'Abel***)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1. *La série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$.
2. *Plus précisément, la série de fonctions* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ *dès que* $0 \leqslant r < |z_0|$.

Démonstration : Fixons $|z| < |z_0|$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n\, z^n| = |a_n\, z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Par hypothèse, le premier des facteurs de ce produit est borné, le second forme une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

La démonstration pour la convergence normale est identique ($|a_n\, z^n| \leqslant |a_n\, r^n| = |a_n\, z_0^n| \left|\frac{r}{z_0}\right|^n$). ■

Remarque 2

Il n'y a pas toujours convergence normale (ni uniforme) sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$.

Lemme 1.1.2

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *telle que la suite numérique* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne soit pas bornée. Alors la série numérique* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| \geqslant |z_0|$.

Démonstration : Fixons $|z| \geqslant |z_0|$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n\, z^n| = |a_n\, z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \geqslant |a_n\, z_0^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ car } (a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée.}$$

Le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. ■

Si on note R, la borne supérieur des rayons telle que la suite $(|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors

- la série converge si le module du complexe z est strictement inférieur à R d'après le premier lemme,
- la série diverge si le module du complexe z est strictement supérieur à R d'après le second lemme.

Donc la "forme" géométrique du disque de convergence est un disque.

Définition-Proposition 1 (*Rayon de convergence*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Le **rayon de convergence** $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la série entière $\sum a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\Big\{ r > 0 \text{ tel que la suite de terme général } |a_n|\, r^n \text{ est bornée} \Big\}.$$

- Si $|z_0| < R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ converge absolument.
- Si $|z_0| > R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ diverge grossièrement ; plus précisément, la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- Si $|z_0| = R$, la série peut ou non converger.

FIGURE 1.1 – Disque de convergence d'une série entière dans le cas réelle

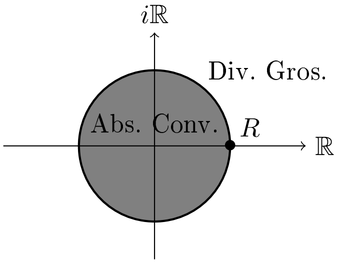


FIGURE 1.2 – Disque de convergence d'une série entière dans le cas complexe

Démonstration : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé.

— Si $|z| < R$ alors il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $|z| < r < R$. Comme $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le lemme d'Abel, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

— Si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. ■

Définition 3 (*Disque ouvert de convergence*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

— On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ à variable réelle l'intervalle

$$]-R, R[.$$

— On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ à variable complexe l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

— On appelle **cercle d'incertitude** (et parfois aussi, malheureusement, cercle de convergence) de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

1.2 Détermination du rayon de convergence

1.2.1 Encadrement du rayon de convergence

Si pour un z_0 l'on connait la nature de la série numérique $\sum a_n z_0^n$, on en déduit des informations sur le rayon de convergence.

Proposition 1.2.1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

— *Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \geqslant R$.*

— *Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \leqslant R$.*

— *Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est semi convergente, alors $|z_0| = R$.*

Exemple 5

Soit la série entière $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n}$.

Si $x = -1$, la série alternée $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

1.2.2 Utilisation de la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes strictement positifs nous permet la plupart du temps de déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Exemple 6

Soit la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En posant $u_n = \frac{x^n}{n}$, déterminons la nature de la série numérique $\sum u_n$.
D'après la règle de d'Alembert, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = |x|\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Si $|x| < 1$ la série numérique converge absolument, donc $R \geqslant 1$.
Si $|x| > 1$ la série numérique ne converge pas absolument, donc $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.

Exemple 7 ($\sum a_n x^{\alpha n}$)

Soit la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2^n+1}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En posant $u_n = \frac{x^{2n}}{2^n+1}$, déterminons la nature de la série numérique $\sum u_n$.
D'après la règle de d'Alembert,, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1}+1}}{\frac{x^{2n}}{2^n+1}}\right| = |x^2|\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|x|^2}{2}.$$

Si $\frac{|x|^2}{2} < 1$, soit $|x| < \sqrt{2}$, la série numérique converge absolument, donc $R \geqslant \sqrt{2}$.
Si $\frac{|x|^2}{2} > 1$, soit $|x| > \sqrt{2}$, la série numérique ne converge pas absolument, donc $R \leqslant \sqrt{2}$.
Finalement, $R = \sqrt{2}$.

1.2.3 Utilisation de la règle de comparaison

Proposition 1.2.2

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a et R_b.

1. *Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.*
2. *Si $|a_n| = \mathrm{o}(|b_n|)$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a \geqslant R_b$.*
3. *Si $|a_n| = \mathrm{O}(|b_n|)$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a \geqslant R_b$.*
4. *S'il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \sim K|b_n|$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a = R_b$.*

Démonstration : Démontrons uniquement la première proposition.
Soit $|z| < R_b$ fixé. La série numérique $\sum |b_n z^n|$ est donc convergente. Comme $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, on a $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$. Cela implique que la série numérique $\sum |a_n z^n|$ est convergente. En conclusion, $R_a \geqslant R_b$. ∎

Exemple 8

Déterminer une borne du rayon de convergence de la série $\sum \sin(n) z^n$.
Comme $|\sin(n)| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence est supérieur ou égale à 1, rayon de convergence de $\sum z^n$.

Exemple 9

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \ln(1 + 1/n) z^n$.

Comme $|\ln(1+1/n)| \sim 1/n$, le rayon de convergence est égale à 1, rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$.

1.2.4 Série entière de la forme $\sum n^\alpha a_n z^n$

Proposition 1.2.3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration : Soit R et R' les rayons de convergences des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ respectivement.

On suppose $\alpha \geqslant 0$.

- Comme $|a_n| \leqslant |n^\alpha a_n|$, d'après la règle de comparaison, $R \geqslant R'$.
- Soit $|z| < R$ fixé. Montrons que la série numérique $\sum n^\alpha a_n z^n$ converge absolument.
  Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < r < R$.
  On a :
  $$|n^\alpha a_n z^n| = |n^\alpha \frac{z^n}{r^n}||a_n r^n| \leqslant M|a_n r^n| \text{ car } |n^\alpha \frac{z^n}{r^n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
  Comme la série numérique $\sum |a_n r^n|$ converge puisque $|r| < R$, la série numérique $\sum |n^\alpha a_n z^n|$ converge par règle de comparaison. En conclusion $R' \geqslant R$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, il faut reprendre cette preuve en inversant l'ordre. ■

Exemple 10

Le rayon de convergence de la série $\sum n^{2019} z^n$ est égale au rayon de convergence de $\sum z^n$, soit 1.

1.3 Opérations sur les séries entières

1.3.1 Combinaison linéaire

Proposition 1.3.1

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

1. *$\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou $R \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$. De plus, pour $|z| < R$, sa somme est égale à :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$
2. *$\sum \alpha a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\alpha \neq 0$ et $+\infty$ si $\alpha = 0$. De plus, pour $|z| < R$, sa somme est égale à :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Démonstration 1. : Ce schéma permet de guider la preuve.

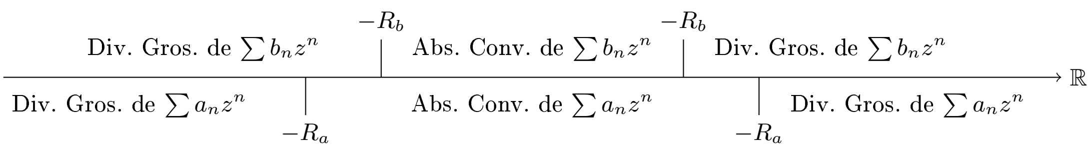


FIGURE 1.3 – Les rayons de convergence dans le cas réelle

— Cas $R_a \neq R_b$: supposons sans perte de généralité que $R_a < R_b$.

  — Soit $|z| < R_a$ fixé d'où $|z| < R_b$. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ converge absolument. Donc la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument. D'où $R \geqslant R_a$.
  — Soit $R_a < |z| < R_b$. La série numérique $\sum a_n z^n$ diverge et la série numérique $\sum b_n z^n$ converge. Donc la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge. D'où $R \leqslant R_a$.

  Finalement $R \geqslant R_a$.

— Cas $R_a = R_b$:
  — Soit $|z| < R_a = R_b$ fixé. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ converge absolument. Donc la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument. D'où $R \geqslant R_a$.
  — Soit $|z| > R_a = R_b$ fixé. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ divergent. Donc on ne peut rien conclure sur la convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$.

  Finalement $R \geqslant R_a$. ■

Exemple 11 (*Rayon de convergence*)

1. $\sum z^n$ et $\sum n z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum (1+n) z^n$ est de rayon 1.
2. $\sum z^n$ et $\sum (2^{-n} - 1) z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum (1+n) z^n$ est de rayon 2.
3. $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum 0 z^n$ est de rayon ∞.

Exemple 12 (*Déterminer la somme*)

Soit la série entière $\sum (1 + \frac{1}{n!}) x^n$.
Comme $\sum x^n$ est de rayon 1 et $\sum \frac{x^n}{n!}$ de rayon ∞, le rayon de $\sum (1 + \frac{1}{n!}) x^n$ est 1.
Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{n!} + 1) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = e^x + \frac{1}{1-x}.$$

1.3.2 Produit de Cauchy

Proposition 1.3.2

*Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Le **produit de Cauchy** $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n?k}$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour $|z| < R$, sa somme est égale à :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration : Soit $|z| < \min(R_a, R_b)$. Soit la série numérique $\sum w_n$ produit de Cauchy des séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = c_n z^n$$

Comme $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, la série numérique $\sum w_n$ est absolument convergente , soit $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

■

Exemple 13

Le produit de Cauchy de la série géométrique avec elle-même a un rayon égale à 1. De plus, pour tout $|x| < 1$, on a :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Exemple 14

Le produit de Cauchy de la série exponentielle et de la série géométrique a un rayon égale à 1. De plus, pour tout $|x| < 1$, on a :

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^n.$$

1.4 Propriétés de la somme

La régularité des séries entières est étudiée uniquement dans le cas d'une variable réelle. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(n)x^n$.

Théorème 1.4.1 (*continuité*)

f est continue sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$.

Exemple 15

$f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(n)x^n$ est continue sur $]-R, R[$.

Théorème 1.4.2 (*dérivation terme à terme*)

$\sum n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R.
f est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa fonction dérivée sur $]-R, R[$, f', est égale à :

$$\forall x \in]R, R[: f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple 16 (*dérivation de la série géométrique*)

Soit la série géométrique $\sum x^n$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[: \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par le théorème de dérivation terme à terme, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[: \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Donc la somme de la série entière $\sum_n n x^{n-1}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.

Théorème 1.4.3 (*intégration terme à terme*)

$\sum n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R.
Soit F une primitive de f. On a

$$\forall x \in]R, R[\colon F(x) - F(0) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 17 (*intégration de la série géométrique*)

Soit la série géométrique $\sum x^n$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Donc la somme de la série entière $\sum_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$.

1.5 Développements en séries entières

1.5.1 Généralités

Définition 4 (*fonction développable en série entière*)

On dit que f est **développable en série entière** sur $]-r, r[$ (au voisinage de 0) si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple 18 (*série géométrique*)

On a :

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^{N} x^n.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière.

Théorème 1.5.1 (*condition nécessaire*)

*Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-r,r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa **série de Taylor** :*

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Remarque 3

La réciproque du théorème est fausse. Il se peut qu'une fonction f soit de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-r,r[$ sans que f soit développable en série entière. Considérons, par exemple, la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

- L'application f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^*$ et on montre, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad , f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

  Une application répétée du théorème limite de la dérivée permet de déduire que f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

- Si f était développement en série entière, il existerait r tel que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \overbrace{=}^{f^{(n)}(0)=0} 0,$$

  ce qui est impossible puisque f ne s'annule qu'en 0.

Corollaire 1.5.2 (*unicité du développement en série entière*)

Si

$$\forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

Remarque 4

Cette égalité $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 x^n$ est importante.

Corollaire 1.5.3 (*développement limitée*)

Si

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors on a :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \mathrm{o}(x^N).$$

1.5.2 Méthodes pratiques

1. Utilisation des opérations somme et produit.

Exemple 19

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} + 2e^x$.

$$\forall x \in]-1,1[: \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+\frac{2}{n!})x^n.$$

2. Changement de variable.

Exemple 20

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{a-x}$.

$$\forall x \in]-a,a[: \quad f(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} \overbrace{=}^{\text{en posant } y=\frac{x}{a} \text{ avec } \frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{+\infty} y^n} \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

3. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Exemple 21

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$.

$$\forall x \in]-1,1[: \quad f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n.$$

4. Dérivation et intégration terme à terme.

Exemple 22

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(1-x)$.
Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -\int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n dt \text{ (théorème d'intégration terme à terme)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

5. Utilisation d'une équation différentielle.

Exemple 23

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \cos(x)$..

La fonction f est l'unique solution du problème de Cauchy de l'équation différentielle :

$$y'' = -y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, \text{ sur } \mathbb{R} \quad (E).$$

Supposons qu'il existe une solution de (E) sous forme de série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de somme f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \text{ (les deux premiers termes sont nuls)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \text{ (translation d'indice).} \end{aligned}$$

Comme $f'' = -f$, par identification, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n.$$

On a $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$. D'après les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, d'où $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Par récurrence, on démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!} x^{2n}.$$

1.6 Développements en série entière usuels

Dans l'exemple introductif du chapitre, la fonction exp est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y$ avec $y(0) = 1$. On prolonge exp à $\mathbb{C}$.

Définition 5 (*Exponentielle complexe*)

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini. Sa somme est appelé l'**exponentielle complexe**. On a ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On note $e^z = \exp(z)$.

Proposition 1.6.1

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z.e^{z'}.$$

Démonstration : La démonstration est faite dans le chapitre sur les séries numériques à la section produit de Cauchy. ■

On a aussi :

$R=\infty$	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$
$R=\infty$	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$
$R=\infty$	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$
$R=\infty$	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$
$R=1$	$\forall x \in]-1,1[:$	$\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n$
$R=1$	$\forall x \in]-1,1[:$	$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$