Chapitre 1

Application linéaire

Sommaire

1.1 Applications linéaires 4
- 1.1.1 Proportionnalité : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 4
- 1.1.2 Calcul matriciel : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 4
- 1.1.3 Cas général : $E \to F$ 11
- 1.1.4 Dualité entre le point vue vectoriel et le point de vue matriciel en dimension finie 12
- 1.1.5 Endomorphisme/Matrice carré 16

1.2 Image et noyau 17
- 1.2.1 Généralités 17
- 1.2.2 Effet d'une applications linéaire sur la dimension 19
- 1.2.3 Théorème du rang : $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$ 20

1.3 Changement de base 21
- 1.3.1 D'une représentation à l'autre 21
- 1.3.2 Similitude 23

1.4 Endomorphisme/Matrice carré 24
- 1.4.1 Déterminant 24
- 1.4.2 Trace 27
- 1.4.3 Polynôme d'endomorphismes/de matrices carrés 27

1.5 Catégories d'applications linéaires 29
- 1.5.1 Forme linéaire : $E \mapsto \mathbb{K}$ 29
- 1.5.2 Projecteur/Symétrie 30
  - Projecteur $p(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1}$ 30
  - Symétrie : $s(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1} - \vec{x_2}$ 31

1.6 Matrices par blocs 32

1.7 Annexe 34
- 1.7.1 Dualité entre l'interprétation algébrique et l'interprétation algébrique 34
- 1.7.2 Exercice de synthèse : endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$ 37

Introduction 1

Comme souvent en mathématiques, ce sont plus les transformations qui sont intéressantes et pertinentes que les objets eux-mêmes.
Une application linéaire est un cas particulier de transformation. Dans le langage courant, un phénomène est dit linéaire si les effets sont proportionnels aux causes.
Plus précisément, un phénomène peut être décrit par une transformation $x \mapsto f(x)$, où x représente la ou les causes (par exemple une différence de potentiel) et $f(x)$ un effet auquel

on s'intéresse (par exemple l'intensité d'un courant électrique). On dit que le phénomène est linéaire quand l'effet est proportionnel à la cause (exemple : l'intensité de courant est proportionnel à la différence de potentiel, en d'autres termes, si on double la différence de potentiel, on double l'intensité du courant résultant, si on somme de deux différence de potentiel, on somme l'intensité du courant résultant). Beaucoup de phénomènes en sciences ne sont pas linéaires. Dans de tels cas, de "petites causes" peuvent avoir de "grands effets".
D'un point de vue mathématiques, une transformation préservant la structure d'espace vectoriel est une application linéaire. Les matrices sont des tableaux de nombres qui servent à interpréter en termes calculatoires et donc opérationnels les applications linéaires dont les espaces vectoriels sont de dimensions finies.

Notations : $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Applications linéaires

1.1.1 Proportionnalité : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Définition 1

Traduisant la proportionnalité, une fonction $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dite linéaire si $u : x \mapsto kx$ où k est appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple 1

Le prix d'un plein d'essence est une fonction linéaire du nombre de litres d'essence.

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. On a

$$\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\text{accroissement de la fonction}} = \overbrace{\mathrm{d}f_a(h)}^{\text{terme linéaire}} + \overbrace{h.\epsilon(h)}^{\text{petit terme correctif}}$$

où l'application $\mathrm{d}f_a$, appelé différentielle de f en a, est linéaire : $\mathrm{d}f_a(h) = f'(a).h$ avec $f'(a)$ coefficient de proportionnalité.

Proposition 1.1.1

Soit u une fonction linéaire. Alors

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x+y) = u(x) + u(y)$ *(si on somme de deux entrées, on somme les sorties résultantes) ;*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ *(si on multiplie l'entrée par une valeur, on multiplie la sortie résultante par cette valeur).*

1.1.2 Calcul matriciel : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Exemple 3 (*Exemple introductif*)

Une usine fabrique des vélos, des trottinettes et des rollers. Le prix payé, y, pour x_1 vélos, x_2 trottinettes et x_3 rollers est une fonction linéaires des prix unitaires d'achat 150 €, 40 € et 20 € respectivement. On a donc :

$$y = 150x_1 + 40x_2 + 20x_3.$$

On représente cette opération à l'aide de tableaux :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$150 \times x_1 + 40 \times x_2 + 20 \times x_3$$

$$y = \begin{pmatrix} 150 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

Les prix unitaires d'envoi sont respectivement égaux à 5 € pour un vélo, 2 € pour la trottinette et 1 € pour les rollers. Le prix payé est encore une fonction linéaire :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150x_1 + 40x_2 + 20x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 1x_3 \end{pmatrix}.$$

avec y_1 prix des marchandises et y_2 prix d'envoi.
On représente cette opération à l'aide de tableaux :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$5 \times x_1 + 2 \times x_2 + 1 \times x_3$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 50 & 25 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices sont donc des tableaux de nombres qui servent à interpréter en termes calculatoires et donc opérationnels les applications linéaires.

Définition 2 (*Matrice*)

Une **matrice**, A, de taille $n \times p$ à coefficients $\mathbb{K}$ est une famille d'élément de $\mathbb{K}$, $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ présentée sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Le scalaire a_{ij} est appelé **coefficient de A de position (i,j)**.

La matrice $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la $j^{\text{ième}}$ **colonne** de A.

La matrice $L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est appelée la **$i^{\text{ième}}$ ligne** de A.
L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En particulier,

— Pour $n = p$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est appelé **ensemble des matrices carrés** avec la notation simplifiée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La famille $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelé **diagonale de A**.

— Pour $p = 1$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé **ensemble des matrices colonnes**.

— Pour $p = 1$, $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelé **ensemble des matrices lignes**.

Exemple 4 (*Matrice identité, matrice nulle*)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité de taille 2 et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle de taille 2×3.

Définition 3 (*Addition matricielle, multiplication par un scalaire*)

1. **Addition matricielle $+$** : la matrice $A + B$ est égale à :
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}.$$
2. **Multiplication par un scalaire $\cdot$** : la matrice λA est égale à :
$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.1.2

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1.1.3 (*Base canonique*)

La base canonique est $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. La matrice $E_{i,j}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) , qui vaut 1. Les coordonnées dans la base canonique d'une matrice A sont ses coefficients :
$$A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}.$$
On a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Exemple 6

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 4 (*Application linéaire d'une matrice*)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On définit une application linéaire, dite **canoniquement associée à M**, par

$$u_M \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array} \right. .$$

C'est une application linéaire car $M \times (X+Y) = M \times X + M \times Y$ et $M \times (\lambda X) = \lambda M \times X$.

Exemple 7 (*Exemple introductif*)

Dans l'exemple introductif, $M = \begin{pmatrix} 120 & 50 & 25 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire u_M est la fonction coût.

Remarque 1

On identifiera fréquemment les p-uplets avec les matrices colonnes ; cela est légitime car l'application

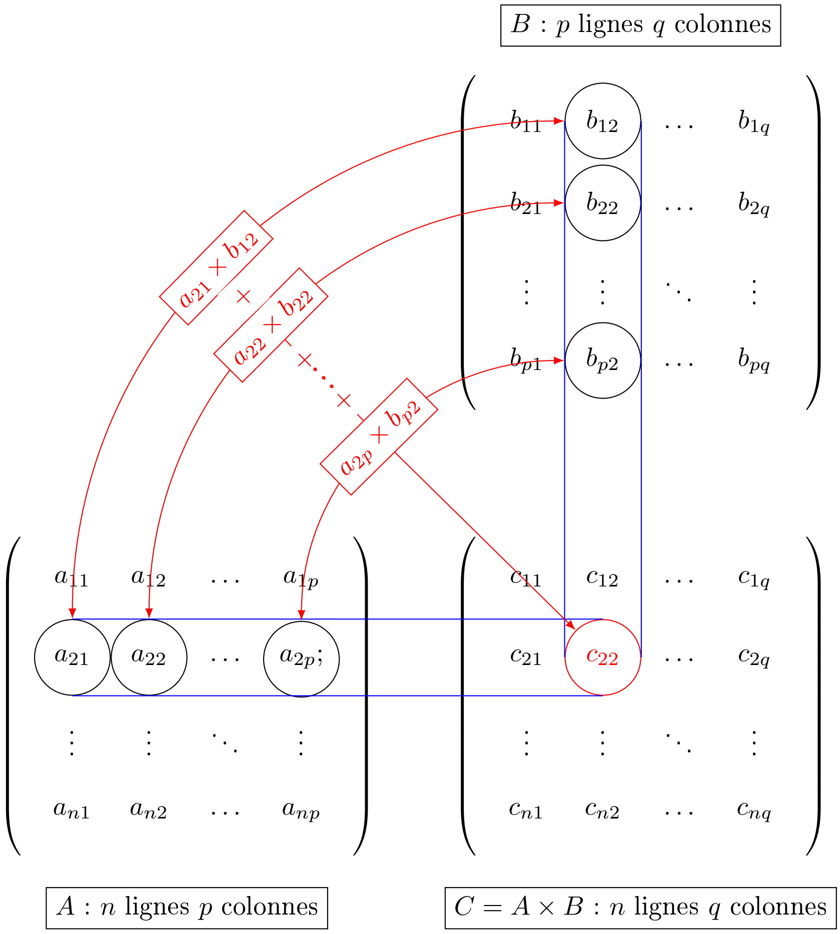
$$\Phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Par exemple, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{identification}} (x_1, x_2) = \vec{x}$.

Définition 5 (*Produit matriciel*)

Spot $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit produit matriciel $C = A \times B$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $(c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$



Remarque 2

En générale, le produit matriciel n'est pas commutatif ($AB = BA$). Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
De plus, en générale, le produit matriciel n'est pas intègre (si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$). C'est à dire un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 8

Une entreprise fabrique deux types de téléviseurs, téléviseurs HD et téléviseurs 4k. Pour fabriquer,

— un téléviseur HD il faut 1 unité de bureau d'études, 2 unités de main d'œuvre et 3 unités de composants électroniques,

— un téléviseurs 4k il faut 2 unités de bureau d'études, 3 unités de main d'œuvre et 6 unités de composants électroniques.

Le coût des unités sont les suivants : l'unité de bureau d'études coût 45 €; l'unité de main d'œuvre coûte 25 €; l'unité de composants coûte 30 €.
L'entreprise doit fabriquer 100 téléviseurs HD et 40 téléviseurs 4K.
Déterminons le coût total de cette commande.
On considère les trois matrices :

— Matrice A des coûts respectifs d'une unité de bureau d'études, de main d'œuvre et de composants électronique. La matrice A est une matrice 1 ligne, 3 colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

— Matrice B des quantités, sachant que la première colonne donne les quantités nécessaires en unités de bureau d'étude, de main d'œuvre et de composants électroniques pour un téléviseur HD et la seconde colonne les quantités nécessaires en unités de bureau d'études, de main d'œuvre et de composants pour la fabrication d'un téléviseur 4K. La matrice B est donc une matrice 3 lignes et 2 colonnes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

— Matrice C qui donne le nombre de téléviseurs HD et le nombre de téléviseurs 4K. La matrice C est une matrice 2 lignes, 1 colonne.

$$B = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$A \times B$ est la matrice qui donne le coût pour la fabrication d'un téléviseur HD et d'un téléviseur 4K.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 30 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \times 1 + 25 \times 2 + 30 \times 3 & 45 \times 2 + 25 \times 3 + 30 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 185 & 345 \end{pmatrix}$$

Le coût total de la fabrication est donc la matrice :

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 185 & 345 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 185 \times 100 + 345 \times 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 323000 \end{pmatrix}.$$

Exemple 9

La chaine youtube 3Blue1Brown donne un point de vue géométrique du calcul matriciel (voir https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab&index=1)

Proposition 1.1.4 (*Propriétés*)

1. ***Associativité*** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$:,
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$
2. ***Bilinéarité*** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}), \forall C, D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in K$:
$$(\lambda A + \mu B) \times C = \lambda A \times C + \mu B \times C \text{ et } A \times (\lambda C + \mu D) = \lambda A \times C + \mu A \times D.$$
3. ***Élément neutre*** : *on appelle* ***matrice identité*** *la matrice carré de taille* n :
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a $\forall A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$: $\quad I_n A = A I_q = A.$

1.1.3 Cas général : $E \to F$

Définition 6 (*Application linéaire*)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire**, si et seulement si elle préserve la structure d'espace vectoriel, c'est à dire :

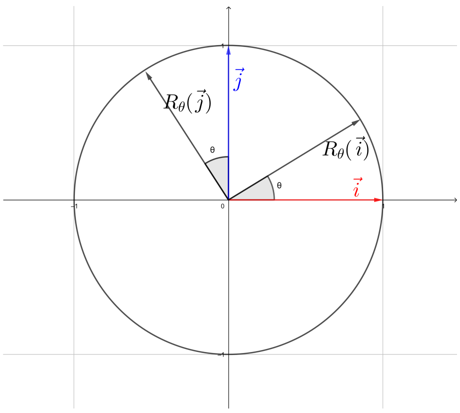
1. **addition** : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$;
2. **homogénéité** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E : \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$.

Ces deux conditions sont équivalentes à

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $u(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y})$.

Exemple 10

1. Équation d'un plan : $\Phi_1 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+3z \end{array} \right.$,
2. Intégration :$\Phi_2 \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([0,1]), \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \end{array} \right.$,
3. Dérivé de polynôme de degré au plus n : $\Phi_3 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$,
4. Rotation : $R_\theta \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right.$



Proposition 1.1.5

Si u est une application linéaire alors $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

Démonstration : Après simplification de $u(\vec{0}_E) = u(\vec{0}_E + \vec{0}_E) = u(\vec{0}_E) + u(\vec{0}_E)$, on obtient $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$. ■

Exemple 11

L'application $f(x,y) \mapsto (x+y, 1)$ n'est pas linéaire car $f(0,0) = (0,1)$.

Définition 7 (*Endomorphisme*)

— Une application linéaire dont l'espace de départ est le même que celui d'arrivée est un **endomorphisme**.

- Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Exemple 12

Φ_3 et R_θ sont des endomorphismes. Comme R_θ est bijectif, R_θ est un automorphisme.

Définition 8

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$; il s'agit d'un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions de E dans F muni des lois usuelles.
L'espace vectoriel des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 9 (*composition d'application linéaire*)

La **loi de composition interne** $\circ$ est définie comme une composition de fonctions, c'est à dire si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\forall \vec{x} \in E : (v \circ u)(\vec{x}) = v(u(\vec{x}))$.
On a $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Exemple 13

L'application $P \mapsto XP'(X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Les applications $P \mapsto P'$, $P \mapsto P(X^2)$ et $P \mapsto XP$ sont linéaire, donc par composition $P \mapsto XP'(X^2)$ l'est aussi.

Proposition 1.1.6 (*Propriétés*)

1. ***Associativité*** :
$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$
2. ***Bilinéarité*** :
$$(\lambda u + \mu v) \circ w = \lambda u \circ w + \mu v \circ w \text{ et } u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w.$$
3. ***Élément neutre*** : *on appelle* ***application identité*** :
$$Id_E : x \mapsto x.$$
On a $u \circ Id_E = Id_E \circ u = u$.

Remarque 3

On omet le plus souvent le symbole $\circ$: $v \circ u = vu$.

1.1.4 Dualité entre le point vue vectoriel et le point de vue matriciel en dimension finie

Dans cette sous-section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.
Pour déterminer une application quelconque, on n'a pas d'autre choix que de déterminer les images de chaque point $x \mapsto f(x)$. En revanche, une application linéaire est complètement déterminer par l'image d'une base. Par exemple, soit $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ une application linéaire avec $u(1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 1) = (1, -1)$. On a

$$u(x, y) = u(x(1, 0) + y(0, 1)) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} x.u(1, 0) + y.u(0, 1) = x.(1, 1) + y.u(1, -1) = (x + y, x - y).$$

Théorème 1.1.7

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les *images d'une base de l'espace vectoriel de départ.*

Exemple 14 (*Unité pour la proportionnalité*)

Il tape au rythme de 42 mots à la minute. Combien tape-t-il de mot en 10 minutes ?
Soit u l'application linéaire représentant le nombre de mot taper en fonction du temps. On a $u(1) = 42$. Donc $u(10) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} 10u(1) = 420$.

Définition 10 (*Coordonnées d'un vecteur*)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base de E.
On sait que tout vecteur $\vec{x} \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_p\vec{e_p}$ où $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$.
On appelle coordonnées de $\vec{x}$ dans la base E la matrice colonne

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemple 15 (*Polynôme*)

Soit $P = 1 - X^2 \in \mathbb{R}_n[X]$. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Définition 11 (*Matrice d'une application linéaire*)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n})$ une base de F. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, le vecteur $u(\vec{e_j})$ se décompose dans la base $\mathcal{B}'$:

$$u(\vec{e_j}) = a_{1j}.\vec{f_1} + \cdots + a_{nj}.\vec{f_n}.$$

On appelle **matrice de l'application linéaire u** la matrice, $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, définie par :

$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{array}{c c} \begin{matrix} u(\vec{e_1}) & \cdots & u(\vec{e_p}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{f_1} \\ \vdots \\ \vec{f_n} \end{matrix} \end{array}$$

Les autres notations sont $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(u)$.
Dans le cas d'un endomorphisme, $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on la note $[u]_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple 16 (*Dérivée polynomial*)

La matrice de $\Phi_3 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est :

$$[\Phi_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

car $\Phi_3(X^i) = iX^{i-1}$.

Théorème 1.1.8 (***Dualité***)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
L'application

$$\left|\begin{array}{rcl}\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\end{array}\right.$$

est linéaire et bijective, autrement dit un isomorphisme.

Corollaire 1.1.9

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Définition 12 (***Application linéaire d'une matrice***)

Inversement, si l'on se donne une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, on peut définir une application linéaire, dite **canoniquement associée à M**, par

$$u_M \left|\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X\end{array}\right. .$$

Si l'on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on vérifie que

$$[u_M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M.$$

Théorème 1.1.10 (***Image d'une application linéaire et image d'une matrice***)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\vec{x}$ un vecteur de E. Alors

$$[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times [\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$

ou si on pose $Y = [u(\vec{x})]_{\mathcal{B}'}$, $A = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$, on a :

$$Y = AX.$$

Exemple 17 (***Dérivée polynomial***)

Soit $P = 1 - X^2$. On a $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$. D'où

$$[\Phi_3(P)]_{\mathcal{B}} = [\Phi_3]_{\mathcal{B}}[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'où le résultat escompté $\Phi_3(P) = -2X$.

Théorème 1.1.11 (*Produit matriciel et composition d'applications linéaires*)

> *Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie munis des bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.*
> *Soit $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications linéaires.*
> *Alors*
> $$[v \circ u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [v]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \times [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

En résumé, si l'espace vectoriel de départ est le même que celui d'arrivée, avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E, nous avons :

Vectoriel		Matriciel
$\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + \dots + x_n.\vec{e}_n \in E$	$\longrightarrow$	$X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$u \in \mathcal{L}(E)$	$\longrightarrow$	$A = [u]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(\vec{e_1}) & \cdots & u(\vec{e_n}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array} \end{array}$
$\vec{y} = y_1.\vec{e}_1 + \dots + y_n.\vec{e}_n = u(\vec{x})$	$\longrightarrow$	$Y = [\vec{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \times X$
$u \circ v$ avec $u, v \in \mathcal{L}(E)$	$\longrightarrow$	$[u \circ v]_{\mathcal{B}} = A \times B$ avec $A = [u]_{\mathcal{B}}$ et $B = [v]_{\mathcal{B}}$
$u_M \left\vert \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array} \right. \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$	$\longleftarrow$	$M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

L'annexe 1.7.1 présente le lien entre le point de vue vectoriel $\vec{y} = u(\vec{x})$ et le point de vue matricielle.

1.1.5 Endomorphisme/Matrice carré

Définition 13 (*Structure d'algèbre des endomorphismes*)

> L'**élément neutre** de la composition dans $\mathcal{L}(E)$ est l'application identité, $\mathrm{Id}_E : x \mapsto x$. L'endomorphisme u^{-1} est appelé l' **endomorphisme inverse** de u si $u^{-1} \times u = u \times u^{-1} = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, l'endomorphisme u est dite **inversible**. $\mathcal{L}(E)$ possède une structure d'algèbre non commutative. L'espace vectoriel des automorphismes de E se note $\mathcal{GL}(E)$. $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire**.

Définition 14 (*Structure d'algèbre des matrices carrés*)

> L'**élément neutre** de la multiplication dans l'ensemble des matrices carrés $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité, I_n, avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.
> $$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A^{-1} est appelé la **matrice inverse** de A si $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} =$

I_n. Dans ce cas, la matrice A est dite **inversible**. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une structure d'algèbre non commutative. L'espace vectoriel des matrice inversibles de taille n se note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire**.

Proposition 1.1.12 (*Dualité*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$$u \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow [u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Aussi, soit M une matrice carré.

$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow u_M \in \mathcal{GL}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})).$$

1.2 Image et noyau

1.2.1 Généralités

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

Définition 15 (*Image directe et image réciproque*)

Soit $f : A \to B$. Soit A' une partie de A et B' une partie de B.
L'ensemble $\{f(x) : x \in A'\}$ est appelé **image directe** de A' par f et noté $f(A')$.
L'ensemble $\{x \in A : f(x) \in B'\}$ est appelé **image réciproque** de B' par f et noté $f^{-1}(B')$.

Exemple 18 (*Carré*)

Soit $f : x \mapsto x^2$.
On a $f([0,1]) = [-1,1]$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Proposition 1.2.1 (*Morphisme d'espace vectoriel*)

Soit E', F' deux sous-espace vectoriel de de E et F respectivement.

- *$u(E')$ est un sous espace vectoriel de F,*
- *$u^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de E.*

Remarque 4

En particulier pour l'application linéaire associée à M, $u_M(E')$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $u_M^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 1.2.2

Soit $(\vec{x_i})_{i\in I}$ une famille de E .
Alors

$$u(\mathit{Vect}((\vec{x_i})_{i\in I})) = \mathit{Vect}((u(\vec{x_i}))_{i\in I})).$$

Exemple 19

L'image de la droite vectoriel $\mathbb{R}(1,1)$ par R_θ est la droite vectoriel $\mathbb{R}R_\theta(1,1)$.

Définition 16 (*Noyau et image*)

— L'**image** de u est le sous espace vectoriel $u(E) = \{u(\vec{x}) : \vec{x} \in E\}$; on le note $\operatorname{Im} u$.

— Le **noyau** de u est le le sous espace vectoriel $u^{-1}\{\{\vec{0_F}\}\} = \{x \in E : u(\vec{x} = \vec{0_F}\}$; on le note $\operatorname{Ker} u$.

Proposition 1.2.3 (*Image d'une base*)

Soit $(\vec{e_i})_{i\in I}$ une base de E .
Alors

$$\operatorname{Im} u = \mathit{Vect}((u(\vec{x_i}))_{i\in I})).$$

Exemple 20

Soit $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$.

On a $u(x,y,z) = x(1,1) + y(1,-1) + z(0,1)$. Donc $\operatorname{Im} u$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $((1,1),(1,-1),(0,1))$ d'où $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = & 0 \\ x-y = & 0 \end{cases} \overset{x=t}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \exists t \in \mathbb{R} : (x,y,z) = t(1,1,2).$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(1,1,2)$.

Exemple 21 (*Dérivée polynomiale*)

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\Phi_3(P) = P' = a_1 + a_2.2X + \cdots + a_n.nX^{n-1}$. Donc $\operatorname{Im} \Phi_3$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(1, X, 2X, \ldots, nX^{n-1})$, soit $\operatorname{Im} \Phi_3 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$P \in \operatorname{Ker} \Phi_3 \Leftrightarrow \Phi_3(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : P = a.$$

Donc $\operatorname{Ker} \Phi_3 = \mathbb{R}_0[X]$.

Définition 17 (*Noyau et image*)

— L'**image** de M est le sous espace vectoriel $u_M(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \{MX : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$; on le note $\operatorname{Im} M$.

— Le **noyau** de M est le le sous espace vectoriel $u_M^{-1}\{\{0\}\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : MX = 0\}$; on le note $\operatorname{Ker} M$.

Exemple 22

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ On a $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{Im} M$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ d'où $\operatorname{Im} M = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = & 0 \\ x-y = & 0 \end{cases} \overset{x=t}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{Ker} M = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme M est la matrice associée à l'application linéaire de l'exemple 20, on retrouve les mêmes résultats en identifiant les n-uplets aux matrices colonnes.

Proposition 1.2.4 (*Image d'une base*)

L'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes.

Définition 18 (*Rang*)

Le **rang** d'une application linéaire u est la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} u$.
Le **rang** d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.

Proposition 1.2.5

Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Proposition 1.2.6 (*injective et surjective caractérisations*)

— *u est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0_E}\}$,

— *u est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} u = F$.

Proposition 1.2.7

Si u est bijective, alors u^{-1} est également linéaire.

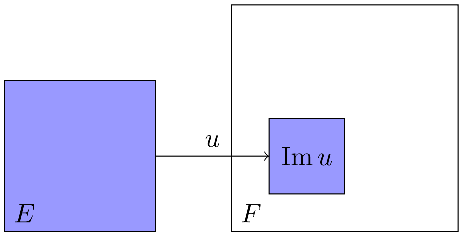
Proposition 1.2.8 (*Dualité*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

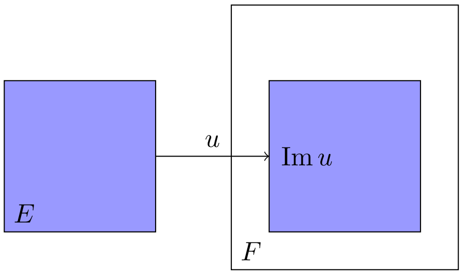
$$u \text{ est injective si et seulement si } \operatorname{Ker}[u]_{\mathcal{B}} = \{0\}.$$

1.2.2 Effet d'une applications linéaire sur la dimension

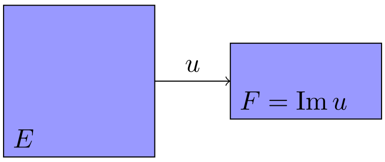
Une application linéaire, $u : E \to F$ ne peut que réduire la dimension de son ensemble de définition.



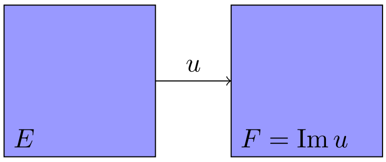
L'application est injective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim E$.



L'application est surjective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim F$.



L'application est bijective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim F = \dim E$.



Proposition 1.2.9 (*Inégalité et égalité sur le rang*)

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1. *Si F est de dimension finie, $\operatorname{rg} u \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si u est surjective.*
2. *Si E est de dimension finie, $\operatorname{rg} u \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si u est injective.*

Proposition 1.2.10 (*Cas* $\dim E = \dim F$)

Soit $u : E \to F$ une application linéaire tel que $\dim E = \dim F$.

$$u \text{ est bijective} \Leftrightarrow u \text{ est injective} \Leftrightarrow u \text{ est surjective.}$$

Soit $u : E \to E$ une application linéaire tel que $\dim E$ est finie.

$$\begin{array}{ccccc} u \text{ est bijective} & \Leftrightarrow & u \text{ est injective} & \Leftrightarrow & u \text{ est surjective} \\ u \in \mathcal{GL}(E) & \Leftrightarrow & u \text{ est inversible à gauche} & \Leftrightarrow & u \text{ est inversible à droite} \\ \exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E & \Leftrightarrow & \exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \mathrm{Id}_E & \Leftrightarrow & \exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \mathrm{Id}_E \end{array}$$

Exemple 23

Démontrons que l'application linéaire $u : (x, y) \to (x + y, x - y)$ est bijective.
Comme u est un endomorphisme, il suffit de démontrer qu'elle est injective.

$$(x, y) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{(0, 0)\}$.

Exemple 24

Démontrons que l'application linéaire $u : P \to P - P'$ est bijective sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme u est un endomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective.

$$P \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow P - P' = 0 \Leftrightarrow P = P'$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ car $\deg(P) = \deg(P')$ si et seulement $P = 0$.

Proposition 1.2.11 (*Inversibilité à gauche et à droite d'une matrice carré*)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ alors A et B sont toutes deux inversibles et inverses l'une de l'autre.

1.2.3 Théorème du rang : $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$

Les dimensions du noyau et l'image d'une application linéaire sont liées.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $C_3 = C_1 + C2$.

Image : $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) \overbrace{=}^{C_3=C_1+C2} \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$. Comme les vecteur C_1 et C_2 sont linéairement indépendants, $\dim(\operatorname{Im}(A)) = 2$.

Noyau : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A) \Leftrightarrow xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0 \overbrace{\Leftrightarrow}^{C_3=C_1+C2} (x+z)C_1 + (y+z)C_2 = 0$

$\overbrace{\Leftrightarrow}^{C_1, C_2 \text{linéairement indépendants}} \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1$.

On observe que $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$ =taille de la matrice.

Proposition 1.2.12 (*Factorisation*)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. Si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$, c'est à dire que l'application linéaire

$$v \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ \vec{x} & \longmapsto & u(\vec{x}) \end{array} \right.$$

est bijective.

Théorème 1.2.13 (*Théorème du rang*)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u.$$

Théorème 1.2.14 (*Théorème du rang version matricielle*)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Alors

$$p = \operatorname{rg} M + \dim \operatorname{Ker} M.$$

1.3 Changement de base

Il faut bien garder à l'esprit que la matrice d'une application linéaire est une "représentation" de celle-ci qui dépend du choix des bases au départ et à l'arrivée. Il est utile de savoir passer d'une représentation à une autre. Connaissant la matrice d'une application linéaire dans deux bases, il faut savoir la déterminer dans deux autres bases.

1.3.1 D'une représentation à l'autre

Définition 19 (*Matrice de passage*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = [\operatorname{Id}_E]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$

De façon plus explicite, notons $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$ et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$. Dans ce cas, on a

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \quad \vec{f_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e_i}.$$

Ainsi,

$$
P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \cdots\cdots & \vec{f_n} \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array}
\end{array}
$$

Proposition 1.3.1 (*Inversible*)

Si P est une matrice de passage alors P est inversible.
Si P est inversible alors P est la matrice de passage de la base canonique à la base de ses colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$.

Exemple 25

Dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathcal{B}$ est la base canonique et si $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)$, alors :
$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ La première matrice de passage ne nécessite aucun calcul, la seconde résulte de la méthode du Pivot de Gauss :

$$
\begin{array}{rl}
 & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
(L2) \leftarrow (L2) - 2(L1) & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
(L2) \leftarrow \frac{1}{5}(L2) & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \\
(L1) \leftarrow (L1) + (L2) & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)
\end{array}.
$$

Exemple 26

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$, considérons la base $\mathcal{B} = (X^i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$ et $\mathcal{B}' = ((X-1)^i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$.

$$
\text{Comme } \left\{ \begin{array}{rl} 1 & = 1 \times 1 \\ (X-1) & = (-1) \times 1 + 1 \times X \\ (X-1)^2 & = 1 \times 1 + (-2) \times X + 1 \times X^2 \end{array} \right. , \text{ on a } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Proposition 1.3.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors

1. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$ *;*
2. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ *est inversible, et son inverse est* $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$*.*

Proposition 1.3.3 (*Vecteur colonne*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $\vec{x}$ un vecteur de E.
Alors

$$X = PX'$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,

— $X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$,
— $X' = [\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$.

Proposition 1.3.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit F un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Alors on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,
— $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$,
— $A = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$,
— $A' = [u]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

Corollaire 1.3.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit u un endomorphisme de E. Alors on a

$$A' = P^{-1}AP$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,
— $A = [u]_{\mathcal{B}}$,
— $A' = [u]_{\mathcal{B}'}$.

1.3.2 Similitude

Définition 20 (*Similitude*)

Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si et seulement si existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 27

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représentant la symétrie orthogonal par rapport à la première bissectrice. Alors M est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a bien $M = PDP^{-1}$.

Proposition 1.3.6 (*Propriétés*)

Il s'agit d'une relation d'équivalence, c'est à dire :

1. $A \sim A$;
2. *si* $A \sim B$, *alors* $B \sim A$;
3. *si* $A \sim B$ *et* $B \sim C$, *alors* $A \sim C$.

Remarque 5

Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres. La réciproque est fausse.

Proposition 1.3.7

Soit u un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Alors les matrices $[u]_{\mathcal{B}}$ et $[u]_{\mathcal{B}'}$ sont semblables.

Proposition 1.3.8

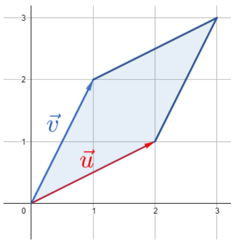
Soit A et B deux matrices. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons u l'unique endomorphisme de E tel que $[u]_{\mathcal{B}} = A$. Alors A et B sont semblables si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}'} = B$.
C'est à dire que deux matrices semblables représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

1.4 Endomorphisme/Matrice carré

Dans cette section, on étudie le cas où l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques : $f : E \to E$ est un endomorphisme. Si $\dim E = n$, alors chaque matrice associée à f est une matrice carrée de taille n.

1.4.1 Déterminant

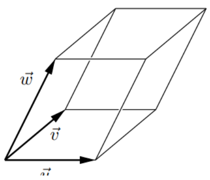
Point de vue géométrique : dans le plan, le déterminant, det, est une application permettant de calculer l'aire orientée du parallélogramme défini par deux vecteurs, $\vec{u}, \vec{v}$



On peut démontrer que l'aire orientée du parallélogramme est donnée par :

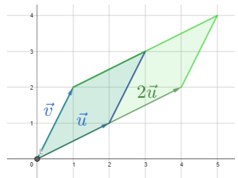
$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{array} \right. .$$

Le signe du déterminant s'interprète comme le signe de l'angle orienté entre les deux vecteurs. La valeur absolue du déterminant donne l'aire du parallélogramme engendré. Ceci se révèle crucial dans différents domaines des mathématiques, par exemple en analyse pour obtenir une formule de changement de variable pour les intégrales doubles.
On souhaite étendre l'application déterminant pour calculer le volume d'un parallélépipèdes défini par trois vecteurs dans l'espace : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



L'idée fondamentale est de prolonger l'application déterminant dans le plan à partir de ses propriétés.
Sur le plan, on remarque que cette application est :

1. **Normalisé** : l'aire du carré unité est 1, $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 1$
2. **2-linéaire** : linéaire par rapport à chaque une de ces deux variables.



3. **Alternée** : l'aire d'un parallélogramme aplati est 0, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{v}$.

Donc dans l'espace, cette application devrait être :

1. **Normalisé** : le volume du cube unité est 1, $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = 1$
2. **3-linéaire** : linéaire par rapport à chaque une de ces trois variables.
3. **Alternée** : le volume d'un parallélépipèdes aplati est 0, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = \vec{w}$ ou $\vec{v} = \vec{w}$.

Un théorème important est qu'il existe une unique application respectant ces propriétés quelque soit la dimension.
Dans la suite, les vecteurs sont rangés sous forme d'une matrice, par exemple $\det((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \det(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix})$.

Théorème 1.4.1 (*Unicité et existence du déterminant*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\det(\mathrm{I}_n) = 1$;
2. $\det(A) = 0$ *si deux colonnes de A sont égales ;*
3. *Si on fixe $n-1$ colonnes de A, l'application qui à la dernière colonne associe* $\det(A)$ *est linéaire.*

$$\lambda \det(C_1 \dots C_i \dots C_n) + \mu \det(C_1 \dots C'_i \dots C_n) = \det(C_1 \dots \lambda C_i + \mu C'_i \dots C_n).$$

Proposition 1.4.2 (*Propriétés*)

Cette application det *vérifie alors automatiquement les propriétés suivantes :*

1. ***antisymétrique*** :

$$\det(C_1 \dots C_i \dots C_j \dots C_n) = -\det(C_1 \dots C_j \dots C_i \dots C_n) \text{ si } i \neq j$$

2. ***stable par combinaison linéaire*** :

$$\det(C_1 \dots C_i \dots C_n) = \det(C_1 \dots C_i + \lambda C_j \dots C_n) \text{ si } i \neq j$$

3. ***homothétie d'une colonne*** :

$$\det(C_1 \dots \lambda C_i \dots C_n) = \lambda \det(C_1 \dots C_i \dots C_n)$$

En particulier,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

4. *stable par transposition*
$$\det(A) = \det(A^\mathsf{T})$$
5. *multiplication*
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
6. *inversible* $\det(A) \neq 0$ *si et seulement si A est inversible. Si A est inversible, son inverse est donnée par :*
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} comA^\mathsf{T}$$
où $comA^\mathsf{T}$ est la transposée de la comatrice de A.

Dans toutes les propriétés précédentes, on peut remplacer les opération sur les colonnes par des opération sur les lignes.

Proposition 1.4.3 (*Matrice triangulaire*)

Le déterminant d'une matrice triangulaire, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, *est égale au produit des coefficients de la diagonale, soit $a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$.*

Définition 21 (*Déterminant d'un endomorphisme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
La quantité $\det(M)$ ne dépendant pas du choix de la base $\mathcal{B}$, mais seulement de u, on l'appelle **déterminant** de l'endomorphisme u et on note $\det(u) = \det(M)$.

Exemple 28 (*Déterminant de Vandermonde*)

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$. La **matrice de Vandermonde** associée à $(a_1, \ldots, a_n)$ est
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
Le **déterminant de Vandermonde** $V(a_1, \ldots, a_n)$ est le déterminant de la matrice de Vandermonde ci-dessus. On a :
$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$
En particulier,
- $V(a) = 1$,
- $V(a, b) = b - a$,
- $V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b)$.

La matrice de Vandermonde associée à $(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si et seulement si les nombres $(a_1, \ldots, a_n)$ sont deux à deux distincts.

1.4.2 Trace

Définition 22 (*Trace*)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
La **trace** de la A est le scalaire

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Proposition 1.4.4 (*Propriétés*)

1. *La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, pour toutes matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a*

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

2. *Pour toutes matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

3. *Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elles ont la même trace.*

Remarque 6

En général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

Définition 23 (*Trace d'un endomorphisme*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. La quantité $\operatorname{tr}(M)$ ne dépendant pas du choix de la base $\mathcal{B}$, mais seulement de u, on l'appelle **trace** de l'endomorphisme u et on note $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(M)$.

Proposition 1.4.5 (*Propriétés*)

1. *La trace est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$.*
2. *Si u et v sont deux endomorphismes de E, alors $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.*

1.4.3 Polynôme d'endomorphismes/de matrices carrés

Définition 24 (*Polynôme d'endomorphismes*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
On définit par récurrence u^n pour $n \in \mathbb{N}$ par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u \circ u^n$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$.

Définition 25 (*Polynôme de matrices carrés*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carré.
On définit par récurrence M^n pour $n \in \mathbb{N}$ par $M^0 = \mathrm{I}_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{n+1} = M \times M^n$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$.

Proposition 1.4.6 (*Binôme de Newton*)

La formule du binôme est vérifiée quand les deux endomorphismes u et v commutent :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

La formule du binôme est vérifiée quand les deux matrices carrés A et B commutent :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k V^{n-k}$$

.

Proposition 1.4.7 (*Propriétés*)

Soit P et Q sont deux polynômes et λ un scalaire, on a

1. $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$
2. $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$
3. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

Proposition 1.4.8 (*Propriétés*)

Soit P et Q sont deux polynômes et λ un scalaire, on a

1. $(\lambda P)(M) = \lambda P(M)$
2. $(P+Q)(M) = P(M) + Q(M)$
3. $(PQ)(M) = P(M)Q(M)$

Proposition 1.4.9 (*Conjugaison*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $q \in \mathcal{GL}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$P\big(q^{-1}uq\big) = q^{-1}\, P(u)\, q.$$

Cela implique deux endomorphisme si u est semblable à v alors $P(u)$ est semblable à $P(v)$.

Proposition 1.4.10 (*Conjugaison*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$P\big(Q^{-1}uQ\big) = Q^{-1}\, P(u)\, Q.$$

Cela implique deux endomorphisme si A est semblable à B alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

Exemple 29 (*Polynôme annulateur*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que le polynôme $P = (X-2)(X-1)$ annule, c'est à dire $P(A) = 0$.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. D'où $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_2 = 0$. Soit $(A - 2\mathrm{I}_2)(A - \mathrm{I}_2) = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_2) \oplus \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Analyse :

— Soit $X \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}()$ une matrice colonne tel que $X = Y + Z$ avec $Y \in \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_2)$ ($(A - 2\mathrm{I}_2)Y = 0$, soit $AY = 2Y$) et $Z \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}()$ $(AZ = Z)$.

On applique A à l'équation $X = Y + Z$. On obtient $AX \overbrace{=}^{\text{linéarité}} AY + AZ = 2Y + Z$. En combinant ces deux équations, on obtient $Y = AX - X$ et $Z = 2X - AX$. Ainsi, si Y et Z existent, ils s'écrivent nécessairement comme ci-dessus démontrant l'unicité de la décomposition.

Synthèse :

— $AX - X \in \text{Ker}(A - 2\text{I}_2)$: $(A - 2\text{I}_2)(AX - X) = (A - 2\text{I}_2)(A - \text{I}_2)X = 0X = 0$.
— $2X - AX \in \text{Ker}(A - \text{I}_2)$: $(A - \text{I}_2)(2X - AX) = (A - \text{I}_2)(A - 2\text{I}_2)X = 0X = 0$.

1.5 Catégories d'applications linéaires

1.5.1 Forme linéaire : $E \mapsto \mathbb{K}$

Définition 26 (*Forme linéaire*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire $\Phi E \to \mathbb{K}$.
— L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le **dual** de E et se note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
— Une **droite** de E est un sous espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, D est une droite (vectorielle) si et seulement si $\exists \vec{x} \in E \setminus \{\vec{0_E}\} \quad D = \mathbb{K}\vec{x}$.
— Un **hyperplan** de E est un sous espace vectoriel H qui admet une droite comme supplémentaire. Autrement dit, si H est un sous espace vectoriel de E, H est un hyperplan si et seulement si $\exists \vec{x} \in E \setminus \{\vec{0_E}\}$, $E = H \setminus \mathbb{K}\vec{x}$.

Exemple 30 (*Équation du plan vectoriel*)

Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$ un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x = (1, 0, 0)$ et $D = \mathbb{K}x$. On a $E = P \oplus D$.
Soit Φ la forme linéaire définie par $\Phi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 2x + y - z \end{array} \right.$. On a $P = \text{Ker}\,\Phi$ et $[\phi]_{\mathcal{B}} = (2, 1, -1)$ avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Proposition 1.5.1

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\phi \in E^*$. Alors

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = (\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n))$$

est une matrice ligne avec n composantes. Si $\phi \neq 0$, $\text{rg}\,\phi = 1$ et $\text{Ker}\,\phi = n - 1$.

Proposition 1.5.2 (*Dimension*)

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\dim E^* = \dim E$.

Théorème 1.5.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *H est un hyperplan, c'est à dire qu'il existe une droite D telle que $E = H \oplus D$;*
2. *$\dim H = n - 1$;*
3. *il existe une forme linéaire non nulle ϕ telle que $H = \text{Ker}\,\phi$.*

Remarque 7

En dimension quelconque, on a encore l'équivalence entre 1 et 3.

Proposition 1.5.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, Φ et Ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Alors

$$\text{Ker}\,\Phi = \text{Ker}\,\Psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \quad \Phi = \lambda \Psi.$$

Autrement dit, deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Remarque 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On a une correspondance bijective entre :

- les hyperplans sur E, et
- les formes linéaires non nulles sur E, à multiplication par un scalaire non nul près.

1.5.2 Projecteur/Symétrie

Projecteur $p(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1}$

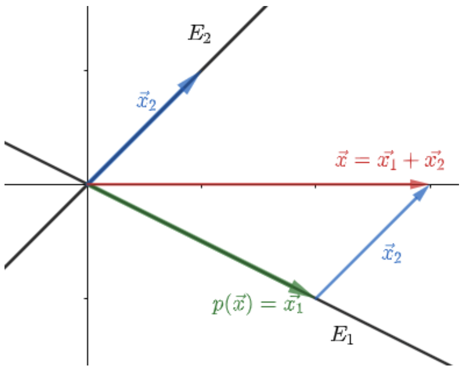
Définition 27 (*Projecteur*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = E_1 \oplus E_2$).
Le **projecteur** p (ou la projection) sur E_1 parallèlement à E_2 est défini par :

$$p \left| \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in E_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in E_2} & \longmapsto & \vec{x_1} \end{array} \right. .$$

On dit que p est un **projecteur** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Exemple 31 (*Sur* $\mathbb{R}^2$)



Cette figure ci-dessus représente la projection, $p(\vec{x})$, du vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ parallèlement à $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, on a

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, la fonction qui à (x, y, z) associe $(x, y, 0)$ est la projection, p, sur la plan x-y parallèlement au à l'axe z. Dans la base canonique, $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^3$, on a

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.5.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $\mathcal{B} = (\overbrace{e_1, \ldots, e_r}^{\text{base de } E_1}, \overbrace{e_{r+1}, \ldots, e_n}^{\text{base de } E_2})$ une base adaptée à cette décomposition.
Soit le projecteur p sur E_1 parallèlement à E_2.
Alors la matrice de p dans cette base adaptée s'écrit :

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.5.6 (*Propriétés*)

Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$ *et* $p \circ p = p$
2. $\operatorname{Im} p = E_1$ *et* $\operatorname{Ker} p = E_2$
3. $E_1 = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ *c'est-à-dire :* $\vec{x} \in E_1 \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$. *Ainsi E_1 est ensemble des vecteurs invariants par p.*

Proposition 1.5.7 (*Caractérisation*)

Supposons $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Dans ce cas $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Symétrie : $s(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1} - \vec{x_2}$

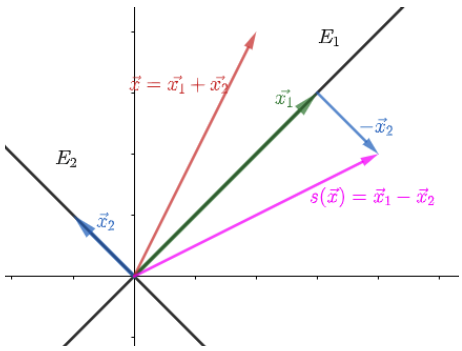
Définition 28 (*Projecteur*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = E_1 \oplus E_2$).
La **symétrie** p par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est définie par :

$$p \left| \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \overbrace{\vec{x_1}}^{\in E_1} + \overbrace{\vec{x_2}}^{\in E_2} & \longmapsto & \vec{x_1} - \vec{x_2} \end{array} \right. .$$

On dit que s est un **symétrie** s'il existe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exemple 32



Cette figure ci-dessus représente la symétrie, s par rapport à $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ parallèlement à $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Dans la base canonique $\mathcal{B}$, on a $[s]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. En revanche dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ on a $[s]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

Proposition 1.5.8 (*Lien avec la projection*)

La symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est égale à $s = 2p - \text{Id}_E$ avec p projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Proposition 1.5.9 (*Propriétés*)

Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$ *et* $p \circ p = p$
2. $\text{Im}\, p = E_1$ *et* $\text{Ker}\, p = E_2$
3. $E_1 = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ *c'est-à-dire :* $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} \in E_1 \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$. *Ainsi E_1 est ensemble des vecteurs invariants par p.*

Proposition 1.5.10 (*Caractérisation*)

Supposons $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Dans ce cas $\text{Im}\, p$ et $\text{Ker}\, p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p est le projecteur sur $\text{Im}\, p = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\, p$.

Proposition 1.5.11 (*Propriétés*)

Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(E)$ *et* $s \circ s = \text{Id}_E$
2. $\text{Im}\, s = E$ *et* $\text{Ker}\, s = \{0_E\}$ *(on retrouve le fait que s est bijective)*
3. $E_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$
4. $E_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

Proposition 1.5.12 (*Caractérisation*)

Supposons $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$s \text{ symétrie} \Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}_E.$$

Dans ce cas $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

1.6 Matrices par blocs

Définition 29 (*Décomposition par blocs*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. Sa **décomposition par blocs** suivant le découpage $(n_1, \dots, n_s)$ pour les lignes et $(p_1, \dots, p_t)$ pour les colonnes est

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots\cdots & A_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s,1} & \cdots\cdots & A_{s,t} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \end{array} \Big\updownarrow n$$

$$\underbrace{\overleftrightarrow{\quad}}_{p_1} \cdots\cdots \underbrace{\overleftrightarrow{\quad}}_{p_t}$$

$$\underbrace{\overleftrightarrow{\qquad\qquad\qquad}}_{p}$$

Exemple 33

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ peut être partitionnée en quatre blocs 2×2 avec

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On peut alors écrire la matrice par bloc comme :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.6.1 (*Addition par blocs*)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ exprimées par blocs selon les mêmes découpages. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors la matrice $\lambda A + \mu B$ s'exprime par blocs selon les mêmes découpages que A et B, et les blocs s'obtiennent en combinant les blocs situés aux mêmes places.

Proposition 1.6.2 (*Produit par blocs*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On suppose que A a une décomposition par blocs suivant le découpage $(n_1, \ldots, n_s)$ pour les lignes et $(p_1, \ldots, n_t)$ pour les colonnes.
On suppose que B a une décomposition par blocs suivant le découpage $(p_1, \ldots, n_t)$ pour les lignes et $(q_1, \ldots, q_u)$ pour les colonnes.
Alors le produit $C = AB \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ admet une décomposition par blocs suivant le découpage $(n_1, \ldots, n_s)$ pour les lignes et $(q_1, \ldots, q_u)$ pour les colonnes

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \ldots & C_{1,u} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s,1} & \ldots & C_{s,u} \end{pmatrix}$$

où pour tous $i \in \{1, \ldots, s\}$ et $j \in \{1, \ldots, u\}$,

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{t} A_{i,k} B_{k,j}$$

Remarque 9

Le cas qui nous intéressera le plus fréquemment est celui des matrices carrées ayant le même découpage pour les lignes et pour les colonnes. Dans ce cas, les blocs diagonaux sont également des matrices carrées.

Proposition 1.6.3 (*Déterminant triangulaire par blocs*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée admettant une décomposition triangulaire supérieure par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{s} \det(A_{kk}) \text{ et } \operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{tr}(A_{kk})$$

1.7 Annexe

1.7.1 Dualité entre l'interprétation algébrique et l'interprétation algébrique

Application linéaire en dimension finie

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension p et F de dimension n.

Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n})$ une base de F.

Représentation d'un vecteur de E en un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{M,p,1}(\mathbb{K})$

Alors tout vecteur $\vec{x}$ de E est déterminé de manière unique par les coefficients $\lambda_1, \dots \lambda_p$ dans le corps $\mathbb{K}$:

$$\vec{x} = \lambda_1.\vec{e_1} + \cdots + \lambda_p.\vec{e_p}.$$

On range les coordonnées dans un vecteur colonne.

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}_E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des vecteurs colonnes est noté $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, soit l'ensemble des matrices ayant une unique colonne. On identifie les p-uplets $\mathbb{K}^p = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\}$, avec les vecteurs colonnes $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}\}$.

Représentation matricielle de l'application linéaire u

Tout d'abord, calculons l'image de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}_E = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ par l'application linéaire u :

$$u(\vec{e_j}) = a_{1j}.\vec{f_1} + \cdots + a_{nj}.\vec{f_n} \text{ avec } 1 \leqslant j \leqslant p.$$

On range les coefficient, $a_{i,j}$ dans un tableau de taille (n, p), noté $[u]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}$, que l'on appelle **matrice** :

$$[u]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(\vec{e_1}) & \cdots & u(\vec{e_p}) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{f_1} \\ \vdots \\ \vec{f_n} \end{matrix} \end{array}.$$

Caractérisation de l'application linéaire u
Comme u est linéaire, on a :

$$u(\vec{x}) = u(\lambda_1.\vec{e_1} + \cdots + \lambda_p.\vec{e_p}) \tag{1.1}$$
$$u(\vec{x}) = \lambda_1.u(\vec{e_1}) + \cdots + \lambda_p.u(\vec{e_p}) \tag{1.2}$$

Cela implique que l'application linéaire u est entièrement déterminée par les vecteurs : $(u(\vec{e_1}), \ldots, u(\vec{e_p}))$
Représentation du vecteur $u(\vec{x})$ de F en un vecteur colonne $\mathcal{M}_{M,n,1}(\mathbb{K})$
Substituons $u(\vec{e_j})$ par $a_{1j}.\vec{f_1} + \cdots + a_{nj}.\vec{f_n}$ dans l'équation précédente, ce qui donne après réorganisation des termes :

$$u(\vec{x}) = (a_{11}.\lambda_1 + \cdots + a_{1p}.\lambda_p).\vec{f_1} + \cdots \tag{1.3}$$
$$+ (a_{n1}.\lambda_1 + \cdots + a_{np}.\lambda_p).\vec{f_n}. \tag{1.4}$$

Donc, l'application linéaire u est entièrement déterminée par les coefficient a_{ij}. On range les coordonnées du vecteur $u(\vec{x})$ dans un vecteur colonne $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} a_{11}.\lambda_1 + \cdots + a_{1p}.\lambda_p \\ \vdots \\ a_{n1}.\lambda_1 + \cdots + a_{np}.\lambda_p \end{pmatrix}.$$

Chaque coordonné du vecteur colonne $[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}_F}$ est la multiplication terme par terme entre les coefficients de la i-ème ligne de $[u]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}$ et les coefficients de la colonne $[\vec{x}]_{\mathcal{B}_E}$:

$$[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}_F} = [u]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F} \times [\vec{x}]_{\mathcal{B}_E}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$
$$[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$$
$$[u(\vec{x})]_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} a_{11}.\lambda_1 + \cdots + a_{1p}.\lambda_p \\ \vdots \\ a_{n1}.\lambda_1 + \cdots + a_{np}.\lambda_p \end{pmatrix}.$$

En conclusion, pour calculer l'image d'un vecteur $\vec{x}$ par l'application linéaire u, il suffit de faire des multiplications et des additions entre coefficients.
Représentation matricielle de la composition d'applications linéaires $v \circ u$
Soit v une application linéaire de F dans G. On cherche une représentation matricielle de $v \circ u$. Soit $A = [u]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}$, $B = [u]_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_G}$ et $C = [v \circ u]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_G}$, que l'on note $C = B \times A$. On cherche donc à définir la multiplication entre deux matrices. Le coefficient c_{ij} de la matrice C est la j-coordonnée du

vecteur $C \times [e_i]_{\mathcal{B}_E}$, soit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}c_{11} & \dots & c_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \dots & c_{nm}\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{nj}\end{pmatrix}\end{array}$$

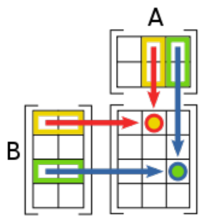
Comme $(v \circ u)(e_i) = v(u(e_i))$, on a $C \times [e_i]_{\mathcal{B}_E} = B \times (A \times [e_i]_{\mathcal{B}_E})$. Donc on applique d'abord la matrice A :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{np}\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}\end{array}$$

puis la matrice B,

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}b_{1,1}a_{1j} + \dots + b_{1n}a_{nj}\\ \vdots\\ b_{m1}a_{1j} + \dots + b_{mn}a_{pn}\end{pmatrix}\end{array}$$

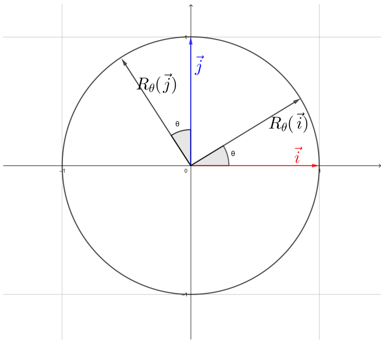
par identification, on obtient $c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + \dots + b_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$, soit la multiplication terme à terme des coefficients de la i-ème ligne de B et de j-ème colonne de A,et la somme de ces produits. Un schéma de ce produit est :



Exemple 34

Rotation L'application linéaire rotation d'angle θ définie par :

$$R_\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array}\right.$$



En prenant la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1))$, pour base de l'espace vectoriel de départ et d'arrivé, comme $R_\theta(\vec{i}) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $R_\theta(\vec{j}) = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$, on a :

$$[R_\theta]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si l'on compose deux matrice de rotation d'angle θ et θ', on a :

$$[R_\theta]_\mathcal{B} \times [R_{\theta'}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

Donc la composition de deux rotations est une rotation d'angle la somme des angles des deux rotations.

1.7.2 Exercice de synthèse : endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit l'application ϕ par :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme.
2. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer l'inverse de ϕ.

Correction :

1. 2 solutions :
   (a) — *Définie* : L'application ϕ est bien définie car $deg(P - P') \leqslant deg(P)$.
   — *Linéaire* : soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   $$\phi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - (\lambda P + \mu Q)' = \lambda(P - P') + \mu(Q - Q') = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$$
   (b) Les applications, identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} : P \mapsto P$ et dérivée $\psi : P \mapsto P'$, sont linéaires. Comme $\mathcal{L}(R_2[X])$ est un espace vectoriel, ϕ est une application linéaire car combinaison linéaire de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ et ψ.
2. 2 solutions :

(a) Comme ϕ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de démontrer que ϕ est injective, soit $\operatorname{Ker}\phi = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
Montrons que $\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \subset \operatorname{Ker}\phi$.
$\operatorname{Ker}\phi$ est un espace vectoriel donc il contient l'élément neutre.
Montrons que $\operatorname{Ker}\phi \subset \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
Soit $P \in \operatorname{Ker}\phi$, c'est à dire que $\phi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Soit $P = P'$. D'où $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

(b) Déterminons la matrice de l'endomorphisme de ϕ dans la base canonique, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } \phi(X^i) = X^i - iX^{i-1}.$$

Comme $\det([\phi]_{\mathcal{B}}) = 1$, produit des coefficients de la diagonale pour une matrice triangulaire supérieur, $[\phi]_{\mathcal{B}}$ est inversible, donc ϕ est bijectif.

3. 2 solutions :

(a) L'application dérivée $\psi : P \mapsto P'$, est nilpotente car $\psi^3 = 0$. Comme ψ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ commutent, on a

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} = \mathrm{Id}^3_{\mathbb{R}_2[X]} - \psi^3 = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} - \psi) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2) = \phi \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2).$$

Donc l'inverse de ϕ est $\phi^{-1} = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2)$.

(b) Déterminons l'inverse de matrice de l'endomorphisme de ϕ par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
(L2) \leftarrow (L2) + 2(L3) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
(L1) \leftarrow (L1) + (L2) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{array}.$$

D'où $\phi^{-1}(1) = 1, \phi^{-1}(X) = 1 + X$ et $\phi^{-1}(X^2) = 2 + 2X + X^2$. Soit $\phi^{-1} = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2)$.