
Intégrale à paramètre

Une intégrale à paramètre est une fonction d'une variable entière ou réelle, définie par intégration d'une fonction de deux variables, la variable d'intégration et le paramètre, :

$$F(x) = \int_J f(x, t) dt.$$

On dit que la fonction F est une intégrale dépendant du paramètre x . On définit ainsi une fonction F dont on veut découvrir les propriétés à partir de celles de f .

En première partie, nous verrons le cas où le paramètre est un entier

$$u_n = F(n) = \int_J f(n, t) dt = \int_J f_n(t) dt.$$

Le cours sur les suites et séries de fonctions nous a fourni un théorème pour permuter la limite et l'intégrale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f_n(t) dt = \int_J \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

si la suite de fonctions converge uniformément sur J et si J est un segment. Que peut-on dire lorsque J est un intervalle quelconque? Lorsqu'il y a convergence simple et non plus uniforme? Notre but est de donner des théorèmes plus généraux.

En seconde partie, nous verrons le cas où le paramètre est un réel et nous introduirons des théorèmes la permutation de la limite et de l'intégrale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_J f(x, t) dt = \int_J \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) dt,$$

et la permutation de la dérivée et l'intégrale

$$\frac{d}{dx} \int_J f(x, t) dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt,$$

sur un intervalle J quelconque.

I Intégrale à paramètre entier : $u_n = F(n) = \int_J f_n(t) dt$.

A Permutation limite-intégrale ou série-intégrale : cas segment et convergence uniforme

Rappel du cours sur les suites et séries de fonctions.

Théorème Permutation limite/intégrale

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{K} . On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a, b]$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors f est continue (donc intégrable) sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Théorème Permutation somme/intégrale

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{K} . On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[a, b]$
- la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f

Alors f est continue sur $[a, b]$ (donc intégrable) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

B Permutation limite-intégrale ou série-intégrale : cas intervalle ouvert et convergence simple

Théorème Convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de J dans \mathbb{K} , et $f, \phi : J \rightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux avec ϕ positive. On suppose que

1. **Convergence simple de (f_n) vers f** : pour tout $t \in J$, la suite numérique $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$;
2. **Hypothèse de domination** : pour tout $t \in J$ et tout $n \geq 1$, $|f_n(t)| \leq \phi(t)$;
3. **Intégrabilité de la fonction dominante** : la fonction ϕ est intégrable sur J .

Alors toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur J , et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n(t) dt = \int_J \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_J f(t) dt$$

Remarque

Le théorème précédent est valable sur un intervalle quelconque qui peut aussi être un segment. L'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par une autre hypothèse, l'"hypothèse de domination". Il s'agit de fournir une fonction ϕ (continue par morceaux et intégrable sur J) majorant toutes les fonctions f_n . Ceci signifie que l'on doit majorer chaque $|f_n(t)|$ par une expression **dépendante de t et indépendante de n** et qui soit une fonction de t intégrable sur J .

Exemple

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite suivante :

$$u_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}.$$

Soit $f_n : t \mapsto (\frac{1}{1+t^n})$.

1. *Convergence simple sur $[1, +\infty[$:*

Soit $t > 1$ fixé.

La suite numérique $(\frac{1}{1+t^n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si $t > 1$ et 1 si $t = 1$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

2. *Hypothèse de domination :*

Pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$, on a

$$\left| \frac{1}{1+t^n} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} = \phi(t).$$

3. *Intégrabilité de la fonction dominante :*

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées. On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \underset{\text{convergence dominée}}{=} \int_1^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t^n} dt = \int_1^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Exemple Wallis

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite suivante :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

Soit $f_n : t \mapsto \sin^n t$.

1. *Convergence simple sur $[0, \pi/2]$:*

Soit $t \in [0, \pi/2]$ fixé.

La suite géométrique $(\sin^n t)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si $t \neq \pi/2$ et 1 si $t = \pi/2$. Donc la suite de fonctions

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \\ 1 & \text{si } t = \pi/2 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$.

2. *Hypothèse de domination :*

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, \pi/2]$, on a

$$|f_n(t)| \leq 1 = \phi(t).$$

3. *Intégrabilité de la fonction dominante :*

$\int_0^{\pi/2} 1 dt$ converge et donc intégrable sur $[0, \pi/2]$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées. On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n \underset{\text{convergence dominée}}{=} \int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} 0 dt = 0.$$

Théorème Intégration terme à terme

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues par morceaux de J dans \mathbb{K} , et $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. On suppose que

1. **Convergence simple de $\sum_n f_n$ vers f :** pour tout $t \in J$, la suite numérique $\sum_n f_n(t)$ converge vers $f(t)$;
2. **Hypothèse de domination :** la série numérique $\sum_n \int_J |f_n(t)| dt$ converge.

Alors f est intégrable sur J , et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n(t) dt = \int_J \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_J f(t) dt.$$

Exemple

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n} (1-t) dt = \ln(2)$.

1. *Convergence simple sur $[0, 1[$:*

La série géométrique $\sum_n t^{2n}$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$. Donc la suite $(1-t) \sum_n t^{2n}$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

2. *Hypothèse de domination :*

On a $\int_0^1 t^{2n} (1-t) dt = [\frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+2}}{2n+2}]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_n \int_0^1 t^{2n} (1-t) dt$ converge par règle d'équivalence sur les séries à termes positifs.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées. On en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n} (1-t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} (1-t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2).$$

II Intégrale à paramètre réelle : $F(x) = \int_J f(x, t) dt$

Contexte :

Soit I et J deux intervalles (non vides) de \mathbb{R} et

$$f \left| \begin{array}{l} IJ \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \longmapsto f(x, t). \end{array} \right.$$

On s'intéresse à la fonction F définie par

$$F(x) = \int_J f(x, t) dt.$$

A Domaine de définition $I = D_F$

Proposition

La fonction F est définie sur D_F si, pour tout $x \in D_F$ fixé, l'intégrale $\int_J f(x, t) dt$ converge.

Proposition

$x \in D_F$ si et seulement si $\int_J f(x, t) dt$ existe (est bien définie).

Il y a deux possibilités :

- si J est un segment et si $t \mapsto f(x, t)$ est continue alors l'intégrale est bien définie.
- Si J n'est pas un segment et si $t \mapsto f(x, t)$ est continue, alors l'intégrale est bien définie si l'intégrale impropre $\int_J f(x, t) dt$ converge.

Exemple

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

En $+\infty$, on a :

$$e^{-xt^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ converge. Par raccordement, $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ converge, donc F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

B Continuité

Théorème continuité sous le signe \int

On suppose :

1. f est **continue par rapport à x** , c.-à-d.
 - pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
2. f est **continue par morceaux par rapport à t** , c.-à-d.
 - pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
3. **Hypothèse de domination :**
Il existe une fonction ϕ telle que
 - pour tout $(x, t) \in I \times J$, on a $\|f(x, t)\| \leq \phi(t)$,
 - ϕ est continue par morceaux et intégrable sur J .

Alors :

- La fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur I .

Remarque

Ce théorème est une interversion de limite et d'intégrale :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_J f(x, t) dt = \int_J \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) dt = \int_J f(x_0, t) dt = F(x_0)$$

Exemple

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ est continue sur $[a, b]$ avec $b > a > 0$.

1. *Continuité* :

Soit $x \in [a, b]$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé. La fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[a, b]$.

2. *Domination* :

On a :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in [0, +\infty[: \quad \|e^{-xt^2}\| \leq e^{-at}.$$

$t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Les hypothèses de théorème de continuité sous le signe \int sont vérifiées donc la fonction F est continue sur $[a, b]$.

Dans certains cas, il n'est pas possible de "dominer" la fonction f sur l'intervalle I tout entier. On peut cependant se contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment K inclus dans I , le théorème précédent s'applique encore.

Théorème continuité sous le signe \int version locale

On peut remplacer l'hypothèse de domination par :

- **Hypothèse de domination locale** : Pour tout segment K inclus dans I , il existe une fonction $\phi_K : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - pour tout $(x, t) \in K \times J$, on a $\|f(x, t)\| \leq \phi_K(t)$,
 - ϕ_K est continue par morceaux et intégrable sur J .

Exemple

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On a démontré que F est continue pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. Donc F est continue sur $]0, +\infty[$.

Si l'intervalle d'intégration est un segment $[c, d]$, l'hypothèse de domination est automatique sur tout segment $[a, b] \subset I$ en posant $\phi(t) = M = \sup_{(x, t) \in [a, b] \times [c, d]} |f(x, t)|$ avec f continue (voir cours sur les fonctions de plusieurs variables).

Exemple

Démontrer que $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{xt}}{1+t^2} dt$ est continue sur \mathbb{R} .

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

1. *Continuité* :

Soit $x \in [a, b]$ fixé. La fonction $t \mapsto \frac{e^{xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1]$.

Soit $t \in [0, 1]$ fixé. La fonction $x \mapsto \frac{e^{xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[a, b]$.

2. *Domination* :

On a :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in [0, 1] : \quad \left| \frac{e^{xt}}{1+t^2} \right| \leq M = \sup_{(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]} \left| \frac{e^{xt}}{1+t^2} \right|.$$

$t \mapsto M$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Les hypothèses de théorème de continuité sous le signe \int sont vérifiées donc la fonction F est continue sur $[a, b]$. On a démontré que F est continue pour tout segment $[a, b]$ inclus dans \mathbb{R} . Donc F est continue sur \mathbb{R} .

C Dérivabilité

Théorème Dérivation sous le signe \int

On suppose :

1. pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
2. f admet une dérivé partielle, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ vérifiant les hypothèses de théorème continuité sous le signe \int

Alors :

- La fonction $F: x \mapsto \int_J f(x, t)dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- Pour tout $x \in I$, on a

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

Remarque

Ce théorème est une interversion de limite et de dérivée :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_J f(x, t)dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

Exemple

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$ la transformée de Fourier de la Gaussienne. Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x)$, puis déterminer l'expression de F .

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-itx} e^{-at^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur J car $|e^{-itx} e^{-at^2}| \leq e^{-at^2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt$ converge.
2. f admet une dérivé partielle, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -ite^{-itx} e^{-at^2}$ vérifiant les hypothèses de théorème continuité sous le signe \int , soit :

(a) *Continuité :*

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto -ite^{-itx} e^{-at^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $x \mapsto -ite^{-itx} e^{-at^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

(b) *Domination :*

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : \quad \left| -ite^{-itx} e^{-at^2} \right| \leq |t| e^{-at^2}.$$

$t \mapsto |t| e^{-at^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Les hypothèses de théorème de dérivation sous le signe \int sont vérifiées donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et vérifie,

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx} e^{-at^2} dt.$$

Une intégration par parties permet de se ramener à

$$F'(x) = \left[\frac{i}{2a} e^{-itx} e^{-at^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2} (-ix) e^{-itx} dt.$$

Soit

$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$

On résout l'équation différentielle vérifiée par F : $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$. De plus, $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Finalement $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$.

Théorème continuité sous le signe \int version locale

On peut remplacer l'hypothèse de domination par :

- **Hypothèse de domination locale** : Pour tout segment K inclus dans I , il existe une fonction $\phi_K : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - pour tout $(x, t) \in K \times J$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi_K(t)$,
 - ϕ_K est continue par morceaux et intégrable sur J .

Théorème Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^p

On suppose :

1. f est de classe \mathcal{C}^p par rapport à x , c.-à-d.
 - pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^p sur I .
2. pour tout $0 \leq k < p$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue par morceaux et intégrable par rapport à t , c.-à-d.
 - pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et pour tout $x \in I$ fixés, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
3. $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$ est continue par morceaux par rapport à t , c.-à-d.
 - pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
4. **Hypothèse de domination** : Il existe une fonction ϕ telle que
 - pour tout $(x, t) \in IJ$, on a $\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \phi(t)$,
 - ϕ est continue par morceaux et intégrable sur J .

Alors :

- La fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t)dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^p sur I .
- Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, pour tout $x \in I$, on a

$$F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)dt.$$