

Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (Domaine de définition) Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ , appelé fonction de Riemann et de la fonction μ .

Exercice 2 (Convergence uniforme) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 e^{-nx} \end{array} \right., \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence de cette suite de fonctions.

Exercice 3 (Vrai/Faux) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et le prouver :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques de période T , alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a , alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 4 (Étude de convergence simple et uniforme détaillée) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

3. Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.
4. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice 5 (Convergence uniforme sur un intervalle plus petit...) On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0, 1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g .
3. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. Soit $a \in]0, 1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Exercice 6 (Avec paramètre) Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 7 (Convergence uniforme et fonctions bornées) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

Exercice 8 (Convergence simple et fonctions décroissantes) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 9 (Exemples et contre-exemples) Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 10 (Série alternée) On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I .
3. Prouver que S est dérivable sur I , calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I .
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 11 (Convergence normale) Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Démontrer que la fonction zeta converge normalement sur tout intervalle $[a, \infty[$ avec $a > 1$. En déduire la continuité de la fonction ζ sur $]1, \infty[$.

Donner la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x)$.

Exercice 12 (Equivalent Série-Intégrale) On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où pour

$$\text{tout } n > 0, f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\text{sh}(nx)} \end{array} \right.$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Donner un équivalent de 0 de f .

Exercice 13 (Convergence suite de fonctions) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\text{où pour tout } n > 0, f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n (1 - x)^n \end{array} \right.$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 14 (Convergence suite de fonctions) On considère la suite de fonctions $\sum f_n$,

$$\text{où pour tout } n > 1, f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln n} \end{array} \right.$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R}^{+*} .
3. Démontrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 15 (Espérance et variance de loi géométrique) Soit X , une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , $\mathcal{G}(p)$, c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

1. Calculer l'espérance de X
2. Calculer la variance de X

Exercice 16 (Devoir Maison) CCP mp 2017 sujet 1 mathématique. Le problème est sur la série trigonométrique.

Suites et séries de fonctions
