Intégration : feuille d'exercices

Convergence

Exercice 1 (Convergence d'intégrales impropres) Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Exercice 2 (Convergence d'intégrales impropres) Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 3 (Convergence d'intégrales impropres) Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} \, \mathrm{d}t$
2. $\int_0^2 \sqrt{t} \ln t \, \mathrm{d}t$
3. $\int_1^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t$
4. $\int_0^1 -\mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t$
5. $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} \, \mathrm{d}t$

Exercice 4 (intégrales de Bertrand) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 5 (Critère de Cauchy)

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t \sin t} dt$ diverge.

Exercice 6 (Transformée de Laplace) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt$ converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)e^{-s_0 t}$ sur $[0, +\infty[$. Démontrer que F est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge.

Calcul

Exercice 7 Á l'aide d'une primitive étudier la convergence des intégrales suivantes et, en cas de convergence, les calculer :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$ 2. $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln(t) \ln(\ln t)}$

Exercice 8 (Logarithme à la puissance n) Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Exercice 9 (Changement de variable) Soit f la fonction définie pour $x \in]0, 1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$.

A l'aide d'une I.P.P. démontrer que f est intégrable sur $]0, 1[$ et déterminer la valeur de $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 10 (Changements de variables)

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.
2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

Exercice 11 (Changement de variable) Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.

2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geqslant 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Exercice 12 (Une intégrale comme somme d'une série) Le but de l'exercice est de prouver la relation suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$ converge, puis calculer I_k.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} dt$.
4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. En déduire qu'il existe une constante $M > 0$, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que, pour tout $t \in]0,1[$, $\left|\frac{t^2\ln t}{t^2-1}\right| \leqslant M$.
5. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} dt = 0$, puis la relation demandée.

Exercice 13 (Inégalité) Soit f une fonction continue de carré intégrable de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Prouver que, pour tous $0 \leqslant a \leqslant b$, on a
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}.$$
2. En déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Théorique

Exercice 14 (Limite en $+\infty$) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables sur $[0,+\infty[$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 15 (Fonction décroissante) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. Démontrer que $f \geqslant 0$.
2. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Justifier que $\int_{x/2}^x f(t)dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
4. En déduire que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1 Correction

La plupart des exercices sont tirés du site bibmath. Vous trouverez les corrections sur le site `http://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mathspe/feuillesexo/integralesimpropres&type=fexo`.

Ci-dessous, les corrections des exercices ne se trouvant sur bibmath.

Correction exercice 3

1.
   - $t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue et **positive** sur $[1;+\infty[$.
   - Étude en $+\infty$:
     $\frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}} = t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln t}{t^2} = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$
     donc : $\frac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$
     Or : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$).
     Donc avec le théorème de négligeabilité $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge.
2. $f : t \longmapsto \sqrt{t}\ln t$ est continue sur $]0;2]$.
   $\lim_{t\to0} \sqrt{t}\ln t = 0$ par croissance comparée, donc f est prolongeable par contionuité en 0.
   Donc $\int_0^2 \sqrt{t}\ln t \,\mathrm{d}t$ converge.
3. $g : t \longmapsto t\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1;+\infty[$.
   De plus : $t\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} t \times \frac{1}{t} = 1$, donc $\lim_{t\to+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$,
   g admet en $+\infty$ une limite non nulle, donc $\int_1^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) \,\mathrm{d}t$ diverge.
4.
   - $t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}\ln t$ est continue et **positive** sur $]0;1]$.
   - Étude en 0 :
     $-\mathrm{e}^{-t}\ln t \underset{t\to0}{\sim} -\ln t$
     Or : $\int_0^1 -\ln t \,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence).
     Donc avec le théorème d'équivalence $\int_0^1 -\mathrm{e}^{-t}\ln t \,\mathrm{d}t$ converge.
5.
   - $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^3}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$ mais pas positive !
     On travaillera avec la valeur absolue…
   - Étude en $+\infty$:
     $\left|\frac{\cos t}{t^3}\right| \leqslant \frac{1}{t^3}$
     Or : $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^3} \,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $3 > 1$).
     Donc, $t \longmapsto \left|\frac{\cos t}{t^3}\right|$ positive avec le théorème d'inégalité $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^3}\right| \,\mathrm{d}t$ converge.
     (C'est à dire que $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^3}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$!)
     Donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} \,\mathrm{d}t$ converge.

Correction exercice 7

1. Pour $x > 2$:
$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^x$$
$$= \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
Donc $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ est divergente.
2. Pour $x > 3$:
$$\int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln t)} = [\ln(\ln(\ln t))]_2^x$$
$$= \ln(\ln(\ln x)) - \ln(\ln(\ln 3)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
Donc $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln t)}$ est divergente.

Correction exercice 9 On effectue une IPP en posant $\begin{cases} u(t) = \ln(1-t^2) \\ u'(t) = \frac{-2t}{1-t^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) = C - \frac{1}{t}\,, C \in \mathbb{R} \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$,

Problème : il nous faut $\lim_0 uv$ et $\lim_1 uv$ existent sont finies !

- En 0^+ :
$u(t)v(t) \underset{t\to0}{\sim} -\frac{1}{t} \times (-t^2)$ avec $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$
$u(t)v(t) \underset{t\to0}{\sim} t$ donc uv tend vers 0 en 0^+.
- En 1 :
u tend vers l'infini en 1 ...la seule solution pour avoir une limite est de poser $C = 1$, et alors :
$$u(t)v(t) = \ln((1-t)(1+t))\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$
$$= (\ln(1-t) + \ln(1+t))\frac{t-1}{t}$$
$$= \frac{1}{t}(t-1)\ln(1-t) + \ln(1+t)\frac{t-1}{t}$$
La seule forme indéterminée en 1^-est alors $(t-1)\ln(1-t)$ c.à.d. $-u\ln(u)$ en 0^+ qui tend vers 0,
Donc uv tend vers 0 en 0^+.

Donc :
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2t}{1-t^2} \times \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + 2\int_0^1 \frac{t-1}{(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t$$ intégrales de même nature,
$$= -2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= -2\ln(2)$$
On a prouvé la convergence et on a la valeur.