Série numérique

Exercice 1 (*, Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$
2. $\sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
3. $\sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$
4. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$
5. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
6. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{\mathrm{i}^n n^2}{n^2+1}$
7. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n\binom{2n}{n}}$
8. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
9. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} a_{2n} & = a^n \\ a_{2n+1} & = b^n \end{cases}$ où $0 < a < b$

Exercice 2 (*, Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ **2**. $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ **3**. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$
4. $\sum_n (\ln n) x^n$ **5**. $\sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n+1}$ **6**. $\sum_n (2+ni) z^n$
7. $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} z^n$

Exercice 3 (*, Rayon de convergence et somme) Calculer le rayon de convergence puis la somme de :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2} x^n$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

Exercice 4 (*, DSE en 0) Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$ **2**. $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a > 0$ **4**. $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$ **6**. $(4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 5 (*, Équation différentielle) On considère l'équation différentielle $y''+xy'+y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 6 (*, derivation) On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 3} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Est-elle convergente pour $|x| = R$?

2. Pour tout nombre réel x tel que la série entière précédente converge, on note $S(x)$ sa somme.
   Expliciter la dérivée de la fonction $x \mapsto xS(x)$ sur $]-R, R[$.
   En déduire $S(x)$ pour x appartenant à $]-R, R[$.

3. Calculer la somme de chacune des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 3} (-1)^n \frac{R^n}{(n+1)(n-2)},$$

$$\sum_{n \geqslant 3} \frac{R^n}{(n+1)(n-2)}.$$

Exercice 7 (*, Fonction impaire) Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 8 (*, Rayon de convergence) Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels décroissante, de limite 0, et telle que $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$?

Série numérique

Correction 1 On prend dans chaque cas $z \neq 0$. et on revient à la règle de d'Alembert des séries numériques :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n^2+1}{3^n} > 0$ et :
   $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}}|z| \\ &= \frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)}|z| \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3n^2}|z|\end{aligned}$$
   Donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = |z|\frac{1}{3}$$
   D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathrm{e}^{-n^2} > 0$ et :
   $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}}|z| \\ &= \mathrm{e}^{-2n-1}|z|\end{aligned}$$
   Donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = 0$$
   D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = +\infty$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$: $a_n = \frac{\ln n}{n^2} > 0$ et :
   $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}|z|^{2(n+1)}}{a_n|z|^{2n}} &= \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}}|z|^2 \\ &= \frac{n^2\ln(n+1)}{(n+1)^2\ln n}|z|^2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^2\end{aligned}$$
   Donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = 1|z|^2$$
   D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = \sqrt{\frac{1}{1}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n^n}{n!}|z|^{3n} > 0$ et :
   $$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^3 \\ &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}|z|^3 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)}|z|^3\end{aligned}$$
   Donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e} \times |z|^3$$
   D'après la règle de D'Alembert la série CV pour $\mathrm{e} \times |z|^3 < 1$ soit $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$, et diverge pour $r > \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

   On en déduit d'après la caractérisation du rayon de CV que $R_a = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ et :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}|z|$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}|z|$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \times |z|$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 1$.

6. Les coefficients ne sont pas réels (et pas positifs), on travaille alors avec les modules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| = \frac{n^2}{n^2+1} > 0$ et :

…(à vous, c'est facile avec les équivalents)

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| = |z|$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV de $\sum |a_n|z^n$ vaut : $R_a = 1$, .

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{n\binom{2n}{n}} > 0$ et :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = \frac{\frac{1}{n\binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{1}{n\binom{2n}{n}}}|z|$$
$$= \frac{n\times(2n)!\times((n+1)!)^2}{(n+1)\times(2n+2)!\times(n!)^2}|z|$$
$$= \frac{n}{2(2n+1)}|z|$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|}{4}$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 4$.

8. On analyse les valeurs de a_n, avec la π-périodicité de tan :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = a_n$$

Donc a_n ne prend que trois valeurs : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{3p} & = a_0 = 0 \\ a_{3p+1} & = a_1 = -\sqrt{3} \\ a_{3p+2} & = a_2 = \sqrt{3} \end{cases}$.

Point de critère de D'Alembert possible directement (indirectement oui)... mais si on a bien compris ce qu'est un rayon de CV c'est rapide :

On déduit des valeurs d'une part que $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum a_n 1^n$ diverge grossièrement, d'où $R_a \leqslant 1$ avec la caractérisation du rayon de CV.

Et d'autre part que $(|a_n|1^n)$ est bornée, donc que $R_a \geqslant 1$ avec la définition du rayon de CV.

Finalement : $R_a = 1$

9. Le règle de D'Alembert n'est pas exploitable directement ici.

On revient à la définition du rayon de CV. et on utilise les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs.

Soit $r > 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée équivaut à $(a_{2n}r^{2n})$ et $(a_{2n+1}r^{2n+1})$ sont bornées.

— $a_{2n}r^{2n} = (ar^2)^n$ donc $(a_{2n}r^{2n})$ est une suite géométrique de raison ar^2, elle est bornée lorsque $ar^2 \leqslant 1 \Longleftrightarrow r \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$.

— $a_{2n+1}r^{2n+1} = r \times (br^2)^n$ donc $(a_{2n+1}r^{2n+1})$ est une suite géométrique de raison br^2, elle est bornée lorsque $br^2 \leqslant 1 \Longleftrightarrow r \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}}$.

— Et de plus : $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$

Donc $(a_n r^n)$ est bornée lorsque $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}}$, le rayon de CV est $R_a = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Correction 2

Correction 3 a. — Rayon de CV $R = +\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

b. — Rayon de CV $R = +\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$: sachant que $(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2$
L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

c. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

— Pour tout $x \in]-1; 1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x\end{aligned}$$

d. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

— Pour tout $x \in]-1; 1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{3n}{n+2} = 3\left(1 - 2\frac{1}{n+2}\right)$

L'égalité ci-dessous est vraie car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} = 3\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)$
Soit $x = 0$ et dans ce cas la somme est nulle, soit $x \neq 0$ et on peut factoriser par x :
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} = 3\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$
$= 3\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)$
$= 3\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + -\frac{2}{x^2}x\right)$
$= 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}\ln(1-x) + \frac{2}{x}\right)$

e. Il faut le voir mais on a immédiatement $R = +\infty$ par linéarité avec :
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(x) + \cos(x)\right)$

Correction 4

Correction 5

Correction 6 1. $R = 1$. En effet, $\frac{|x|^n}{(n+1)(n-2)} \sim \frac{|x|^n}{n^2}$. Donc si $|x| \leqslant 1$, la série est absolument convergente (par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$) tandis que si $|x| > 1$, $\frac{|x|^n}{n^2} \to +\infty$ et la série diverge grossièrement.

2. On peut naturellement dériver la fonction sur son ouvert de convergence, soit ici $]-R, R[$.

$$xS(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-2)}.$$

On a donc $(xS)'(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} = x^2 \sum_{k\geqslant 1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -x^2\ln(1-x)$. Une intégration par parties, suivie d'une intégration de fraction rationnelle, permet d'en déduire $xS(x)$, puis

$$S(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{x}\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right).$$

(Une autre méthode aboutissant à ce résultat est d'écrire :

$$3S(x) = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n-2} - \frac{x^n}{n+1}\right) = \frac{x^3}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\frac{x^3-1}{x}\sum_{n\geqslant 4}\frac{x^n}{n} = x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\frac{1-x^3}{x}\Bigg(\ln(1-x)$$

3. Par continuité, $S(-1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{-1}\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^2}{3}\right) = \frac{5}{18} - \frac{2}{3}\ln 2$ et $S(1) = \frac{1}{3}\left(0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1^2}{3}\right) = \frac{11}{18}$.

Correction 8 La série entière diverge en $z = 1$ et converge en $z = -1$ (par le critère de convergence des séries alternées) donc $R = 1$.