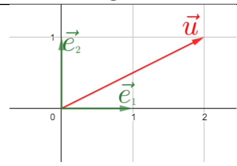
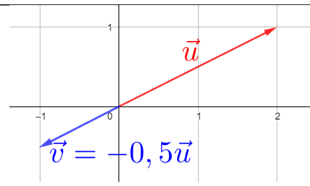
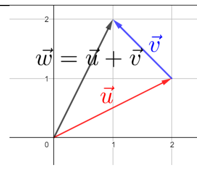
Espace vectoriel E

Exemple : $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$

Tout d'abord, commençons par les vecteurs du plan :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e}_1 + 1\overrightarrow{e}_2$
Multiplication par un scalaire		$\begin{pmatrix}-1\\-0,5\end{pmatrix} = -0.5.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{v} = -0.5.\overrightarrow{u}$
Addition		$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Du fait de l'équivalence entre ces trois représentations, géométrique, numérique et algébrique, tout ce qui est vrai ou faux pour l'un l'est aussi pour l'autre[1]. Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel pour bien comprendre l'algèbre linéaire.

Exemple : Exemples d'ensembles de vecteurs : $E = \{\overrightarrow{x}\}$

Il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer une addition et une homothétie soit une combinaison linéaire, par exemples :

- l'ensemble des n-uplet réels : $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $E = \mathbb{R}^n$ et , où chaque x_i est un réel,
- l'ensemble des matrices carrés réels : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque $a_{i,j}$ est un un réel,
- l'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaire d'ordre 1 homogène : $\overrightarrow{x} = f$ une fonction $\mathcal{C}^1$ tel que $f' + a_0 f = 0$ et $E = \{f \in C_1 : f' + a_0 f = 0\}$,
- l'ensemble des polynômes réels : $\overrightarrow{x} = a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ et $E = \mathbb{R}[X]$,
- l'ensemble des suites réels : $\overrightarrow{x} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
- etc.

Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique abstraite constituée de propriétés partagés par tous les ensembles : cette structure s'appelle **l'espace vectoriel** et permet d'effectuer des combinaisons linéaires,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers.

1. Il y a des limites à cette équivalence. La représentation géométrique est uniquement pertinente dans le plan et l'espace. La représentation numérique est limitée aux espaces vectoriels de dimension finie.

I Structure algébrique

Définition : Loi de composition interne : $\overrightarrow{x} \triangle \overrightarrow{y}$

Soit A un ensemble. Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{rcl} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array} \right. .$$

Définition : Propriétés

On dit que $\triangle$

1. est **associative** : si $\in (x, y, z) \in A^3$, $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$. On ne considèrera que des lois associatives.
2. est **commutative** : si $\forall (x, y) \in A^2$, $x \triangle y = y \triangle x$;
3. admet **un élément neutre** si $\exists e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$. Il existe au plus un élément e vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le neutre** de la loi $\triangle$.
4. est **symétrique** (ou **inverse** si loi est $\times$, ou **opposé** si la loi est $+$) Si $\triangle$ est une loi associative qui admet un neutre e, et si $x \in A$, on appelle de x pour la loi $\triangle$ tout élément $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Si $\triangle$ est également associative, il existe au plus un élément x' vérifiant cette propriété, et on l'appelle **le** symétrique de x pour la loi $\triangle$.

Définition : Groupe

Un **groupe** est un couple $(G, \triangle)$ où G est un ensemble et $\triangle$ une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\triangle$. Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi $\triangle$ est de plus commutative.

Exemple : Le Groupe $(\mathbb{R}^n, +)$

La loi d'addition sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$+ \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{array} \right. .$$

- **associative** : Soit $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} \end{aligned}$$

- **commutative** : Soit $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

- **élément neutre** : Soit $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
Montrons que $\overrightarrow{0} = (0, 0, \dots, 0)$ est l'élément neutre

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+\overrightarrow{0} &= (x_1+0, x_2+0, \dots, x_n+0)\\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &= \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

— **symétrique** : Soit $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
Montrons que $-\overrightarrow{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ est l'opposé de $\overrightarrow{x}$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}+(-\overrightarrow{x}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)\\ &= (x_1-x_1, x_2-x_2, \dots, x_n-x_n)\\ &= (0, 0, \dots, 0)\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif.

Définition : Loi de composition externe : $\lambda.\overrightarrow{x}$

Soit $\mathbb{K}$ et A deux ensembles. Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de $\mathbb{K}$ et un élément de A, associe un élément de A :

$$.\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{K}\times A & \longrightarrow & A\\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}\right.$$

Exemple : $(\mathbb{R}^n, .)$

La loi de multiplication sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$.\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ (\lambda, \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto & \lambda.\overrightarrow{x} = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \dots, \lambda.x_n)\end{array}\right..$$

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $2.(1, -2) = (2, -4)$.

Définition : Corps $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Dans ce cours, un corps $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition : Espace vectoriel : $\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}$

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un triplet $(E, +, .)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une loi de composition externe sur E, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi . est compatible avec la structure de groupe $(E, +)$, i.e.
   (a) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\overrightarrow{x} \in E$, $(\lambda+\mu).\overrightarrow{x} = (\lambda.\overrightarrow{x}) + (\mu.\overrightarrow{x})$;
   (b) $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$, $\lambda.(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = (\lambda.\overrightarrow{x}) + (\lambda.\overrightarrow{y})$;
   (c) $\forall\overrightarrow{x} \in E$, $1_{\mathbb{K}}.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$;
   (d) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\overrightarrow{x} \in E$, $\lambda.(\mu.\overrightarrow{x}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{x}$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un vecteur et est noté dans ce cours avec une flèche $\overrightarrow{x}$. Un élément du corps $\mathbb{K}$ est un scalaire et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ.

Exemple

— les n-uplets $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles,

— les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,

— si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X,E)$ muni des lois usuelles.

II Construire des espaces vectoriels

A Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ et F e.v.

Définition

Définition-Proposition : Sous espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si

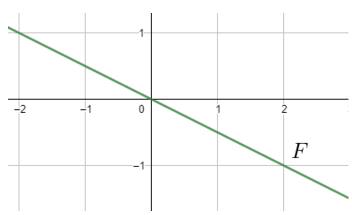
— F est non vide,

— F est stable par $+$, i.e. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F$, $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$,

— F est stable par . , i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \overrightarrow{x} \in F$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in F$.

Muni des lois induites, F est alors un espace vectoriel.

Exemple

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ 

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

— *non vide :*
$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ car $0 + 2.0 = 0$.

— *stable par + :*
Soit $\overrightarrow{x}_1 = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{x}_2 = (x_2, y_2) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$.
i.e. montrons que $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$.
On a :

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0 + 0 = 0.$$

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} = (x,y) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\lambda\overrightarrow{x} = (\lambda x, \lambda y) \in F$.
i.e. montrons que $(\lambda x) + 2(\lambda y) = 0$.
On a

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda 0 = 0.$$

Proposition : Critère d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

— $\overrightarrow{0_E} \in F$;

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F$, $\lambda.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$.

Engendré par une famille finie : $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x_p}) = \{\lambda_1.\vec{x_1} + \cdots + \lambda_p.\vec{x_p}\}$

Définition : Famille finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une **famille finie** de vecteurs de E est un p-uplet $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$ formée de vecteurs de E, où $p \in \mathbb{N}$.

Définition : Combinaison linéaire

Avec les mêmes notations, une **combinaison linéaire** de la famille $\mathcal{F}$ est un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ de la forme $\overrightarrow{x} = \lambda_1.\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{x_p}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.
Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.
On note $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaison linéaires de la famille $(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$.

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1.\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{x_p} : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

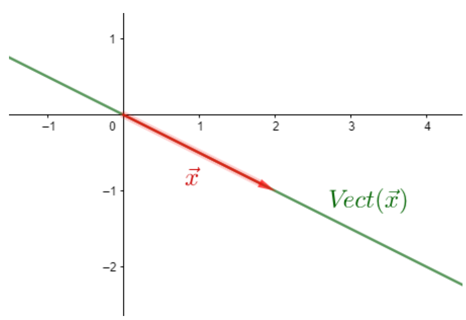
Par convention, $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

Définition-Proposition : Espace engendré

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **espace engendré** par la famille $(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}$.

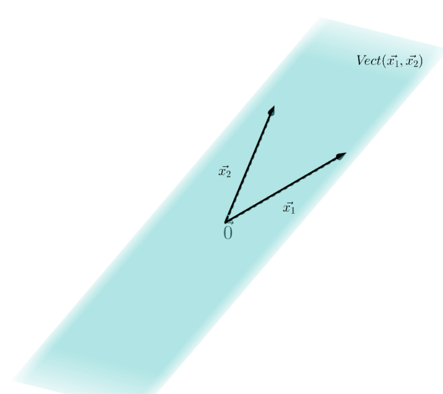
Exemple : Droite vectoriel

Lorsque que $p = 1$ avec $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x}) = \{\lambda.\overrightarrow{x} : \forall \lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\overrightarrow{x}$.
On la note $\mathbb{R}\overrightarrow{x}$.
Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est



Exemple : Plan vectoriel

Lorsque que $p = 2$ avec $\overrightarrow{x_1}$ non colinéaire à $\overrightarrow{x_2}$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \{\lambda.\overrightarrow{x_1} + \mu.\overrightarrow{x_2} : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectorielle** engendrée par $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. On le note $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2}$.
Un plan vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est



Intersection $F_1 \cap F_2$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
Alors l'intersection $\cap_{i=1}^{p} F_i$ est également un sous espace vectoriel.

Démonstration

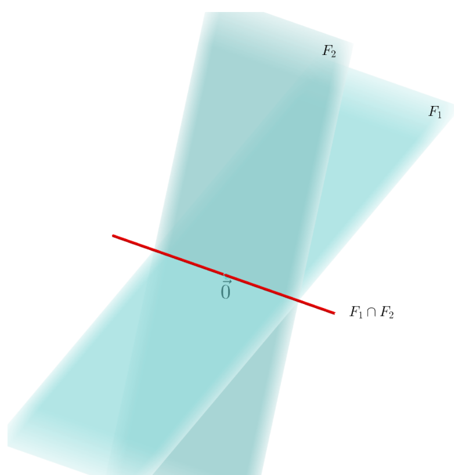
— *non vide :*
$\forall i \in [\![1,p]\!] : \overrightarrow{0} \in F_i$ donc $\overrightarrow{0} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$

— *stable par + :*
Soit $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 \in \cap_{i=1}^{p} F_i$ d'où pour tout $i \in [\![1,p]\!] : \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 \in F_i$.
Ainsi pour tout $i \in [\![1,p]\!] : \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in F_i$ donc $\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \cap_{i=1}^{p} F_i$.

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\overrightarrow{x} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$ d'où $\forall i \in [\![1,p]\!] : \overrightarrow{x} \in F_i$.
Ainsi pour tout $i \in [\![1,p]\!] : \lambda \overrightarrow{x} \in F_i$ donc $\lambda \overrightarrow{x} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$.

Exemple

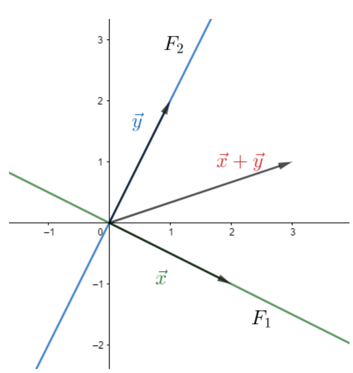
$F = \overbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}}^{=F_1} \cap \overbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}}^{=F_2}$ l'intersection de deux plans vectoriels, F_1 et F_2 dans $\mathbb{R}^3$



Somme de sous-espaces vectoriels : $F_1 + F2 = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}$

Remarque

L'union $\cup_{i=1}^{p} F_i$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



Sur cette figure, les vecteurs $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F_1 \cup F_2$ et on a $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \notin F_1 \cup F_2$. La somme permet de construire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Définition-Proposition : Somme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de la forme $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ où $\overrightarrow{x} \in F_1$ et $\overrightarrow{y} \in F_2$; autrement dit,

$$F_1 + F_2 = \{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} : \overrightarrow{x} \in F_1, \overrightarrow{y} \in F_2\}.$$

$F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
Plus précisément $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Démonstration

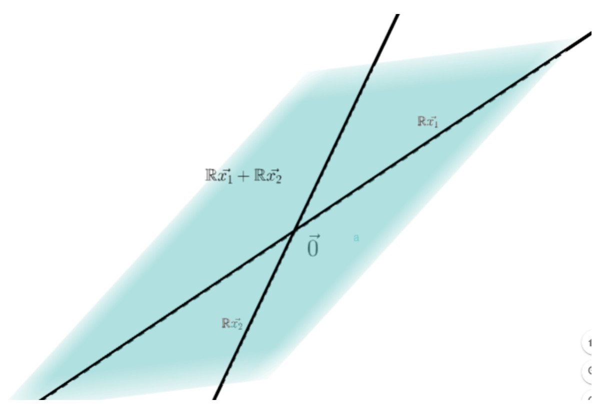
— *non vide :*
$\overrightarrow{0} \in F_1, F_2$ d'où $\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

— *stable par + :*
Soit $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2} \in F_1 + F_2$.
$\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2} = \underbrace{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F_1 + F_2$.
$\lambda(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \underbrace{\lambda\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda\overrightarrow{y}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}\overrightarrow{x}_1$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{x}_2$ deux droite vectorielles distinctes. La somme de ces deux espace vectoriels forme le plan vectoriel $\mathbb{R}\overrightarrow{x}_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{x}_2$.



Définition : Somme directe

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $F_1 + F_2$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ où $\overrightarrow{x} \in F_1$ et $\overrightarrow{y} \in F_2$. On note alors la somme $F_1 \oplus F_2$.

Proposition : Critère 1

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si

$$\forall \overrightarrow{x} \in F_1, \forall \overrightarrow{y} \in F_2 : \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E} \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E}.$$

Démonstration

— ($\Longrightarrow$) :
Soit $\overrightarrow{x} \in F_1$ et $\overrightarrow{y} \in F_2$ tel que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. On a aussi $\underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2} = \overrightarrow{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

— ($\Longleftarrow$) :
Supposons qu'un $\overrightarrow{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons : $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$ et $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :
$$\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'}}_{\in F_2}.$$
D'après l'hypothèse, on a $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'} = \overrightarrow{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y'}$.

Proposition : Critère 2

Avec les mêmes notations, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration

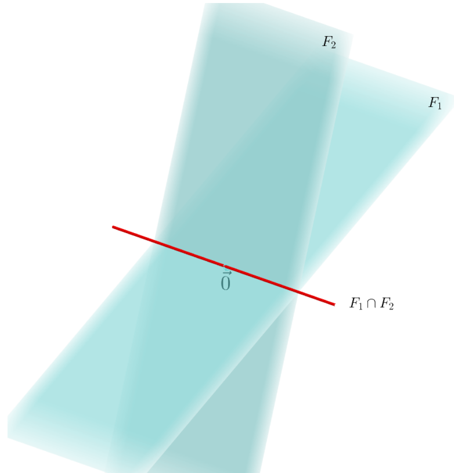
— ($\Longrightarrow$) :
 * $\{\overrightarrow{0_E}\} \subset F_1 \cap F_2$: $\overrightarrow{0_E} \in F_1, F_2$ donc $\overrightarrow{0_E} \in F_1 \cap F_2$.
 * $F_1 \cap F_2 \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$: Soit $\overrightarrow{x} \in F_1 \cap F_2$. On a $\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{-\overrightarrow{x}}_{\in F_2} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2}$. Par unicité de la décomposition, on identifie $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Du fait de la double inclusion, on a $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

— ($\Longleftarrow$) :
Supposons qu'un $\overrightarrow{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons : $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$ et $\overrightarrow{z} = \underbrace{\overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :
$$\underbrace{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}}_{\in F_1} = \underbrace{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'}}_{\in F_2}.$$
Comme $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$, on a $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'} = \overrightarrow{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y'}$.

Exemple

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F_1 et F_2, est une droite vectoriel, $F_1 \cap F_2$, donc la somme n'est pas directe.



Si $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = \lambda, x = -\lambda, y = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(-1, 0, 1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathrm{Vect}(-1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Finalement $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$.

Définition : Supplémentaires

Avec les mêmes notations, si la somme $F_1 + F_2$ est directe et égale à E, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**, et on note

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Exemple

Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^n)$.

— $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] + \mathrm{Vect}(X^n)$:
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$P = \overbrace{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}}^{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \overbrace{a_nX^n}^{\in \mathrm{Vect}(X^n)}.$$

— $\mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathrm{Vect}(X^n) = \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\}$:
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathrm{Vect}(X^n)$.
Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $deg(P) < n$. Comme $P \in \mathrm{Vect}(X^n)$, on a $P = \lambda X^n$. Si $\lambda \neq 0$, on a $deg(P = \lambda X^n) = n$, d'où une contradiction. Donc $P = 0$.

Définition-Proposition : Somme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$ l'ensemble $\sum_{k=1}^{p} F_k$ des vecteurs de la forme $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p}$ où $\overrightarrow{x_1} \in F_1$,

$\overrightarrow{x_2} \in F_2$, ..., $\overrightarrow{x_p} \in F_p$; autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p} : \overrightarrow{x_1} \in F_1, \overrightarrow{x_2} \in F_2, \ldots, \overrightarrow{x_p} \in F_p\}.$$

Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E ; plus précisément S est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$.

Définition : Somme directe

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p}$ où $\overrightarrow{x_1} \in F_1$, $\overrightarrow{x_2} \in F_2$, ..., $\overrightarrow{x_p} \in F_p$. On note alors la somme $\oplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition : Critère 1

Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si

$$\overrightarrow{x_1} \in F_1, \overrightarrow{x_2} \in F_2, ..., \overrightarrow{x_p} \in F_p, \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E} \implies \overrightarrow{x_1} = \cdots = \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E}.$$

Remarque

Le critère 2 ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.
$E = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{x_2} = (0,1)$ et $\overrightarrow{x_3} = (1,1)$. On a $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} = \mathbb{R}\overrightarrow{x_1} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_3} = \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_3} = \{(0,0)\}$.
Cependant la somme $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_3}$ n'est pas directe car $(1,1) = 1(1,1)$ et $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.

B Espace vectoriel produit : $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$

Définition : Produit cartésien

Soit $(E_1, +_1, ._1)$ et $(E_2, +_2, ._2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On pose

$$E = E_1 \times E_2 = \{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) : \overrightarrow{x_1} \in E_1, \overrightarrow{x_2} \in E_2\}.$$

E est le **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2.
On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :

$$\forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E, (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) \in E, \quad (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) + (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{x_1} +_1 \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2} +_2 \overrightarrow{y_2}).$$

De même, on définit la loi de composition externe . sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E, \lambda.(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\lambda ._1 \overrightarrow{x_1}, \lambda ._2 \overrightarrow{x_2}).$$

Exemple

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit E^p par

$$E^p = \prod_{k=1}^{p} E.$$

Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

Proposition

E ainsi défini est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

On définit de manière analogue le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, produit cartésien des ensembles $E_1, \dots, E_n$. $(E_1, +_1, ._1)$, $(E_2, +_2, ._2)$, ..., $(E_p, +_p, ._p)$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E = \prod_{k=1}^{p} E_k = \{(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}) : \overrightarrow{x_1} \in E_1, \dots, \overrightarrow{x_p} \in E_p\}$.

III Base : $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \dots \lambda_p), \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}$

A Définition

Famille génératrice : existence

Définition : Famille génératrice

Une famille finie $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, c'est à dire si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est à dire si

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{e_p}.$$

Exemple

La famille $\{(1,1), (0,1), (1,-1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\overrightarrow{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1).$$

En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car $(x, y) = x(1,1) + (y-1)(0,1)$.

Famille libre : unicité

Définition : Famille libre

Une famille finie $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est **libre** si tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel engendré par la famille s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}((\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p}), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{e_p}.$$

Autrement dit aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition : Critère

Une famille finie $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ nulle est triviale, c'est à dire

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0_E} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration

La démonstration est similaire au critère 2 de la somme directe (voir démonstration A).

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a démontré qu'un vecteur pouvait s'exprimer à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes. Avec ce dernier critère, la démonstration serait :
Soit $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(1,1) + \beta(0,1) + \alpha(1,-1) = (0,0).$$

On a :

$$\begin{cases} \lambda+\alpha & =0 \\ \lambda+\beta-\alpha & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & =1 \\ \alpha & =-1 \\ \beta & =-2 \end{cases}.$$

On vérifie que $(1,1)-2(0,1)-(1,-1)=(0,0)$.

Base : existence et unicité

Définition

On dit que la famille $\mathcal{F}=(\overrightarrow{e}_1,\dots,\overrightarrow{e_p})$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.
De façon équivalente, la famille $(\overrightarrow{e}_1,\dots,\overrightarrow{e_p})$ est une base de E si

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists! \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \overrightarrow{x}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}+\cdots+\lambda_p\overrightarrow{e_p}.$$

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{K}_n[X]$, admet une base $(1,X,X^2,\dots,X^n)$, appelée base canonique.

Exemple

L'espace vectoriel des matrices carrés de taille 2, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet une base $(\begin{pmatrix}1,0\\0,0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0,1\\0,0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0,0\\1,0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0,0\\0,1\end{pmatrix})$, appelée base canonique.

Remarque

On n'a pas unicité de la base. Par exemple pour $\mathbb{K}_n[X]$, avec les x_i $n+1$ scalaires distincts, les polynômes de Lagrange

$$l_i(X)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{X-x_j}{x_i-x_j}$$

$$l_i(X)=\frac{X-x_0}{x_i-x_0}\cdots\frac{X-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\frac{X-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdots\frac{X-x_n}{x_i-x_n}$$

forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

B Existence d'une base

Définition : Dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E, et **de dimension infinie** sinon.

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.
En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration

La démonstration repose sur l'algorithme suivant :
Soit la partie libre initiale $\mathcal{L}$.
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille finie, $\mathcal{G}$, génératrice de E.
Tant que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E :

1. Puisque $\mathcal{G}$ engendre E et que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E, il existe un vecteur $\overrightarrow{g}$ de $\mathcal{G}$ qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$.
2. On remplace $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} \cup \{\overrightarrow{g}\}$, qui est encore libre car le nouveau vecteur n'est pas une combinaison linéaire des précédents.

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de $\mathcal{G}$ différent des précédents et que $\mathcal{G}$ est fini. $\mathcal{L}$ est alors une partie génératrice, donc une base de E.

Théorème : Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration

La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$.

C Unicité du cardinal de la base

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration

Démontrons cette proposition par récurrence.

— *Initialisation* :
Soit $(\overrightarrow{g}_1)$ une famille génératrice de E.
Soit $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ une famille de E. Il existe λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{g}_1$ et $\overrightarrow{v}_2 = \lambda_2 \overrightarrow{g}_1$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors la famille $(\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0})$ est liée.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\overrightarrow{v}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{v}_2$. Les vecteurs sont colinéaires donc liées.
Idem si $\lambda_2 \neq 0$.

— *Hérédité* :
Soit $(\overrightarrow{g_1}, \dots, \overrightarrow{g_n})$ une famille génératrice de E.
Soit $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots \overrightarrow{v}_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.
Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, il existe $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\overrightarrow{v}_i = \lambda_{i,1} \overrightarrow{g}_1 + \lambda_{i,2} \overrightarrow{g_2} + \cdots + \lambda_{i,n} . \overrightarrow{g_n}$$

Quitte à réorganiser les deux familles, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\overrightarrow{v}_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}} \overrightarrow{v}_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{g_1}, \dots, \overrightarrow{g}_{n-1}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel générée par la famille $(\overrightarrow{g_1}, \dots, \overrightarrow{g}_{n-1})$. Donc la famille $\left(\overrightarrow{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}}\overrightarrow{v}_{n+1}, \dots, \overrightarrow{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\overrightarrow{v}_{n+1}\right)$ est liée. Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\beta_1(\overrightarrow{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}}\overrightarrow{v}_{n+1}) + \dots + \beta_n(\overrightarrow{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\overrightarrow{v}_{n+1}) = \overrightarrow{0}.$$

d'où

$$\beta_1\overrightarrow{v}_1 + \dots + \beta_n\overrightarrow{v}_n - (\beta_1\frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} + \dots + \beta_n\frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}})\overrightarrow{v}_{n+1} = \overrightarrow{0}.$$

La famille est donc liée.

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.

Démonstration

Si la famille a strictement plus de n vecteurs, on peut en enlever pour constituer une famille de $n+1$ vecteurs qui est donc liée d'après la proposition précédente. A fortiori, la famille initiale est liée.

Proposition : Unicité du cardinal d'une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ et $(\overrightarrow{f}_1, \dots, \overrightarrow{f_q})$ deux bases de E.
Alors $p = q$.

Démonstration

$(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une famille génératrice de E. Comme $(\overrightarrow{f}_1, \dots, \overrightarrow{f_q})$ est libre d'après la proposition précédente, $q \leqslant p$. Par symétrie, on a aussi $p \leqslant q$. Finalement $p = q$.

Cette proposition nous permet cette définition.

Définition-Proposition : Dimension

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est égale au cardinal d'une base quelconque de E.

Proposition : Critère

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Si $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille libre, alors $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E.
Si $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille génératrice, alors $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E.

Exemple

Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$, la combinaison linéaire des polynômes de Lagrange $\sum_{j=0}^n P(x_j)l_j(X)$ avec $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ scalaires distincts est égale au polynôme P aux points $x_0, \dots, x_n$, donc égal à P. Les polynômes de Lagrange forment une famille génératrice de $n+1$ vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors F est également de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

D Base adaptée

Définition : Base adaptée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E.
La base $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est dite **adaptée** à F si et seulement s'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ soit une base de F.

Exemple

La base $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ est adaptée à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ car $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ est une base de F.

Proposition : Existence d'une base adaptée

La base ainsi définie existe.

Démonstration

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e_p})$ de F. Cette famille est libre dans E. On la complète en une base de E d'après le théorème de la base incomplète.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et B une base de E.
La base $\mathcal{B}$ est dite **adaptée** à la décomposition $E = \oplus_{k=1}^{p} F_k$ si et seulement si $\mathcal{B}$ peut s'écrire comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ où $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Proposition

La base ainsi définie existe.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
On suppose que $\mathcal{B}$ s'écrit comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_p$.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, notons F_k le sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_k$.
Alors les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires.

IV Théorèmes en dimension finie

Proposition : Existence d'un supplémentaire

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous espace vectoriel admet un supplémentaire.
Autrement dit, soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F que l'on complète avec $\mathcal{B}_2$ pour former une base de E.
D'après la proposition D, si on pose G l'espace vectoriel engendrée par $\mathcal{B}_2$, alors $E = F \oplus G$.

Proposition

Soit $E_1, \dots E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!]$, E_k est de dimension finie.

De plus, dans ce cas,

$$\dim(\prod_{k=1}^{p} E_k) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Démonstration

On suppose $p = 2$.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E_1 et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ une base de E_2.
Alors $((\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}_F), \dots, (\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{0}_F), (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_1}), \dots, (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_q}))$ est une base de $E_1 \times E_2$.

- *Génératrice* :
  Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E_1 \times E_2$.
  Comme $\overrightarrow{x} \in E_1$ et $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille génératrice de E_1, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$.
  Comme $\overrightarrow{y} \in E_2$ et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ est une famille génératrice de E_2, il existe $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{y} = \beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q}$.
  D'où $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \lambda_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}_F) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{0}_F) + \beta_1(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_1}) + \dots + \beta_q(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_q})$.
- *Libre* :
  Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que

  $$\lambda_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0}_F) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{0}_F) + \beta_1(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_1}) + \dots + \beta_q(\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{f_q}) = (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{0}_F).$$

  D'où :

  $$(\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}, \beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q}) = (\overrightarrow{0}_E, \overrightarrow{0}_F).$$

  Par identification, on obtient $\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}_E$ et $\beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q} = \overrightarrow{0}_F$. Comme $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ sont des familles libres de E_1 et de E_2 respectivement, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$.

Corollaire

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'espace vectoriel E^p est de dimension finie si et seulement si E l'est ; dans ce cas, on a $\dim(E^p) = p.\dim(E)$.

Proposition : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie et F_1, F_2 deux sous espace vectoriel de E. On a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_1).$$

Démonstration

Une idée est de remarquer l'analogie avec la formule ensembliste :

$$\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B).$$

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $F_1 \cap F_2$. On la complète en une base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{f_{p+k}})$ de F_1 et en une base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{g_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{g_{p+m}})$ de F_2. $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{f_{p+k}}, \overrightarrow{g_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{g_{p+m}})$ est une base $F_1 + F_2$.
Comme le cardinal d'une base est égale à la dimension de l'espace vectoriel, on obtient bien l'égalité souhaitée.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est également de dimension finie, et

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies et $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
On suppose que

$$\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E.$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. les sous espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires,
2. les sous espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe,
3. $\sum_{k=1}^{p} F_k = E$.

V Retour aux matrices

Proposition : Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Tous les axiomes se vérifient aisément.

Définition-Proposition : Base canonique

La **base canonique** est $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ où la matrice $E_{i,j}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) , qui vaut 1.
Les coordonnées dans la base canonique d'une matrice A sont ses coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1p}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{np}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} E_{ij}.$$

On a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Démonstration

Du fait de l'égalité, $A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$, $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $(\lambda_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de scalaires tel que

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \lambda_{ij} E_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}.$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, $\lambda_{ij} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, donc la famille est libre.
La famille est donc une base. Comme la cardinal de la base $\text{card}((E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p})$ est np, on a bien

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$