

Exercice : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$
2. $\sum e^{-n^2} z^n$
3. $\sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$
4. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$
5. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
6. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{i^n n^2}{n^2+1}$
7. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n \binom{2n}{n}}$
8. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
9. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} a_{2n} & = a^n \\ a_{2n+1} & = b^n \end{cases}$ où $0 < a < b$

Correction On prend dans chaque cas $z \neq 0$. et on revient à la règle de d'Alembert des séries numériques :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n^2+1}{3^n} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| &= \frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}} |z| \\ &= \frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)} |z| \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{3n^2} |z| \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| = |z| \frac{1}{3}$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = e^{-n^2} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| &= \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} |z| \\ &= e^{-2n-1} |z| \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| = 0$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = +\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$: $a_n = \frac{\ln n}{n^2} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z|^{2(n+1)} &= \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} |z|^{2(n+1)} \\ &= \frac{n^2 \ln(n+1)}{(n+1)^2 \ln n} |z|^{2(n+1)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| = 1 |z|^2$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = \sqrt{\frac{1}{1}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n^n}{n!} |z|^{3n} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^3 \\ &= e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} |z|^3 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} |z|^3 \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e \times |z|^3$$

D'après la règle de D'Alembert la série CV pour $e \times |z|^3 < 1$ soit $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, et diverge pour $r > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

On en déduit d'après la caractérisation du rayon de CV que $R_a = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} |z| \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} |z| \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \times |z|$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 1$.

6. Les coefficients ne sont pas réels (et pas positifs), on travaille alors avec les modules.

Pour tout $n \in \mathbb{N} : |a_n| = \frac{n^2}{n^2+1} > 0$ et :

... (à vous, c'est facile avec les équivalents)

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| = |z|$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV de $\sum |a_n| z^n$ vaut : $R_a = 1$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{n \binom{2n}{n}} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} |z| &= \frac{\frac{1}{(n+1) \binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{1}{n \binom{2n}{n}}} |z| \\ &= \frac{n \times (2n)! \times ((n+1)!)^2}{(n+1) \times (2n+2)! \times (n!)^2} |z| \\ &= \frac{n}{2(2n+1)} |z| \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|}{4}$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 4$.

8. On analyse les valeurs de a_n , avec la π -périodicité de \tan :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_n$$

Donc a_n ne prend que trois valeurs : pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_{3p} &= a_0 = 0 \\ a_{3p+1} &= a_1 = -\sqrt{3} \\ a_{3p+2} &= a_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Point de critère de D'Alembert possible directement (indirectement oui)... mais si on a bien compris ce qu'est un rayon de CV c'est rapide :

On déduit des valeurs d'une part que $a_n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum a_n 1^n$ diverge grossièrement, d'où $R_a \leq 1$ avec la caractérisation du rayon de CV.

Et d'autre part que $(|a_n| 1^n)$ est bornée, donc que $R_a \geq 1$ avec la définition du rayon de CV.

Finalement : $R_a = 1$

9. Le règle de D'Alembert n'est pas exploitable directement ici.

On revient à la définition du rayon de CV. et on utilise les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs.

Soit $r > 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée équivaut à $(a_{2n} r^{2n})$ et $(a_{2n+1} r^{2n+1})$ sont bornées.

- $a_{2n} r^{2n} = (ar^2)^n$ donc $(a_{2n} r^{2n})$ est une suite géométrique de raison ar^2 , elle est bornée lorsque $ar^2 \leq 1 \iff r \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$.
- $a_{2n+1} r^{2n+1} = r \times (br^2)^n$ donc $(a_{2n+1} r^{2n+1})$ est une suite géométrique de raison br^2 , elle est bornée lorsque $br^2 \leq 1 \iff r \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$.
- Et de plus : $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$

Donc $(a_n r^n)$ est bornée lorsque $r \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$, le rayon de CV est $R_a = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Exercice : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
2. $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} x^n$
4. $\sum_n (\ln n) x^n$
5. $\sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n + 1}$
6. $\sum_n (2 + ni) z^n$
7. $\sum_n \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} z^n$

Correction

Exercice : Rayon de convergence et somme

Calculer le rayon de convergence puis la somme de :

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
3. $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n$
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

Correction

1. — Rayon de CV $R = +\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= xe^x - e^x
 \end{aligned}$$

2. — Rayon de CV $R = +\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: sachant que $(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2$

L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= x^2 e^x - 2e^x
 \end{aligned}$$

3. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

- Pour tout $x \in]-1; 1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x \\ &= -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x\end{aligned}$$

4. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)

- Pour tout $x \in]-1; 1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{3n}{n+2} = 3 \left(1 - 2\frac{1}{n+2}\right)$
L'égalité ci-dessous est vraie car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} = 3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right)$$

Soit $x = 0$ et dans ce cas la somme est nulle, soit $x \neq 0$ et on peut factoriser par x :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} &= 3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \\ &= 3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \\ &= 3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + -\frac{2}{x^2} x \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2} \ln(1-x) + \frac{2}{x} \right)\end{aligned}$$

5. Il faut le voir mais on a immédiatement $R = +\infty$ par linéarité avec :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(x) + \cos(x))$$

Exercice : DSE en 0

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. $\ln(1+2x^2)$ | 2. $\frac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$ |
| 3. $\ln(a+x)$ avec $a > 0$ | 4. $\frac{e^x}{1-x}$ |
| 5. $\ln(1+x-2x^2)$ | 6. $(4+x^2)^{-3/2}$ |

Correction

Exercice : Équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

- Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
- Calculer explicitement a_n pour chaque n . Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
- Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

Exercice : derivation

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Est-elle convergente pour $|x| = R$?
2. Pour tout nombre réel x tel que la série entière précédente converge, on note $S(x)$ sa somme.
Expliciter la dérivée de la fonction $x \mapsto xS(x)$ sur $] -R, R[$.
En déduire $S(x)$ pour x appartenant à $] -R, R[$.

3. Calculer la somme de chacune des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{R^n}{(n+1)(n-2)},$$

$$\sum_{n \geq 3} \frac{R^n}{(n+1)(n-2)}.$$

Correction

1. $R = 1$. En effet, $\frac{|x|^n}{(n+1)(n-2)} \sim \frac{|x|^n}{n^2}$. Donc si $|x| \leq 1$, la série est absolument convergente (par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$) tandis que si $|x| > 1$, $\frac{|x|^n}{n^2} \rightarrow +\infty$ et la série diverge grossièrement.
2. On peut naturellement dériver la fonction sur son ouvert de convergence, soit ici $] -R, R[$.

$$xS(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-2)}.$$

On a donc $(xS)'(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} = x^2 \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} = -x^2 \ln(1-x)$. Une intégration par parties, suivie d'une intégration de fraction rationnelle, permet d'en déduire $xS(x)$, puis

$$S(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1-x^3}{x} \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right).$$

(Une autre méthode aboutissant à ce résultat est d'écrire :

$$3S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n-2} - \frac{x^n}{n+1} \right) = \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^3-1}{x} \sum_{n \geq 4} \frac{x^n}{n} = x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \frac{1-x^3}{x} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).$$

3. Par continuité, $S(-1) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{-1} \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^2}{3} \right) = \frac{5}{18} - \frac{2}{3} \ln 2$ et $S(1) = \frac{1}{3} \left(0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1^2}{3} \right) = \frac{11}{18}$.

Exercice : Fonction impaire

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice : Rayon de convergence

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels décroissante, de limite 0, et telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

Correction La série entière diverge en $z = 1$ et converge en $z = -1$ (par le critère de convergence des séries alternées) donc $R = 1$.