Réduction des endomorphismes/matrices carrés

La réduction d'endomorphisme a pour objectif d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple, par exemple pour faciliter les calculs. Réduire un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, cela correspond à trouver une base de l'espace dans laquelle l'endomorphisme s'exprime simplement. C'est à dire c'est décomposer l'espace E comme somme directe de sous-espaces stables par u, $E = \oplus_{i=1}^{n} E_i$ où les E_i sont stables par u. On peut donc définir les endomorphismes $u_{|E_i}$ induits par u sur E_i, soit :

$$u_{|E_i}\left|\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & E_i \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}\right. .$$

Comme tout vecteur $\vec{x} \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}$, on a :

$$u(\vec{x}) = u_{|E_1}(\vec{x_1}) + \cdots + u_{|E_n}(\vec{x_n}).$$

Ainsi, l'étude de u se ramène à l'étude des endomorphismes $u_{|E_i}$. L'idée directrice est que les u_i sont plus **simples** que u car définis sur des sous-espaces vectoriels de E.
En dimension finie, avec une base adaptée à la décomposition en somme directe, soit $\mathcal{B}_1$ base de E_1,..., $\mathcal{B}_n$ base de E_n, la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ est :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [u_{|E_1}]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [u_{|E_2}]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{|E_n}]_{\mathcal{B}_n} \end{pmatrix}$$

où 0 est la matrice nulle.
Dans le cas favorable, les u_i sont des homothéties, c'est à dire $u_{|E_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$.

$$u(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x_1} + \cdots + \lambda_n \vec{x_n}$$

Dans ce cas, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\dim(E_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathrm{I}_{\dim(E_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \mathrm{I}_{\dim(E_n)} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \mathrm{I}_{\dim(E_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$. $[u]_{\mathcal{B}}$ est donc une matrice diagonale. On dit que l'endomorphisme u est **diagonalisable**. Dans le cadre du programme, l'essentiel du cours de réduction se limite à l'aspect de diagonalisation. Les méthodes de réduction sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

Par exemple, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = E_1 \oplus E_2$).
Le projecteur p (ou la projection) sur E_1 parallèlement à E_2 est défini par :

$$p\left|\begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} & \longmapsto & \vec{x_1} \end{array}\right.$$

Nature géométrique : pour tout $x \in E_1$: $p(\vec{x}) = 1.\vec{x}$ donc $p_{|E_1} = 1\mathrm{Id}_{E_1}$ et pour tout $x \in E_2$: $p(\vec{x}) = 0.\vec{x}$ donc $p_{|E_2} = 0\mathrm{Id}_{E_2}$. La matrice de p dans une base adaptée à $E_1 \oplus E_2$ s'écrit :

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1.\mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0.\mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Nature algébrique : On a $p^2 = p$, d'où $p^2 - p = 0$ et enfin $(p - 1.\mathrm{Id}_E)(p - 0.\mathrm{Id}_E) = 0$. Le polynôme $Q = (X-1).(X-0)$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme p car $Q(p) = 0$. Comme Q est scindé simple, on démontrera que de nouveau p est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $E_1 \oplus E_2$.

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne un corps (ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ;
- E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ;
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

I Stabilité

A D'un sous espace vectoriel : $u(F) \subset F$

Définition : Stable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace F de E est **stable** par u si $u(F) \subset F$, c'est à dire :

$$\forall \vec{x} \in F, \quad u(\vec{x}) \in F.$$

On peut alors définir un endomorphisme $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ en posant $u_{|F}(\vec{x}) = u(\vec{x})$ pour tout $x \in F$. $u_{|F}$ s'appelle l'**endomorphisme induit** par u sur F.

Exemple : Dérivée

> Soit $\phi : f \mapsto f'$. L'espace vectoriel des fonctions C^∞ est stable par ϕ.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une base de E dont les premiers vecteurs, $\mathcal{B}'$, forment une base de F. Alors la matrice de u dans cette base a la forme

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

si et seulement si F est stable par u. Dans ce cas $A = [u_{|F}]_{\mathcal{B}'}$.

Proposition : Diagonalisation par blocs

Soit $E_1 \oplus E_2 = E$ de dimension finie avec E_1 et E_2 stables par u. Alors la matrice de u dans une base adaptée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ à la décomposition $E_1 \oplus E_2 = E$ a la forme diagonale par blocs

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$A = [u_{|E_1}]_{\mathcal{B}_1}$ et $B = [u_{|E_2}]_{\mathcal{B}_2}$.

Définition : Stable

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un sous-espace F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est stable par M si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad MX \in F.$$

Dans ce cas, M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à F.

Proposition : Diagonalisation par blocs

Soit $E_1 \oplus E_2 = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec E_1 et E_2 stables par M. Alors la matrice de M est semblable à la matrice diagonale par blocs, c'est à dire que

$$M = P \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Exemple : Matrice orthogonal

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $E_1 = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >$ et $E_2 = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$.
Pour la stabilité, on vérifie que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1$$

et

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1.$$

De plus, on a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$.

A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

B D'une droite vectoriel : $u(\mathbb{K}\vec{x}) \subset \mathbb{K}\vec{x}$ (vecteurs propres et valeurs propres : $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$)

Proposition : Caractérisation

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\vec{x} \in E$.
$\mathbb{K}\vec{x}$ est stable par u si et seulement si il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Proposition : Caractérisation

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$\mathbb{K}X$ est stable par M si et seulement si il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u si il existe $\vec{x} \neq \vec{0}_E$ tel que $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

— On dit que $\vec{x} \in E$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ si $\vec{x} \neq \vec{0}_E$ et $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

— On appelle **spectre** de u, noté $\text{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

— On appelle **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda\text{Id}_E)$.

Exemple

Soit $\Psi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$. On a $\Psi(X^i) = i \times X^i$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. X^i est un vecteur propre associé à la valeur propre i.

Exemple

Soit $\phi : f \mapsto f'$. On a $\text{Sp}(\phi) = \mathbb{R}$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est vecteur propre

$$\phi(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}.$$

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de M si il existe $X \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ tel que $MX = \lambda X$.
- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ si et seulement si $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $MX = \lambda X$.
- On appelle **spectre** de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M.
- On appelle **sous-espace propre** de M associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda \mathrm{I}_n)$.

Exemple

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représente la symétrie par rapport à la première bissectrice, soit la symétrie par rapport à $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallèlement à $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On a $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (tout vecteur appartenant à la première bissectrice est invariant par M) et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 (tout vecteur orthogonal à la première bissectrice est transformé en son opposé par M).

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp} u$.
Alors l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \setminus \{\vec{0}_E\}$.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp} M$.
Alors l'ensemble des vecteurs propres de M associés à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}(M - \lambda \mathrm{I}_n) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \mathrm{Sp} u$;
- $\exists \vec{x} \neq \vec{0}_E$ tel que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E$;
- $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{\vec{0}_E\}$;
- $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective
- $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective (uniquement en dimension finie).

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \mathrm{Sp} M$;
- $\exists X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ tel que $(M - \lambda \mathrm{I}_n)X = 0$;
- $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0\}$;
- $(M - \lambda \mathrm{I}_n)$ n'est pas inversible.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u et E_λ le sous-espace propre correspondant.
Alors E_λ est stable par u.
De plus, l'endomorphisme induit par u sur E_λ est l'homothétie de rapport λ. Autrement dit, $u_{|E_\lambda} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda}$.

De plus, en dimension finie, la matrice de u dans une base adaptée à E_λ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Proposition : Diagonalisation

Soit $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$ de dimension finie avec E_{λ_1}, $E_{\lambda_2} \ldots$ et E_{λ_p} des espaces propres de u. Alors la matrice de u dans une base adaptée à $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\dim(E_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathrm{I}_{\dim(E_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \mathrm{I}_{\dim(E_p)} \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, λ une valeur propre de M et E_λ le sous-espace propre correspondant.
Alors E_λ est stable par M.
De plus, M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, c'est à dire que :

$$M = P \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à E_λ.

Proposition : Diagonalisation

Soit $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec E_{λ_1}, $E_{\lambda_2} \ldots$ et E_{λ_p} des espaces propres de M. Alors la matrice de M est semblable à la matrice diagonale, c'est à dire que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\dim(E_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathrm{I}_{\dim(E_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \mathrm{I}_{\dim(E_p)} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.
Autrement dit, si $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est libre.

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les sous-espaces propres de M sont en somme directe.
Autrement dit, si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(X_i)_{i \in I}$ est libre.

II Polynômes d'endomorphismes

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, on supposera que E est un espace vectoriel de dimension finie.

A Polynôme caractéristique

Lemme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $\lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$ est une fonction polynômiale en la variable λ.

Lemme

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $\lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{I}_n - M)$ est une fonction polynômiale en la variable λ.

Lemme

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables.
Alors $\det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - B)$

Définition : Polynôme caractéristique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de u et on note χ_u l'unique polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$.

Exemple

On définit l'application ϕ par :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

La matrice de l'endomorphisme de ϕ dans la base canonique, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } \phi(X^i) = X^i - iX^{i-1}.$$

Donc $\chi_\phi(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - \phi) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - [u]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3$.

Définition : Polynôme caractéristique

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de M et on note χ_M l'unique polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M)$.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

On a $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - P) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Le spectre de u est exactement l'ensemble des racines de χ_u, c'est à dire $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Racines}(\chi_u)$.

Exemple

On a $\mathrm{Sp}(\phi) = \{1\}$.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le spectre de M est exactement l'ensemble des racines de χ_M, c'est à dire $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Racines}(\chi_M)$.

Exemple

Avec $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $n = \dim E$.
Alors :

- χ_u est un polynôme unitaire de degré n ;
- le coefficient en X^{n-1} de χ_u vaut $-\operatorname{tr} u$;
- le coefficient constant de χ_u vaut $(-1)^n \det u$.

En résumé, $\chi_u(X) = X^n - \operatorname{tr} u X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé ; χ_u peut alors s'écrire sous la forme $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$.
On a $\operatorname{tr} u = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et $\det u = \prod_{k=1}^n \lambda_k$.

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors :

- χ_M est un polynôme unitaire de degré n ;
- le coefficient en X^{n-1} de χ_M vaut $-\operatorname{tr} M$;
- le coefficient constant de χ_M vaut $(-1)^n \det M$.

En résumé, $\chi_M(X) = X^n - \operatorname{tr} M X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M$.

Corollaire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que χ_M est scindé ; χ_M peut alors s'écrire sous la forme $\chi_M(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. On a $\operatorname{tr} M = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et $\det M = \prod_{k=1}^n \lambda_k$.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Comme $\operatorname{tr} M = 3$ et $\det_{\mathcal{B}} M = 2$ On a $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} M X + \det M = \lambda^2 - 3X + 2$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, et $u_{|F}$ l'endomorphisme induit par u sur F, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

Démonstration : La matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_S)$ de E où $\mathcal{B}_F$ est une base de F est de la forme :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } A = [u_{|F}]_{\mathcal{B}_F}.$$

$$\chi_u = \det(X\mathrm{I}_n - [u]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} X\mathrm{I}_r - A & -B \\ 0 & X\mathrm{I}_{n-r} - C \end{pmatrix} = \det(X\mathrm{I}_r - A)\det(X\mathrm{I}_{n-r} - C) = \chi_{u_{|F}} \det(X\mathrm{I}_{n-r} - C).$$

Donc $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u. ■

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si F est un sous-espace vectoriel stable par M, et $u_{|F}$ l'endomorphisme induit par u sur F, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si F et G sont des sous-espaces vectoriels u-stables tels que $E = F \oplus G$, $u_{|F}$ et $u_{|G}$ les endomorphismes induits par u sur F et G respectivement.
Alors $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \chi_{u_{|G}}$.

Définition : Multiplicité

On appelle **multiplicité** de la valeur propre λ la multiplicité de λ comme racine de χ_u ou de χ_M.

Exemple

Pour l'application $\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$, comme $\chi_\phi(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, 1 est de multiplicité 3.

Théorème

Soit λ une valeur propre de u ou de M.
Alors
$$1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m_\lambda$$
où

— E_λ est le sous-espace propre de u ou de M associé à la valeur propre λ ;

— m_λ est la multiplicité de la valeur propre λ.

Démonstration : Soit n la dimension de E. Comme λ est une valeur propre de i, E_λ contient un vecteur non nulle, donc sa dimension $\dim E_\lambda \geqslant 1$. De plus E_λ est un sous espace vectoriel de E donc $\dim E_\lambda \leqslant n$. On a :

1. Si $\dim E_\lambda = n$, alors u est égalé à l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}_E$, dont le polynôme caractéristique est égal à $(X - \lambda)^n$.et on a bien $m_\lambda = n$.
2. Si $\dim E_\lambda \leqslant n$, alors soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à E_λ. La matrice u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(E_\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On obtient alors $\chi_u = (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda)} \chi_C$ ce qui prouve $\dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$ car $(X - \lambda)^{\dim(E_\lambda)}$ divise χ_u. ∎

Remarque

Si λ est de multiplicité 1 (racine simple) alors $\dim E_\lambda = 1$.

B Polynôme annulateur

Définition : Polynôme annulateur

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **polynôme annulateur de u** s'il est non nul et si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **polynôme annulateur de M** s'il est non nul et si $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. On a $(M - 2\mathrm{I}_2)(M - 1\mathrm{I}_2) = 0$, donc $P = (X-2)(X-1)$ est un polynôme annulateur de M.

Lemme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\vec{x} \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
Alors $P(u)(\vec{x}) = P(\lambda)\vec{x}$.

Lemme

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $MX = \lambda X$.
Alors $P(M)(X) = P(\lambda)X$.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de u.
Alors toutes les valeurs propres de u sont des racines de P, c'est à dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Racines}(P)$.

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de M. Alors toutes les valeurs propres de M sont des racines de P, c'est à dire $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathrm{Racines}(P)$.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. On a $(M - 2\mathrm{I}_2)(M - 1\mathrm{I}_2) = 0$, donc 2 et 1 sont les uniques valeurs propres possibles. On vérifie que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de 1 et que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de 2.

Théorème : Cayley-Hamilton

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors le polynôme caractéristique de M est un polynôme annulateur de M.

III Endomorphismes diagonalisables

Définition : Diagonalisable

— Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **diagonalisable** si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}}$ est diagonale.

— Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
Alors u est diagonalisable si et seulement si $[u]_{\mathcal{B}}$ est diagonalisable.

Définition : Scindé simple

On dira que $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé simple** s'il est scindé et que toutes ses racines sont simples.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour toute valeur propre λ de u, on note m_λ sa multiplicité et E_λ le sous-espace propre associé.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable, c'est à dire il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}}$ est diagonale ;
2. u admet un polynôme annulateur scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp} u$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$;
3. χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp} u$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$;
4. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} u} \dim E_\lambda = \dim E$;
5. E est somme directe des espaces propres de u, c'est à dire $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} u} E_\lambda$;
6. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u ;
7. Le polynôme scindé simple $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp} u}(X-\lambda)$ annule u ;
8. u admet un polynôme annulateur scindé simple.

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si χ_u est un polynôme scindé simple, alors u est diagonalisable. La réciproque est fausse (contre-exemple : $u = \mathrm{Id}_E$).
2. Si u est diagonalisable et que F est stable par u, alors l'endomorphisme induit par u sur F est également diagonalisable.
3. Si $E = \oplus_{k=1}^{p} F_k$ et que pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $u_{|F_k}$ est une homothétie, alors u est diagonalisable. Pour la réciproque, cf. 2. du théorème précédent.

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour toute valeur propre λ de M, on note m_λ sa multiplicité et E_λ le sous-espace propre associé.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est diagonalisable, c'est à dire M est semblable à une matrice diagonale ;
2. M admet un polynôme annulateur scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp} M$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$;
3. χ_M est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp} M$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$;
4. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} M} \dim E_\lambda = \dim E$;
5. E est somme directe des espaces propres de M, c'est à dire $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} M} E_\lambda$;
6. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de M ;
7. Le polynôme scindé simple $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp} M}(X-\lambda)$ annule M ;
8. M admet un polynôme annulateur scindé simple.

Corollaire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si χ_M est un polynôme scindé simple,
alors M est diagonalisable.

Algorithme

Une algorithme pour diagonaliser une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

— on calcule le polynôme caractéristique χ_A ;

— on factorise χ_A : s'il n'est pas scindé, c'est que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{K}$;

— pour chaque racine λ, on détermine une base du sous-espace propre E_λ en résolvant le système linéaire $AX = \lambda X$. Si on trouve strictement moins de m_λ vecteurs libres, c'est que A n'est pas diagonalisable ;

— soit P la matrice carrée dont les colonnes sont les n vecteurs propres trouvés. Soit D la matrice diagonale formée des valeurs propres correspondantes. On a alors $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

Des applications :

— calcul des puissances d'une matrice A ;
— système de suites linéaires récurrences à coefficients constants ;
— systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

IV Endomorphismes trigonalisables

Définition : Trigonalisable

— Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.
— Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
Alors u est trigonalisable si et seulement si $[u]_{\mathcal{B}}$ est trigonalisable.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. u est trigonalisable, c'est à dire il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $[u]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure ;
2. χ_u est scindé ;
3. u admet un polynôme annulateur scindé.

Corollaire

1. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
2. Toute matrice carrée est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n\mathbb{C}$.