Chapitre 1

Série entière

Exemple 1 (*Série exponentielle*)

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad (E)$$

Par définition, l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre est l'application $x \to e^x$.

1. Déterminons les solutions de (E) sous forme polynomiale. Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Pour des raisons de degré, uniquement le polynôme nul convient. Comme $f(0) = 1$, il n'existe pas de solutions.
2. Déterminons les solutions de (E) sous forme "polynomiale de degré infini". Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. "Soit x."
   "Par dérivation", on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) \text{ "par interversion des symboles dérivée et somme"} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ par translation d'indice}
\end{aligned}$$

   Comme $f'(x) = f(x)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

   "Par identification", on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+1) a_{n+1} = a_n.$$

   Par récurrence, on prouve que

$$a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

> Comme la condition initiale est $f(0) = 1$ et $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$, on obtient $a_0 = 1$. Comme la fonction exponentielle est l'unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale, on trouve alors :
> $$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Une **série entière** est un "polynôme de degré infini" :

$$\sum a_n z^n$$

où les coefficients a_n forment une suite réelle ou complexe et z une variable complexe.
Dans ce chapitre, nous allons donner du sens aux guillemets de l'exemple précédent :

1. "Soit x." : déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, c'est à dire déterminer le domaine de convergence de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
2. "Par dérivation" : déterminer la dérivabilité de la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
3. "Par interversion des symboles dérivée et somme" : démontrer l'égalité,
4. "Par identification" : démontrer l'unicité du développement sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Les séries entières sont

1. un outil :
   (a) dans la résolution d'équations différentielles, par exemple $(1 + x)y' = \alpha y$, en cherchant les solutions sous la forme $y(x) = \sum a_n x^n$,
   (b) dans l'étude du comportement asymptotique d'un somme de variable aléatoires et la caractérisation d'une variable aléatoire par la fonction génératrice : $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0} P(X = k)t^k$,
   (c) dans la modélisation des systèmes dynamiques de manière discrète à l'aide de la transformée en Z, soit $s(n)$ l'état du système au temps n, sa transformée en Z est
   $$S(z) = \mathcal{Z}\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}.$$
2. un objet préalable à l'analyse complexe des fonctions holomorphes et analytiques par exemple la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$.

Les séries entières sont un exemple de séries de fonctions. Pour une cohérence mathématiques, il faudrait étudier d'abord le cadre général des suites et séries de fonctions avant l'exemple. Cependant, d'un point de vue pédagogique, nous commençons par cet exemple comme introduction du cadre général. Nous utiliserons voir chapitre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand l'étude du cadre général est un préalable.

1.1 Généralités

Définition 1 (*Série entière*)

> On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n f_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{C}}$ est une suite numérique et où $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(z) = a_n z^n$. La **somme** de la série entière est la fonction
> $$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

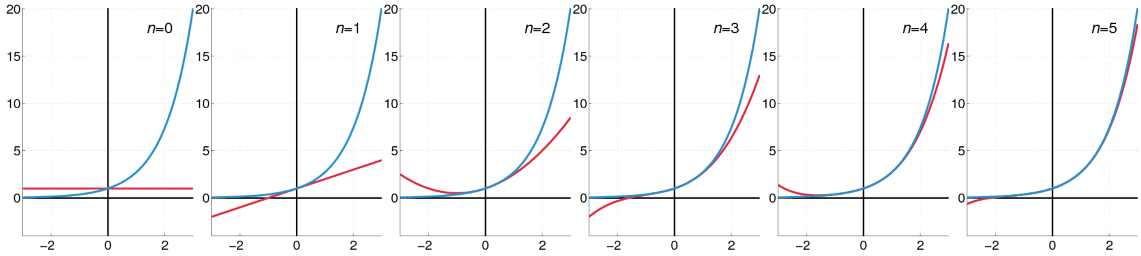

FIGURE 1.1 – La fonction exponentielle, $x \mapsto e^x$ en bleue, et les fonctions sommes partielles $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour différents n en rouge. On observe la convergence de la fonction somme partielle vers la fonction exponentielle.

Remarque 1

Il faut bien distinguer la série entière $\sum_n a_n z^n$ qui est une **série de fonctions** (z étant une "variable muette") et la **série numérique** $\sum_n a_n z^n$ pour z complexe fixé.

Exemple 2 (*Série exponentielle*)

Comme vu dans l'exemple 1, la somme de la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Exemple 3 (*Série géométrique*)

La somme de la série $\sum_n x^n$ est :

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Définition 2 (*Domaine de convergence*)

On appelle **domaine de convergence** l'ensemble de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exemple 4 (*Série géométrique*)

Le domaine de convergence de la série géométrique $\sum_n x^n$ est $]-1,1[$.

Lemme 1.1.1 (*Lemme d'Abel*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1. *La série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.*
2. *Plus précisément, la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ dès que $0 \leqslant r < |z_0|$ (voir chapitre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$).*

Démonstration : Soit $|z| < |z_0|$ fixé.

Montrons que la série numérique $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n\, z^n| = |a_n\, z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Par hypothèse, le premier des facteurs de ce produit est borné, le second forme une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum_n a_n z^n$ converge absolument. ■

Remarque 2

Il n'y a pas toujours convergence normale (ni uniforme) sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$ (voir chapitre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Définition 3 (*rayon de convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Le **rayon de convergence** $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\Big\{ r > 0 \text{ tel que la suite de terme général } |a_n|\, r^n \text{ est bornée} \Big\}.$$

Corollaire 1.1.2 (*Convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.
- *Si $|z_0| < R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ converge absolument.*
- *Si $|z_0| > R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ diverge grossièrement ; plus précisément, la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.*
- *Si $|z_0| = R$, la série peut ou non converger.*

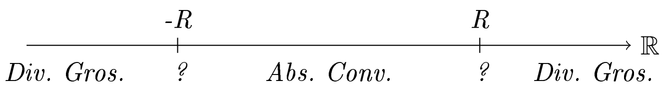

FIGURE 1.2 – Disque de convergence d'une série entière dans le cas réelle

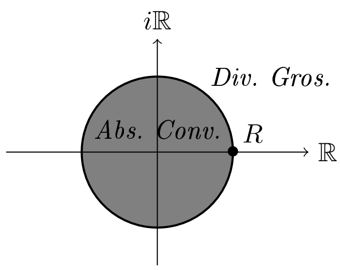

FIGURE 1.3 – Disque de convergence d'une série entière dans le cas complexe

Démonstration : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé.
- Si $|z| < R$ alors il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $|z| < r < R$. Comme $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le lemme d'Abel, la série numérique $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série numérique $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement. ■

Définition 4 (*Disque ouvert de convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
- On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum_n a_n x^n$ à variable réelle l'intervalle
$$]-R, R[.$$
- On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum_n a_n z^n$ à variable

complexe l'ensemble
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

— On appelle **cercle d'incertitude** (et parfois aussi, malheureusement, cercle de convergence) de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

1.2 Détermination du rayon de convergence

1.2.1 Encadrement du rayon de convergence

Si pour un z_0 l'on connait la nature de la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$, on en déduit des informations sur le rayon de convergence.

Proposition 1.2.1

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.
- *Si la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \geqslant R$.*
- *Si la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \leqslant R$.*
- *Si la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ est semi convergente, alors $|z_0| = R$.*

Exemple 5

Soit la série entière $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n}$.
Si $x = -1$, la série alternée $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

1.2.2 Utilisation de la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes strictement positifs nous permet la plupart du temps de déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Exemple 6

Soit la série entière $\sum_n \frac{x^n}{n}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En posant $u_n = \frac{x^n}{n}$, déterminons la nature de la série numérique $\sum_n u_n$.
D'après la règle de d'Alembert, on a :
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = |x|\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$
Si $|x| < 1$ la série numérique converge absolument, donc $R \geqslant 1$.
Si $|x| > 1$ la série numérique ne converge pas absolument, donc $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.

Exemple 7 ($\sum_n a_n x^{\alpha n}$)

Soit la série entière $\sum_n \frac{x^{2n}}{2^n+1}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En posant $u_n = \frac{x^{2n}}{2^n+1}$, déterminons la nature de la série numérique $\sum_n u_n$.
D'après la règle de d'Alembert,, on a :
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1}+1}}{\frac{x^{2n}}{2^n+1}}\right| = |x^2|\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|x|^2}{2}.$$

Si $\frac{|x|^2}{2} < 1$, soit $|x| < \sqrt{2}$, la série numérique converge absolument, donc $R \geqslant \sqrt{2}$.
Si $\frac{|x|^2}{2} > 1$, soit $|x| > \sqrt{2}$, la série numérique ne converge pas absolument, donc $R \leqslant \sqrt{2}$.
Finalement, $R = \sqrt{2}$.

1.2.3 Utilisation de la règle de comparaison

Proposition 1.2.2

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a et R_b.

1. *Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.*
2. *Si $|a_n| = \mathrm{o}(|b_n|)$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a \geqslant R_b$.*
3. *Si $|a_n| = \mathrm{O}(|b_n|)$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a \geqslant R_b$.*
4. *S'il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \sim K|b_n|$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a = R_b$.*

Démonstration : Démontrons uniquement la première proposition.
Soit $|z| < R_b$ fixé. La série numérique $\sum_n |b_n z^n|$ est donc convergente. Comme $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, on a $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$. Cela implique que la série numérique $\sum_n |a_n z^n|$ est convergente. En conclusion, $R_a \geqslant R_b$. ■

Exemple 8

Déterminer une borne du rayon de convergence de la série $\sum_n \sin(n) z^n$.
Comme $|\sin(n)| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence est supérieur ou égale à 1, rayon de convergence de $\sum_n z^n$.

Exemple 9

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_n \ln(1 + 1/n) z^n$.
Comme $|\ln(1 + 1/n)| \sim 1/n$, le rayon de convergence est égale à 1, rayon de convergence de $\sum_n \frac{z^n}{n}$.

1.2.4 Série entière de la forme $\sum_n n^\alpha a_n z^n$

Proposition 1.2.3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration : Soit R et R' les rayons de convergences des séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ respectivement.
On suppose $\alpha \geqslant 0$.
— Comme $|a_n| \leqslant |n^\alpha a_n|$, d'après la règle de comparaison, $R \geqslant R'$.
— Soit $|z| < R$ fixé. Montrons que la série numérique $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ converge absolument.
Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < r < R$.
On a :

$$|n^\alpha a_n z^n| = |n^\alpha \frac{z^n}{r^n}||a_n r^n| \leqslant M|a_n r^n| \text{ car } |n^\alpha \frac{z^n}{r^n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Comme la série numérique $\sum_n |a_n r^n|$ converge puisque $|r| < R$, la série numérique $\sum_n |n^\alpha a_n z^n|$ converge par règle de comparaison. En conclusion $R' \geqslant R$.
Pour $\alpha \leqslant 0$, il faut reprendre cette preuve en inversant l'ordre. ■

Exemple 10

Le rayon de convergence de la série $\sum_n n^{2019} z^n$ est égale au rayon de convergence de $\sum_n z^n$, soit 1.

1.3 Opérations sur les séries entières

1.3.1 Combinaison linéaire

Proposition 1.3.1

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

1. *$\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou $R \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$. De plus, pour $|z| < R$, sa somme est égale à :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

2. *$\sum_n \alpha a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\alpha \neq 0$ et $+\infty$ si $\alpha = 0$. De plus, pour $|z| < R$, sa somme est égale à :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Démonstration 1. : Ce schéma permet de guider la preuve.

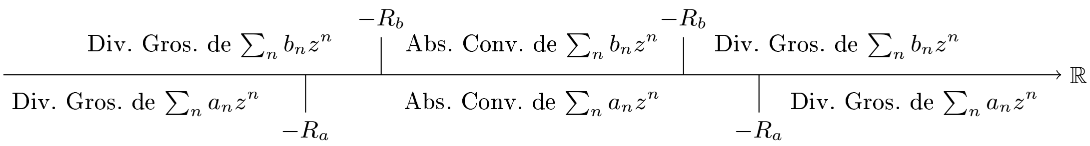

FIGURE 1.4 – Les rayons de convergence dans le cas réelle

- Cas $R_a \neq R_b$: supposons sans perte de généralité que $R_a < R_b$.
  - Soit $|z| < R_a$ fixé d'où $|z| < R_b$. Les deux séries numériques $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ converge absolument. Donc la série numérique $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ converge absolument. D'où $R \geqslant R_a$.
  - Soit $R_a < |z| < R_b$. La série numérique $\sum_n a_n z^n$ diverge et la série numérique $\sum_n b_n z^n$ converge. Donc la série numérique $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ diverge. D'où $R \leqslant R_a$.

  Finalement $R \geqslant R_a$.
- Cas $R_a = R_b$:
  - Soit $|z| < R_a = R_b$ fixé. Les deux séries numériques $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ converge absolument. Donc la série numérique $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ converge absolument. D'où $R \geqslant R_a$.
  - Soit $|z| > R_a = R_b$ fixé. Les deux séries numériques $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ divergent. Donc on ne peut rien conclure sur la convergence de la série $\sum_n (a_n + b_n) z^n$.

  Finalement $R \geqslant R_a$. ■

Exemple 11 (*Rayon de convergence*)

1. $\sum_n z^n$ et $\sum_n n z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_n (1+n) z^n$ est de rayon 1.
2. $\sum_n z^n$ et $\sum_n (2^{-n} - 1) z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_n (1+n) z^n$ est de rayon 2.
3. $\sum_n z^n$ et $\sum_n -z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_n 0 z^n$ est de rayon ∞.

Exemple 12 (***Déterminer la somme***)

Soit la série entière $\sum_n (1+\frac{1}{n!})x^n$.
Comme $\sum_n x^n$ est de rayon 1 et $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ de rayon ∞, le rayon de $\sum_n (1+\frac{1}{n!})x^n$ est 1.
Soit $x \in]-1,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n!}+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = e^x + \frac{1}{1-x}.$$

1.3.2 Produit de Cauchy

Proposition 1.3.2

*Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Le **produit de Cauchy** $\sum_n c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n?k}$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour $|z| < R$, sa somme est égale à :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration : Soit $|z| < \min(R_a, R_b)$. Soit la série numérique $\sum_n w_n$ produit de Cauchy des séries numériques $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n$$

Comme $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ sont absolument convergentes, la série numérique $\sum_n w_n$ est absolument convergente , soit $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

■

Exemple 13

Le produit de Cauchy de la série géométrique avec elle-même a un rayon égale à 1. De plus, pour tout $|x| < 1$, on a :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Exemple 14

Le produit de Cauchy de la série exponentielle et de la série géométrique a un rayon égale à 1. De plus, pour tout $|x| < 1$, on a :

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) x^n.$$

1.4 Propriétés de la somme

La régularité des séries entières est étudiée uniquement dans le cas d'une variable réelle.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

Théorème 1.4.1 (*continuité*)

f est continue sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$.

Exemple 15

$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n) x^n$ est continue sur $]-R, R[$.

Théorème 1.4.2 (*dérivation terme à terme*)

$\sum_n n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R.
f est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa fonction dérivée sur $]-R, R[$, f', est égale à :

$$\forall x \in]R, R[\colon f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple 16 (*dérivation de la série géométrique*)

Soit la série géométrique $\sum_n x^n$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par le théorème de dérivation terme à terme, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Donc la somme de la série entière $\sum_n n x^{n-1}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.

Théorème 1.4.3 (*intégration terme à terme*)

$\sum_n n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R.
Soit F une primitive de f. On a

$$\forall x \in]R, R[\colon F(x) - F(0) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 17 (*intégration de la série géométrique*)

Soit la série géométrique $\sum_n x^n$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[\colon \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Donc la somme de la série entière $\sum_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$.

1.5 Développements en séries entières

1.5.1 Généralités

Définition 5 (*fonction développable en série entière*)

On dit que f est **développable en série entière** sur $]-r,r[$ (au voisinage de 0) si il existe une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple 18 (*série géométrique*)

On a :

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^{N} x^n.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière.

Théorème 1.5.1 (*condition nécessaire*)

Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-r,r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa ***série de Taylor*** *:*

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Remarque 3

La réciproque du théorème est fausse. Il se peut qu'une fonction f soit de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-r,r[$ sans que f soit développable en série entière. Considérons, par exemple, la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

— L'application f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^*$ et on montre, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad , f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Une application répétée du théorème limite de la dérivée permet de déduire que f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

— Si f était développement en série entière, il existerait r tel que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \overbrace{=}^{f^{(n)}(0)=0} 0,$$

ce qui est impossible puisque f ne s'annule qu'en 0.

Corollaire 1.5.2 (*unicité du développement en série entière*)

Si

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

Remarque 4

Cette égalité $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n$ est importante.

Corollaire 1.5.3 (*développement limitée*)

Si

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors on a :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N).$$

1.5.2 Méthodes pratiques

1. Utilisation des opérations somme et produit.

Exemple 19

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} + 2e^x$.

$$\forall x \in]-1, 1[: \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{2}{n!})x^n.$$

2. Changement de variable.

Exemple 20

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{a-x}$.

$$\forall x \in]-a, a[: \quad f(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} \overbrace{=}^{\text{en posant } y=\frac{x}{a} \text{ avec } \frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{+\infty} y^n} \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

3. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Exemple 21

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$.

$$\forall x \in]-1, 1[: \quad f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}})x^n.$$

4. Dérivation et intégration terme à terme.

Exemple 22

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(1-x)$.
Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -\int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt \text{ (théorème d'intégration terme à terme)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

5. Utilisation d'une équation différentielle.

Exemple 23

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \cos(x)$..
La fonction f est l'unique solution du problème de Cauchy de l'équation différentielle :

$$y'' = -y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, \text{ sur } \mathbb{R} \quad (E).$$

Supposons qu'il existe une solution de (E) sous forme de série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de somme f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \text{ (les deux premiers termes sont nuls)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \text{ (translation d'indice).}
\end{aligned}$$

Comme $f'' = -f$, par identification, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n.$$

On a $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$. D'après les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, d'où $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Par récurrence, on démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!} x^{2n}.$$

1.6 Développements en série entière usuels

Dans l'exemple introductif du chapitre, la fonction exp est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y$ avec $y(0) = 1$. On prolonge exp à $\mathbb{C}$.

Définition 6 (*Exponentielle complexe*)

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini. Sa somme est appelé l'**exponentielle complexe**. On a ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On note $e^z = \exp(z)$.

Proposition 1.6.1

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z.e^{z'}.$$

Démonstration : La démonstration est faite dans le chapitre sur les séries numériques à la section produit de Cauchy. ■

On a aussi :

$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$
$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$R = 1$	$\forall x \in]-1, 1[:$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$\forall x \in]-1, 1[:$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$