

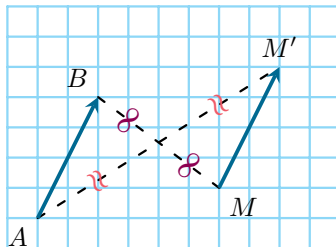
Vecteurs

I Translations - Vecteurs associés

Définition : Translation

Soit A et B deux points du plan.

On appelle **translation qui transforme A en B** la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.



Vocabulaire

- Le point M' est appelé **image** du point M .
- On dit également que M est le **translaté** de M' .

Remarque

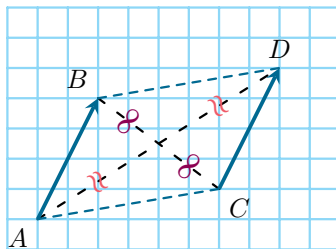
Une **transformation** sert à **modéliser** mathématiquement un mouvement.

- La **symétrie centrale** est la transformation qui modélise le demi-tour.
- La **translation** est la transformation qui modélise le glissement rectiligne. Pour la définir, on indique la direction, le sens et la longueur du mouvement.

Proposition : Parallélogramme

On considère quatre points A , B , C et D .

La translation qui transforme A en B transforme C en D , si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).



Démonstration

C'est la conséquence de la propriété : *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu*.

Définition : Vecteurs associés

À chaque translation est associé un **vecteur**.

Pour A et B deux points, le **vecteur** \overrightarrow{AB} est associé à la translation qui transforme A en B .

Le vecteur \overrightarrow{AB} est défini par :

1. la **direction** (celle de la droite (AB)),
2. le **sens** (de A vers B)
3. la **longueur** AB .

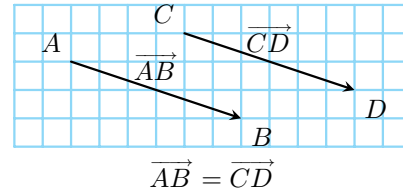
A est l'**origine** du vecteur et B son **extrémité**.

Définition : Égalité entre vecteurs

Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits **égaux**.

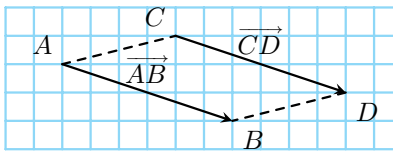
Deux vecteurs égaux ont :

1. même direction ;
2. même sens ;
3. même longueur.



Propriété : Parallélogramme

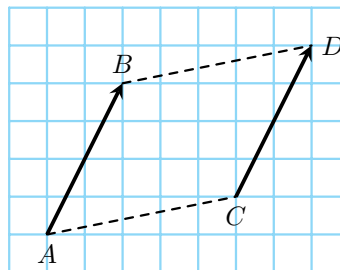
$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Méthode : Construire un vecteur

Soit A , B et C trois points non alignés.

Pour **placer** le point D tel que $\vec{CD} = \vec{AB}$, on construit le parallélogramme $ABDC$.



Remarque

Une translation peut être définie par un point quelconque et son translaté.

Il existe donc une **infinité** de vecteurs associés à une translation. Ils sont tous égaux.

Le vecteur choisi pour définir la translation est un **représentant** de tous ces vecteurs.

La translation **ne dépend pas** du représentant choisi pour la définir. On le note souvent \vec{u} .

Définition : Vecteur nul

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point quelconque en lui-même est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

Ainsi, $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \dots = \vec{0}$

Définition : Vecteur opposé

Le vecteur \overrightarrow{BA} de la translation qui transforme B en A est appelé **vecteur opposé** à \overrightarrow{AB} .

Remarque

- Le vecteur opposé à \overrightarrow{AB} se note $-\overrightarrow{AB}$ et on a l'égalité $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- La notation \overleftarrow{AB} n'existe pas.

Remarque

Deux vecteurs **opposés** ont même direction, même longueur mais sont de sens contraires.

II Opérations sur les vecteurs

A Additions

Propriété : Enchaînement de translations

L'enchaînement de deux translations est également une translation.

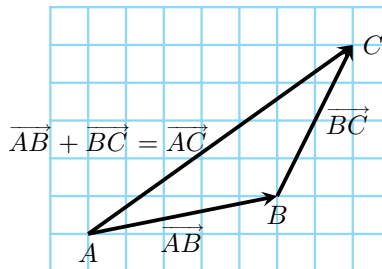
Définition-Proposition : Relation de Chasles

Soit A, B, C trois points.

L'enchaînement de la translation de vecteur \overrightarrow{AB} puis de la translation de vecteur \overrightarrow{BC} est la translation de vecteur \overrightarrow{AC} et on a :

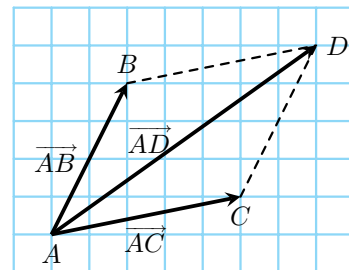
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur \overrightarrow{AC} est le vecteur **somme**.

**Proposition : Diagonale du parallélogramme**

Soit A, B, C, D quatre points.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

$\Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme

Méthode : Construire la somme de deux vecteurs

On remplace l'un des deux vecteurs par un représentant :

- soit de même origine afin d'utiliser la règle du parallélogramme ;
- soit d'origine l'extrémité de l'autre afin d'utiliser la relation de Chasles.

Remarque

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si A est le milieu du segment $[BC]$.

B Soustraction

Définition

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Exemple

Soit trois points A , B et C non alignés.

Donner un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

On a :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CB} \text{ en utilisant la relation de Chasles.}$$

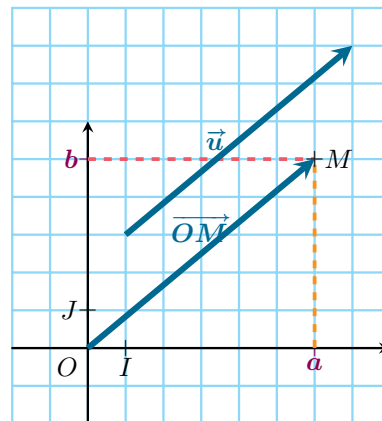
III Coordonnées d'un vecteur

Définition : Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur \vec{u} qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.

Les **coordonnées du vecteur** \vec{u} sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

On note $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Proposition : Égalité des coordonnées

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

Proposition : Coordonnées de \overrightarrow{AB}

Dans un repère $(O; I, J)$, les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

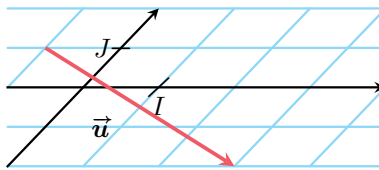
Démonstration

Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.

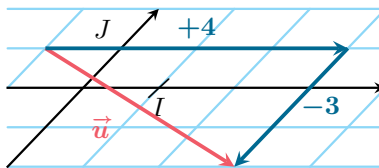
Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.
$$\begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{x_B + x_O}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

Méthode : Lire les coordonnées d'un vecteur

Lire les coordonnées du vecteur \vec{u} sur la figure ci-dessous.

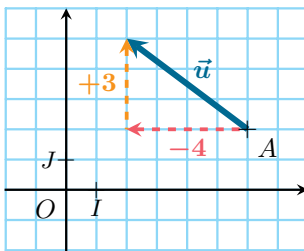


Les coordonnées de \vec{u} sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ car



Méthode : Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6; 2)$ du vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.



On a :

Méthode : Repérer un point défini par une égalité vectorielle

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on a les points $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$ et $C(5; 3)$. Calculer les coordonnées

1. du vecteur \overrightarrow{AB} ;
2. du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

On a :

1. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix}$. Donc \overrightarrow{AB} a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche $(x_D; y_D)$, les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Or, « si deux vecteurs sont égaux alors ils ont mêmes coordonnées ».

Donc le couple $(x_D; y_D)$ est la solution du système :

$$\begin{cases} x_D - x_C = x_B - x_A \\ y_D - y_C = y_B - y_A \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_D - 5 = 6 \\ y_D - 3 = -4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_D = 6 + 5 = 11 \\ y_D = -4 + 3 = -1 \end{cases}$$

Les coordonnées du point D sont $(11; -1)$.

Proposition : Somme de deux vecteurs

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors les coordonnées du **vecteur somme**, $\vec{u} + \vec{v}$, sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Méthode : Repérer un point défini par une somme vectorielle

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(5; 3)$ et $D(-2; -1)$. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

On cherche les coordonnées $(x_E; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Donc le couple $(x_E; y_E)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E - 2 = (-2 - 2) + (4 - 5) \\ y_E - 3 = (-1 - 3) + (-1 - 3) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E = -5 + 2 = -3 \\ y_E = -8 + 3 = -5 \end{cases}$$

Les coordonnées du point E sont $(-3; -5)$.

IV Multiplication par un réel

Définition

Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et λ un réel.

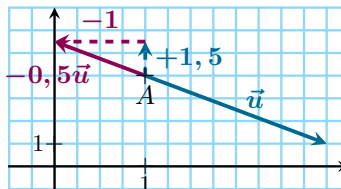
La **multiplication de \vec{u} par λ** est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$.

Méthode : Repérer le produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1; 4)$ du vecteur $-0,5\vec{u}$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a :

\vec{u} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc $-0,5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0,5 \times 2 \\ -0,5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.



Proposition : Sens en fonction du signe de λ

Soient deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

- si $\lambda > 0$, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont de même sens.
- si $\lambda < 0$, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont de sens contraires.

Remarque

\vec{u} et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de λ .

V Colinéarité**Définition : Colinéaire**

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si leurs coordonnées dans un même repère sont proportionnelles.

Remarque

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur \vec{u} .

Proposition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Méthode : Vérifier la colinéarité de deux vecteurs

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel λ non nul tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$;

possibilité 2 vérifier que les produits en croix, xy' et $x'y$, sont égaux.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{w} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

On a :

1. $-6 = -3 \times 2$ et $-18 = -3 \times 6$ donc $\vec{v} = -3\vec{u}$. \vec{u} et \vec{v} sont donc colinéaires.
2. $-5 \times (-7) = 35$ et $3 \times 12 = 36$. Les produits en croix ne sont pas égaux. Donc \vec{w} et \vec{z} ne sont pas colinéaires.

Proposition : Caractérisation vectorielle des droites parallèles

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Exemple

Les points $A(1;2)$, $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} puis les produits en croix :

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (3 - 1)(3 - 2) = 2 \times 1 = 2.$$

et ainsi :

$$(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (1 - 2)(5 - 1) = -1 \times 4 = -4.$$

Les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas proportionnelles. Donc A, B, C ne sont pas alignés.