

Applications linéaires

1 Applications linéaires

1.1 Proportionnalité

Exercice 1 (Dilution) Quelle quantité d'alcool à 70° dois-je mettre dans 1L l'alcool à 90 ° pour diluer 75 ° ?

1.2 Calcul matriciel

Exercice 2 (Des calculs de produits) Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (Commutant) Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 4 (Annulateur) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC . Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 5 (Produit non commutatif) Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 6 (Matrices stochastiques en petite taille) On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de A est égale à 1. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique si $n = 2$. Reprendre la question si $n \leq 1$.

Exercice 7 (Puissance n -ième, par récurrence) Calculer la puissance n -ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Puissance n -ième - avec la formule du binôme) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n .

Exercice 9 (Puissance n -ième - avec un polynôme annulateur) 1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

Exercice 10 (Inverser une matrice sans calculs !) 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Exercice 11 (Inverse avec calculs !) Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (Matrice nilpotente) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

1.3 Applications linéaires

Exercice 13 (Applications linéaires ou non ?) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$;
4. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P'(1))$.

Exercice 14 (Définie par une base) On considère dans \mathbb{R}^2 les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

Exercice 15 (Du local au global...) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

1.4 Dualité

Exercice 16 (Application linéaire définie sur les matrices) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

2 Images et noyaux

Exercice 17 (Noyau et image) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f , son image. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 18 (Application linéaire donnée par l'image d'une base) Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
2. Déterminer une base de $\text{Im } u$. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \ker u \oplus \text{Im } u$.

Exercice 19 (Noyau prescrit ?) Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 20 (A noyau fixé) Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont le noyau est E .

Exercice 21 (Application linéaire à contraintes) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de \mathbb{R}^4 tel que, si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique, alors on a

1. $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.
2. $\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

Exercice 22 (Espace vectoriel des polynômes de dimension infinie) 1. Montrer que

$$\text{l'application } \phi \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto (P(0), P') \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme.}$$

2. En déduire que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

3 Matrices par blocs

Exercice 23 (*, Trace du produit tensoriel de deux matrices) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on définit le produit tensoriel de A et B par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Quelle est la taille de la matrice $A \otimes B$? Démontrer que $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

Exercice 24 (, Matrices de Walsh)** La suite de matrices de Walsh, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est définie par :

$$W_0 = (1) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : W_{n+1} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer la taille de W_n et calculer w_n^2 , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25 (, Déterminant d'une matrice triangulaire supérieur par blocs)** On définit par blocs une matrice A par $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A , B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n , p et q avec $p + q = n$. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

4 Symétrie et projection

Exercice 26 (Noyau et image) On considère $s \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + 2y, -y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que s est une symétrie. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Démontrer $p = \frac{\text{Id} + s}{2}$ est une projection.

Exercice 27 (Noyau et image) On considère les espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$.

1. Déterminer une base de F , puis démontrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $p(x, y, z)$. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
Même question avec q la projection sur G parallèlement à F .

Exercice 28 Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 29 Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.