
Espaces préhilbertiens réels : exercices

I Produit scalaire

Exercice : *

Vérifier que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E dans les cas suivants.

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\langle A, B \rangle = \text{tr } A^T B$.
2. $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ et $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
3. $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues} : f^2 \text{ intégrable sur } \mathbb{R}\}$ et $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.
5. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}$.

Exercice : *

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in E : P(0) = P(1) = 0\}$. Pour $(P, Q) \in E$, on pose

$$\phi(P, Q) = - \int_0^1 (PQ'' + P''Q).$$

1. Vérifier que F est un espace vectoriel.
2. Donner une base et la dimension de F .
3. ϕ définit-il un produit scalaire sur E ? sur F ?

Exercice : *

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge. Pour u et v dans E , on pose

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel. On le note usuellement l^2 .
2. Montrer que $\langle u, v \rangle$ existe.
3. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice : Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$ et que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice : Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

II Orthogonalité

Exercice : *

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une BON de E . On pose

$$\phi \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto \sum_{i=1}^n \langle u(\vec{e}_i), v(\vec{e}_i) \rangle \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$, et déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice : Matrice symétrique

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux, où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice : Polynômes de Legendre

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par

$$\forall (f, g) \in E^2 : \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n]$$

Les polynômes $(L_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ s'appellent **polynômes de Legendre**. On pourra introduire $H_n(X) = (X^2 - 1)^n$.

1. Montrer que L_n est un polynôme de degré n dont on précisera le coefficient dominant.
2. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
3. Avec une intégration par parties multiple, calculer $\langle L_n, L_n \rangle$.
4. Calculer $\langle Q, L_n \rangle$ lorsque Q est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. En déduire $\langle L_n, L_m \rangle$ lorsque $n \neq m$.
6. Comparer $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'orthonormalisée de la base canonique.

Exercice : Polynômes de Tchebychev

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme U_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \quad \sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)U_n(\cos \theta).$$

Les polynômes $(U_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ s'appellent **polynômes de Tchebychev de seconde espèce**.

3. Comparer $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'orthonormalisée de la base canonique.

III Projection orthogonale

Exercice : Orthonormalisation de Schmidt

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, -1, 0).$$

Exercice : Trouver une base orthonormale

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

Exercice : Projection orthogonale dans \mathbb{R}^4

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G .
2. Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p_G sur G .
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E . Déterminer la distance de x à G .

Exercice : Matrice symétrique

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont supplémentaires orthogonaux, où \mathcal{S} désigne l'ensemble des matrices symétriques et \mathcal{A} l'ensemble des matrices antisymétriques.
2. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{E} : \quad \text{tr } A \leq \sqrt{n \text{tr}(A^\top A)}.$$

Étudier le cas d'égalité.

3. Pour $A \in \mathcal{E}$, on pose

$$f_A \left| \begin{array}{l} \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \\ S \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - s_{i,j})^2 \end{array} \right.$$

Déterminer le minimum de f_A et la matrice qui réalise ce minimum.

Exercice : Optimum

Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que l'intégrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin x - ax^3 - bx^2 - cx - d \right)^2 dx$$

soit minimale.