Espace vectoriel normé

Espace vectoriel normé

Norme

Exercice 1 (Normes sur $\mathbb{K}^n$) Pour $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

1. $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$
2. $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$
3. $\|\vec{x}\|_\infty = \max\Big(|x_1|, \ldots, |x_n|\Big)$

Démontrer que $\| \, \|_\infty$, $\| \, \|_1$ et $\| \, \|_2$ sont trois normes de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 2 (Normes sur des espaces de fonctions)

1. Soit $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$
Démontrer que $\| \, \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.
2. Soit $L_1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in L_1(I, \mathbb{K})$, on pose :
$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, \mathrm{dx}.$$
Démontrer que $\| \, \|_1$ est une norme sur $L_1(I, \mathbb{K})$.
3. Soit $L_2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de carré intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in L_2(I, \mathbb{K})$, on pose :
$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, \mathrm{dx}.$$
Démontrer que $\| \, \|_2$ est une norme sur $L_2(I, \mathbb{K})$.

Exercice 3 (Normes sur des espaces de suites)

1. Soit $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$
Démontrer que $\| \, \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.
2. Soit $L_1(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in L_1(I, \mathbb{K})$, on pose :
$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, \mathrm{dx}.$$
Démontrer que $\| \, \|_1$ est une norme sur $L_1(I, \mathbb{K})$.

3. Soit $L_2(I,\mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de carré intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in L_2(I,\mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| \,\mathrm{dx}.$$

Démontrer que $\| \ \|_2$ est une norme sur $L_2(I,\mathbb{K})$.

Exercice 4 (normes sur les matrices) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose :

— $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$;
— $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(\bar{A}^\intercal A)}$;
— $\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$;
— $N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

1. Montrer qu'il s'agit de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que la norme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *norme d'algèbre*, c.-à-d. que

$$\forall A, B \in E, \quad N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Exercice 5 (Normes de polynômes) Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose :

— $N_1(P) = \sum_{k=0}^d |a_k|$;
— $N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^d |a_k|^2}$;
— $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant d} |a_k|$;
— $N(P) = \sup_{x\in[0,1]} |a_k|$.

Démontrer qu'il s'agit de normes sur E.

Exercice 6 (Normes d'applications linéaires) Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.
Démontrer

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$

Exercice 7 (Intérieur) Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Montrer que l'intérieur de F est l'ensemble vide.

Exercice 8 (Intérieur) Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$