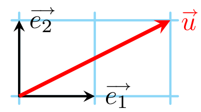
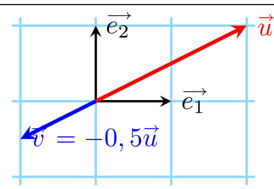
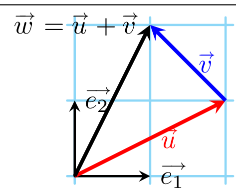
Espaces vectoriels

I Exemples introductifs

Exemple : Vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$

Tout d'abord, commençons par les vecteurs du plan :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$
Multiplication par un scalaire		$\begin{pmatrix}-1\\-0,5\end{pmatrix} = -0.5.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\vec{v} = -0.5.\vec{u}$
Addition		$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Remarque

Du fait de l'équivalence dans le plan et l'espace entre ces trois représentations, géométrique, numérique et algébrique, tout ce qui est vrai ou faux pour l'un l'est aussi pour l'autre. Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel pour bien comprendre l'algèbre linéaire.

Exemple : Exemples d'ensembles de vecteurs : $E = \{\vec{x}\}$

Il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer une addition et une homothétie soit une combinaison linéaire, par exemples :

— l'ensemble des n-uplet réels : $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $E = \mathbb{R}^n$ et , où chaque x_i est un réel,

— l'ensemble des matrices carrés réels : $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque $a_{i,j}$ est un un réel,

— l'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaire d'ordre 1 homogène : $\vec{x} = f$ et $E = \{f \in C_1 : f' + a_0 f = 0\}$,

— l'ensemble des polynômes réels : $\vec{x} = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ et $E = \mathbb{R}[X]$,

— l'ensemble des suites réels : $\vec{x} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

— etc.

Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique ayant la propriété de pouvoir effectuer des **combinaisons linéaires** entre les éléments : cette structure s'appelle **espace vectoriel**,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers.

II Structure algébrique

Définition Loi de composition interne : $\vec{x} \triangle \vec{y}$

Soit A un ensemble.
Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{rcl} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array} \right. .$$

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, l'addition définie par $+ \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$, la soustraction $- \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array} \right.$ et la multiplication $- \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \right.$ sont des lois de composition internes.
- Soit X un ensemble. Sur l'ensemble des parties de X, $\mathcal{P}(X)$, l'union définie par $\cup \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A,B) & \longmapsto & A \cup B \end{array} \right.$ et l'intersection $\cap \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A,B) & \longmapsto & A \cap B \end{array} \right.$ sont des lois de composition internes.

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives. Ce n'est pas le cas de la soustraction car $1-0 \neq 0-1$ et $1-(2-3) = 2 \neq -4 = (1-2)-3$.
- Sur $\mathcal{P}(X)$, l'union et l'intersection sont commutatives et associatives.

Définition-Proposition Inverse et élément neutre

On dit que $\triangle$ admet **un élément neutre** si $\exists e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$.
Si il existe un élément e vérifiant cette propriété, il est unique et on l'appelle **le neutre** de la loi $\triangle$.
On dit que $\triangle$ est **symétrique** (ou **inverse** si loi est $\times$, ou **opposé** si la loi est $+$) Si $\triangle$ est une loi associative qui admet un neutre e, et si $x \in A$, on appelle de x pour la loi $\triangle$ tout élément $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Si $\triangle$ est également associative, il existe au plus un élément x' vérifiant cette propriété, et on l'appelle le **symétrique** de x pour la loi $\triangle$.

Définition Groupe

Un **groupe** est un couple $(G, \triangle)$ où G est un ensemble et $\triangle$ une loi de composition interne sur G associative, admettant un neutre et pour laquelle tout élément de G admet un symétrique pour la loi $\triangle$. Un groupe est dit **abélien** ou **commutatif** si la loi $\triangle$ est de plus commutative.

Exemple : Le Groupe $(\mathbb{R}^n, +)$

La loi d'addition sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$+ \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{y} \quad = (y_1, y_2, \ldots, y_n)) & \longmapsto & \vec{x} \quad + \quad \vec{y} \quad = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \end{array} \right. .$$

- **associative** : Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) &= (x_1,x_2,\dots,x_n)+((y_1,y_2,\dots,y_n)+(z_1,z_2,\dots,z_n))\\ &= (x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\dots,y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\dots,x_n+y_n+z_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\dots,z_n)\\ &= ((x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n))+(z_1,z_2,\dots,z_n)\\ &= (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}\end{aligned}$$

— **commutative** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y} &= (x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)\\ &= \vec{y}+\vec{x}\end{aligned}$$

— **élément neutre** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$ est l'élément neutre
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{0} &= (x_1+0,x_2+0,\dots,x_n+0)\\ &= (x_1,x_2,\dots,x_n)\\ &= \vec{x}\end{aligned}$$

— **symétrique** : Soit $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrons que $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$ est l'opposé de $\vec{x}$.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{x}+(-\vec{x}) &= (x_1,x_2,\dots,x_n)+(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)\\ &= (x_1-x_1,x_2-x_2,\dots,x_n-x_n)\\ &= (0,0,\dots,0)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbb{R}^n,+)$ est un groupe commutatif.

Définition Loi de composition externe : $\lambda.\vec{x}$

Soit $\mathbb{K}$ et A deux ensembles.
Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de $\mathbb{K}$ et un élément de A, associe un élément de A :

$$.\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times A & \longrightarrow & A\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}\right.$$

Exemple : $(\mathbb{R}^n,.)$

La loi de multiplication sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$.\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ (\lambda,\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)) & \longmapsto & \lambda.\vec{x}=(\lambda.x_1,\lambda.x_2,\dots,\lambda.x_n)\end{array}\right..$$

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $2.(1,-2)=(2,-4)$.

Définition Corps $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou C

Dans ce cours, un corps $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition Espace vectoriel : $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un triplet $(E,+,.)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une loi de composition externe sur E, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi . est compatible avec la structure de groupe $(E,+)$, i.e.
   (a) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x}\in E$, $(\lambda+\mu).\vec{x}=(\lambda.\vec{x})+(\mu.\vec{x})$;
   (b) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, $\lambda.(\vec{x}+\vec{y})=(\lambda.\vec{x})+(\lambda.\vec{y})$;
   (c) $\forall\vec{x}\in E$, $1_{\mathbb{K}}.\vec{x}=\vec{x}$;
   (d) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall\vec{x}\in E$, $\lambda.(\mu.\vec{x})=(\lambda\mu).\vec{x}$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un **vecteur** et est noté dans ce cours avec une flèche $\vec{x}$. Un élément du corps $\mathbb{K}$ est un **scalaire** et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ.

Exemple

- les n-uplets $\mathbb{K}^n$ muni des lois usuelles,
- les matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles,
- si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X,E)$ muni des lois usuelles.

III Construire des espaces vectoriels

A Sous-espace vectoriel : $F\subset E$ et F e.v.

Définition

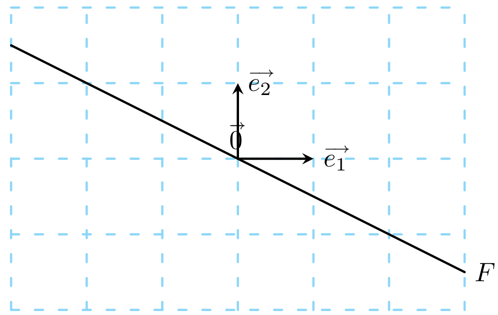
Définition-Proposition Sous espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si

- F est non vide,
- F est stable par $+$, i.e. $\forall\vec{x},\vec{y}\in F$, $\vec{x}+\vec{y}\in F$,
- F est stable par . , i.e. $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in F$, $\lambda.\vec{x}\in F$.

Muni des lois induites, F est alors un espace vectoriel.

Exemple



$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

— *non vide :*
  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ car $0 + 2.0 = 0$.

— *stable par + :*
  Soit $\vec{x}_1 = (x_1, y_1), \vec{x}_2 = (x_2, y_2) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.

Montrons que $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$.
i.e. montrons que $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$.
On a :

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0 + 0 = 0.$$

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x, y) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
Montrons que $\lambda\vec{x} = (\lambda x, \lambda y) \in F$.
i.e. montrons que $(\lambda x) + 2(\lambda y) = 0$.
On a

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda 0 = 0.$$

Proposition Critère d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si
- $\overrightarrow{0_E} \in F$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F$, $\lambda.\vec{x} + \vec{y} \in F$.

Engendré par une famille finie :

$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}) = \{\lambda_1.\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{x_p}\}$

Définition Famille finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une **famille finie** de vecteurs de E est un p-uplet $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$ formée de vecteurs de E, où $p \in \mathbb{N}$.

Définition Combinaison linéaire

Avec les mêmes notations, une **combinaison linéaire** de la famille $\mathcal{F}$ est un vecteur $\vec{x} \in E$ de la forme $\vec{x} = \lambda_1.\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{x_p}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.
Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.
On note $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaison linéaires de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$.

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1.\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{x_p} : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

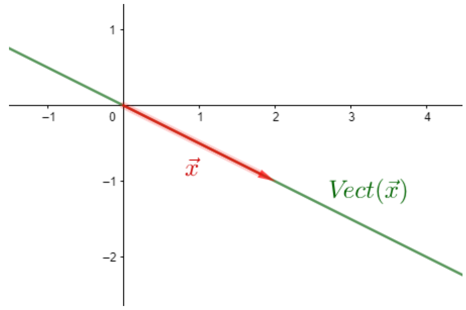
Par convention, $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

Définition-Proposition Espace engendré

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\vec{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **espace engendré** par la famille $(\vec{x}_1, \dots, \overrightarrow{x_p})$. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}$.

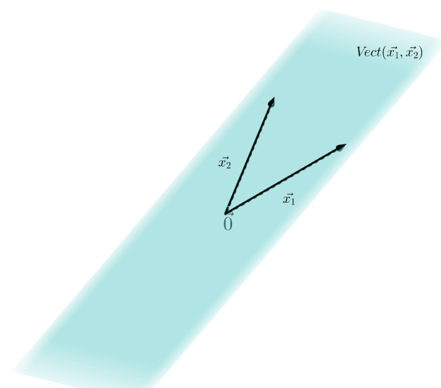
Exemple : Droite vectoriel

Lorsque que $p = 1$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\mathrm{Vect}(\vec{x}) = \{\lambda.\vec{x} : \forall\lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par $\vec{x}$. On la note $\mathbb{R}\vec{x}$.
Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est



Exemple : Plan vectoriel

Lorsque que $p = 2$ avec $\overrightarrow{x_1}$ non colinéaire à $\overrightarrow{x_2}$, $\text{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \{\lambda.\overrightarrow{x_1} + \mu.\overrightarrow{x_2} : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectorielle** engendrée par $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. On le note $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2}$.
Un plan vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est



Intersection $F_1 \cap F_2$

Proposition

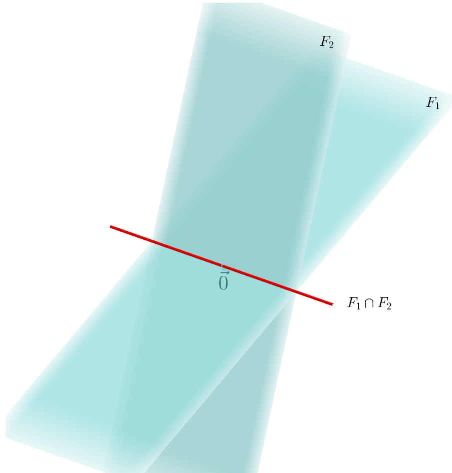
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
Alors l'intersection $\cap_{i=1}^{p} F_i$ est également un sous espace vectoriel.

Démonstration

- *non vide :*
  $\forall i \in [\![1, p]\!] : \vec{0} \in F_i$ donc $\vec{0} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$
- *stable par + :*
  Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^{p} F_i$ d'où pour tout $i \in [\![1, p]\!] : \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F_i$.
  Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!] : \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F_i$ donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \cap_{i=1}^{p} F_i$.
- *stable par . :*
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\vec{x} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$ d'où $\forall i \in [\![1, p]\!] : \vec{x} \in F_i$.
  Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!] : \lambda\vec{x} \in F_i$ donc $\lambda\vec{x} \in \cap_{i=1}^{p} F_i$.

Exemple

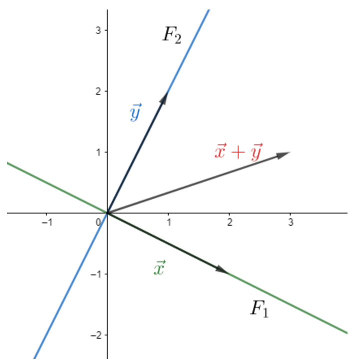
$F = \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}}^{=F_1} \cap \overbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}}^{=F_2}$ l'intersection de deux plans vectoriels, F_1 et F_2 dans $\mathbb{R}^3$



Somme de sous-espaces vectoriels : $F_1 + F2 = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}$

Remarque

L'union $\cup_{i=1}^{p} F_i$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



Sur cette figure, les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in F_1 \cup F_2$ et on a $\vec{x} + \vec{y} \notin F_1 \cup F_2$. La somme permet de construire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Définition-Proposition Somme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de F_1 et F_2 l'ensemble $F_1 + F_2$ des vecteurs de la forme $\vec{x} + \vec{y}$ où $\vec{x} \in F_1$ et $\vec{y} \in F_2$; autrement dit,

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F_1, \vec{y} \in F_2\}.$$

$F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
Plus précisément $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.

Démonstration

— *non vide :*
$\vec{0} \in F_1, F_2$ d'où $\vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{0}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

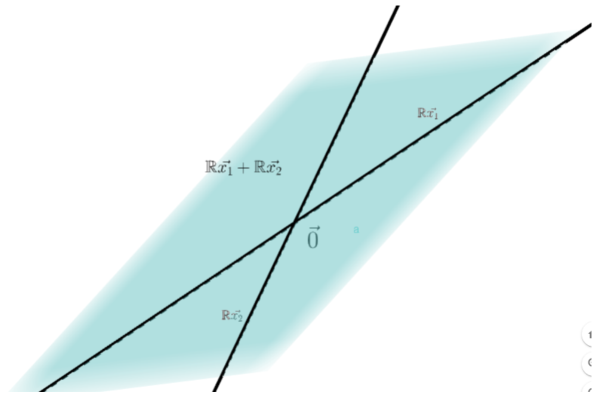
— *stable par + :*
Soit $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2} \in F_1 + F_2$.
$\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2} = \underbrace{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$.

— *stable par . :*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} + \vec{y} \in F_1 + F_2$.

$$\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \underbrace{\lambda\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda\vec{y}}_{\in F_2} \in F_1+F_2.$$

Exemple

Soit $\mathbb{R}\vec{x}_1$ et $\mathbb{R}\vec{x}_2$ deux droite vectorielles distinctes. La somme de ces deux espace vectoriels forme le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{x}_1 + \mathbb{R}\vec{x}_2$.



Définition Somme directe

Avec les mêmes notations, on dit que la somme F_1+F_2 est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x}+\vec{y}$ où $\vec{x}\in F_1$ et $\vec{y}\in F_2$. On note alors la somme $F_1 \oplus F_2$.

Proposition Critère 1

Avec les mêmes notations, la somme F_1+F_2 est directe si et seulement si

$$\forall \vec{x}\in F_1, \forall \vec{y}\in F_2 : \quad \vec{x}+\vec{y} = \overrightarrow{0_E} \Rightarrow \vec{x}=\vec{y}=\overrightarrow{0_E}.$$

Démonstration

— $(\Longrightarrow)$:
Soit $\vec{x}\in F_1$ et $\vec{y}\in F_2$ tel que $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$. On a aussi $\underbrace{\vec{0}}_{\in F_1}+\underbrace{\vec{0}}_{\in F_2}=\vec{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\vec{x}=\vec{0}$ et $\vec{y}=\vec{0}$.

— $(\Longleftarrow)$:
Supposons qu'un $\vec{z}\in F_1+F_2$ se décompose de 2 façons :$\vec{z}=\underbrace{\vec{x}}_{\in F_1}+\underbrace{\vec{y}}_{\in F_2}$ et $\vec{z}=\underbrace{\overrightarrow{x'}}_{\in F_1}+\underbrace{\vec{y}}_{\in F_2}$.
On soustrait ces deux égalités :

$$\vec{0} = \underbrace{\vec{x}-\overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y}-\overrightarrow{y'}}_{\in F_2}.$$

D'après l'hypothèse, on a $\vec{x}-\overrightarrow{x'}=\vec{0}$ et $\vec{y}-\overrightarrow{y'}=\vec{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\vec{x}=\overrightarrow{x'}$ et $\vec{y}=\overrightarrow{y'}$.

Proposition Critère 2

Avec les mêmes notations, la somme F_1+F_2 est directe si et seulement si $F_1\cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration

— $(\Longrightarrow)$:
  * $\{\overrightarrow{0_E}\} \subset F_1 \cap F_2$: $\overrightarrow{0_E} \in F_1, F_2$ donc $\overrightarrow{0_E} \in F_1 \cap F_2$.
  * $F_1 \cap F_2 \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$: Soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$. On a $\vec{0} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{-\vec{x}}_{\in F_2} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{0}}_{\in F_2}$. Par unicité de la décomposition, on identifie $\vec{x} = \vec{0}$.

  Du fait de la double inclusion, on a $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

— $(\Longleftarrow)$:
  Supposons qu'un $\vec{z} \in F_1 + F_2$ se décompose de 2 façons :$\vec{z} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y}}_{\in F_2}$ et $\vec{z} = \underbrace{\overrightarrow{x'}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{y}}_{\in F_2}$.

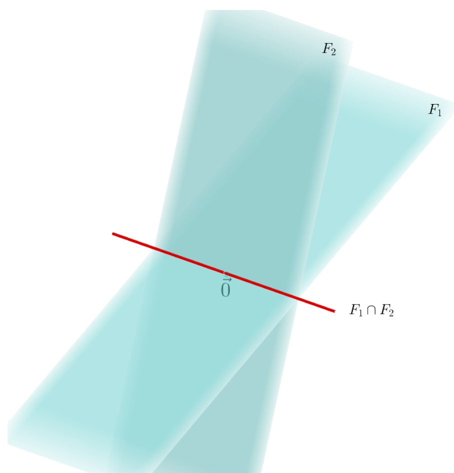
  On soustrait ces deux égalités :

$$\underbrace{\vec{x} - \overrightarrow{x'}}_{\in F_1} = \underbrace{\vec{y} - \overrightarrow{y'}}_{\in F_2}.$$

  Comme $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0_E}\}$, on a $\vec{x} - \overrightarrow{x'} = \vec{0}$ et $\vec{y} - \overrightarrow{y'} = \vec{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\vec{x} = \overrightarrow{x'}$ et $\vec{x} = \overrightarrow{y'}$.

Exemple

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F_1 et F_2, est une droite vectoriel, $F_1 \cap F_2$, donc la somme n'est pas directe.



Si $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\vec{x} \quad &= (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = \lambda, x = -\lambda, y = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(-1, 0, 1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathrm{Vect}(-1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Finalement $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$.

Définition Supplémentaires

Avec les mêmes notations, si la somme $F_1 + F_2$ est directe et égale à E, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires**, et on note
$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Exemple

Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^n)$.

— $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] + \mathrm{Vect}(X^n)$:
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a
$$P = \overbrace{a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}}^{\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} + \overbrace{a_nX^n}^{\in\mathrm{Vect}(X^n)}.$$

— $\mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathrm{Vect}(X^n) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\}$:
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathrm{Vect}(X^n)$.
Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $deg(P) < n$. Comme $P \in \mathrm{Vect}(X^n)$, on a $P = \lambda X^n$. Si $\lambda \neq 0$, on a $deg(P = \lambda X^n) = n$, d'où une contradiction. Donc $P = 0$.

Définition-Proposition Somme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$ l'ensemble $\sum_{k=1}^{p} F_k$ des vecteurs de la forme $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p}$ où $\overrightarrow{x_1} \in F_1$, $\overrightarrow{x_2} \in F_2$, ..., $\overrightarrow{x_p} \in F_p$; autrement dit,
$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p} : \overrightarrow{x_1} \in F_1, \overrightarrow{x_2} \in F_2, \ldots, \overrightarrow{x_p} \in F_p\}.$$
Il s'agit d'un sous espace vectoriel de E ; plus précisément S est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_p$.

Définition Somme directe

Avec les mêmes notations, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p}$ où $\overrightarrow{x_1} \in F_1$, $\overrightarrow{x_2} \in F_2$, ..., $\overrightarrow{x_p} \in F_p$. On note alors la somme $\oplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition Critère 1

Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si
$$\overrightarrow{x_1} \in F_1, \overrightarrow{x_2} \in F_2, ..., \overrightarrow{x_p} \in F_p, \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E} \implies \overrightarrow{x_1} = \cdots = \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E}.$$

Remarque

Le critère 2 ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.
$E = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{x_2} = (0,1)$ et $\overrightarrow{x_3} = (1,1)$. On a $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} = \mathbb{R}\overrightarrow{x_1} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_3} = \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} \cap \mathbb{R}\overrightarrow{x_3} = \{(0,0)\}$.
Cependant la somme $\mathbb{R}\overrightarrow{x_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_2} + \mathbb{R}\overrightarrow{x_3}$ n'est pas directe car $(1,1) = 1(1,1)$ et $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.

B Espace vectoriel produit : $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$

Définition **Produit cartésien**

Soit $(E_1, +_1, ._1)$ et $(E_2, +_2, ._2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On pose

$$E = E_1 \times E_2 = \{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) : \overrightarrow{x_1} \in E_1, \overrightarrow{x_2} \in E_2\}.$$

E est le **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2.
On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :

$$\forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E, (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) \in E, \quad (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) + (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{x_1} +_1 \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2} +_2 \overrightarrow{y_2}).$$

De même, on définit la loi de composition externe . sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E, \lambda.(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\lambda ._1 \overrightarrow{x_1}, \lambda ._2 \overrightarrow{x_2}).$$

Exemple

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on définit E^p par

$$E^p = \prod_{k=1}^{p} E.$$

Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

Proposition

E ainsi défini est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

On définit de manière analogue le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, produit cartésien des ensembles $E_1, \dots, E_n$. $(E_1, +_1, ._1)$, $(E_2, +_2, ._2)$, ..., $(E_p, +_p, ._p)$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E = \prod_{k=1}^{p} E_k = \{(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p}) : \overrightarrow{x_1} \in E_1, \dots, \overrightarrow{x_p} \in E_p\}$.

IV Base : $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \dots \lambda_p), \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}$

A Définition

Famille génératrice : existence

Définition **Famille génératrice**

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, c'est à dire si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Exemple

La famille $\{(1,1), (0,1), (1,-1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1).$$

En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car $(x, y) = x(1,1) + (y-1)(0,1)$.

Famille libre : unicité

Définition Famille libre

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est **libre** si tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel engendré par la famille s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in \text{Vect}((\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p}), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Autrement dit aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition Critère

Une famille finie $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ nulle est triviale, c'est à dire

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \overrightarrow{0_E} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Démonstration

La démonstration est similaire au critère 2 de la somme directe (voir démonstration A).

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a démontré qu'un vecteur pouvait s'exprimer à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes. Avec ce dernier critère, la démonstration serait :
Soit $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(1,1) + \beta(0,1) + \alpha(1,-1) = (0,0).$$

On a :

$$\begin{cases} \lambda + \alpha & = 0 \\ \lambda + \beta - \alpha & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & = 1 \\ \alpha & = -1 \\ \beta & = -2 \end{cases}.$$

On vérifie que $(1,1) - 2(0,1) - (1,-1) = (0,0)$.

Base : existence et unicité

Définition

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.
De façon équivalente, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ est une base de E si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_p \vec{e_p}.$$

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{K}_n[X]$, admet une base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, appelée base canonique.

Exemple

L'espace vectoriel des matrices carrés de taille 2, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet une base $(\begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix})$, appelée base canonique.

Remarque

On n'a pas unicité de la base. Par exemple pour $\mathbb{K}_n[X]$, avec les x_i $n+1$ scalaires distincts, les polynômes de Lagrange

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(X) = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

B Existence d'une base

Définition Dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E, et **de dimension infinie** sinon.

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.
En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

Théorème Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration

La démonstration repose sur l'algorithme suivant :
Soit la partie libre initiale $\mathcal{L}$.
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille finie, $\mathcal{G}$, génératrice de E.
Tant que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E :

1. Puisque $\mathcal{G}$ engendre E et que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice de E, il existe un vecteur $\vec{g}$ de $\mathcal{G}$ qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$.
2. On remplace $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} \cup \{\vec{g}\}$, qui est encore libre car le nouveau vecteur n'est pas une combinaison linéaire des précédents.

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de $\mathcal{G}$ différent des précédents et que $\mathcal{G}$ est fini. $\mathcal{L}$ est alors une partie génératrice, donc une base de E.

Théorème Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration

La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$.

C Unicité du cardinal de la base

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration

Démontrons cette proposition par récurrence.

— *Initialisation* :
Soit $(\vec{g}_1)$ une famille génératrice de E.
Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ une famille de E. Il existe λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{g}_1$ et $\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{g}_1$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors la famille $(\vec{v}_1 = \vec{0}, \vec{v}_2 = \vec{0})$ est liée.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\vec{v}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2$. Les vecteurs sont colinéaires donc liées.
Idem si $\lambda_2 \neq 0$.

— *Hérédité* :
Soit $(\vec{g_1}, \dots, \vec{g_n})$ une famille génératrice de E.
Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.
Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, il existe $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\vec{v}_i = \lambda_{i,1}\vec{g}_1 + \lambda_{i,2}\vec{g_2} + \dots + \lambda_{i,n}.\vec{g_n}$$

Quitte à réorganiser les deux familles, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\vec{v}_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\vec{g_1}, \dots, \vec{g}_{n-1}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel générée par la famille $(\vec{g_1}, \dots, \vec{g}_{n-1})$. Donc la famille $\left(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}, \dots, \vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}\right)$ est liée. Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\beta_1(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}) + \dots + \beta_n(\vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}) = \vec{0}.$$

d'où

$$\beta_1\vec{v}_1 + \dots + \beta_n\vec{v}_n - (\beta_1\frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} + \dots + \beta_n\frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}})\vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

La famille est donc liée.

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.

Démonstration

Si la famille a strictement plus de n vecteurs, on peut en enlever pour constituer une famille de $n+1$ vecteurs qui est donc liée d'après la proposition précédente. A fortiori, la famille initiale est liée.

Proposition Unicité du cardinal d'une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e_p})$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f_q})$ deux bases de E.
Alors $p = q$.

Démonstration

$(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_p})$ est une famille génératrice de E. Comme $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f_q})$ est libre d'après la proposition précédente, $q \leq p$. Par symétrie, on a aussi $p \leq q$. Finalement $p = q$.

Cette proposition nous permet cette définition.

Définition-Proposition **Dimension**

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est égale au cardinal d'une base quelconque de E.

Proposition **Critère**

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n})$ est une famille libre, alors $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n})$ est une base de E.
Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n})$ est une famille génératrice, alors $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n})$ est une base de E.

Exemple

Pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$, la combinaison linéaire des polynômes de Lagrange $\sum_{j=0}^n P(x_j) l_j(X)$ avec $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ scalaires distincts est égale au polynôme P aux points $x_0, \ldots, x_n$, donc égal à P. Les polynômes de Lagrange forment une famille génératrice de $n+1$ vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors F est également de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

D Base adaptée

Définition **Base adaptée**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E.
La base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n})$ est dite **adaptée** à F si et seulement s'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_p})$ soit une base de F.

Exemple

La base $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ est adaptée à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ car $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ est une base de F.

Proposition **Existence d'une base adaptée**

La base ainsi définie existe.

Démonstration

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_p})$ de F. Cette famille est libre dans E. On la complète en une base de E d'après le théorème de la base incomplète.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et B une base de E.
La base $\mathcal{B}$ est dite **adaptée** à la décomposition $E = \oplus_{k=1}^p F_k$ si et seulement si $\mathcal{B}$ peut s'écrire comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ où $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Proposition

La base ainsi définie existe.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
On suppose que $\mathcal{B}$ s'écrit comme la concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_p$.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, notons F_k le sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_k$.
Alors les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires.

V Théorèmes en dimension finie

Proposition **Existence d'un supplémentaire**

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous espace vectoriel admet un supplémentaire.
Autrement dit, soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F que l'on complète avec $\mathcal{B}_2$ pour former une base de E.
D'après la proposition D, si on pose G l'espace vectoriel engendrée par $\mathcal{B}_2$, alors $E = F \oplus G$.

Proposition

Soit $E_1, \dots E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!]$, E_k est de dimension finie.
De plus, dans ce cas,

$$\dim(\prod_{k=1}^{p} E_k) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Démonstration

On suppose $p = 2$.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E_1 et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ une base de E_2.
Alors $((\overrightarrow{e_1}, \vec{0}_F), \dots, (\overrightarrow{e_n}, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \overrightarrow{f_1}), \dots, (\vec{0}_E, \overrightarrow{f_q}))$ est une base de $E_1 \times E_2$.

- *Génératrice* :
  Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E_1 \times E_2$.
  Comme $\vec{x} \in E_1$ et $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille génératrice de E_1, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$.
  Comme $\vec{y} \in E_2$ et $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_q})$ est une famille génératrice de E_2, il existe $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q}$.
  D'où $(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1(\overrightarrow{e_1}, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e_n}, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \overrightarrow{f_1}) + \dots + \beta_q(\vec{0}_E, \overrightarrow{f_q})$.
- *Libre* :
  Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que
  $$\lambda_1(\overrightarrow{e_1}, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\overrightarrow{e_n}, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \overrightarrow{f_1}) + \dots + \beta_q(\vec{0}_E, \overrightarrow{f_q}) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$
  D'où :
  $$(\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}, \beta_1 \overrightarrow{f_1} + \dots + \beta_q \overrightarrow{f_q}) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

Par identification, on obtient $\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{e_n}=\vec{0}_E$ et $\beta_1\overrightarrow{f_1}+\cdots+\beta_q\overrightarrow{f_q}=\vec{0}_F$. Comme $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ et $(\overrightarrow{f_1},\ldots,\overrightarrow{f_q})$ sont des familles libres de E_1 et de E_2 respectivement, $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\beta_1=\cdots=\beta_q=0$.

Corollaire

Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'espace vectoriel E^p est de dimension finie si et seulement si E l'est ; dans ce cas, on a $\dim(E^p)=p.\dim(E)$.

Proposition Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie et F_1, F_2 deux sous espace vectoriel de E. On a :

$$\dim(F_1+F_2)=\dim F_1+\dim F_2-\dim(F_1\cap F_1).$$

Démonstration

Une idée est de remarquer l'analogie avec la formule ensembliste :

$$\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A\cup B)+\mathrm{card}(A\cap B).$$

Soit $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_p})$ une base de $F_1\cap F_2$. On la complète en une base $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_p},\overrightarrow{f_{p+1}},\ldots,\overrightarrow{f_{p+k}})$ de F_1 et en une base $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_p},\overrightarrow{g_{p+1}},\ldots,\overrightarrow{g_{p+m}})$ de F_2. $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_p},\overrightarrow{f_{p+1}},\ldots,\overrightarrow{f_{p+k}},\overrightarrow{g_{p+1}},\ldots,\overrightarrow{g_{p+m}})$ est une base F_1+F_2. Comme le cardinal d'une base est égale à la dimension de l'espace vectoriel, on obtient bien l'égalité souhaitée.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors la somme $\sum_{k=1}^p F_k$ est également de dimension finie, et

$$\dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right)\leq\sum_{k=1}^p\dim(F_k).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{k=1}^p F_k$ est directe.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies et $F_1,\ldots,F_p$ des sous espaces vectoriels de E.
On suppose que

$$\sum_{k=1}^p\dim F_k=\dim E.$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. les sous espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_p$ sont supplémentaires,
2. les sous espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe,
3. $\sum_{k=1}^p F_k=E$.

VI Retour aux matrices

Proposition Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Tous les axiomes se vérifient aisément.

Définition-Proposition **Base canonique**

La **base canonique** est $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ où la matrice $E_{i,j}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) , qui vaut 1.
Les coordonnées dans la base canonique d'une matrice A sont ses coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1p}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{np}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}E_{ij}.$$

On a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Démonstration

Du fait de l'égalité, $A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j}$, $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $(\lambda_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de scalaires tel que

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \lambda_{ij}E_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}.$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, $\lambda_{ij} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, donc la famille est libre.
La famille est donc une base. Comme la cardinal de la base $\mathrm{Card}((E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p})$ est np, on a bien $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$