Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Dans un espace euclidien E, l'objectif est d'étudier les transformations de E qui préservent le produit scalaire. Ainsi on cherche à remplacer les notions de base, équation linéaire, forme linéaire, transposition etc. par les notions pertinentes en géométrie euclidienne à savoir, respectivement, de base orthonormée, de vecteurs normaux, de produit scalaire etc.
Les applications de ces transformations sont multiples :

— résoudre des équations différentielles linéaires, trouver une base orthogonale pour deux formes quadratiques si l'une est définie positive ou de classifier les quadriques,

— en physique, résoudre de nombreuses équations aux dérivées partielles comme celle de la corde vibrante ou exprimer le moment d'inertie d'un solide,

— en apprentissage automatique, calibrer un modèle de régression à l'aide de la méthode des moindres carrés ou étudier un échantillon en réduisant la dimension à l'aide de l'analyse en composantes principales.

Dans ce chapitre, $(E, \langle , \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

A Isométrie vectorielle

Définition Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal de E** tout endomorphisme préservant le produit scalaire, i.e. si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

On appelle **groupe orthogonal** l'ensemble de ces endomorphismes et on le note $\mathcal{O}(E)$.

Proposition Conservation de la norme

u est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|.$$

Démonstration

— *Implication :* Soit $\vec{x} \in E$. En prenant $\vec{x} = \vec{y}$, on obtient $\langle u(\vec{x}), u(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, soit $\|u(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$, d'où $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.

— *Réciproque :* Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle & \overbrace{=}^{\text{Identité de polarisation}} \frac{1}{4}(\|u(\vec{x}) + u(\vec{y})\| - \|u(\vec{x}) + u(\vec{y})\|) \\
& \overbrace{=}^{\text{Linéarité}} \frac{1}{4}(\|u(\vec{x} + \vec{y})\| - \|u(\vec{x} - \vec{y})\|) \\
& \overbrace{=}^{\text{Conservation de la norme}} \frac{1}{4}(\|\vec{x} + \vec{y}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\|) \\
& \overbrace{=}^{\text{Identité de polarisation}} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle
\end{aligned}$$

Proposition Conservation d'une base orthonormale

u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormale quelconque est une base orthonormale.

Démonstration

— $\Rightarrow$: Soit $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ une base orthonormale de E. Comme

$$\langle u(\vec{e_i}),u(\vec{e_j})\rangle \overbrace{=}^{\text{Conservation du produit scalaire}} \langle \vec{e_i},\vec{e_j}\rangle \overbrace{=}^{(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\text{BON}} \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases},$$

$(u(\vec{e_1}),\dots,u(\vec{e_n}))$ est bien une base orthonormale de E.

— $\Leftarrow$: Soit $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ une base orthonormale de E tel que $(u(\vec{e_1}),\dots,u(\vec{e_n}))$ est aussi une base orthonormale de E.
Soit $\vec{x}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}, \vec{y}=\sum_{i=1}^n y_i\vec{e_i}\in E$. On a

$$\begin{aligned}
\langle u(\vec{x}),u(\vec{y})\rangle &= \langle u\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}\right), u\left(\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)\rangle\\
&\overbrace{=}^{\text{bilinéarité}} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\langle u(\vec{e_i}),u(\vec{e_j})\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\langle \vec{e_i}),u(\vec{e_j}\rangle \text{ car } \quad \langle u(\vec{e_i}),u(\vec{e_j})\rangle \overbrace{=}^{BON} \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases} \overbrace{=}^{BON} \langle \vec{e_i},\vec{e_j}\rangle\\
&\overbrace{=}^{\text{bilinéarité}} \langle \sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}, \sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\rangle\\
&= \langle \vec{x},\vec{y}\rangle
\end{aligned}$$

Proposition Groupe

$\mathcal{O}(E)$ est un groupe, sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

Démonstration

$\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

— $\mathcal{O}(E)\subset\mathcal{GL}(E)$ Soit $u\in\mathcal{O}(E)$ Comme u est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de montrer que u est injective, $\operatorname{Ker} u=\{\vec{0_E}\}$.

Soit $\vec{x}\in\operatorname{Ker} u$. On a $u(\vec{x})=0$, d'où $\|u(\vec{x})\|=\|\vec{0}\|=0$. Comme $\|u(\vec{x})\| \overbrace{=}^{u\in\mathcal{O}(E)} \|\vec{x}\|$, on a $\|\vec{x}\|=0$. Enfin $\vec{x}=\vec{0_E}$ car une norme est définie.

— *Non vide :* $Id_E\in\mathcal{O}(E)$

— *Stabilité composition :* Soit $u,v\in\mathcal{O}(E)$. Soit $\vec{x}\in E$. La norme est conservée car :

$$\|u(v(\vec{x}))\| \overbrace{=}^{u\in\mathcal{O}(E)} \|v(\vec{x})\| \overbrace{=}^{v\in\mathcal{O}(E)} \|\vec{x}\|.$$

— *Stabilité inversion :* Soit $u\in\mathcal{O}(E)$. Comme u est un automorphisme, u^{-1} l'est aussi. De plus, la norme est conservée car :

$$\|\vec{x}\|=\|u(u^{-1}(\vec{x}))\| \overbrace{=}^{u\in\mathcal{O}(E)} \|u^{-1}(\vec{x})\|.$$

B Matrice orthogonale

Définition Matrice orthogonale

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(R)$ est dit **orthogonal** si

$$M^\intercal M = I_n.$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.
Comme $M^\intercal M = I_n$, la matrice M est inversible d'inverse $M^\intercal$ et on a aussi $MM^\intercal = I_n$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de rotation plane d'angle θ :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ou dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de rotation autour de l'axe $\vec{e_1} = (1,0,0)$ et d'angle θ ,

$$R_{\vec{e_1}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ou les matrices de permutation, comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition

$O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille des colonnes de O (ou les lignes) est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice O.

$$\begin{aligned} O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est orthogonal } &\Leftrightarrow M^\intercal M = \begin{pmatrix} C_1^\intercal \\ \vdots \\ C_n^\intercal \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^\intercal C_1 & \dots & C_1^\intercal C_n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^\intercal C_1 & \dots & C_n^\intercal C_n \end{pmatrix} = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,n]\!] : \quad C_i^\intercal C_j = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,n]\!] : \quad \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Du fait de l'égalité $OO^\intercal = I_n$, on a le même résultat sur les lignes.

Exemple

Il est facile de vérifier qu'une matrice de permutation est une matrice orthogonal car ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.

Théorème Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
u est une isométrie vectorielle si et seulement si $[u]_\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base orthonormale de E.
Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice $[u]_\mathcal{B}$. On a $[u(\vec{e_i})]_\mathcal{B} = C_i$.
Le coefficient de la matrice $[u]_\mathcal{B}^\intercal [u]_\mathcal{B}$ d'indice i, j est :

$$C_i^\top C_j \overbrace{=}^{\mathcal{B} \text{ BON}} \langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j}) \rangle.$$

— Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j}) \rangle \overbrace{=}^{\text{Conservation d'une base orthonormale}} \delta_{ij}$ et donc $[u]_\mathcal{B}^\top [u]_\mathcal{B} = I_n$, d'où $[u]_\mathcal{B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

— Si $[u]_\mathcal{B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $C_i^\top C_j = \delta_{i,j}$, soit $\langle u(\vec{e_i}), u(\vec{e_j}) \rangle = \delta_{ij}$ c'est à dire que l'image d'une base orthonormale et une base orthonormale donc $u \in \mathcal{O}(E)$.

Proposition **Matrice de passage d'un changement de bases orthonormales**

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E.
Alors la matrice de passage de base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, est une matrice orthogonale. Ainsi, son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^\top$.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme associée à la matrice de passage. Comme l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, f est une isométrie vectoriel, donc $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale.

Proposition **Groupe**

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, sous groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Pour la démonstration, il suffit de se ramener à u l'endomorphisme associée à la matrice orthogonale qui est une isométrie vectorielle.

C Déterminant

Proposition **Déterminant**

Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Alors $\det O = \pm 1$.
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
Alors $\det u = \pm 1$.

Démonstration

Comme $O^\top O = I_n$, on a $\det(O^\top O) = \det(I_n) = 1$. Or $det(O^\top O) = detO^\top \det O = (\det O)^2$. Donc $\det O = \pm 1$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Comme $[u]_\mathcal{B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det u = \det [u]_\mathcal{B}$, on conclut que $\det u = \pm 1$.

Remarque

Une matrice ou un endomorphisme de déterminant 1 ou -1 n'est pas nécessairement une matrice orthogonale ou une isométrie vectorielle. Par exemple $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, mais les colonnes ne forment pas une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Définition **Rotation et groupe spéciale orthogonale**

Une matrice orthogonale [resp. isométrie] est **direct(e)** si son déterminant est 1, indirect(e) si son déterminant est -1.
Une isométrie vectorielle directe est également appelée **rotation**.
On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales directes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des rotations de E.

Exemple

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition Groupe

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{SO}(E)$] est un groupe, sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{O}(E)$)] appelé **groupe spécial orthogonal** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. E].

Démonstration

- *Non vide* : $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- *Stabilité* : Soit $S_1, S_2 \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(S_1 S_2^{-1}) = \det S_1 \det S_2^{-1} = \frac{\det S_1}{\det S_2} = 1.$$

D Symétrie orthogonale

Définition Symétrie orthogonale

On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan de E, on parle alors de **réflexion**.

Proposition Symétrie orthogonale

Soit u une isométrie vectorielle.
u est une symétrie orthonormale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

- $\Longrightarrow$: Soit une symétrie orthonormale par rapport à F et $F^\perp$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale adaptée à décomposition $F \oplus F^\perp = E$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{\dim(F_2)} \end{pmatrix}$$

Elle est symétrique. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale quelconque. La matrice de passage de BON $\mathcal{B}$ à la base BON $\mathcal{B}'$ est orthogonale donc $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{\mathsf{T}}$. On a :

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{\dim(F_2)} \end{pmatrix} P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Donc $[u]_{\mathcal{B}'}$ est symétrique.
- $\Longleftarrow$: Voir théorème spectral.

E Orientation

Définition Orientation

Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E ont même **orientation** si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.
Orienter E, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ de référence. Une base $\mathcal{B}'$ est directe si elle a la même orientation que $\mathcal{B}$.

Exemple

Sur $\mathbb{R}^2$. La base de référence est $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique. Soit $\mathcal{B}' = (-\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$, $\mathcal{B}'$ est une base indirecte.

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.
$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée directe si seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale directe.

Démonstration

L'équivalence est due à l'égalité :
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})$$

Définition Orientation d'un hyperplan

Orienter l'hyperplan H, c'est choisir un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à H.
Une base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_{n-1}})$ de H est alors directe si la base $(\vec{u}, \vec{e_1}, ..., \vec{e_{n-1}})$ est directe dans E.
Il y a deux orientations possibles de H.

Exemple

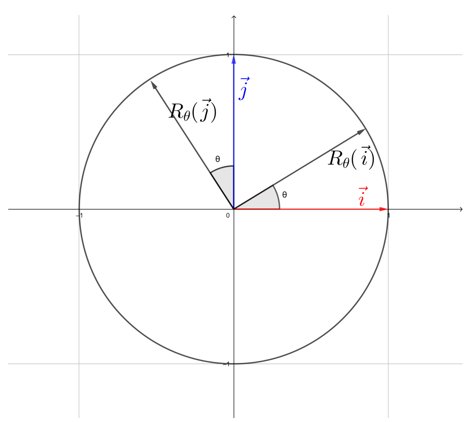
Soit $\mathbb{R}^3$ orientée par rapport à la base canonique. Soit H l'hyperplan définie par le vecteur normale $(1, 1, 1)$.
La base $((1, -1, 0), (1, 0, -1)$ de H est directe car $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$.

F Isométrie vectorielle du plan

Proposition Classification

Les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les R_θ, $\theta \in \mathbb{R}$.
Les matrices indirectes sont les S_θ, $\theta \in \mathbb{R}$.



Démonstration

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_[(2)]\mathbb{R}$.

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^{\mathsf{T}} M = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\phi \text{ et } d = \sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\phi \text{ et } d = \sin\phi \\ \cos(\theta-\phi) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \{-1,1\} \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } b = \sin\theta \\ c = \cos\phi \text{ et } d = \sin\phi \\ \phi = \theta + \epsilon\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{\cos(\theta+\epsilon\frac{\pi}{2}) = -\epsilon\sin\theta \text{ et } \sin(\theta+\epsilon\frac{\pi}{2}) = \epsilon\cos\theta} \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \{-1,1\} : \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix}$$

On conclut en remarquant que $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix} = \epsilon$.

Proposition

$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ ($\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif)et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Démonstration

On a :

$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}.$$

$R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = I_2$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

On considère $\mathcal{P}$ un plan vectoriel orienté et $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de $\mathcal{P}$.

Définition Rotation

L'endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est R_θ est appelé **rotation d'angle θ** et est noté r_θ.

Définition-Proposition Angle d'une rotation

La matrice de r_θ dans toute BOND est R_θ.
θ s'appelle **l'angle de la rotation**, il est défini modulo 2π.

Démonstration

Soit P la matrice de passage de la BOND $\mathcal{B}$ à une base BOND $\mathcal{B}'$. Comme P appartient $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, il existe θ' tel que $P = R_{\theta'}$. La matrice de r_θ dans la base $\mathcal{B}'$ est : $R_{\theta'}^{-1} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta$.

Proposition Expression complexe d'une rotation

Soit r_θ la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\vec{x} \in \mathcal{P}$, on note z l'affixe de M et z' celle de $r_\theta(\vec{x})$.
On a :

$$z' = e^{i\theta} z.$$

Démonstration

Soit (x, y) les coordonnées du vecteur $\vec{x}$. D'une part, on a :

$$[r_\theta(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix}$$

d'autre part,

$$z' = e^{i\theta} z = e^{i\theta}(x+iy) = (\cos\theta x - \sin\theta y) + i(\sin\theta x + \cos\theta y).$$

On conclut en identifiant la partie réel et imaginaire aux cordonnées de $[r_\theta(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$.

Définition Reflexion

La **reflexion** d'axe D est la symétrie orthogonal par rapport à D.

Proposition Représentation matricielle

Soit $\mathcal{B}$ une BOND de $\mathcal{P}$.
L'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est la **réflexion** d'axe la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ dans $\mathcal{B}$.

G Isométrie vectorielle dans un espace de dimension 3

Théorème Réduction

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une BOND de E dans laquelle u a pour matrice :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si $\det u = 1$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si $\det u = -1$

avec le cas particulier $\theta = 0[2\pi]$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan).

Démonstration

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u. χ_u est de degré 3 donc la limite en plus l'infini est de signe opposé à la limite en moins l'infini. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine réelle λ.
Soit $\vec{x}$ un vecteur propre associée à cette valeur propre. par définition, an a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, d'où $\|u(\vec{x})\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.
Comme u est une isométrie vectorielle $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Par conséquent $|\lambda| = 1$.
Considérons le supplémentaire orthogonal de la droite $Vect(\vec{x})$. Ce supplémentaire est stable sous u. En effet soit $\vec{y}$ un élément du supplémentaire. Montrons que $u(\vec{y}) \in Vect(\vec{x})^\perp$. Soit $\mathcal{B}$ une BON adaptée à $Vect(\vec{x}) \oplus Vect(\vec{x})^\perp = E$. On a :

$$[u]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\epsilon\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \epsilon\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \epsilon \in \{-1, 1\}.$$

Si $\epsilon = 1$, on a le premier cas du théorème. Si $\epsilon = -1$, la matrice de la restriction de u au sous espace $Vect(\vec{x})^\perp$ est une matrice de symétrie orthogonale par rapport à une droite $Vect(\vec{y})$. Soit $\vec{x}$ un vecteur orthogonal à cette droite dans le plan $Vect(\vec{x})^\perp$. La matrice de u dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (qui est orthogonale et que nous prenons orthonormée) est donc de la forme

$$[u]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

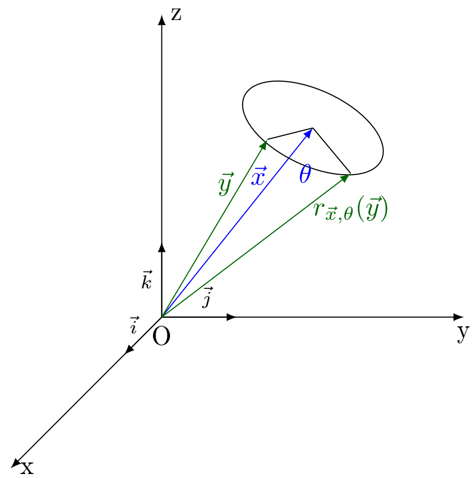
qui a permutation des vecteurs de base près est du type voulu.

Définition Rotation

La **rotation**, $r_{\vec{x},\theta}$, d'axe $\vec{x}$ et d'angle θ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

— $r_{\vec{x},\theta}(\vec{x}) = \vec{x}$

— la restriction de f au plan $vect\vec{x}^{\perp}$ orienté par $\vec{x}$ est la rotation (plane) d'angle θ.



Étude pratique d'une rotation r : détermination du couple axe-angle $(\vec{x}, \theta)$.

1. axe : choisir un vecteur non nul $\vec{x}$ appartenant à $\ker(r - Id_E)$
2. rotation :

   — La trace étant un invariant de similitude, $\operatorname{tr} r = 1 + 2\cos\theta$ ce qui fournit $\cos\theta$

   — la signe de $\sin\theta$ est le même que $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y}))$ où $\vec{y}$ est un vecteur non colinéaire à $\vec{x}$. En effet : $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y})) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 & x_2\cos\theta - x_3\sin\theta \\ 0 & x_3 & x_2\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix} = (x_2^2 + x_3^2)\sin\theta.$

Exemple

Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

— rotation vectoriel : les colonnes de A forment une base orthonormée donc f endomorphisme orthogonal. De plus $\det(A) = 1$, f est une rotation.

— axe : on obtient $\operatorname{Ker}(A - I_3) = Vect(1, 1, 1)$. Posons $\vec{x} = (1, 1, 1)$.

— angle :

  — $\operatorname{tr}(A) = 2$, et donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Pour déterminer le signe de θ, on pose $\vec{y} = (1, -1, 0)$ non colinéaire $\vec{x}$. $f(\vec{y}) = (1, 0, -1)$ et $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y})) = 3 > 0$. ce qui signifie $\theta\theta \in]0, \pi[modulo 2\pi$. On en déduit donc que f est la rotation d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

II Endomorphismes symétriques et Matrices symétriques

A Généralités

Définition Endomorphismes symétriques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est un endomorphisme **symétrique** (ou *autoadjoint*) si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y}) \rangle.$$

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Définition Matrices symétriques

Une matrice **symétrique**, S, est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée, soit $S^\top = S$.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de taille n.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple

La matrice suivante est symétrique :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Toute matrice diagonale est symétrique.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors $XX^\top$ est symétrique.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^\top A$ est symétrique.

Exemple **Matrice hessienne**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sa matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Exemple **Matrice de covariance**

La matrice de covariance du vecteur aléatoire $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ définie par :

$$\operatorname{Var}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \operatorname{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Proposition Endomorphisme symétrique et matrice symétrique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. u est un endomorphisme symétrique ;
ii. pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, $[u]_{\mathcal{B}}$ est une matrice symétrique ;
iii. il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}}$ est une matrice symétrique.

Proposition

Muni du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, une matrice S est symétrique si et seulement si :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle.$$

Définition Matrices antisymétriques

Une matrice **antisymétrique**, A, est une matrice carrée qui est égale à l'opposée de sa propre transposée, soit $A^\top = -A$.
On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Proposition **Supplémentaires orthogonaux**

$\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et SnR sont des supplémentaires orthogonaux par rapport au produit scalaire $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\mathsf{T} B)$.
La décomposition d'une matrice M selon cette somme directe est :

$$M = \frac{M + M^\mathsf{T}}{2} + \frac{M - M^\mathsf{T}}{2}.$$

B Produit scalaire

Définition **Positive**

Une matrice symétrique, S, est **positive** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad X^\mathsf{T} S X \geq 0.$$

Définition **Définie**

Une matrice symétrique, S, est **définie** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad X^\mathsf{T} S X = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Proposition **Produit scalaire associée à une matrice symétrique positive et définie**

Soit S une matrice symétrique, définie et positive.
Alors $\langle , \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & X^\mathsf{T} S Y \end{array} \right.$ est un produit scalaire.

Proposition **Expression d'une produit scalaire associée à l'aide une matrice symétrique positive et définie**

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de E.
Alors

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [\vec{x}]_\mathcal{B}^\mathsf{T} \times S \times [\vec{y}]_\mathcal{B} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Ainsi définie, S est une matrice symétrique définie et positive.

C Diagonalisation

Lemme **Stabilité et orthogonal**

Soit u un endomorphisme symétrique de E. Soit F sous espace vectoriel stable par u.
Alors son orthogonal $F^\perp$ est également stable par u.

Lemme **Sous espace propres orthogonaux**

Soit u un endomorphisme symétrique de E.
Alors les sous-espaces propres de S sont deux à deux orthogonaux.

Théorème **Théorème spectral (endomorphisme symétrique)**

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont toutes réelles.

Démonstration

Soit u un endomorphisme symétrique et
On montre d'abord qu'il existe au moins une valeur propre réelle, puis on restreint u par récurrence sur la dimension de l'espace :

— Tant que u est un endomorphisme de dimension non nulle

— Existence d'une valeur propre réel : soit S la matrice de u dans une base quelconque. Il existe λ une racine a priori complexe de son polynôme caractéristique et X un vecteur propre complexe non nulle telle que $AX = \lambda X$.

Alors
$$\begin{cases} (SX)^\mathsf{T}\overline{X} = \lambda X^\mathsf{T}\overline{X} \\ (SX)^\mathsf{T}\overline{X} = X^\mathsf{T}S^\mathsf{T}\overline{X} = X^\mathsf{T}S\overline{X} = X^\mathsf{T}\overline{SX} = X^\mathsf{T}\overline{\lambda X} = \overline{\lambda}X^\mathsf{T}\overline{X} \end{cases}$$

Comme $X^\mathsf{T}\overline{X} \neq 0$, $\lambda = \overline{\lambda}$, donc λ est réel.

— Soit E_λ l'espace propre associée à la valeur propre λ. On a $E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp = E$. D'après le lemme, $E_\lambda^\perp$ est stable par u. Alors u devient la restriction de u à $E_\lambda^\perp$.

Théorème **Théorème spectral (matrice symétrique)**

Soit S une matrice symétrique réelle.
Alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice A est égale à $PDP^{-1} = PDP^\mathsf{T}$.

Proposition **Caractérisation de la projection orthogonale**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et s une symétrie.
Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.
Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.