L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre numériquement des problèmes issus de divers domaines : des sciences physiques ou mécaniques, des sciences du vivant, de la chimie, de l'économie, des sciences de l'ingénieur...

Cette exemple introductif permet de présenter les **différentes représentations** de l'objet mathématique système d'équations linéaires.

I Exemple introductif

La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0.5 mètres. Quel est la taille du fils ?
Modélisation :
Soit l'inconnue x représentant la taille du fils et l'inconnue y représentant la taille du père.
La somme est 2,5 donc $x + y = 2,5$.
La différence est 0,5 donc $y - x = 0,5$.
Ainsi on cherche x et y vérifiant le système (S) :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y & = 2,5 \\ -x + y & = 0,5 \end{cases}$$

II Système d'équations

II.A Résolution algébrique

Pour déterminer l'ensemble des solutions x et y vérifiant ce système, une idée est de découpler par itérations les dépendances entre les inconnues dans les équations par combinaison ou élimination. A chaque itération, ces deux opérations transforment un système d'équations en un autre équivalent (ayant les mêmes solutions).
L'application à l'exemple introductif est :

1. pour éliminer x de la ligne 2, on ajoute à la ligne 2 la ligne 1 :
$$\begin{cases} x + y & = 2,5 \\ 2y & = 3 \end{cases}$$
2. pour déterminer y, on divise la ligne 2 par 2 :
$$\begin{cases} x + y & = 2,5 \\ y & = 1,5 \end{cases}$$
3. pour éliminer y de la ligne 2, on soustraie à la ligne 1 la ligne 2 :
$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1,5 \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solution est l'unique solution $(1, 1, 5)$ car ce dernier système d'équations est équivalent au premier.

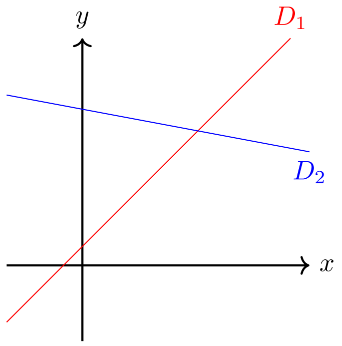
II.B Résolution géométrique

Le système équation :

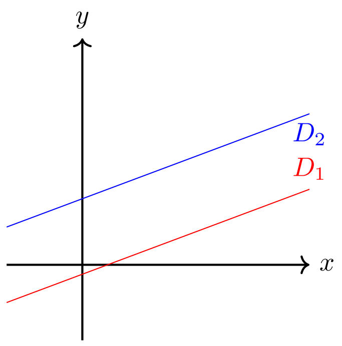
$$(S) \quad \begin{cases} x + y & = 2,5 \quad (D_1) \\ -x + y & = 0,5 \quad (D_2) \end{cases}$$

est constitué de deux équations de deux droites D_1 et D_2. Trois cas se présentent alors :

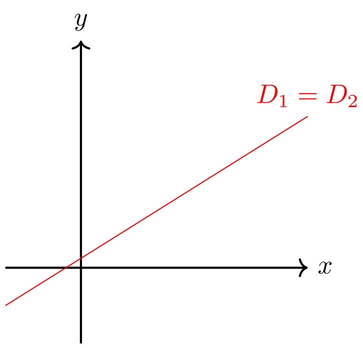
1. Si les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, alors elle s'intersecte en un unique point et le système (S) a une unique solution.



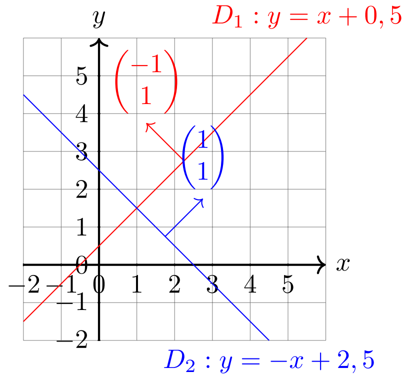
2. Si les droites D_1 et D_2 sont parallèles et non confondues, alors elle ne s'intersecte pas et le système (S) n'a pas de solution.



3. Si les droites D_1 et D_2 sont parallèles et confondues, alors elle s'intersecte en une infinité de points et le système (S) a une infinité de solutions.



Dans notre exemple, comme les vecteurs normaux aux deux droites $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles et donc admettent un unique point d'intersection.



Ainsi l'ensemble des solution admet une unique solution. Par lecture graphique, l'unique solution est $(1,1,5)$

III Matricielle

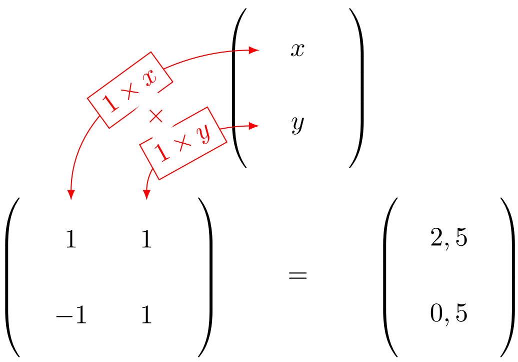
Une idée est de transformer ce système deux équations à deux inconnues en un système d'une équation à une inconnue dont on sait résoudre par de simple opérations algébriques. Par exemple, pour l'équation $2x+1=5$, on additionne l'opposé de 1, soit -1

$$2x+1+(-1)=5+(-1)$$

ce qui donne $2x=4$, puis on multiple par l'inverse de 2, soit $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}2x=\frac{1}{2}4$$

ce qui donne $x=2$.
On représente cette opération à l'aide de tableaux de nombres :



Autrement dit, on

$$A \times X = B$$

avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2,5\\0,5\end{pmatrix}$.
La matrice $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ est inversible, c'est à dire qu'il existe une matrice $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ telle que, en multipliant, par A^{-1} les deux membres de l'équation $A\times X=B$, on obtient :

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2,5\\0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1,5\end{pmatrix}.$$

Par identification, l'ensemble des solution est de nouveau l'unique solution $x=1$ et $y=1,5$.

IV Espace vectoriel

Une idée est de transformer ce système deux équations à deux inconnues en un système d'une équation à deux inconnues. Soit,

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

V Application linéaire