Suites et séries de fonctions : feuille d'exercices

Exercice 1 (Domaine de définition) Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ, appelé fonction de Rienman et de la fonction μ.

Exercice 2 (Convergence simple) Soit $(f_n), (g_n)$ et h_n, les suites de fonctions définies par $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : x \mapsto x^n, \quad g_n : x \mapsto (1+\frac{x}{n})^n, \quad h_n : x \mapsto xn^a e^{-nx}$. Démontrer que ces fonctions converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et déterminer la limite.

Exercice 3 (Convergence uniforme) Soit la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^{-nx} \end{array} \right., \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence de cette suite de fonctions.

Exercice 4 (Vrai/Faux) Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 5 (Étude de convergence simple et uniforme détaillée) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
3. Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
4. Soit $a \in]0,1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 6 (Convergence uniforme sur un intervalle plus petit...) On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in]0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 7 (Avec paramètre) Soit $a \geqslant 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 8 (Convergence uniforme et fonctions bornées) Soit (f_n) une suite de fonctions *bornées*, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

Exercice 9 (Convergence simple et fonctions décroissantes) Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0,1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 10 (Exemples et contre-exemples) Pour $x \geqslant 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geqslant \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.

7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11 (Série alternée) On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 12 (Convergence normale) Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
Démontrer que la fonction *zeta* converge normalement sur tout intervalle $[a, \infty[$ avec $a > 1$.
En déduire la continuité de la fonction ζ sur $]1, \infty[$.
Donner la limite $\lim_{x\to\infty} \zeta(x)$.

Exercice 13 (Equivalent Série-Intégrale) On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n > 0$,

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \end{array} \right. .$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Donner un équivalent de 0 de f.

Exercice 14 (Convergence suite de fonctions) On considère la suite de fonctions (f_n), où pour tout $n > 0$,

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x)^n \end{array} \right. .$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 15 (Convergence suite de fonctions) On considère la suite de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n > 1$,

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n} \end{array} \right. .$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+}$.

Exercice 16 (Espérance et variance de loi géométrique) Soit X, une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, $\mathcal{G}(p)$,c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

1. Calculer l'espérance de X
2. Calculer la variance de X