Chapitre 1

Série entière

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' = y, \quad y(0) = 1(E)$$

L'unique solution sur $\mathbb{R}^=$ de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre est l'application $x \to e^x$. Par définition, la fonction exponentielle est l'unique fonction égale à sa dérivée.

1. Déterminons les solutions de (E) sous forme polynomiale. Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Pour des raisons de degré, uniquement le polynôme nul convient.
2. Déterminons les solutions de (E) sous forme "polynomiale de degré infini". Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned}
f'(x) =& (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)' \\
f'(x) =& \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' \text{ "par permutaion dérivé et somme"} \\
f'(x) =& \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
f'(x) =& \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ "par translation d'indice"}
\end{aligned}$$

Comme $f'(x) = f(x)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Par identification, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} (n+1) a_{n+1} = a_n.$$

Ce premier exemple soulève de nombreuses questions auxquelles nous al

Une série entière est une série de fonctions de la forme

$$\sum a_n z^n$$

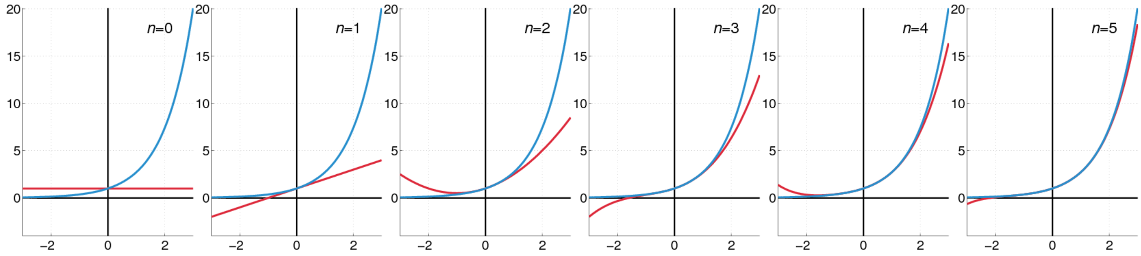

FIGURE 1.1 – La fonction exponentielle, $x \mapsto e^x$ en bleue, et la somme des $n+1$ termes $x \mapsto \sum_0^n \frac{x^n}{n!}$ en rouge.

où les coefficients a_n forment une suite réelle ou complexe et z une variable complexe.
Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide de son rayon de convergence R, grandeur associée à la série. Sur le disque de convergence (disque ouvert de centre 0 et de rayon R), la fonction somme de la série peut être dérivée indéfiniment terme à terme.
Les séries entières sont

1. un outil :
   (a) dans la résolution d'équations différentielles, par exemple $(1+x)y' = \alpha y$, en cherchant les solutions sous la forme $y(x) = \sum a_n x^n$,
   (b) dans l'étude du comportement asymptotique d'un somme de variable aléatoires et la caractérisation d'une variable aléatoire par la fonction génératrice : $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0} P(X=k)t^k$,
   (c) dans la modélisation des systèmes dynamiques de manière discrète à l'aide de la transformée en Z, soit $s(n)$ l'état du système au temps n, sa transformée en Z est
   $$S(z) = \mathcal{Z}\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) z^{-n}.$$
2. un objet préalable à l'analyse complexe des fonctions holomorphes et analytiques.

1.1 Généralités

Définition 1 (*Série entière*)

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n f_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{C}}$ est une suite numérique et où $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(z) = a_n z^n$. La **somme** de la série entière est la fonction
$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 1 (*Série exponentielle*)

La somme de la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est la fonction exponentielle :
$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Exemple 2 (*Série géométrique*)

La somme de la série $\sum_n x^n$ est :

$$\forall x \in]-1,1[: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Lemme 1.1.1 (*Lemme d'Abel*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1. *La série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.*
2. *Plus précisément, la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ dès que $0 \leqslant r < |z_0|$.*

Remarque 1

Il n'y a pas toujours convergence normale (ni uniforme) sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$.

Définition 2 (*rayon de convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Le **rayon de convergence** $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\Big\{ r > 0 \text{ tel que la suite de terme général } |a_n|\, r^n \text{ est bornée} \Big\}.$$

Corollaire 1.1.2 (*Convergence*)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

— *Si $|z_0| < R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ converge absolument.*

— *Si $|z_0| > R$, la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ diverge grossièrement ; plus précisément, la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.*

— *Si $|z_0| = R$, la série peut ou non converger.*

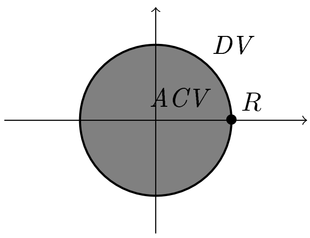

FIGURE 1.2 – Disque de convergence d'une série entière

Para

Définitions

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

— On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

— On appelle **cercle d'incertitude** (et parfois aussi, malheureusement, cercle de convergence) de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

1.2 Détermination du rayon de convergence

1.2.1 Avec le lemme d'Abel

Para
Proposition

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

— Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $R ? |z_0|$.
— Si $\sum_n |a_n z_0^n|$ diverge, alors $R ? |z_0|$.

Exemple 3

La rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1 car
— la suite (x^n) tend vers 0 si $|x| < 1$ (donc est bornée), donc $R ? 1$,
— la suite (x^n) diverge si $|x| > 1$, donc $R ? 1$,
En conclusion $R = 1$.

1.2.2 Avec d'Alembert

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. On suppose que :

— il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n ? N$ on ait $a_n ? 0$,
— $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors $R = 1/?$ si $l \neq 0$ et $+\infty$ si $l = 0$.

Exemple 4

La rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ car
— la suite (x^n) tend vers 0 si $|x| < 1$ (donc est bornée), donc $R ? 1$,
— la suite (x^n) diverge si $|x| > 1$, donc $R ? 1$,
En conclusion $R = 1$.

1.2.3 Avec les règles de comparaison

Para
Théorème

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a et R_b.

1. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| = \mathrm{O}\left(n^\alpha |b_n|\right)$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a ? R_b$.

2. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $K > 0$ tel que $|a_n| \sim K n^\alpha |b_n|$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a = R_b$.

1.3 Opérations sur les séries entières

Para
Notations

- Étant donné une série entière $\sum_n a_n z^n$, on note R_a son rayon de convergence et f_a sa somme.
- De même pour $\sum_n b_n z^n$ et $\sum_n c_n z^n$.

1.3.1 Somme

Définition 3

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières. On définit la **somme** de ces deux séries entières comme étant la série entière $\sum_n c_n z^n$ où

$$?n \in \mathbb{N}, \quad c_n = a_n + b_n.$$

Para
Proposition

Dans ces conditions,

- $R_c ? \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a ? R_b$,
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $f_c(z) = f_a(z) + f_b(z)$.

1.3.2 Multiplication par un scalaire

Définition 4

Soit ? un scalaire et $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On définit le **produit** du scalaire et de la série entière comme étant la série entière $\sum_n b_n z^n$ où

$$?n \in \mathbb{N}, \quad b_n = ?a_n.$$

Para
Proposition

Dans ces conditions,

- $R_b = R_a$ si ??0, et $R_b = +\infty$ si $? = 0$,
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, on a $f_b(z) = ?f_a(z)$.

1.3.3 Produit de Cauchy

Définition 5

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières. On définit le **produit de Cauchy** de ces deux séries entières comme étant la série entière $\sum_n c_n z^n = \sum_n a_n z^n \times \sum_n b_n z^n$ où

$$?n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Para
Proposition

Dans ces conditions,

- $R_c ? \min(R_a, R_b)$,
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $f_c(z) = f_a(z) f_b(z)$.

1.4 Propriétés de la somme

Para
Théorème[continuité sur le disque ouvert de convergence]
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Alors f est continue sur le disque ouvert de convergence

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Para
Proposition
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors les deux séries entières suivantes :
— la « dérivée formelle » $\sum_n b_n z^n$ où $b_n = (n+1)a_{n+1}$,
— la « primitive formelle » $\sum_n c_n z^n$ où $c_n = \frac{a_{n-1}}{n}$
ont également un rayon de convergence égal à R.
Para
Théorème[primitivation terme à terme]
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Une primitive de f sur $]-R, R[$ est donnée par

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Para
Proposition[dérivation terme à terme]
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Alors f est une fonction de classe C^1 sur $]-R, R[$ et $\forall x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Para
Théorème[généralisation]
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f. Alors f est une fonction de classe C^1 sur $]-R, R[$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} \frac{(n+p)!}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Para
Corollaire
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

1.5 Fonctions développables en séries entières

Para
Notation
— I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, +\alpha[\subset I$.

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière** au voisinage de 0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R?\alpha$ tels que $]-\alpha, \alpha[\subset I$ et

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Para
Proposition
Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0, alors il existe $\alpha > 0$ tel que f soit de classe C^1 sur $]-\alpha, \alpha[$.

Définition 7

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On appelle **série de Taylor** de f au voisinage de 0 la série entière

$$\sum_n a_n z^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Para
Théorème[unicité du développement en série entière]
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0. Alors tout développement en série entière de f au voisinage de 0 est égal à sa série de Taylor au voisinage de 0.
Para
Corollaire
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0. Alors f admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre, et ce développement limité s'obtient en tronquant le développement en série entière.
Para
Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que

— f est de classe C^1 sur $]-\alpha, \alpha[$,
— la série de Taylor de f converge sur $]-\alpha, \alpha[$,
— f soit égale à la somme de se série de Taylor sur $]-\alpha, \alpha[$.

1.6 Fonctions usuelles

1.6.1 Exponentielle complexe

Para
Proposition
La série entière $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Notons $\phi : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ sa somme. On montre successivement :

1. $\phi(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $?(z_1 + z_2) = ?(z_1)?(z_2)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^x$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\phi(i\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

Définition 8

On appelle **exponentielle** la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence infini. On note fréquemment e^z au lieu de $\exp(z)$.

Para
Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé et $\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \exp(tz) \end{array} \right.$

Alors ϕ est de classe C^∞ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi^{(n)}(t) = z^n \exp(tz).$$

1.6.2 Trigonométrie

Para
Définitions
On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
- $\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$
- $\operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

Il s'agit de prolongement des fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, classiquement définies sur $\mathbb{R}$.
Para
Proposition

- Les formules usuelles de trigonométries restent valables, notamment $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$:
  - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- On peut passer de la trigonométrie directe à la trigonométrie hyperbolique sachant que ?$z \in \mathbb{C}$:
  - $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$
  - $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$
  - $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$
  - $\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$

Para
Proposition
On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
- $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
- $\operatorname{ch} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$
- $\operatorname{sh} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Il s'agit de séries entières de rayon de convergence infini.

1.6.3 $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Para
Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$. Alors f est développable en série entière au voisinage de 0. Plus précisément, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

On note parfois $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 si $\alpha ? \mathbb{N}$, et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.

Para

Remarque

Si $\alpha \in ?$, le développement est également valable dans $\mathbb{C}$

$$?z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1, \quad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est défini comme ci-dessus.

Exemple 5

Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \arcsin x$.

1.6.4 Fractions rationnelles

Para

Méthode

Pour obtenir un développement en série entière (au voisinage de 0) d'une fraction rationnelle, on peut :

— la décomposer en éléments simples $\frac{1}{(x-a)^n}$ où $a \in \mathbb{C}^*$;

— remarquer que $\frac{1}{(x-a)^n} = (-a)^{-n} \left[1 + \left(-\frac{x}{a}\right)\right]^{-n}$;

— se ramener à $(1+u)^\alpha$.

On obtient une série entière de rayon de convergence $|a|$.