

Matrices

Exemple Taille d'un père et d'un fils

La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0,5 mètres. Quelle est la taille du fils et du père ?

Comme vu au chapitre précédent, la première étape est la modélisation avec un système d'équations linéaires. Soit la variable x représentant la taille du fils et la variable y représentant la taille du père.

Le couple (x, y) vérifie le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = 2,5 \\ -x + y = 0,5 \end{cases}$$

On sait résoudre par de simples opérations algébriques une équation linéaire à une inconnue à coefficient **réels**. Par exemple, pour l'équation $2x = 4$, on multiplie par l'inverse de 2, ce qui donne $x = 2$.

Une idée est de transformer le système de deux équations à deux inconnues à une équation à une inconnue. Cette transformation est une abstraction sur la nature des coefficients et des variables des équations : de **réels à tableaux de nombres**.

Ainsi, l'équation équivalente au système d'équations linéaires est :

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Diagramme explicatif : Des flèches en rouge montrent les additions et soustractions entre les termes de l'équation matricielle. Une flèche pointe vers le terme $1+x$ dans la première ligne, une autre vers $-1+y$ dans la deuxième ligne. Des flèches pointent également vers les termes x et y dans le vecteur des inconnues.

Autrement dit, on a

$$A \times X = B$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, c'est à dire qu'il existe une matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ telle que, en multipliant, par A^{-1} les deux membres de l'équation $A \times X = B$, on obtient :

$$X = A^{-1} \times B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Par identification, l'ensemble des solution est de nouveau l'unique solution $x = 1$ et $y = 1,5$.

Les matrices sont des tableaux de nombres qui servent à interpréter en termes calculatoires, et donc opérationnels, les résultats théoriques de l'algèbre linéaire et même de l'algèbre bilinéaire. Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices.

Notations : \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et les lettres n, p, \dots désignent des entiers naturels non nuls. Le mot **scalaire** désigne un réel ou un complexe.

I Les matrices

A Définition

Définition Matrice

Une **matrice**, A , de taille $n \times p$ à coefficients \mathbb{K} est une famille d'élément de \mathbb{K} , $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, présentée sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Le scalaire a_{ij} est appelé **coefficients de A de position (i,j)**, noté aussi $(A)_{ij}$.

La matrice $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la **j^{ime} colonne** de A . On note $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix}$.

La matrice $L_i = (a_{i,1} \quad \cdots \quad a_{i,p})$ est appelée la **i^{ime} ligne** de A . On note $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3 \\ a_{21} &= 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6 \\ L_1 &= (1 \quad 2 \quad 3), L_2 = (4 \quad 5 \quad 6) \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B Matrices particulières

Définition Matrices colonnes

Une matrice à une colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est appelée **matrice colonne**.

L'ensemble des matrices colonnes de taille n est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou \mathbb{K}^n par identification avec l'ensemble des n -uplets.

Exemple

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$.

Définition Matrices lignes

Une matrice à une ligne $(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p)$ est appelée **matrice ligne**.

L'ensemble des matrices ligne de taille p est noté $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ ou \mathbb{K}^p par identification avec l'ensemble des p -uplets.

Exemple

Soit $Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \in \mathbb{K}^3$.

Définition Matrice nulle

Une matrice ayant tous les coefficients nuls est appelée **matrice nulle**.

On la note 0_{np} si elle a n lignes et p colonnes, ou 0 s'il n'y a pas d'ambigüité.

Exemple

$$0_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition Matrices carrés

Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice carré**.

La famille $(a_{11} \ a_{22} \ \cdots \ a_{nn})$ est appelé **diagonale de A**.

L'ensemble des matrices carrés de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est carrée.

Définition Matrices triangulaires supérieurs

Une matrice carrée ayant tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale sont nuls

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice triangulaire supérieur**.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieur.

Définition Matrices triangulaires inférieurs

Une matrice carrée ayant tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale sont nuls

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice triangulaire inférieur**.

Définition Matrices diagonales

Une matrice carrée étant à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures, c'est à dire les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est appelée **matrice diagonale**.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale.

Définition Matrice identité

La **matrice identité**, noté I_n , est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II Calcul matriciel

A Égalité

Définition Égalité des matrices

Deux matrices A et B sont égales, ce qu'on note $A = B$ si

- même nombre de lignes,
- même nombre de colonnes,
- les coefficients à la même position sont égaux.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B Addition matricielle

Définition Somme

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant même nombre de lignes n et même nombre de colonnes p .

La **somme $A + B$** de A et B est égale la matrice dont chaque coefficient est la somme des coefficients de même position de A et de B , c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 & 1 - 1 & 2 + 1 \\ 3 + 0 & 4 + 1 & 5 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposition Structure de groupe commutatif

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **Commutative** : $A + B = B + A$
- **Associative** : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Élément neutre 0_{np}** : $A + 0_{np} = 0_{np} + A = A$
- **Symétrique** : en notant $(-A) = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on a :

$$A + (-A) = 0_{np}.$$

Démonstration

- **Commutative** :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Déf Addition matricielle}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} \\ A + B &= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & \cdots & b_{1p} + a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} + a_{n1} & \cdots & b_{np} + a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \\ A + B &= B + A. \end{aligned}$$

- **Associative** : démonstration similaire à la commutativité

- **Élément neutre** : à droite

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & \cdots & a_{1p} + 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + 0 & \cdots & a_{np} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On ferait de même à gauche.

- **Symétrique** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & \cdots & a_{1p} - a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{n1} & \cdots & a_{np} - a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

C Multiplication d'une matrice par un élément de \mathbb{K}

Définition Produit externe

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

La **produit** λA de λ par A est égale la matrice dont chaque coefficient est obtenu en multipliant le coefficient de même position de A par λ :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 & 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 & 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition Propriétés

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors,

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1A = A$

Démonstration

La démonstration est évidente.

D Multiplication matricielle

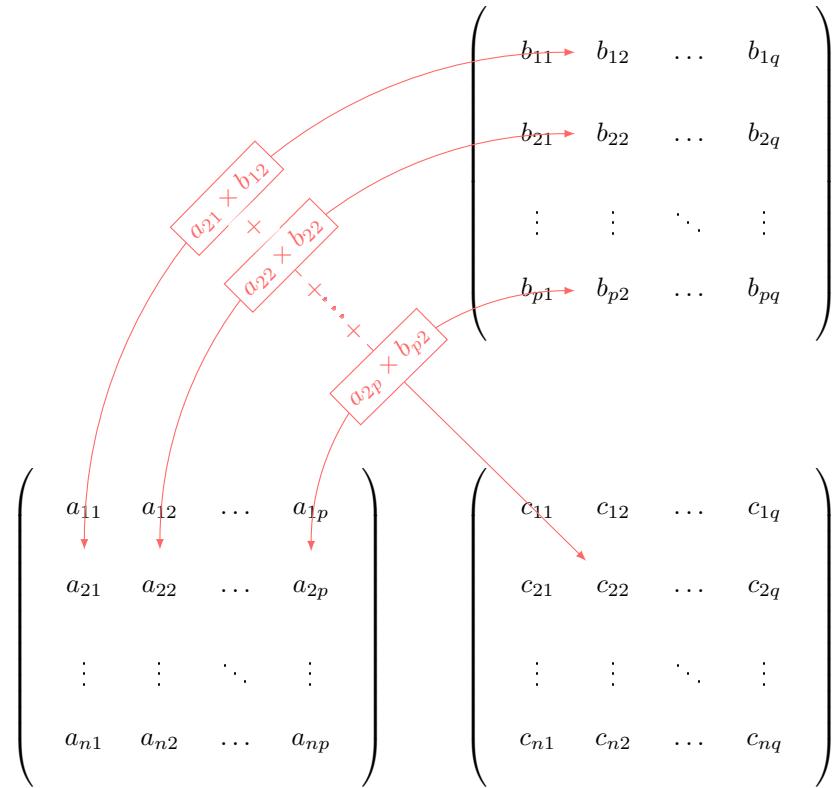
Définition Produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Le **produit matriciel** $A \times B$ est la matrice $C = \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket : c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

$B : p$ lignes q colonnes



$A : n$ lignes p colonnes

$C = A \times B : n$ lignes q colonnes

On omettra souvent symbole \times dans les expressions : $AB = A \times B$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 3 + 2 \times 5 & 2 \times 2 + (-1) \times 4 + 2 \times 6 \\ 1 \times 1 + 0 \times 3 + 3 \times 5 & 1 \times 2 + 0 \times 4 + 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Remarque **Algèbre non commutative et non intègre**

En général, le produit matriciel n'est pas commutatif ($AB \neq BA$). Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, en général, le produit matriciel n'est pas intègre (si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$). C'est à dire un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition Lignes et colonnes d'un produit matriciel

On a :

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \textcolor{blue}{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \textcolor{blue}{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_j$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \times (L_1 \dots L_i \dots L_n) = L_i.$$

Et plus généralement :

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{j=1}^p x_j C_j}_{\substack{\text{Combinaison linéaire} \\ \text{des vecteurs } C_1, \dots, C_p}}$$

et

$$(x_1 \dots x_n) \times A = \sum_{i=1}^n x_i L_i$$

Proposition Propriétés

1. Associative :

$$(AB)C = A(BC).$$

2. Distributivité par rapport à l'addition :

$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{et} \quad A(B + C) = AB + AC.$$

3. Élément neutre :

la matrice identité est l'élément neutre, c'est à dire

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) : \quad I_n A = A I_q = A.$$

Démonstration

1. Associative :

soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a :

$$\begin{aligned} ((A \times B) \times C)_{ij} &= \sum_{k=1}^q (A \times B)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{l=1}^p a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{l=1}^p a_{il} \left(\sum_{k=1}^q b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^p a_{il} (B \times C)_{lj} = (A \times (B \times C))_{ij} \end{aligned}$$

2. Les deux autres propriétés se démontrent aisément.

E Puissance d'une matrice carrée

Définition Puissance

La **puissance** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la multiplication itérée de A , soit

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad A^k = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{\text{k fois}} \quad \text{et} \quad A^0 = I_n.$$

Exemple Puissance d'une matrice de 1

Déterminer la puissance $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration

On a $J^2 = nJ$ puis par récurrence, pour $k \geq 1$, $J^k = n^{k-1}J$.

Proposition Propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k, l \in \mathbb{N}$.

On a :

- $A^k A^l = A^{k+l}$
- $(A^k)^l = A^{kl}$
- $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A + B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$ mais seulement $A^2 + \textcolor{red}{AB + BA} + B^2$.

Proposition Formule du binôme

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est à dire $AB = BA$.

Alors, pour tout entier $p > 0$, on a les formules

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

et

$$A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

où $\binom{p}{n}$ désigne le coefficient du binôme.

Démonstration

La démonstration par récurrence est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a + b)^p$, avec a, b des réels.

Définition Matrice nilpotente

On dit que A est **nilpotente** si il existe $k \in \mathbb{N}^*$: $A^k = 0$.

Le plus petit entier k pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'**indice de nilpotence** de A .

Exemple

Déterminer la puissance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration

On a $A = I_3 + 2N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice N est donc nilpotente d'indice 2 et commute avec I_3 . On a :

$$A^p = (2N + I_3)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (2N)^k I_3^{p-k} = \binom{p}{0} (2N)^0 + \binom{p}{1} (2N)^1 + \overbrace{(2N)^2 + \dots}^{=0} = I_3 + 2pN.$$

III Opérateurs

A Transposée

Définition Transposée

La **matrice transposée** (ou la **transposée**) d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $A^\top = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Exemple

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition Propriétés

- **Linéaire** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$
- **Involutive** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : (A^\top)^\top = A$
- **Ordre inversé produit** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall b \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) : (AB)^\top = B^\top A^\top$

Démonstration

- **Linéaire** :

$$((\lambda A + \mu B)^\top)_{ij} \stackrel{\text{Def transposée}}{=} (\lambda A + \mu B)_{ji} = \lambda(A)_{ji} + \mu(B)_{ji} = \lambda(A^\top)_{ij} + \mu(B^\top)_{ij}$$

- **Involutive** :

$$((A^\top)^\top)_{ij} = (A^\top)_{ji} = (A)_{ij}$$

- **Ordre inversé produit** :

$$((AB)^\top)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^p (A)_{jk} (B)_{ki} = \sum_{k=1}^p \sum_{k=1}^p (B^\top)_{ik} (A^\top)_{kj} = (B^\top A^\top)_{ij}.$$

Définition Matrice symétrique et antisymétrique

On dit que A est **symétrique** si : $A^\top = A$.

On dit que A est **antisymétrique** si : $A^\top = -A$.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ est symétrique.

B Trace d'une matrice carrée

Définition **Trace**

La **trace** d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux , soit

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

Exemple

On a $\text{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 11 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & -5 \end{pmatrix}\right) = -1 + 5 + (-5) = -1$.

Exemple **Norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

L'application $A \mapsto \text{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir chapitre espace pré-hilbertien).

Proposition **Propriétés**

- **Linéaire** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$
- **Ordre inversé produit** : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall b \in \mathcal{M}_{p,b}(\mathbb{K}) : \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Démonstration

On a :

- **Linéaire** :

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_{kk} + \mu b_{kk}) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{kk} + \mu \sum_{k=1}^n b_{kk} = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$$

- **Ordre inversé produit** :

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{kp} b_{pk} = \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n b_{pk} a_{kp} = \sum_{p=1}^n (AB)_{pp} = \text{tr}(BA).$$

Remarque

En général, $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(ACB)$.

IV Matrices inversibles

On sait résoudre une équation $ax = b$ à une inconnue à coefficient réels. Cette équation :

- si $a \neq 0$: admet l'unique solution $a^{-1}b$ si $a \neq 0$,
- si $a \neq 0$
 - si $b \neq 0$ n'admet pas de solution ,

- si $b = 0$ admet l'ensemble \mathbb{R} comme solutions.

Pour déterminer l'ensemble des solutions, on se pose la question de l'existence de l'inverse de a . Pour les matrices, résoudre $AX = B$ revient à se poser la même question sur existence de l'inverse de A .

A Définition

Définition-Proposition Inverse

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$AB = BA = I_n.$$

Si elle existe, la matrice B est unique et appelée **inverse** de A , noté A^{-1} .

L'ensemble des matrice inversibles de taille n se note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé **groupe linéaire**.

Démonstration

Pour l'unicité, on suppose l'existence de deux matrices B et B' inverse de A . On a :

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'.$$

Ainsi $B = B'$.

Exemple Matrice identité

L'inverse de la matrice identité est elle-même car $I_nI_n = I_n$.

Exemple Matrice nulle

La matrice nulle 0_n n'est pas inversible car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A0_n = 0_n$ donc le produit d'une matrice avec la matrice 0_n n'est jamais égale à la matrice identité.

B Propriétés

Proposition A gauche ou à droite

Il suffit de vérifier que $AB = I_n$ ou bien $BA = I_n$ pour prouver que A est inversible d'inverse B .

Démonstration

Voir chapitre sur les applications linéaires.

Proposition Opérations sur les matrices inversibles

Soit A et B deux matrices **inversibles**.

- **Inversibilité de l'inverse** : A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- **Inversibilité du produit** : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **Inversibilité de la transposée** : A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Démonstration

- **Inversibilité de l'inverse** : comme $AA^{-1} = I_n$, l'inverse de A^{-1} est A .

- **Inversibilité du produit** : $(B^{-1}A^{-1})(AB) \stackrel{\text{Associative}}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B = B^{-1}B = I_n$.
- **Inversibilité de la transposée** : $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$.

Proposition Simplification d'une équation

Soit C une matrice inversible.

Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

Démonstration

On multiplie à droite par l'inverse de C . On a $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$. Comme le produit matriciel est associatif, on a $A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, d'où $A = B$.

Proposition Caractérisation de l'inversibilité 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une colonne (ou une ligne) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (ou des autres lignes) si et seulement si A n'est pas inversible.

Démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— \Rightarrow : Sans perte de généralité, supposons que la première colonne est combinaison linéaire des autres, c'est à dire qu'il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que :

$$C_1 = \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n.$$

Supposons par l'**absurde** que A est inversible.

On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = C_1 - \lambda_2 C_2 - \cdots - \lambda_n C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. En multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où la contradiction.

— \Leftarrow : Pour la condition suffisante, voir le chapitre sur les applications linéaires.

Exemple

Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Correction

La seconde ligne est égale à -2 fois la première donc la matrice n'est pas inversible.

Proposition Caractérisation de l'inversibilité 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.

Démonstration

— \Rightarrow : Supposons que A est inversible. $AX = Y$ si et seulement si $A^{-1}(AX) = A^{-1}Y$ si et seulement si $X = A^{-1}Y$. Ainsi l'unique solution du système est $A^{-1}Y$.

— \Leftarrow : Supposons que pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$.

En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe C_i tel que $AC_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \textcolor{blue}{\text{pos } i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose la matrice B des colonnes C_1, \dots, C_n . On a :

$$AB = A \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_1 & \cdots & AC_n \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc A est inversible d'inverse B .

C Calcul de l'inverse

Méthode Analyse-synthèse

En analyse, on suppose l'existence de l'inverse et on détermine des conditions nécessaires sur les coefficients de la matrice inverse.

Puis on synthèse, on vérifie.

Exemple

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Correction

Analyse : on cherche une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$, soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}.$$

Par substitution, on trouve que $a = 1, b = -\frac{2}{3}, c = 0, d = \frac{1}{3}$.

Synthèse : On vérifie bien que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Correction

Analyse : on cherche une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_n$, soit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\begin{pmatrix} 3a + 5b & 0 \\ 3c + 5d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient la contradiction $1 = 0$. Donc le système n'admet pas de solution. Donc la matrice A n'est pas inversible.

Méthode Pivot de Gauss

On résout un système linéaire avec l'algorithme du pivot de Gauss puis on conclut d'après la seconde caractérisation de l'inversibilité.

Au lieu d'un système, on peut écrire les étapes avec des matrices en appliquant en parallèle sur une matrice initialisée avec la matrice identité.

Exemple

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Correction

$$\text{Soit } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminons l'ensemble des solutions du système $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss (voir chapitre système linéaire) au système suivant :

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ x + y + z = b \\ 2y + z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y = b - a \\ 2y + z = c \end{cases} \quad L_2 = L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y = b - a \\ z = c - 2b + 2a \end{cases} \quad L_3 = L_3 - 2L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b - c \\ y = b - a \\ z = c - 2b + 2a \end{cases} \quad L_1 = L_1 - 2L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible car le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution et son inverse est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$\text{Déterminer l'inverse de la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2
 \end{array}$$

La matrice inverse est donc $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Proposition Matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration

La condition $ad - bc \neq 0$ signifie que les deux colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires. D'après la caractérisation de l'inversibilité, la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Si $ad - bc \neq 0$, on a bien :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = I_2.$$

V Rang

A Définition

Définition Rang

Le **rang** d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.

Exemple

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction

Déterminons le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ de vecteurs de \mathbb{R}^2 . Tous ces vecteurs sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc le rang de la famille est 1 et ainsi, par définition, $\text{rg } A = 1$.

Définition Matrice échelonnée

Une matrice est **échelonnée** si le nombre de 0 au début de chaque ligne est strictement croissant quand on passe d'une ligne à la suivante.

Le premier élément non nul de chaque ligne dans une matrice échelonnée s'appelle le **pivot**.

Exemple

Voici un exemple de matrice échelonnée (les * désignent des coefficients quelconques, les \oplus des pivots, coefficients non nuls) :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée car le nombre de zéros est le même en début de ligne entre la seconde et la troisième.

Proposition Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de colonnes possédant un pivot (non nul).

Démonstration

Chaque colonne n'ayant pas de pivot est une combinaison linéaire des colonnes précédentes ayant un pivot.

Exemple

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 5.$$

B Opérations conservant le rang

Proposition Opérations élémentaires conservant le rang

Le rang d'une matrice ayant les colonnes C_1, C_2, \dots, C_p n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs :

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une colonne par un scalaire non nul.
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j .
3. $C_i \leftrightarrow C_j$: on peut échanger deux colonnes.

Démonstration

par définition, le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes et on montré l'invariance du rang par ces opérations.

Méthode Pivot de Gauss

Pour calculer le rang d'une matrice ou d'un système de vecteurs, on applique la méthode de Gauss sur la matrice A afin d'obtenir une matrice échelonnée.

Exemple

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Correction

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exemple

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Correction

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

C Rang et matrice inversible**Théorème Matrice inversible et rang**

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n .

Exemple

Déterminer si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Correction

$$\begin{aligned}
 \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\
 &\quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Comme le rang n'est pas égale à 4, la matrice n'est pas inversible.

Proposition Invariance par transposition

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T).$$

VI Application aux systèmes d'équations linéaires

Muni de l'objet matrice, nous pouvons démontrer plus facilement les théorèmes du chapitre sur les systèmes linéaires.

Théorème Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit un système de n équations linéaires à p variables de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_n = b_n \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- ou bien le système n'admet pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**,
- ou bien le système admet au moins une solution (x_1, \dots, x_n) , appelée **solution particulière**, on dit qu'il est **compatible**. Dans ce cas, les solutions sont de la forme :

$$S = \{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{Solution particulière}} + \underbrace{(y_1, \dots, y_p)}_{\text{Solution homogène}} : (y_1, \dots, y_p) \in S_H \}.$$

Démonstration

Soit S l'ensemble des solutions du système d'équations.

Supposons que le système possède une solution, noté X_p .

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\stackrel{AX_p=B}{\Leftrightarrow} AX = B \Leftrightarrow AX_p = 0 \Leftrightarrow A(X - X_p) = 0$$

$\Leftrightarrow X - X_p$ est solution du système homogène

$\Leftrightarrow X$ est la somme de la solution particulière et d'une solution du système homogène

Proposition Équivalence par opérations élémentaires

Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Démonstration

Soit Q inversible.

X est solution d'un système linéaire si et seulement si $AX = Y$ si et seulement si $QAX = QY$.

Donc si les matrices associées aux transformations élémentaires sont inversibles alors les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent. On a :

$$\text{--- } L_i \leftrightarrow L_j : \text{ Soit } Q_{L_i \leftrightarrow L_j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \text{pos } ij \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $Q_{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. Comme $Q_{L_i \leftrightarrow L_j} Q_{L_i \leftrightarrow L_j}^{-1} = I_n$, $Q_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est inversible et égale à son inverse.

$$\text{--- } L_i \leftarrow \lambda L_i \text{ avec } \lambda \neq 0 : \text{ Soit } \lambda \neq 0 \text{ et } Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \text{pos } ii & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. Comme $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} Q_{L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i} = I_n, Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est inversible.

— $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ avec $i \neq j$: Soit $i \neq j$ et $Q_{L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. Comme $Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i} Q_{L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i} = I_n, Q_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est inversible.

Remarque

La preuve de cette proposition nous donne une méthode pour déterminer si une matrice est inversible ou non et calculer son inverse le cas échéant. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'un point de vue matricielle l'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer A par des opérations élémentaires Q_1, \dots, Q_r , c'est à dire : $(Q_1 \dots Q_r)A$. Deux cas de figures se présentent à la fin de l'algorithme, soit on obtient la matrice identité, soit on obtient

— Comme les opérations élémentaires sont des matrices inversibles, $(Q_1 \dots Q_r)$ est inversible. Si

VII Matrice par blocs

Définition Décomposition par blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.

Sa **décomposition par blocs** 2×2 est

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow^{n_1} & \uparrow^n \\ \downarrow^{n_2} & \\ \xleftarrow[p_1]{\quad} & \xrightarrow[p_2]{\quad} \\ \xleftarrow[p]{\quad} & \end{matrix}$$

De même, on peut généraliser une décomposition par blocs $k \times m$.

Exemple

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ peut être partitionnée en quatre blocs 2×2 avec

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On peut alors écrire la matrice par bloc comme :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

Proposition Addition par blocs

On a :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\xleftarrow[n_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_2]{\quad} \quad \xleftarrow[n_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_2]{\quad}$

De même, on peut généraliser une addition par blocs $k \times m$.

Proposition Multiplication par un scalaire par blocs

On a :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{pmatrix}$$

De même, on peut généraliser une multiplication par blocs $k \times m$.

Proposition Produit par blocs

On a :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\xleftarrow[n_1]{\quad} \quad \xleftarrow[k_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_2]{\quad} \quad \xleftarrow[n_2]{\quad} \quad \xleftarrow[p_1]{\quad} \quad \xleftarrow[p_2]{\quad}$

De même, on peut généraliser une multiplication par blocs $k \times m$.

Remarque

Le cas qui nous intéressera le plus fréquemment est celui des matrices carrées ayant le même découpage pour les lignes et pour les colonnes. Dans ce cas, les blocs diagonaux sont également des matrices carrées.