

Equation différentielle d'ordre 1

Exercice Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x' + x = 1$
2. $7x' + 2x = -5t^2 + 4t - 1$
3. $x' + 2x = t^2 - 2t + 3$
4. $x' + x = te^{-t}$
5. $x' - 2x = \cos(t)$

Exercice Datation

Le carbone 14 possède plusieurs isotopes dont le carbone 14 - noté C^{14} , utilisé pour la datation. La proportion de carbone 14 est constante chez un organisme vivant. Après sa mort, la vitesse de disparition du carbone 14 est proportionnelle à la proportion de C^{14} présente dans l'organisme. On note k la constante de proportionnalité.

1. On note $x(t)$ la proportion de C^{14} à un instant t dans l'organisme. Écrire l'équation différentielle satisfaite par x .
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. On appelle période de demi-vie la durée nécessaire pour que la proportion de C^{14} ait diminuée de moitié. Sachant que la période de demi-vie du C^{14} est de 40 ans, calculer la constante k .
4. Une équipe d'archéologues a mesuré dans une momie une proportion de C^{14} de $9,15 \cdot 10^{-38}$. A quelle dynastie appartient ce pharaon ?

Exercice Equation différentielle linéaire de premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Sur \mathbb{R} :

$$E_1 : x' + x = \cos t + \sin t$$

Puis déterminer la solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' + x = \cos t + \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

2. Sur \mathbb{R} :

$$E_2 : x' - 2tx = \sinh t - 2t \cosh t$$

3. Sur \mathbb{R}_+^* :

$$E_3 : tx' + (t-1)x = t^2$$

Correction

1. (a) Résolvons l'équation homogène (H) : $x' = -x$, associée à (E) .
 - Posons $a(t) = -1$, a est définie et continue sur \mathbb{R} .
 $A(t) = -t$ primitive de a sur \mathbb{R}
 - La solution générale de (H) est :
 $x_0 = Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$
 - (b) Par superposition des solutions, il suffit de trouver une solution particulière à $x' + x = \cos t$ d'une part et à $x' + x = \sin t$ d'autre part, pour déterminer une solution particulière à (E) . De plus par linéarité, il suffit de trouver une solution particulière à $x' + x = e^{it}$ pour trouver les solutions particulières ci-dessus.
 - (c) Déterminons une solution particulière à $x' + x = e^{it}$ par la méthode de la variation de la constante.
 Posons $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et cherchons une solution sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda(t)e^{-t} & x_1 \text{ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :} \\ x_1' &= \lambda'e^{-t} - \lambda e^{-t} \end{aligned}$$
 Donc :

$$\begin{aligned} x_1 \text{ solution} &\iff x_1' + x_1 = e^{it} \\ &\iff \lambda'e^{-t} - \lambda e^{-t} + \lambda e^{-t} = e^{it} \\ &\iff \lambda'e^{-t} = e^{it} \\ &\iff \lambda' = e^{(1+i)t} \end{aligned}$$
 Donc : $\lambda = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}$ convient et une solution particulière est :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1+i}e^{it} \\ &= \frac{1-i}{2}e^{it} \\ &= \frac{\cos t + \sin t}{2} + i \frac{-\cos t + \sin t}{2} \end{aligned}$$
 - (d) Solutions particulières à :
 - $x' + x = \cos t$: $\mathcal{Re}(x_1) = \frac{\cos t + \sin t}{2}$
 - $x' + x = \sin t$: $\mathcal{Im}(x_1) = \frac{-\cos t + \sin t}{2}$
 - (e) Solution générale de (E) :

$$\begin{aligned} x &= Ce^{-t} + \frac{\cos t + \sin t}{2} + \frac{-\cos t + \sin t}{2} \text{ où } C \in \mathbb{R}. \\ x &= Ce^{-t} + \sin t \text{ où } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
 - (f) Résolution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} x(0) = 2 &\iff C + 0 = 2 \\ &\iff C = 2 \end{aligned}$$
 Donc la solution au problème de Cauchy est :

$$x = 2e^{-t} + \sin t$$
- Vous avez la méthode et une rédaction (trop) détaillée... pour la suite je vous donne les résultats.
2. (a) Solution générale de l'équation homogène associée (H) : $x' = 2tx$:
 $x_0 = Ce^{t^2}$ où $C \in \mathbb{R}$
 - (b) Solution particulière de (E_2) : (il faut le « voir » à la forme de l'équation)
 $x_1 = \operatorname{cht}$
 - (c) Solution générale de (E) :
 $x = Ce^{t^2} + \operatorname{cht}$ où $C \in \mathbb{R}$.
 3. (a) On normalise, c'est possible sur \mathbb{R}_+^* :
 $x' + \frac{t-1}{t}x = t$
 - (b) Solution générale de l'équation homogène associée (H) : $x' = -\frac{t-1}{t}x$:
 $x_0 = Cte^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$
 - (c) Solution particulière de (E_3) :
 $x_1 = t$
 - (d) Solution générale de (E) :
 $x = Cte^{-t} + t$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice Équation différentielle linéaire de premier ordre non homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$tx'(t) + x(t) = 0 (I = \mathbb{R})$$

$$2tx'(t) + x(t) = t^2 (I = \mathbb{R})$$

$$(1 + t^2)^2 x'(t) + 2tx(t) = te^{\frac{1}{1+t^2}}$$

Exercice Varions la constante...

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1. \quad x' + x = \frac{1}{1+e^t} \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$2. \quad (1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t) \text{ sur }]-1, +\infty[;$$

$$3. \quad x' - \frac{x}{t} = t^2 \text{ sur }]0, +\infty[;$$

$$4. \quad x' - 2tx = -(2t-1)e^t \text{ sur } \mathbb{R};$$

$$5. \quad x' - \frac{2}{t}x = t^2 \text{ sur }]0, +\infty[;$$

Exercice Raccordement des solutions- tous les cas possibles

Déterminer les solutions sur \mathbb{R} des équations différentielles suivantes :

$$1. \quad tx' - 2x = t^3;$$

$$2. \quad t^2 x' - x = 0;$$

$$3. \quad (1-t)x' - x = t;$$

$$4. \quad (1+t)x' - x = t^2 + 2t + 2$$

Systèmes différentiels linéaires

Exercice Diagonalisable

Résoudre le système suivant :

$$x'(t) = 5x(t) - 3y(t)$$

$$y'(t) = 6x(t) - 4y(t)$$

Exercice Triangulaire supérieur

Résoudre le système suivant :

$$x'(t) = x(t) + y(t)$$

$$y'(t) = y(t)$$

Exercice Champs magnétique

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

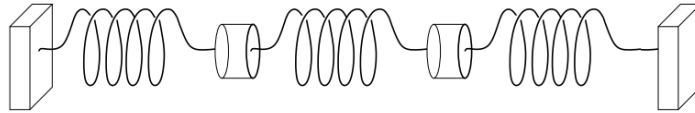
Exercice Diagonalisable

Donner le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$

Exercice Un peu de physique : étude du mouvement d'un système de masses reliées par des ressorts, glissant le long d'une surface horizontale

Pour simplifier, les ressorts ont même raideur k et les corps même masse m . Notons $x_i(t)$ l'écart par rapport à la position d'équilibre pour le i -ème corps.



Le principe fondamentale s'écrit :

$$mx_1''(t) = -2k.x_1(t) + k.x_2(t)$$

$$mx_2''(t) = k.x_1(t) - 2k.x_2(t)$$

1. Modéliser ce système linéaire sous forme matricielle ;
2. Résoudre le système ;
3. Les physiciens ont compris qu'en général, le mouvement est une superposition de mouvements fondamentaux appelés modes propres. Ce sont les mouvements où tous les corps oscillent à la même fréquence. Déterminer les fréquences propres ω du système.

Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

Exercice Équations du second ordre à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$;
2. $x'' + 9x = t + 1$, $x(0) = 0$;
3. $x'' - 2x' + x = \sin^2 t$;

Exercice Equation différentielle linéaire de second ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Sur \mathbb{R} :

$$E_1 : x'' + 2x' - 3x = 11e^{2t}$$

2. Sur $[0; \pi[$

$$E_2 : x'' + x = \cos t$$

3. Sur \mathbb{R}

$$E_3 : x'' - 2x' + x = \cosh t$$

4. Sur \mathbb{R} :

$$E_4 : x'' + x' + 2x = 6e^{2t}$$

5. Sur \mathbb{R} :

$$E_5 : x'' + 2x' + 5x = \cos t$$

6. Sur \mathbb{R} :

$$E_6 : x'' - x = \sinh t$$

Correction

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (a) Équation différentielle homogène associée : $(H) x'' + 2x' - 3x = 0$
 polynôme caractéristique associé : $x^2 + 2x - 3 = 0$.
 Discriminant : $\Delta = 16 > 0$
 Racines du polynôme : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.
 La solution générale de (H) est :

$$x_H = Ae^t + Be^{-3t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
- (b) Détermination une solution particulière à (E) , comme 2 n'est pas racine du polynôme caractéristique on la cherche sous la forme $x_1 = Ce^{2t}$ où $C \in \mathbb{R}$, qui est deux fois dérivables sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2Ce^{2t} \\ x_1'' &= 4Ce^{2t} \\ x_1 \text{ solution de } (E) &\iff x_1'' + 2x_1' - 3x_1 = 11e^{2x} \\ &\iff \dots \\ &\iff C = \frac{11}{5} \\ x_1 &= \frac{11}{5}e^{2t} \text{ solution de } (E). \end{aligned}$$
- (c) Solution générale de (E) :

$$x = Ae^t + Be^{-3t} + \frac{11}{5}e^{2t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
2. (a) Équation différentielle homogène associée : $(H) x'' + x = 0$
 \dots
 La solution générale de (H) est :

$$x_H = A \cos t + B \sin t, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
- (b) On détermine une solution particulière à $(\tilde{E})x'' + x = e^{it}$ et une solution particulière de (E) sera, par linéarité, la partie réelle de la solution trouvée.
 Attention, comme i est racine simple du polynôme caractéristique on la cherche sous la forme $x_1 = Cte^{it}$ avec $C \in \mathbb{R}$, qui est deux fois dérivables sur \mathbb{R} :
 \dots

$$x_1 = \frac{i}{2}te^{it} \text{ solution de } (\tilde{E}).$$
 \dots

$$x_2 = -\frac{t}{2} \sin t \text{ solution de } (E).$$
- (c) Solution générale de (E) :

$$x = A \cos t + B \sin t - \frac{t}{2} \sin t, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
3. (a) Équation différentielle homogène associée : $(H) x'' - 2x' + x = 0$
 \dots
 La solution générale de (H) est :

$$x_H = Ae^t + Bte^{-t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
- (b) On détermine une solution particulière x_1 à $(E_1)x'' - 2x' + x = e^t$, puis x_2 à $(E_2)x'' - 2x' + x = e^{-t}$ et une solution particulière de (E) sera, par superposition, $\frac{x_1 + x_2}{2}$.
 Attention, comme 1 est racine double du polynôme caractéristique on cherche x_1 sous la forme $x_1 = Ct^2e^t$ avec $C \in \mathbb{R}$, qui est deux fois dérivables sur \mathbb{R} :
 \dots

$$x_1 = \frac{1}{2}t^2e^t \text{ solution de } (E_1).$$
 \dots

$$x_2 = \frac{1}{4}e^{-t} \text{ solution de } (E_2).$$
 \dots

$$x_3 = \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{1}{8}e^{-t} \text{ solution de } (E_2).$$
- (c) Solution générale de (E) :

$$x = Ae^t + Bte^{-t} + \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{1}{8}e^{-t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice **Changement de variable**

On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0. (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
 - (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
 - (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
 - (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
 - (d) En déduire le "portrait robot" de y .
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice **Dissolution**

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5min plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?

Exercice **Séparation des variables**

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^t e^y = 0$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition.

Exercice **Développement en série entière**

Pour les équations différentielles suivantes :

- Chercher les solutions développables en séries entières
- Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode d'abaissement de l'ordre
- Résoudre l'équation sur \mathbb{R} :

$$t(t-1)x'' + 3tx' + x = 0.$$