Application linéaire

Comme souvent en mathématiques, ce sont plus les transformations qui sont intéressantes et pertinentes que les objets eux-mêmes.
Une application linéaire est un cas particulier de transformation. Dans le langage courant, un phénomène est dit linéaire si les effets sont proportionnels aux causes.
Plus précisément, un phénomène peut être décrit par une transformation$x \mapsto f(x)$, où x représente la ou les causes (par exemple une différence de potentiel) et $f(x)$ un effet auquel on s'intéresse (par exemple l'intensité d'un courant électrique). On dit que le phénomène est linéaire quand l'effet est proportionnel à la cause (exemple : l'intensité de courant est proportionnel à la différence de potentiel, en d'autres termes, si on double la différence de potentiel, on double l'intensité du courant résultant, si on somme de deux différence de potentiel, on somme l'intensité du courant résultant). Beaucoup de phénomènes en sciences ne sont pas linéaires. Dans de tels cas, de "petites causes" peuvent avoir de "grands effets".
D'un point de vue mathématiques, une transformation préservant la structure d'espace vectoriel est une application linéaire. Les matrices sont des tableaux de nombres qui servent à interpréter en termes calculatoires et donc opérationnels les applications linéaires dont les espaces vectoriels sont de dimensions finies.

Exemple **Taille d'un père et d'un fils**

La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0.5 mètres. Quel est la taille du fils ?
Soit la variable x représentant la taille du fils et la variable y représentant la taille du père.
Le couple (x, y) vérifie le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y & = 2,5 \\ -x + y & = 0,5 \end{cases}$$

L'idée est de considérer les membres de gauche des équations comme l'image d'une fonction :

$$\begin{cases} x + y & = 2,5 \\ -x + y & = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\quad u \quad} \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Les solutions du système sont l'ensemble des antécédents $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ de la fonction à deux variables
$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.
L'étude générale des fonctions à plusieurs variables est compliquée et est fait dans un cours d'analyse. Cependant, comme la fonction u est linéaire :

$$u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + u(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \quad \text{et} \quad u(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \lambda u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

on aura des outils pour démontrer que u est un isomorphisme. Ainsi il existe une unique vecteur antécédent au vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Le système admet une unique solution.

Notations :

— $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

— E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

I Applications linéaires

A Définition

Définition Application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire**, si elle préserve la structure d'espace vectoriel, c'est à dire si :

— **additivité** : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$;

— **homogénéité** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E : \quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$.

Exemple

— homothétie vectorielle de rapport λ : $\Phi_0 \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \lambda\vec{x} \end{array} \right.$

— Équation d'un plan : $\Phi_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+3z \end{array} \right.$,

— Intégration :$\Phi_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]),\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \end{array} \right.$,

— Dérivé de polynôme de degré au plus n : $\Phi_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$,

Définition-Proposition Modélisation d'une situation de proportionnalité

Deux quantités x et y réelles sont **proportionnelles** quand, en multipliant par une constante a, appelé **coefficient de proportionnalité**, une quantité, on obtient l'autre. La représentation fonctionnelle de cette relation est définie par

$$u : x \to ax =$$

où $y = u(x)$.
u est une fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

— additivité : Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$u(x_1+x_2) = a(x_1+x_2) = ax_1 + ax_2 = u(x_1) + u(x_2)$$

— homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

$$u(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda a x = \lambda u(x).$$

Exemple **Essence**

Le prix à la pompe est proportionnel du volume d'essence mis dans le réservoir.

Exemple **Différentielle**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. On a

$$\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\text{accroissement de la fonction}} = \overbrace{\mathrm{d}f_a(h)}^{\text{terme linéaire}} + \overbrace{h.\epsilon(h)}^{\text{petit terme correctif}}$$

où l'application $\mathrm{d}f_a$, appelé différentielle de f en a, est linéaire : $\mathrm{d}f_a(h) = f'(a).h$ avec $f'(a)$ le coefficient de proportionnalité.

Définition-Proposition Modélisation d'une situation de linéarité

Deux quantités $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont en relation **linéaires** quand chaque coefficient de Y s'exprime comme combinaison linéaire des coefficients de X, c'est à dire :

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots & \vdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$$

La représentation matricielle de cette relation est définie par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right. .$$

avec la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.
u est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

- additivité : Soit $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^p$.

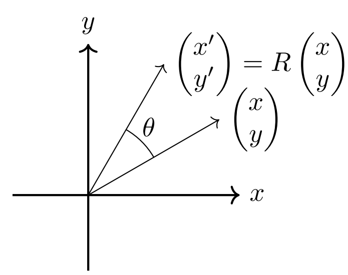
$$u(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = u(X_1) + u(X_2)$$

- homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^p$.

$$u(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda u(X).$$

Exemple **Transformation linéaire du plan**

La rotations, l'homothétie, la transvection et la symétrie axiale sont des transformations linéaires du plan.



Pour une rotation anti-horaire autour de l'origine, on a $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ et $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$ et sous la forme matricielle : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Définition Endomorphisme

- Une application linéaire dont l'espace de départ est le même que celui d'arrivée est un **endomorphisme**.
- Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Exemple

Φ_3 et R_θ sont des endomorphismes. Comme R_θ est bijectif, R_θ est un automorphisme.

Un isomorphisme permet de transporter les propriétés vectoriels entre les deux espaces vectoriels, par exemple

la dimension. Toute propriété “vectorielle” vraie pour un espace vectoriel donné sera vraie pour un espace vectoriel qui lui est isomorphe.
Par exemple on identifie fréquemment les p-uplets avec les matrices colonnes car l'application

$$\Phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{identification}} (x_1, x_2) = \vec{x}$.

Définition-Proposition Espace vectoriel des application linéaires et endomorphismes

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$; il s'agit d'un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions de E dans F muni des lois usuelles.
L'espace vectoriel des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$= $\mathcal{L}(E, E)$.

Démonstration

Tous les axiomes se vérifient aisément.

Définition composition d'application linéaire

La **loi de composition interne** $\circ$ est définie comme une composition de fonctions, c'est à dire si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\forall \vec{x} \in E : (v \circ u)(\vec{x}) = v(u(\vec{x}))$.
On a $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Exemple

L'application $P \mapsto XP'(X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Les applications $P \mapsto P'$, $P \mapsto P(X^2)$ et $P \mapsto XP$ sont linéaire, donc par composition $P \mapsto XP'(X^2)$ l'est aussi.

Définition Structure d'algèbre des endomorphismes

L'**élément neutre** de la composition dans $\mathcal{L}(E)$ est l'application identité, $Id_E : x \mapsto x$. L'endomorphisme u^{-1} est appelé l' **endomorphisme inverse** de u si $u^{-1}u = uu^{-1} = Id_E$. Dans ce cas, l'endomorphisme u est dite **inversible**. $\mathcal{L}(E)$ possède une structure d'algèbre non commutative. L'espace vectoriel des automorphismes de E se note $\mathcal{GL}(E)$. $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire**.

B Propriétés

Proposition 0 image de 0

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Alors $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$

Démonstration

$u(\overrightarrow{0_E}) \overbrace{=}^{\text{Elt neutre}} u(\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} = u(\overrightarrow{0_E}) + u(\overrightarrow{0_E})$. En ajoutant $-u(\overrightarrow{0_E})$ aux deux membres de l'égalité, on obtient $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.

Exemple

L'application $f(x, y) \mapsto (x+y, 1)$ n'est pas linéaire car $f(0, 0) = (0, 1)$. d'après la contraposée de la proposition précédente.

Proposition **Caractérisation de la linéarité**

$u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad u(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y}).$$

Démonstration

— $(\Longrightarrow)$ soit $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{y} \in E$

$$u(\lambda \vec{x} + \vec{y}) \overbrace{=}^{\text{additivité}} u(\lambda \vec{x}) + u(\vec{y}) \overbrace{=}^{\text{homogénéité}} \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y}).$$

— $(\Longleftarrow)$

  — additivité : soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On a :

$$u(\vec{x} + \vec{y}) = u(1\vec{x} + \vec{y}) = 1u(\vec{x}) + u(\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$$

  — homogénéité : soit $\vec{x} \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$u(\lambda \vec{x}) = u(\lambda \vec{x} + \vec{0}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{0}) \overbrace{=}^{u \text{ additive}} \lambda u(\vec{x}) + \vec{0} = \lambda u(\vec{x})$$

Proposition **Propriétés algébriques**

— **Associativité** :

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

— **Bilinéarité** :

$$(\lambda u + \mu v) \circ w = \lambda u \circ w + \mu v \circ w \text{ et } u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w.$$

Démonstration

La composition des fonctions est associative donc en particulier les fonctions linéaires aussi.
Les fonctions sont linéaires à gauche. En revanche, il faut l'hypothèse de linéarité pour la linéarité à droite.
En effet, soit $\vec{x} \in E$. On a :

$$u \circ (\lambda v + \mu w)(\vec{x}) = u(\lambda v(\vec{x}) + \mu w(\vec{x})) \overbrace{=}^{\text{linéarité de } u} = \lambda u(v(\vec{x})) + \mu u(w(\vec{x})).$$

Remarque

On omet le plus souvent le symbole $\circ$: $v \circ u = vu$.

C Caractérisation par l'image d'une base

Théorème **Caractérisation par l'image d'une base**

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les images d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Remarque

Pour déterminer une application quelconque, on n'a pas d'autre choix que de déterminer les images de chaque point $x \mapsto f(x)$. En revanche, une application linéaire est complètement déterminer par l'image d'une base. Par exemple, soit $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ une application linéaire avec les images de base canonique : $u(1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 1) = (1, -1)$. On a

$$u(x, y) = u(x(1, 0) + y(0, 1)) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} x.u(1, 0) + y.u(0, 1) = x.(1, 1) + y.u(1, -1) = (x + y, x - y).$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
Comme u est linéaire, on a :

$$u(\vec{x}) = u(\lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{e_p}) \tag{1}$$
$$u(\vec{x}) = \lambda_1.u(\overrightarrow{e_1}) + \dots + \lambda_p.u(\overrightarrow{e_p}) \tag{2}$$

Cela implique que l'application linéaire u est entièrement déterminée par les vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_p}))$.

Théorème **Géométrisation d'un espace vectoriel de dimension finie**

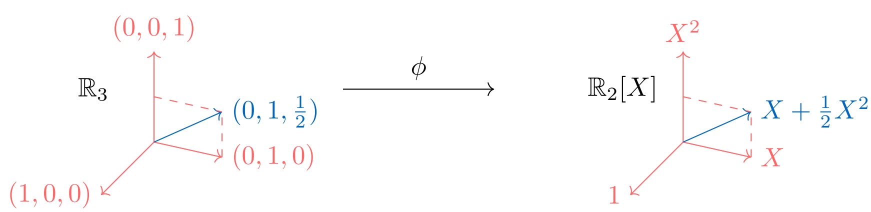
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de de dimension n. Il existe une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E.
Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
L'application linéaire ϕ de E dans $\mathbb{K}^n$ définie par $\phi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{f_i}$ est un isomorphisme.

Exemple **Géométrisation de $\mathbb{K}_2[X]$**

L'application linéaire $\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & a + bX + cX^2 \end{array} \right.$ est un isomorphisme qui "géométrise" $\mathbb{R}_2[X]$.
La coplanarité des vecteurs $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(0,1,\frac{1}{2})$ se traduit dans $\mathbb{R}_2[X]$ par celle des vecteurs X, X^2 et $X + \frac{1}{2}X^2$.



II Image et noyau

A Généralités

Définition **Image directe et image réciproque**

Soit $f : A \to B$. Soit A' une partie de A et B' une partie de B.
L'ensemble $\{f(x) : x \in A'\}$ est appelé **image directe** de A' par f et noté $f(A')$.
L'ensemble $\{x \in A : f(x) \in B'\}$ est appelé **image réciproque** de B' par f et noté $f^{-1}(B')$.

Exemple **Carré**

Soit $f : x \mapsto x^2$.
On a $f([-1,1]) = [0,1]$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Proposition **Morphisme d'espace vectoriel**

Soit E', F' deux sous-espace vectoriel de de E et F respectivement.

- $u(E')$ est un sous espace vectoriel de F,
- $u^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de E.

Démonstration

- — Non vide : Comme $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, $\overrightarrow{0_F} \in u(E')$.

  — Stabilité : Soit $\lambda \in \mathbb{K}, u(\vec{x}), u(\vec{x'}) \in u(E')$.

  On a $\lambda u(\vec{x}) + u(\vec{x'}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} u(\overbrace{\lambda\vec{x} + \vec{x'}}^{\in E'}) \in u(E')$.

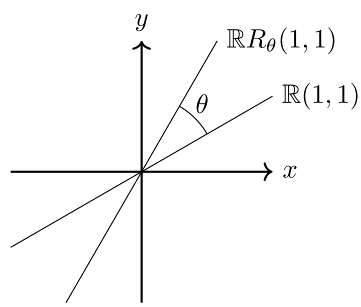
  Ainsi $u(E')$ est un sous espace vectoriel de F.
- — Non vide : comme $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F} \in F'$, $\overrightarrow{0_E} \in u^{-1}(F')$.

  — Stabilité : soit $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{x'} \in u^{-1}(F')$.

  On a $u(\lambda\vec{x} + \vec{x'}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \lambda \overbrace{u(\vec{x})}^{\in F'} + \overbrace{u(\vec{x'}}^{\in F'} \in F'$. Donc $\lambda\vec{x} + \vec{x'} \in u^{-1}(F')$.
  Ainsi $u^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de E.

Exemple

L'image de la droite vectoriel $\mathbb{R}(1,1)$ par R_θ est la droite vectoriel $\mathbb{R}R_\theta(1,1)$.



Définition Image

L'**image** de u est le sous espace vectoriel $u(E) = \{u(\vec{x}) : \vec{x} \in E\}$; on le note $\operatorname{Im} u$.
Par définition de la surjectivité, $\operatorname{Im} u = E$ si et seulement u est surjective.

Définition Rang

Le **rang** d'une application linéaire u est la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} u$; on le note $\operatorname{rg} u$.

Définition Noyau

Le **noyau** de u est le le sous espace vectoriel $u^{-1}\{\{\overrightarrow{0_F}\}\} = \{x \in E : u(\vec{x} = \overrightarrow{0_F}\}$; on le note $\operatorname{Ker} u$.

Proposition Caractérisation de l'injectivité par le noyau

u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration

- Supposons que u est injective.
  - $\operatorname{Ker} u \supset \{\overrightarrow{0_E}\}$: comme $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient $\overrightarrow{0_E}$
  - $\operatorname{Ker} u \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$: soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$. On a $u(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$. Comme u est linéaire, $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi $u(\vec{x}) = u(\overrightarrow{0_E})$. Comme u est injective, $\vec{x} = \overrightarrow{0_E}$.

  Du fait de la double inclusion $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
- Supposons que $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
  soit $\vec{x}, \vec{x'} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = u(\vec{x'})$. Alors $u(\vec{x}) - u(\vec{x'}) = \overrightarrow{0_F}$ et par linéarité $u(\vec{x} - \vec{x'}) = \overrightarrow{0_F}$. Donc

$\vec{x} - \vec{x'} \in \operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$. Ainsi $\vec{x} - \vec{x'} = \overrightarrow{0_E}$. D'où $\vec{x} = \vec{x'}$.

Pour démontrer une égalité entre deux ensembles, il faut prouver la double inclusion. En tant que sous-espace vectoriel de E, $\operatorname{Ker} u$ contient $\vec{0}_E$, donc $\{\vec{0}_E\} \subset \operatorname{Ker} u$. Ainsi démontrer que $\operatorname{Ker} u = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et ainsi que u est injective, il suffit en réalité de montrer l'**inclusion** : $\{\overrightarrow{0_E}\} \subset \operatorname{Ker} u$.

Exemple

Soit $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$.
On a $u(x,y,z) = x(1,1) + y(1,-1) + z(0,1)$. Donc $\operatorname{Im} u$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $((1,1),(1,-1),(0,1))$ d'où $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$. Ainsi u est surjective et $\operatorname{rg} u = 2$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = & 0 \\ x-y = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = x(1,1,-2).$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(1,1,2)$. Ainsi u n'est pas injective.

Exemple **Dérivée polynomiale**

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\Phi_3(P) = P' = a_1 + a_2.2X + \cdots + a_n.nX^{n-1}$. Donc $\operatorname{Im} \Phi_3$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(1, X, 2X, \ldots, nX^{n-1})$, soit $\operatorname{Im} \Phi_3 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Φ_3 n'est pas surjective $\operatorname{rg} u = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$.

$$P \in \operatorname{Ker} \Phi_3 \Leftrightarrow \Phi_3(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : P = a.$$

Donc $\operatorname{Ker} \Phi_3 = \mathbb{R}_0[X]$. Φ_3 n'est pas injective.

Proposition **Permutation de Vect et de l'image**

Soit $(\vec{x_i})_{i \leq i \leq n}$ une famille de E .
Alors

$$u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) = \operatorname{Vect}\,(u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}\,.$$

Démonstration

- $u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) \subset \operatorname{Vect}\,(u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}$:
  Soit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i} \in \operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})$.
  Comme $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{x_i})$, $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i})$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $(u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}$ donc appartient à $\operatorname{Vect}\,(u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}$
- $u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) \supset \operatorname{Vect}\,(u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}$: Raisonnement similaire.

Du fait de la double inclusion, on a bien $u(\operatorname{Vect}((\vec{x_i})_{i \leq i \leq n})) = \operatorname{Vect}\,(u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}$.

Corollaire **Image d'une base**

Soit $(\vec{e_i})_{i \leq i \leq n}$ une base de E .
Alors

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}((u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n}).$$

Démonstration

Comme $\operatorname{Im} u = u(E)$ et $E = \operatorname{Vect}(\vec{e_i})_{i \leq i \leq n}$, d'après la proposition précédente, on obtient $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}((u(\vec{x_i}))_{i \leq i \leq n})$.

Proposition **Linéarité de l'inverse**

Si u est un isomorphisme, alors u^{-1} est également linéaire.

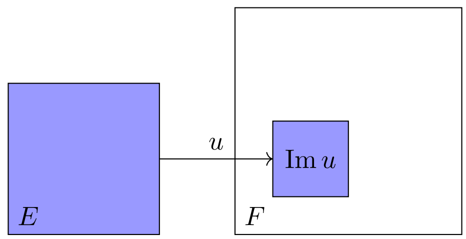
Démonstration

Soit $\vec{x}, \vec{x'} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

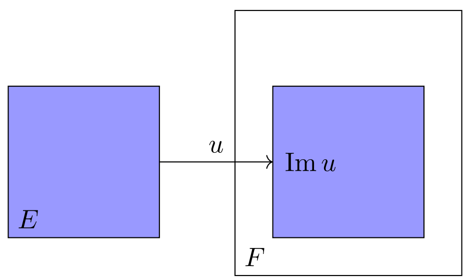
On a $u(u^{-1}(\lambda\vec{x} + \vec{x'})) = \lambda\vec{x} + \vec{x'}$. De plus, $u(\lambda u^{-1}(\vec{x}) + u^{-1}(\vec{x'})) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \lambda u(u^{-1}(\vec{x})) + u(u^{-1}(\vec{x'})) = \lambda\vec{x} + \vec{x'}$..
Ainsi $u(u^{-1}(\lambda\vec{x} + \vec{x'})) = u(\lambda u^{-1}(\vec{x}) + u^{-1}(\vec{x'}))$. Comme u est injective, $u^{-1}(\lambda\vec{x} + \vec{x'}) = \lambda u^{-1}(\vec{x}) + u^{-1}(\vec{x'})$.
u^{-1} est donc linéaire.

B Effet d'une applications linéaire sur la dimension

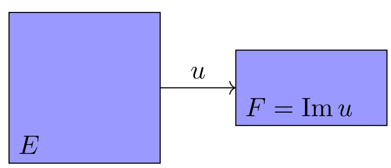
Une application linéaire, $u : E \to F$ ne peut que réduire la dimension de son ensemble de définition.



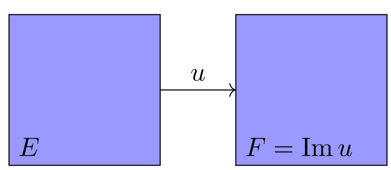
L'application est injective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim E$.



L'application est surjective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim F$.



L'application est un isomorphisme si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim F = \dim E$.



Proposition **Inégalité et égalité sur le rang**

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

— Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{rg} u \leq \dim F$, avec égalité si et seulement si u est surjective.

— Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{rg} u \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si u est injective.

Démonstration

— Comme $\operatorname{Im} u \subset F$, on a $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leq \dim F$. Pour l'égalité, on a u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$ si et seulement si $\dim \operatorname{Im} u \leq \dim F$.

— Soit n la dimension de E et $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E. Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n}))$, $\dim \operatorname{Im} u \leq n$. Pour l'égalité, on a $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ si et seulement si $u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n})$ est une famille libre de F.

  — Supposons que $(u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n}))$ est une famille libre de F.

Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e_i} \in \operatorname{Ker} u$.

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \overrightarrow{0_F} \\ u(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e_i}) &= \overrightarrow{0_F} \\ \sum_{i=1}^n x_i u(\vec{e_i}) &= \overrightarrow{0_F} && \text{car u linéaire.} \\ \forall i \in [\![1,n]\!] : \quad x_i &= 0 && \text{car } (u(\vec{e_1}),\dots,u(\vec{e_n})) \text{ libre} \\ \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e_i} &= \overrightarrow{0_E} \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} u \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$. Donc u est injective.

— Supposons que u est injective.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{e_i})) &= \overrightarrow{0_F} \\ u(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e_i})) &= \overrightarrow{0_F} && \text{car u linéaire} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e_i} &= \overrightarrow{0_E} && \text{car u } \operatorname{Ker} u = \{\vec{0_E}\} \\ \forall i \in [\![1,n]\!] : \quad \lambda_i &= 0 && \text{car } (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}) \text{ libre} \end{aligned}$$

Donc $(u(\overrightarrow{e_1}),\dots,u(\overrightarrow{e_n}))$ est une famille libre de F.

Proposition Cas $\dim E = \dim F$

Soit $u : E \to F$ une application linéaire tel que $\dim E = \dim F$.

$$u \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow u \text{ est injective} \Leftrightarrow u \text{ est surjective.}$$

Soit $u : E \to E$ une application linéaire tel que $\dim E$ est finie.

$$\begin{array}{ccccc} u \text{ est un isomorphisme} & \Leftrightarrow & u \text{ est injective} & \Leftrightarrow & u \text{ est surjective} \\ u \in \mathcal{GL}(E) & \Leftrightarrow & u \text{ est inversible à gauche} & \Leftrightarrow & u \text{ est inversible à droite} \\ \exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E & \Leftrightarrow & \exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \mathrm{Id}_E & \Leftrightarrow & \exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \mathrm{Id}_E \end{array}$$

Démonstration

— Par hypothèse $\dim E = \dim F$. On a u est injective si et seulement si : $\operatorname{rg} u = \dim E$ si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$ si et seulement si u est surjective.

— u est inversible à gauche si et seulement si $\exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si u est injective si et seulement si u est surjective si et seulement si $\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si u est inversible à droite.

Exemple

Démontrer que l'application linéaire $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ est un automorphisme.

Démonstration

Comme u est un endomorphisme, il suffit de démontrer qu'elle est injective.

$$(x,y) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{(0,0)\}$.

Exemple

Démontrer que l'application linéaire $u \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P-P \end{array} \right.$ est un automorphisme.

Démonstration

Comme u est un endomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective.

$$P \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow P - P' = 0 \Leftrightarrow P = P'$$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ car $\deg(P) = \deg(P')$ si et seulement $P = 0$.

C Théorème du rang : $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$

le théorème du rang lie le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau.

Lemme **Factorisation**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. Si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$,
Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$, c'est à dire que l'application linéaire

$$u|_S \left| \begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ \vec{x} & \longmapsto & u(\vec{x}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Démonstration

- Injective : Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u|_S$ donc $x \in \operatorname{Ker} u$ et $x \in S$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et S sont supplémentaires, $\operatorname{Ker} u \cap S = \{\overrightarrow{0_E}\}$. D'où $\vec{x} = \overrightarrow{0_E}$ et $\operatorname{Ker} u|_S = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
- Surjective : Soit $\vec{y} \in \operatorname{Im} u$ ainsi il existe $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = \vec{y}$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et S sont supplémentaires, il existe $\vec{k} \in \operatorname{Ker} u$ et $\vec{s} \in S$ tel que $\vec{x} = \vec{k} + \vec{s}$. On a :

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \vec{y} \\ u(\vec{k}+\vec{s}) &= \vec{y} \\ u(\vec{k}) + u(\vec{s}) &= \vec{y} && \text{car u linéaire} \\ u(\vec{s}) &= \vec{y} \quad \text{car} && \vec{k} \quad \in \operatorname{Ker} u. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{s}$ est un antécédent de $\vec{y}$ par l'application $u|_S$. Donc $u|_S$ est surjective.

Théorème **Théorème du rang**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u.$$

Démonstration

Comme E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} u$ possède un supplémentaire S dans E. D'après le lemme de factorisation, comme $u|_S$ est un isomorphisme, $\dim S = \dim \operatorname{Im} u$. Comme S et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires dans E, on a $\dim S + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$. Finalement, on a $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$.

III Application au système d'équations linéaires

Théorème **Solutions d'une équation linéaire $u(\vec{x}) = \vec{y_0}$**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u : E \to F$ une application linéaire et $\vec{y_0} \in F$.
L'ensemble des solutions de l'équation $u(\vec{x}) = \vec{y_0}$ est

— **vide** si $\vec{y_0} \notin \operatorname{Im} u$,

— **un espace affine** si $\vec{y_0} \in \operatorname{Im} u$, c'est à dire de la forme

$$\overbrace{\vec{x_0}}^{\text{Solution particulière}} + \overbrace{\operatorname{Ker} u}^{\text{Solutions homogènes}} = \{\vec{x_0} + \vec{x} : \vec{x} \in \operatorname{Ker} u\}.$$

Démonstration

— Soit $y \notin \operatorname{Im} u$. Il n'existe donc pas d'antécédent à la fonction u. Donc l'ensemble des solutions est vide.

— Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe au moins un antécédent à la fonction u que l'on $\vec{x_0}$.

$\vec{x}$ est solution $\Leftrightarrow u(\vec{x}) = \vec{y_0} \Leftrightarrow u(\vec{x}) = u(\vec{x_0}) \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{linéaire}} u(\vec{x} - \vec{x_0}) = \overrightarrow{0_F} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x_0} \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{x_0} + \operatorname{Ker} u$.

Exemple **Taille d'un père et d'un fils**

Déterminer la structure des solutions de

$$\begin{cases} x + y & = 2,5 \\ -x + y & = 0,5 \end{cases}.$$

Démonstration

On pose $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, -x + y) \end{array} \right.$. On cherche ainsi les solutions de l'équation : $u(x, y) = (2,50,5)$.

u est un endomorphisme. Comme $\operatorname{Ker} u = \{(0,0)\}$ car $\begin{cases} x + y & = 0 \\ -x + y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$, u est injective donc bijective.
Comme $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$, il existe une solution et comme $\operatorname{Ker} u = \{(0,0)\}$, cette solution est unique.