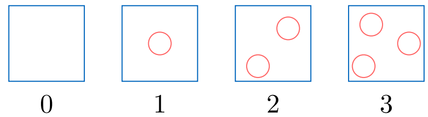
Structures algébriques

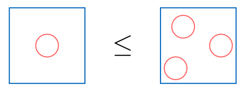
L'enfant apprend d'abord :

— à **compter** le nombre d'objets en itérant l'ajout d'une unité à partir de 0 c'est à dire en construisant l'ensemble $\mathbb{N}$ avec l'opération "suivant"



Désignation à l'aide d'un nombre de la quantité de cercles dans le carré à partir de 0

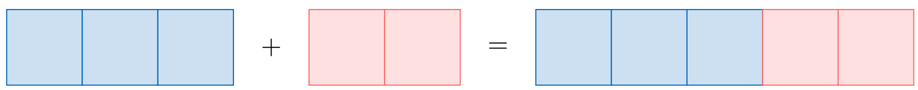
— à **ordonner** en comparant des quantités c'est à munir d'une structure d'ordre à l'ensemble $\mathbb{N}$



Comparaison de deux quantités de cercles

Puis il commence :

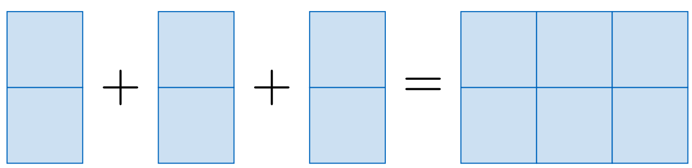
— à **additionner** les nombres en opérant des regroupements.



$$3 \quad + \quad 2 \quad = \quad 5$$

Regroupement de cubes pour additionner

— à **multiplier** les nombres en opérant une addition itérée.

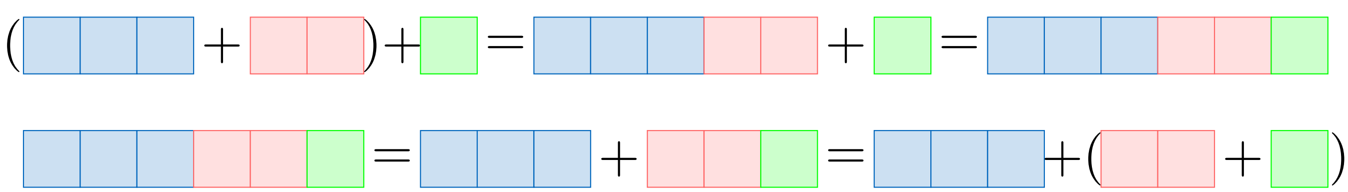


$$\overbrace{2+2+2}^{\text{3 fois}} = 3 \times 2$$

Regroupement itéré de cubes pour multiplier

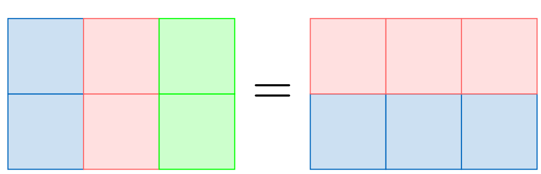
Ensuite il s'intéresse aux propriétés des opérations :

— **associativité** de l'addition $(a+b)+c = a+(b+c)$ et de la multiplication $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$



Démonstration géométrique élémentaire de l'associativité de l'addition

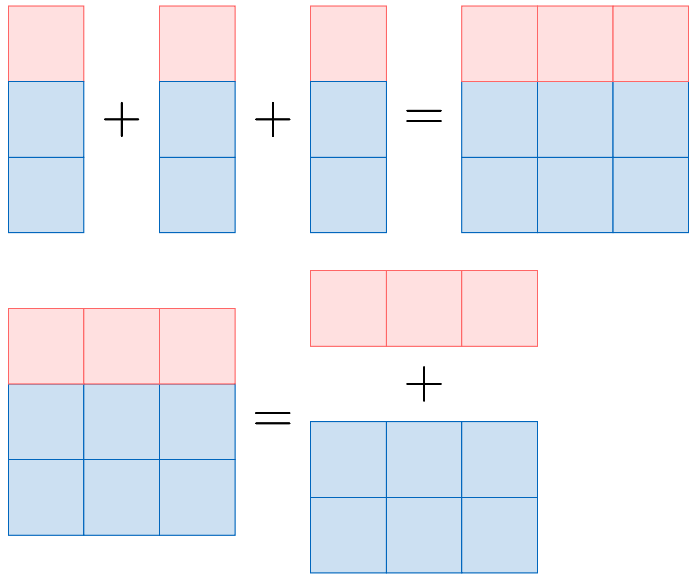
— **commutativité** de l'addition $a+b = b+a$ et de la multiplication $a \times b = b \times a$



$$\overbrace{a}^{\text{Nombre de colonnes}} \times \overbrace{b}^{\text{Nombre de cubes par colonne}} = \overbrace{b}^{\text{Nombre de lignes}} \times \overbrace{a}^{\text{Nombre de cubes par ligne}}$$

Démonstration géométrique élémentaire de la commutativité de la multiplication

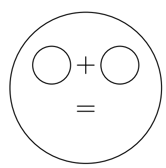
— **distributivité** de la multiplication sur l'addition $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$



Démonstration géométrique élémentaire de la distributivité

$$\overbrace{(b+c)+\cdots+(b+c)}^{a \text{ fois}} \quad = \quad (\overbrace{b+\cdots+b}^{a \text{ fois}}) + (\overbrace{c+\cdots+c}^{a \text{ fois}})$$

Enfin il découvre que 0 est un nombre particulier 0 de l'addition, appelé l'**élément neutre**, car additionner 0 à un nombre donne ce même nombre



Cas particulier bien connu 0+0=0

A partir de 0, il construit l'ensemble des entiers relatifs :

$$\begin{array}{rrr} 2+(2-4) = & (2+2)-4 = & 0 \\ 2+(1-3) = & (2+1)-3 = & 0 \\ 2+(0-2) = & (2+0)-2 = & 0 \end{array}$$

Ainsi "en supprimant le zéro" dans le membre de gauche, l'égalité devient

$$2 + (-2) = 0.$$

le nombre négatif -2 "naît" et il l'**opposé** de 2 .
Dans le supérieur, nous rencontrons de nombreux ensembles : les entiers naturels, les entiers relatifs, les fractions, les réels, les complexes, les polynômes, les vecteurs, les matrices, les fonctions continues etc. L'objectif de ce cours est de suivre le cheminement de l'enfant en généralisant à un ensemble A quelconque et non plus l'ensemble des entiers. Comme un enfant aimant additionner et multiplier, un Mathématicien souhaite structurer un ensemble avec des opérations appelées **lois de composition** qu'il appelle une **structure algébrique**. L'addition et la multiplication obéissent à plusieurs propriétés algébriques : l'associativité et la commutativité. De nombreuses structures algébriques étudiées obéissent à certaines, mais pas nécessairement à toutes, de ces lois. 0 est un élément particulier de l'addition appelé l'**élément neutre** c'est à dire il laissent tous les autres éléments inchangés lorsqu'il est composé avec eux. On se posera la question d'existence et d'unicité de l'élément neutre. La notion d'**élément symétrique** généralise le concept d'opposé en rapport avec l'addition.

I Lois de compositions

Définition Loi de composition interne

Soit A un ensemble.
Une **loi de composition interne**, $\triangle$, est une application qui, à deux éléments de A, associe un élément de A :

$$\triangle \left| \begin{array}{rcl} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array} \right. .$$

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, l'addition définie par $+ \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$, la soustraction $- \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array} \right.$ et la multiplication $- \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \right.$ sont des lois de composition internes.
- Sur $\mathbb{N}$, la soustraction n'est pas une loi interne, mais elle l'est dans $\mathbb{Z}$.
- Sur $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation définie par $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (a,b) & \longmapsto & a^b \end{array} \right.$, le PGCD ou le PPCM sont des lois internes.
- Soit X un ensemble. Sur l'ensemble des parties de X, $\mathcal{P}(X)$, l'union définie par $\cup \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A,B) & \longmapsto & A \cup B \end{array} \right.$ et l'intersection $\cap \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A,B) & \longmapsto & A \cap B \end{array} \right.$ sont des lois de composition internes.

Définition Loi de composition externe

Soit X et A deux ensembles.
Une **loi de composition externe**, ., est une application qui, à un élément de X et un élément de A, associe un élément de A :

$$. \left| \begin{array}{rcl} X \times A & \longrightarrow & A \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array} \right.$$

Exemple $(\mathbb{R}^2, .)$

La multiplication par un scalaire sur l'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$. \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda,(x_1,x_2)) & \longmapsto & (\lambda.x_1,\lambda.x_2) \end{array} \right. .$$

est une loi de composition externe.

II Propriétés éventuelles des lois de composition interne

Définition Commutativité et associativité

$\triangle$ est

1. **associative** : si $\in (x,y,z) \in A^3$, $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$. On ne considèrera que des loi associatives.
2. **commutative** : si $\forall (x,y) \in A^2$, $x \triangle y = y \triangle x$.

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives. Ce n'est pas le cas de la soustraction car $1-0 \neq 0-1$ et $1-(2-3) = 2 \neq -4 = (1-2)-3$.
- Sur $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation n'est pas commutative $1^2 = 1 \neq 2 = 2^1$ et non plus associative $\left(2^2\right)^3 = 64 \neq$

$256 = 2^{(2^3)}$.

— Sur $\mathcal{P}(X)$, l'union et l'intersection sont commutatives et associatives.

Remarque

Quand la loi est associative, la **notation itérée** est

— en cas d'une loi de multiplication : $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}^* : x^n = \overbrace{x \times \cdots \times x}^{\text{n fois}}$

— en cas d'une loi d'addition : $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}^* : nx = \overbrace{x + \cdots + x}^{\text{n fois}}$.

Définition **Distributivité d'une loi sur une autre**

Soit A un ensemble et $\triangle$ et $\square$ deux lois de composition internes sur A.
On dit que $\triangle$ est **distributive** sur $\square$ si :

$$\forall x, y, z \in A : \quad x \triangle (y \square z) = (x \triangle y) \square (x \triangle z) \text{ et } (y \square z) \triangle x = (y \triangle x) \square (z \triangle x).$$

Exemple

— Sur $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive sur l'addition mais l'addition n'est pas distributive sur la multiplication car $1 + (2 \times 3) = 7 \neq 5 = 1 \times 2 + 1 \times 3$.

— Sur $\mathcal{P}(X)$, l'union et l'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre.

III Élément neutre et symétrique

Définition **Elément neutre**

$\triangle$ admet **un élément neutre** si il existe $e \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \triangle e = e \triangle x = x$.

Proposition **Unicité de l'élément neutre**

Si $\triangle$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe deux éléments neutres e et e'.
On a $e \triangle e' \overbrace{=}^{e \text{ elt neutre}} e'$ et $e \triangle e' \overbrace{=}^{e' \text{ elt neutre}} e$. Ainsi $e = e'$.

Exemple

— Sur $\mathbb{R}$, 1 est l'élément neutre de la multiplication et 0 de l'addition.

— Sur $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble vide $\emptyset$ est l'élément neutre de l'union et X de l'intersection.

Définition **Élément symétrique et loi symétrique**

Soit $x \in A$ et la loi $\triangle$ admettant un élément neutre e .
x admet un **symétrique** pour $\triangle$ si il existe $x' \in A$ tel que $x \triangle x' = x' \triangle x = e$. Dans ce cas, x' est appelé le **symétrique** de x.

Proposition **Unicité de l'élément symétrique**

Soit $\triangle$ une loi associative et admettant un élément neutre e.
Si x admet un symétrique x', alors celui-ci est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe deux éléments symétriques x' et x''.

On a $(x' \triangle x) \triangle x'' = e \triangle x'' = x''$ et $(x' \triangle x) \triangle x'' \overbrace{=}^{\triangle \text{ associative}} x' \triangle (x \triangle x'') = x' \triangle e = x'$. Ainsi $x' = x''$.

Vocabulaire

Le symétrique est appelé :
- **opposé** en cas d'une loi additive $+$
- **inverse** en cas d'une loi multiplicative $\times$

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, l'inverse de la multiplication d'un réel non nul x est $\frac{1}{x}$ et l'opposé de l'addition d'un réel x est $-x$.

Définition Loi symétrique

La loi $\triangle$ est **symétrique** si la loi est associative et si tout élément de A admet un symétrique.

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, la multiplication n'est pas inversible car 0 n'a pas d'inverse. En revanche sur $\mathbb{R}^*$, la multiplication est inversible.

IV Parties stables

Définition Partie stable

Soit B une partie non vide de A.
B est **stable** pour $\triangle$ si
$$\forall x, y \in B : \quad x \triangle y \in B.$$

Exemple

- Sur $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ et les nombres pairs sont stables pour l'addition.
- Sur $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 est stable pour la multiplication car le produit de deux nombres complexes de module 1 est un nombre complexe de module 1.

Définition Loi induite

Soit $\triangle$ une loi sur A et B une partie de A stable pour $\triangle$.
La **loi induite** $\tilde{\triangle}$ est définie par :
$$\tilde{\triangle}\left|\begin{array}{ccc} B \times B & \longrightarrow & B \\ (x, y) & \longmapsto & x \triangle y \end{array}\right. .$$

Pour alléger les notations, on identifie $\tilde{\triangle}$ à $\triangle$.

Exemple

On munit l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 avec la loi induite $*$ sur $\mathbb{C}$.