Lien entre espaces vectoriels, matrices et applications linéaires

Ce chapitre est l'aboutissement de toutes les notions d'algèbre linéaire vues jusqu'ici : espaces vectoriels, matrices et applications linéaires. Nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires est **équivalente** à l'étude des matrices. On choisira le plus approprié en fonction du problème : matriciel si des calculs doivent être effectués (par exemple pour des applications numériques en deep-learning ou en rendu graphique pour les jeux vidéos) ou applications linéaires rendant les démonstrations plus "élégantes" et plus générales car parfois vrai aussi en dimension infinie.
Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

I Lien entre les vecteurs et les matrices

A Passage vecteurs↔matrices

Définition **Matrice d'un vecteur**

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
On sait que tout vecteur $\vec{x} \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \dots + x_p\overrightarrow{e_p}$ où $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$.
On appelle **matrice du vecteur** $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Exemple **Polynôme**

Déterminer la matrice du vecteur $P = 1 - X^2$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Correction On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple **Polynôme d'interpolation de Lagrange**

Déterminer la matrice du vecteur $P = 1 - X^2$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Correction On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple **Polynômes d'interpolation de Lagrange**

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $\mathcal{L} = (L_0, , L_n)$ la base (de $\mathbb{K}_n[X]$) des polynômes d'interpolation de Lagrange attachée à ces valeurs, c'est-à-dire, $L_i(a_j) \begin{cases} 1 & \text{si} i = j \\ 0 & \text{si} i \neq j \end{cases}.$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{L}}(P)$ avec $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
Correction Comme$P = P(a_0)L_0 + \cdots + P(a_n)Ln$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{L}}(P) = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

Définition **Matrice d'une famille de vecteurs**

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ une famille de vecteurs de E tel que $\overrightarrow{x_i} = a_{i1}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{ip}\overrightarrow{e_p}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
On appelle **matrice de la famille de vecteurs** $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple **Polynôme**

Déterminer la matrice de la famille $\mathcal{F} = ((X+1)^i)_{0 \leq i \leq n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Correction On a $P_i = (X+1)^i = \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} X^k$ d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Définition **Famille de vecteurs colonnes d'une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes.
On appelle **famille des vecteurs colonnes** de A la famille $(C_1, \ldots, C_p)$.

Exemple **Polynôme**

Déterminer le famille des vecteurs colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Correction La famille est $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix})$.

Théorème **Colonnes d'un produit matriciel**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$.

Alors

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1C_1 + \cdots + x_pC_p$$

Démonstration

On ajoute une seconde partie à la démonstration sur la caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
Soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.
Il existe une famille $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] : u(\overrightarrow{e_j}) = a_{1j}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{nj}\overrightarrow{f_n}.$$

Ainsi, les coefficient $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ caractérise entièrement l'application linéaire u d'où l'isomorphisme.

II Lien entre les matrices et les applications linéaires

A Définitions des matrices d'application linéaires

Définition **Matrice d'une application linéaire**

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.
Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, le vecteur $u(\overrightarrow{e_j})$ se décompose dans la base $\mathcal{B}'$:

$$u(\overrightarrow{e_j}) = a_{1j}.\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{nj}.\overrightarrow{f_n}.$$

On appelle **matrice de l'application linéaire** u dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\mathcal{B})) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & u(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{f_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_n} \end{array}.$$

Les autres notations sont $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(u)$.
Dans le cas d'un endomorphisme, $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on la note $[u]_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple **Dérivée polynomial**

Déterminer la matrice de l'endomorphisme $\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction Comme $\Phi_3(X^i) = iX^{i-1}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}.$$

B Lien entre les opérations

Théorème Image d'une application linéaire et image d'une matrice

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\vec{x}$ un vecteur de E.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}).$$

ou si on pose $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\vec{x}))$, $\quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u(\vec{x}))$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$, on a :

$$Y = AX.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$de F.
Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ les coefficients de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u)$, c'est à dire $u(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^n a_{ij}.\overrightarrow{f_i}$, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.
Soit $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p} \in E$ et
On a :

$$u(\vec{x}) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} \sum_{j=1}^{p} x_j u(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{f_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right) \overrightarrow{f_i},$$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p x_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p x_j a_{nj} \end{pmatrix}$.

Aussi on a :

$$\begin{matrix} & & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \end{matrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p x_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p x_j a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Finalement on obtient bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$.

Exemple **Dérivée polynomial**

Soit $P = 1 - X^2$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$. D'où

$$[\Phi(P)]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'où le résultat escompté $\Phi(P) = P' = -2X$.

Théorème Produit matriciel et composition d'applications linéaires

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie munis des bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Soit $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications linéaires.
Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u).$$

Démonstration

Soit $\vec{x} \in E$. On a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(v \circ u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(v \circ u(\vec{x}))$$
et
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(v \circ u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(v(u(\vec{x}))) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$$
Ainsi les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(v \circ u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(u)$ sont égales.

Définition Application linéaire d'une matrice

Inversement, si l'on se donne une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, on peut définir une application linéaire, dite **canoniquement associée à M**, par
$$u_M \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array} \right. .$$
Si l'on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on vérifie que
$$[u_M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M.$$

Exemple **Matrice de rotation**

La matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est canoniquement associée à l'application linéaire rotation
$$R_\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right. .$$

En résumé, soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ bases de E et F respectivement, nous avons :

Vectoriel		Matriciel
$\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + \cdots + x_p.\vec{e}_p \in E$	$\longrightarrow$	$X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$
$u \in \mathcal{L}(E,F)$	$\longrightarrow$	$A = [u]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\vec{e_1}) & \cdots & u(\vec{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{f_1} \\ \vdots \\ \vec{f_n} \end{array}$
$\vec{y} = y_1.\vec{f}_1 + \cdots + y_n.\vec{f}_n = u(\vec{x})$	$\longrightarrow$	$Y = [\vec{y}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \times X$
$u \circ v$ avec $u, v \in \mathcal{L}(E)$	$\longrightarrow$	$[u \circ v]_{\mathcal{B}} = A \times B$ avec $A = [u]_{\mathcal{B}}$ et $B = [v]_{\mathcal{B}}$
$u_M \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array} \right.$	$\longleftarrow$	$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

III Dualité entre la représentation matricielle et l'application linéaire

Théorème Caractérisation par l'image d'une base

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les images d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Remarque

Pour déterminer une application quelconque, on n'a pas d'autre choix que de déterminer les images de chaque point $x \mapsto f(x)$. En revanche, une application linéaire est complètement déterminer par l'image d'une base. Par exemple, soit $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ une application linéaire avec les images de base canonique : $u(1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 1) = (1, -1)$. On a

$$u(x, y) = u(x(1, 0) + y(0, 1)) \overbrace{=}^{\text{linéarité}} x.u(1, 0) + y.u(0, 1) = x.(1, 1) + y.u(1, -1) = (x + y, x - y).$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.
Comme u est linéaire, on a :

$$u(\vec{x}) = u(\lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_p.\overrightarrow{e_p}) \tag{1}$$
$$u(\vec{x}) = \lambda_1.u(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + \lambda_p.u(\overrightarrow{e_p}) \tag{2}$$

Cela implique que l'application linéaire u est entièrement déterminée par les vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}), \dots, u(\overrightarrow{e_p}))$.

Théorème Dualité

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
L'application

$$\Phi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Démonstration

On ajoute une seconde partie à la démonstration sur la caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
Soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.
Il existe une famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] : u(\overrightarrow{e_j}) = a_{1j}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{nj}\overrightarrow{f_n}.$$

Ainsi, les coefficient $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ caractérise entièrement l'application linéaire u d'où l'isomorphisme.

Corollaire Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration

Comme l'application Φ est un isomorphisme, la dimension de l'espace vectoriel de départ est égale à celle d'arrivé (voir la section image et noyau). Donc on a

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) = nq = \dim(F) \dim(E).$$

Proposition Inversibilité à gauche et à droite d'une matrice carré

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ alors A et B sont toutes deux inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. D'où $u_{AB} = u_{I_n}$. Comme $u_{AB}(X) = ABX = Au_B(X) = u_A(u_B(X))$, on a $u_{AB} = u_A \circ u_B$. Ainsi on obtient $u_A \circ u_B = u_{I_n}$ donc que u_A est inversible à droite d'inverse u_B. Du fait de la dimension finie, u_A est inversible d'inverse u_B. Donc A et B sont toutes deux inversibles et inverses l'une de l'autre.

Proposition Dualité de l'inversibilité

Soit u un endomorphisme.

$$u \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow [u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Soit M une matrice carré.

$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow u_M \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n).$$

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{GL}(E)$. Donc il existe $v \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$ et $v \circ v = Id_E$. D'où
Comme l'application Φ est un isomorphisme d'anneau,

Définition Rang

Le **rang** d'une application linéaire u est la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} u$.
Le **rang** d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.

Proposition

Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Proposition Dualité

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}[u]_{\mathcal{B}} = \{0\}$.

Définition Noyau et image

- L'**image** de M est le sous espace vectoriel $u_M(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \{MX : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$; on le note $\operatorname{Im} M$.
- Le **noyau** de M est le le sous espace vectoriel $u_M^{-1}\{\{0\}\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : MX = 0\}$; on le note $\operatorname{Ker} M$.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ On a $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{Im} M$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ d'où $\operatorname{Im} M = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = & 0 \\ x - y = & 0 \end{cases} \overbrace{\Leftrightarrow}^{x=t} \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{Ker} M = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme M est la matrice associée à l'application linéaire de l'exemple **??**, on retrouve les mêmes résultats en identifiant les n-uplets aux matrices colonnes.

Proposition Image d'une base

L'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes.

Théorème Théorème du rang version matricielle

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Alors
$$p = \operatorname{rg} M + \dim \operatorname{Ker} M.$$

A Changement de base

Il faut bien garder à l'esprit que la matrice d'une application linéaire est une "représentation" de celle-ci qui dépend du choix des bases au départ et à l'arrivée. Il est utile de savoir passer d'une représentation à une autre. Connaissant la matrice d'une application linéaire dans deux bases, il faut savoir la déterminer dans deux autres bases.

B D'une représentation à l'autre

Définition Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice
$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_E]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$
De façon plus explicite, notons $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$, $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}\}$ et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$. Dans ce cas, on a
$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \overrightarrow{f_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{e_i}.$$
Ainsi,
$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overrightarrow{f_1} & \cdots\cdots & \overrightarrow{f_n} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{matrix}$$

Proposition Inversible

Si P est une matrice de passage alors P est inversible.
Si P est inversible alors P est la matrice de passage de la base canonique à la base de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathcal{B}$ est la base canonique et si $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)$, alors :
$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ La première matrice de passage ne nécessite aucun calcul, la seconde résulte de la méthode du Pivot de Gauss :
$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ (L2) \leftarrow (L2) - 2(L1) & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ (L2) \leftarrow \frac{1}{5}(L2) & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \\ (L1) \leftarrow (L1) + (L2) & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \end{array}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, considérons la base $\mathcal{B} = (X^i)_{0\leq i\leq 2}$ et $\mathcal{B}' = ((X-1)^i)_{0\leq i\leq 2}$.

$$\text{Comme } \begin{cases} 1 &= 1\times 1 \\ (X-1) &= (-1)\times 1 + 1\times X \\ (X-1)^2 &= 1\times 1 + (-2)\times X + 1\times X^2 \end{cases}, \text{ on a } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors

1. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$;
2. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible, et son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Proposition Vecteur colonne

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $\vec{x}$ un vecteur de E.
Alors

$$X = PX'$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,

— $X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$,

— $X' = [\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit F un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Alors on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,

— $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$,

— $A = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$,

— $A' = [u]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit u un endomorphisme de E.
Alors on a

$$A' = P^{-1}AP$$

où

— $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$,

— $A = [u]_{\mathcal{B}}$,

— $A' = [u]_{\mathcal{B}'}$.

C Similitude

Définition Similitude

Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si et seulement si existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représentant la symétrie orthogonal par rapport à la première bissectrice. Alors M est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a bien $M = PDP^{-1}$.

Proposition **Propriétés**

Il s'agit d'une relation d'équivalence, c'est à dire :

1. $A \sim A$;
2. si $A \sim B$, alors $B \sim A$;
3. si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors $A \sim C$.

Remarque

Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres. La réciproque est fausse.

Proposition

Soit u un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Alors les matrices $[u]_{\mathcal{B}}$ et $[u]_{\mathcal{B}'}$ sont semblables.

Proposition

Soit A et B deux matrices. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons u l'unique endomorphisme de E tel que $[u]_{\mathcal{B}} = A$. Alors A et B sont semblables si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}'} = B$.
C'est à dire que deux matrices semblables représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.