Matrices : feuille d'exercices

I Calcul matriciel

Exercice **Des calculs de produits**

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice **Commutant**

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice **Annulateur**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice **Produit non commutatif**

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice **Matrices stochastiques en petite taille**

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de A est égale à 1. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique si $n = 2$. Reprendre la question si $n \leq 1$.

Exercice **Puissance n-ième, par récurrence**

Calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice **Puissance n-ième - avec la formule du binôme**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice **Puissance n-ième - avec un polynôme annulateur**

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geq 2$.

Exercice **Inverser une matrice sans calculs !**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice **Inverse avec calculs !**

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice **Matrice nilpotente**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

II Puissance d'une matrice

Exercice **Modélisation matricielle de suites définies par une récurrences linéaires**

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{array} \right.$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction d'une matrice A et de X_n.
2. Exprimer X_n en fonction d'une matrice A et de X_0.

Exercice **Puissance d'une matrice triangulaire de diagonale nulle**

Démontrer qu'une matrice triangulaire de diagonale nulle $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente

III Trace

Exercice **Matrice nilpotente**

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice **Matrice nilpotente**

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
> Démontrer que $\mathrm{tr}(A^\mathsf{T} A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2$