

# Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Dans un espace euclidien  $E$ , l'objectif est d'étudier les transformations de  $E$  qui préservent le produit scalaire. Ainsi on cherche à remplacer les notions de base, équation linéaire, forme linéaire, transposition etc. par les notions pertinentes en géométrie euclidienne à savoir, respectivement, de base orthonormée, de vecteurs normaux, de produit scalaire etc.

Les applications de ces transformations sont multiples :

- résoudre des équations différentielles linéaires, trouver une base orthogonale pour deux formes quadratiques si l'une est définie positive ou de classifier les quadriques,
- en physique, résoudre de nombreuses équations aux dérivées partielles comme celle de la corde vibrante ou exprimer le moment d'inertie d'un solide,
- en apprentissage automatique, calibrer un modèle de régression à l'aide de la méthode des moindres carrés ou étudier un échantillon en réduisant la dimension à l'aide de l'analyse en composantes principales.

Dans ce chapitre,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## I Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

### A Isométrie vectorielle

#### Définition Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal de  $E$**  tout endomorphisme préservant le produit scalaire, i.e. si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

On appelle **groupe orthogonal** l'ensemble de ces endomorphismes et on le note  $\mathcal{O}(E)$ .

#### Proposition Conservation de la norme

$u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in E : \quad \|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|.$$

#### Démonstration

- *Implication* : Soit  $\vec{x} \in E$ . En prenant  $\vec{x} = \vec{y}$ , on obtient  $\langle u(\vec{x}), u(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ , soit  $\|u(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ , d'où  $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ .
- *Réciproque* : Soit  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . On a

$$\begin{aligned} \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle &\stackrel{\text{Identité de polarisation}}{=} \frac{1}{4} (\|u(\vec{x}) + u(\vec{y})\| - \|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\|) \\ &\stackrel{\text{Linéarité}}{=} \frac{1}{4} (\|u(\vec{x} + \vec{y})\| - \|u(\vec{x} - \vec{y})\|) \\ &\stackrel{\text{Conservation de la norme}}{=} \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\|) \\ &\stackrel{\text{Identité de polarisation}}{=} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

#### Proposition Conservation d'une base orthonormale

$u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormale quelconque est une base orthonormale.

### Démonstration

—  $\Rightarrow$  : Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base orthonormale de  $E$ . Comme

$$\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle \underset{\text{Conservation du produit scalaire}}{\widehat{=}} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \underset{(e_1, \dots, e_n) \text{ BON}}{\widehat{=}} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$  est bien une base orthonormale de  $E$ .

—  $\Leftarrow$  : Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base orthonormale de  $E$  tel que  $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$  est aussi une base orthonormale de  $E$ .

Soit  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \in E$ . On a

$$\begin{aligned} \langle u(\vec{x}), u(\vec{y}) \rangle &= \left\langle u\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right), u\left(\sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j\right) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \text{ car } \langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle \stackrel{\text{BON}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ &\stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j \right\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

### Proposition Groupe

$\mathcal{O}(E)$  est un groupe, sous groupe de  $\mathcal{GL}(E)$ .

### Démonstration

$\mathcal{O}(E)$  est un sous groupe de  $\mathcal{GL}(E)$ .

—  $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$  Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  Comme  $u$  est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de montrer que  $u$  est injective,  $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$ .

Soit  $\vec{x} \in \text{Ker } u$ . On a  $u(\vec{x}) = \vec{0}$ , d'où  $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{0}\| = 0$ . Comme  $\|u(\vec{x})\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|\vec{x}\|$ , on a  $\|\vec{x}\| = 0$ . Enfin  $\vec{x} = \vec{0}_E$  car une norme est définie.

— *Non vide* :  $Id_E \in \mathcal{O}(E)$

— *Stabilité composition* : Soit  $u, v \in \mathcal{O}(E)$ . Soit  $\vec{x} \in E$ . La norme est conservée car :

$$\|u(v(\vec{x}))\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|v(\vec{x})\| \stackrel{v \in \mathcal{O}(E)}{=} \|\vec{x}\|.$$

— *Stabilité inversion* : Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Comme  $u$  est un automorphisme,  $u^{-1}$  l'est aussi. De plus, la norme est conservée car :

$$\|\vec{x}\| = \|u(u^{-1}(\vec{x}))\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|u^{-1}(\vec{x})\|.$$

## B Matrice orthogonale

### Définition Matrice orthogonale

Une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dit **orthogonal** si

$$M^T M = I_n.$$

On note  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de taille  $n$ .

Comme  $M^T M = I_n$ , la matrice  $M$  est inversible d'inverse  $M^T$  et on a aussi  $MM^T = I_n$ .

Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$ , la matrice de rotation plane d'angle  $\theta$  :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou dans  $\mathbb{R}^3$ , la matrice de rotation autour de l'axe  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$  et d'angle  $\theta$ ,

$$R_{\vec{e}_1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou les matrices de permutation, comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Proposition

$O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  si et seulement si la famille des colonnes de  $O$  (ou les lignes) est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^n$ .

### Démonstration

Soit  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $O$ .

$$\begin{aligned} O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est orthogonal} &\Leftrightarrow M^T M = \begin{pmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{pmatrix} (C_1 \ \dots \ C_n) = \begin{pmatrix} C_1^T C_1 & \dots & C_1^T C_n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^T C_1 & \dots & C_n^T C_n \end{pmatrix} = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket : C_i^T C_j = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket : \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormale de l'espace euclidien canonique } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Du fait de l'égalité  $OO^T = I_n$ , on a le même résultat sur les lignes.

Exemple

Il est facile de vérifier qu'une matrice de permutation est une matrice orthogonale car ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.

### Théorème Isométrie vectorielle et matrice orthogonale

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$ .

$u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $[u]_{\mathcal{B}}$  est une matrice orthogonale.

### Démonstration

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base orthonormale de  $E$ .

Soit  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $[u]_{\mathcal{B}}$ . On a  $[u(\vec{e}_i)]_{\mathcal{B}} = C_i$ .

Le coefficient de la matrice  $[u]_{\mathcal{B}}^T [u]_{\mathcal{B}}$  d'indice  $i, j$  est :

$$C_i^T C_j \stackrel{\mathcal{B} \text{ BON}}{\widehat{=}} \langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle.$$

Conservation d'une base orthonormale

- Si  $u \in \mathcal{O}(E)$ , alors  $\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij}$  et donc  $[u]_B^T [u]_B = I_n$ , d'où  $[u]_B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .
- Si  $[u]_B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , alors  $C_i^T C_j = \delta_{ij}$ , soit  $\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij}$  c'est à dire que l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale donc  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

### Proposition Matrice de passage d'un changement de bases orthonormales

Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases orthonormales de  $E$ .

Alors la matrice de passage de base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ,  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ , est une matrice orthogonale. Ainsi, son inverse est  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^T$ .

#### Démonstration

Soit  $u$  l'endomorphisme associé à la matrice de passage. Comme l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale  $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ ,  $f$  est une isométrie vectoriel, donc  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est une matrice orthogonale.

### Proposition Groupe

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un groupe, sous groupe de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

#### Démonstration

Pour la démonstration, il suffit de se ramener à  $u$  l'endomorphisme associé à la matrice orthogonale qui est une isométrie vectorielle.

## C Déterminant

### Proposition Déterminant

Soit  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

Alors  $\det O = \pm 1$ .

Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

Alors  $\det u = \pm 1$ .

#### Démonstration

Comme  $O^T O = I_n$ , on a  $\det(O^T O) = \det(I_n) = 1$ . Or  $\det(O^T O) = \det O^T \det O = (\det O)^2$ . Donc  $\det O = \pm 1$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Comme  $[u]_B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $\det u = \det [u]_B$ , on conclut que  $\det u = \pm 1$ .

#### Remarque

Une matrice ou un endomorphisme de déterminant 1 ou -1 n'est pas nécessairement une matrice orthogonale ou une isométrie vectorielle. Par exemple  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ , mais les colonnes ne forment pas une base orthonormale de  $\mathbb{R}^2$ . Donc  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ .

### Définition Rotation et groupe spéciale orthogonale

Une matrice orthogonale [resp. isométrie] est **direct(e)** si son déterminant est 1, **indirect(e)** si son déterminant est -1.

Une isométrie vectorielle directe est également appelée **rotation**.

On note  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales directes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{SO}(E)$  l'ensemble des rotations de  $E$ .

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}).$$

### Proposition Groupe

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  [resp.  $\mathcal{SO}(E)$ ] est un groupe, sous-groupe de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  [resp.  $\mathcal{O}(E)$ ] appelé **groupe spécial orthogonal** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  [resp.  $E$ ].

Démonstration

- Non vide :  $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .
- Stabilité : Soit  $S_1, S_2 \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

$$\det(S_1 S_2^{-1}) = \det S_1 \det S_2^{-1} = \frac{\det S_1}{\det S_2} = 1.$$

## D Symétrie orthogonale

### Définition Symétrie orthogonale

On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ . Si  $F$  est un hyperplan de  $E$ , on parle alors de **réflexion**.

### Proposition Symétrie orthogonale

Soit  $u$  une isométrie vectorielle.

$u$  est une symétrie orthonormale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

- $\implies$ : Soit une symétrie orthonormale par rapport à  $F$  et  $F^\perp$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale adaptée à décomposition  $F \oplus F^\perp = E$ . La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -I_{\dim(F_2)} \end{pmatrix}$$

Elle est symétrique. Soit  $\mathcal{B}'$  une base orthonormale quelconque. La matrice de passage de BON  $\mathcal{B}$  à la base BON  $\mathcal{B}'$  est orthogonale donc  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^T$ . On a :

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^T \begin{pmatrix} I_{\dim(F_1)} & 0 \\ 0 & -I_{\dim(F_2)} \end{pmatrix} P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

Donc  $[u]_{\mathcal{B}'}$  est symétrique.

- $\Leftarrow$ : Voir théorème spectral.

## E Orientation

### Définition Orientation

Deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$  ont même **orientation** si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ .

Orienter  $E$ , c'est choisir une base  $\mathcal{B}$  de référence. Une base  $\mathcal{B}'$  est directe si elle a la même orientation que  $\mathcal{B}$ .

Exemple

Sur  $\mathbb{R}^2$ . La base de référence est  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique. Soit  $\mathcal{B}' = (-\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Comme  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$ ,  $\mathcal{B}'$  est une base indirecte.

**Proposition**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe.

$\mathcal{B}'$  est une base orthonormée directe si seulement si la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est orthogonale directe.

**Démonstration**

L'équivalence est due à l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})$$

**Définition Orientation d'un hyperplan**

Orienter l'hyperplan  $H$ , c'est choisir un vecteur  $\vec{n}$  orthogonal à  $H$ .

Une base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$  de  $H$  est alors directe si la base  $(\vec{u}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$  est directe dans  $E$ .

Il y a deux orientations possibles de  $H$ .

**Exemple**

Soit  $\mathbb{R}^3$  orientée par rapport à la base canonique. Soit  $H$  l'hyperplan défini par le vecteur normale  $(1, 1, 1)$ .

La base  $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$  de  $H$  est directe car  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$ .

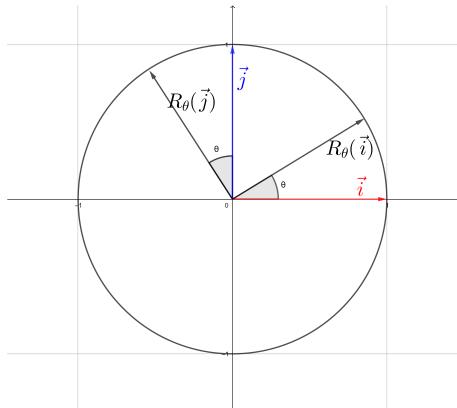
**F Isométrie vectorielle du plan****Proposition Classification**

Les matrices de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  sont les matrices de la forme :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

Les matrices de  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  sont les  $R_\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Les matrices indirectes sont les  $S_\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration**

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(2)]\mathbb{R}$ .

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T M = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \\ c = \cos \phi \text{ et } d = \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \\ c = \cos \phi \text{ et } d = \sin \phi \\ \cos(\theta - \phi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \theta, \phi \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \{-1, 1\} \begin{cases} a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \\ c = \cos \phi \text{ et } d = \sin \phi \\ \phi = \theta + \epsilon \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$\cos(\theta + \epsilon \frac{\pi}{2}) = -\epsilon \sin \theta \text{ et } \sin(\theta + \epsilon \frac{\pi}{2}) = \epsilon \cos \theta$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \{-1, 1\} : M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix}$$

On conclut en remarquant que  $\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix} = \epsilon$ .

### Proposition

$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$  ( $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  est un sous-groupe commutatif) et  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ .

#### Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \\ \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}. \end{aligned}$$

$R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = I_2$  donc  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ .

On considère  $\mathcal{P}$  un plan vectoriel orienté et  $\mathcal{B}$  une base orthonormale directe de  $\mathcal{P}$ .

### Définition Rotation

L'endomorphisme de  $\mathcal{P}$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $R_\theta$  est appelé **rotation d'angle  $\theta$**  et est noté  $r_\theta$ .

### Définition-Proposition Angle d'une rotation

La matrice de  $r_\theta$  dans toute BOND est  $R_\theta$ .

$\theta$  s'appelle **l'angle de la rotation**, il est défini modulo  $2\pi$ .

#### Démonstration

Soit  $P$  la matrice de passage de la BOND  $\mathcal{B}$  à une base BOND  $\mathcal{B}'$ . Comme  $P$  appartient  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ , il existe  $\theta'$  tel que  $P = R_{\theta'}$ . La matrice de  $r_\theta$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :  $R_{\theta'}^{-1} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta$ .

### Proposition Expression complexe d'une rotation

Soit  $r_\theta$  la rotation d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour  $\vec{x} \in \mathcal{P}$ , on note  $z$  l'affixe de  $M$  et  $z'$  celle de  $r_\theta(\vec{x})$ .

On a :

$$z' = e^{i\theta} z.$$

#### Démonstration

Soit  $(x, y)$  les coordonnées du vecteur  $\vec{x}$ . D'une part, on a :

$$[r_\theta(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix}$$

d'autre part,

$$z' = e^{i\theta} z = e^{i\theta}(x + iy) = (\cos \theta x - \sin \theta y) + i(\sin \theta x + \cos \theta y).$$

On conclut en identifiant la partie réel et imaginaire aux coordonnées de  $[r_\theta(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$ .

### Définition Reflexion

La **reflexion** d'axe  $D$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $D$ .

### Proposition Représentation matricielle

Soit  $\mathcal{B}$  une BOND de  $\mathcal{P}$ .

L'endomorphisme dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  est la **réflexion** d'axe la droite d'angle polaire  $\frac{\theta}{2}$  dans  $\mathcal{B}$ .

## G Isométrie vectorielle dans un espace de dimension 3

### Théorème Réduction

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3 et  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Il existe une BOND de  $E$  dans laquelle  $u$  a pour matrice :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ si } \det u = 1$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ si } \det u = -1$$

avec le cas particulier  $\theta = 0[2\pi]$  :  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , matrice de réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan).

### Démonstration

Soit  $\chi_u$  le polynôme caractéristique de  $u$ .  $\chi_u$  est de degré 3 donc la limite en plus l'infini est de signe opposé à la limite en moins l'infini. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine réelle  $\lambda$ .

Soit  $\vec{x}$  un vecteur propre associée à cette valeur propre. par définition, on a  $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ , d'où  $\|u(\vec{x})\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ . Comme  $u$  est une isométrie vectorielle  $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ . Par conséquent  $|\lambda| = 1$ .

Considérons le supplémentaire orthogonal de la droite  $\text{Vect}(\vec{x})$ . Ce supplémentaire est stable sous  $u$ . En effet soit  $\vec{y}$  un élément du supplémentaire. Montrons que  $u(\vec{y}) \in \text{Vect}(\vec{x})^\perp$ . Soit  $\mathcal{B}$  une BON adaptée à  $\text{Vect}(\vec{x}) \oplus \text{Vect}(\vec{x})^\perp = E$ . On a :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \epsilon \in \{-1, 1\}.$$

Si  $\epsilon = 1$ , on a le premier cas du théorème. Si  $\epsilon = -1$ , la matrice de la restriction de  $u$  au sous espace  $\text{Vect}(\vec{x})^\perp$  est une matrice de symétrie orthogonale par rapport à une droite  $\text{Vect}(\vec{y})$ . Soit  $\vec{x}$  un vecteur orthogonal à cette droite dans le plan  $\text{Vect}(\vec{x})^\perp$ . La matrice de  $u$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  (qui est orthogonale et que nous prenons orthonormée) est donc de la forme

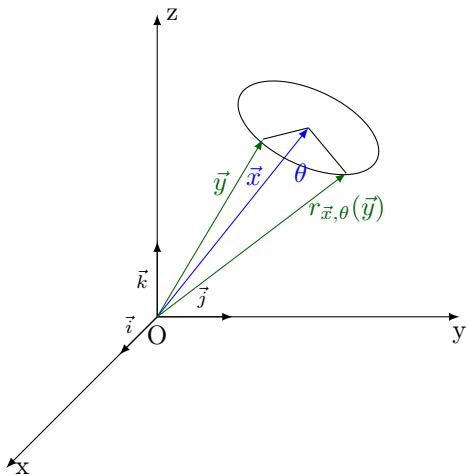
$$[u]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

qui a permutation des vecteurs de base près est du type voulu.

**Définition Rotation**

La **rotation**,  $r_{\vec{x}, \theta}$ , d'axe  $\vec{x}$  et d'angle  $\theta$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

- $r_{\vec{x}, \theta}(\vec{x}) = \vec{x}$
- la restriction de  $f$  au plan  $\text{Vect}\vec{x}^\perp$  orienté par  $\vec{x}$  est la rotation (plane) d'angle  $\theta$ .



Étude pratique d'une rotation  $r$  : détermination du couple axe-angle  $(\vec{x}, \theta)$ .

1. axe : choisir un vecteur non nul  $\vec{x}$  appartenant à  $\ker(r - \text{Id}_E)$

2. rotation :

- La trace étant un invariant de similitude,  $\text{tr } r = 1 + 2 \cos \theta$  ce qui fournit  $\cos \theta$
- le signe de  $\sin \theta$  est le même que  $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y}))$  où  $\vec{y}$  est un vecteur non colinéaire à  $\vec{x}$ . En effet :  

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y})) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 & x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ 0 & x_3 & x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{pmatrix} = (x_2^2 + x_3^2) \sin \theta.$$

Exemple

Caractériser l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- rotation vectoriel : les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée donc  $f$  endomorphisme orthogonal.  
De plus  $\det(A) = 1$ ,  $f$  est une rotation.
- axe : on obtient  $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(1, 1, 1)$ . Posons  $\vec{x} = (1, 1, 1)$ .
- angle :
  - $\text{tr}(A) = 2$ , et donc  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , soit  $\theta = \pm \frac{\pi}{3}[2\pi]$ . Pour déterminer le signe de  $\theta$ , on pose  $\vec{y} = (1, -1, 0)$  non colinéaire  $\vec{x}$ .  $f(\vec{y}) = (1, 0, -1)$  et  $\det(\vec{x}, \vec{y}, r(\vec{y})) = 3 > 0$ . ce qui signifie  $\theta \in ]0, \pi[ \text{modulo} 2\pi$ .  
On en déduit donc que  $f$  est la rotation d'axe dirigé par  $(1, 1, 1)$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

## II Endomorphismes symétriques et Matrices symétriques

### A Généralités

**Définition Endomorphismes symétriques**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $u$  est un endomorphisme **symétrique** (ou *autoadjoint*) si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \quad \langle u(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y}) \rangle.$$

On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $E$ .

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

### Définition Matrices symétriques

Une matrice **symétrique**,  $S$ , est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée, soit  $S^T = S$ .  
 On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$ .  
 Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Exemple

La matrice suivante est symétrique :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Toute matrice diagonale est symétrique.

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $XX^T$  est symétrique.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A^T A$  est symétrique.

Exemple **Matrice hessienne**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Sa matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Exemple **Matrice de covariance**

La matrice de covariance du vecteur aléatoire  $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  définie par :

$$\text{Var}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$

est symétrique.

### Proposition Endomorphisme symétrique et matrice symétrique

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i.  $u$  est un endomorphisme symétrique ;
- ii. pour toute base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $[u]_{\mathcal{B}}$  est une matrice symétrique ;
- iii. il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{B}}$  est une matrice symétrique.

### Proposition

Muni du produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , une matrice  $S$  est symétrique si et seulement si :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle.$$

### Définition Matrices antisymétriques

Une matrice **antisymétrique**,  $A$ , est une matrice carrée qui est égale à l'opposée de sa propre transposée, soit  $A^T = -A$ .

On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices antisymétriques de taille  $n$ .

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

### Proposition Supplémentaires orthogonaux

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $SnR$  sont des supplémentaires orthogonaux par rapport au produit scalaire  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ . La décomposition d'une matrice  $M$  selon cette somme directe est :

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}.$$

## B Produit scalaire

### Définition Positive

Une matrice symétrique,  $S$ , est **positive** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : X^T S X \geq 0.$$

### Définition Définie

Une matrice symétrique,  $S$ , est **définie** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : X^T S X = 0 \Rightarrow X = 0.$$

### Proposition Produit scalaire associée à une matrice symétrique positive et définie

Soit  $S$  une matrice symétrique, définie et positive.

Alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto X^T S Y \end{cases}$  est un produit scalaire.

### Proposition Expression d'un produit scalaire associée à l'aide une matrice symétrique positive et définie

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base quelconque de  $E$ .

Alors

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}^T \times S \times [\vec{y}]_{\mathcal{B}} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Ainsi définie,  $S$  est une matrice symétrique définie et positive.

## C Diagonalisation

### Lemme Stabilité et orthogonal

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . Soit  $F$  sous espace vectoriel stable par  $u$ .

Alors son orthogonal  $F^\perp$  est également stable par  $u$ .

### Lemme Sous espace propres orthogonaux

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ .

Alors les sous-espaces propres de  $S$  sont deux à deux orthogonaux.

### Théorème Théorème spectral (endomorphisme symétrique)

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont toutes réelles.

### Démonstration

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique et

On montre d'abord qu'il existe au moins une valeur propre réelle, puis on restreint  $u$  par récurrence sur la dimension de l'espace :

- Tant que  $u$  est un endomorphisme de dimension non nulle
  - Existence d'une valeur propre réel : soit  $S$  la matrice de  $u$  dans une base quelconque. Il existe  $\lambda$  une racine a priori complexe de son polynôme caractéristique et  $X$  un vecteur propre complexe non nulle telle que  $AX = \lambda X$ .

Alors

$$\begin{cases} (SX)^T \bar{X} = \lambda X^T \bar{X} \\ (SX)^T \bar{X} = X^T S^T \bar{X} = X^T S \bar{X} = X^T S \bar{X} = X^T \bar{\lambda} X = \bar{\lambda} X^T \bar{X} \end{cases}$$

Comme  $X^T \bar{X} \neq 0$ ,  $\lambda = \bar{\lambda}$ , donc  $\lambda$  est réel.

- Soit  $E_\lambda$  l'espace propre associée à la valeur propre  $\lambda$ . On a  $E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp = E$ . D'après le lemme,  $E_\lambda^\perp$  est stable par  $u$ . Alors  $u$  devient la restriction de  $u$  à  $E_\lambda^\perp$ .

### Théorème Théorème spectral (matrice symétrique)

Soit  $S$  une matrice symétrique réelle.

Alors il existe une matrice  $P$  orthogonale et une matrice  $D$  diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice  $A$  est égale à  $PDP^{-1} = PDP^T$ .

### Proposition Caractérisation de la projection orthogonale

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur et  $s$  une symétrie.

Alors  $p$  est une projection orthogonale si et seulement si  $p$  est un endomorphisme symétrique.

Alors  $s$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $s$  est un endomorphisme symétrique.