

Dénombrement

Le dénombrement s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis. Il est né de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développé sous l'influence du calcul des probabilités, notamment dans une situation d'équiprobabilité : dans ce cas, en effet, de façon assez intuitive, la probabilité d'un événement est le rapport entre le nombre d'issues favorables et le nombre total d'issues possibles. Pour cette raison, le dénombrement semble trouver sa place naturelle au début d'un cours de probabilité, même si ses applications sont beaucoup plus diverses dans l'ensemble des mathématiques.

La cardinalité est une notion de taille pour les ensembles. Lorsqu'un ensemble est fini, c'est-à-dire si ses éléments peuvent être listés par une suite finie, son cardinal est la longueur de cette suite, autrement dit il s'agit du nombre d'éléments de l'ensemble. En particulier, le cardinal de l'ensemble vide est zéro. Lorsqu'on décompte une collection "sur ses doigts", on crée une bijection entre la collection et ses doigts. On définit naturellement le cardinal comme le nombre de doigts. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.

I Cardinal d'un ensemble

Définition-Proposition Cardinal

Un ensemble E est **fini** si $E = \emptyset$ ou si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Cet entier, n , est **unique**, il est appelé le **cardinal** de E noté $\text{Card } E$.

Si $E = \emptyset$, on pose $\text{Card } E = 0$.

Exemple

Le cardinal des couleurs d'un jeu de carte $\{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ est 4. La fonction f définie par

$$f(1) = \clubsuit, f(2) = \spadesuit, f(3) = \diamondsuit, f(4) = \heartsuit$$

est bien une bijection entre l'ensemble des couleurs et l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

Définition Dénombrable

Un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection \mathbb{N} .

Exemple

L'ensemble des entiers pairs, noté $2\mathbb{N}$, est dénombrable et infini car la fonction

$$f \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow 2\mathbb{N} \\ n & \longmapsto 2n \end{cases}$$

est bijective.

Remarque

Les éléments d'un ensemble fini ou dénombrable peuvent être indexés sous la forme $\{x_i ; i \in I\}$ avec $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ ou $I = \mathbb{N}$ respectivement. Ainsi, on identifie tout ensemble fini de cardinal n à l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ et tout ensemble dénombrable à \mathbb{N} . Par exemple pour les couleurs d'un jeu de carte, on a $\clubsuit \rightarrow 1, \spadesuit \rightarrow 2, \diamondsuit \rightarrow 3, \heartsuit \rightarrow 4$.

Définition Équipotent

Deux ensembles (fini ou non) sont **équipotents** ou de **même cardinal** s'il existe une bijection entre eux.

Exemple

Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

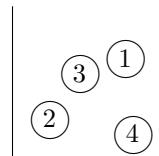
- Il existe une application surjective de E sur F , mais pas d'application injective.
- Il existe application injective de F sur E , mais pas d'application surjective.

En fait, il n'y a pas assez d'éléments dans F (ou trop peu dans E).

II Principes fondamentaux de dénombrement

Méthode Modélisation avec une urne

Un problème d'urne est une représentation d'expériences aléatoires par un tirage aléatoire uniforme de boules dans une urne. L'urne est supposée contenir un nombre de boules numérotées de 1 à n , qui sont indiscernables au toucher, c'est-à-dire que lorsque l'on tire une boule à l'intérieur, le tirage est aléatoire et chaque boule à l'intérieur de l'urne a la même chance d'être tirée.



Urne de 4 boules

Il y a deux critères pour distinguer ces tirages au sort :

- l'**ordre** dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon on parle d'un « tirage sans ordre ». Avec ordre, le tirage est noté avec des parenthèses pour un p -uplet ^a et sans ordre, avec des accolades pour un ensemble Par exemple, pour le tirage des boules 7, 33 et 24, avec ordre, on note $(7, 33, 24)$ et sans ordre $\{7, 33, 24\}$. Remarque, on a bien entendu $\{7, 33, 24\} = \{33, 24, 7\}$ par contre $(7, 33, 24) \neq (33, 24, 7)$.
- la **répétition** si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage **avec remise** et dans le cas contraire on parle d'un tirage **sans remise**.

^a Un p -uplet est une collection ordonnée de p éléments d'un même ensemble, par exemple, le 2-uplet $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur du plan.

Exemple

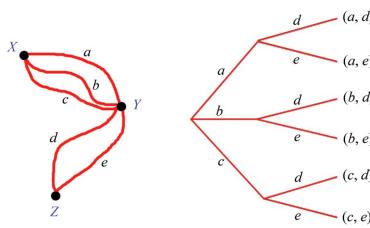
La question : « Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier pour le tierce ? » peut être reformulée de la manière suivante : « De combien de façons peut-on tirer avec ordre et sans remise 3 boules d'une urne qui en contient 10 ? ».

Méthode Décomposition

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1, n_2, \dots, n_k manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 n_2 \dots n_k$ manières différentes.

Exemple

Les localités X et Y sont reliées par trois routes a, b et c et les localités Y et Z par deux routes d et e. Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?



Il y a $6 = 3 \cdot 2$ trajets possibles : (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d) et (c, e).

Méthode Double-comptage

Il consiste à établir une égalité en comptant de deux manières différentes une certaines quantité.

Exemple

Un berger ne voyant que les pattes de ses moutons pourra déterminer le nombre d'animaux en divisant le nombre de pattes par quatre. Le berger a compté le nombre de pattes de deux manières différentes : l'un directement, l'autre avec le principe de décomposition.

III Tirage avec ordre et avec remise

Proposition

Le nombre de tirages différents avec remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant p boules est n^p .

Démonstration

Il y a n façons de tirer la première boule, puis n façons de tirer la seconde boule et ainsi de suite, d'où, après p fois le principe de décomposition, en totalité $\overbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}^{p \text{ fois}} = n^p$ façons.

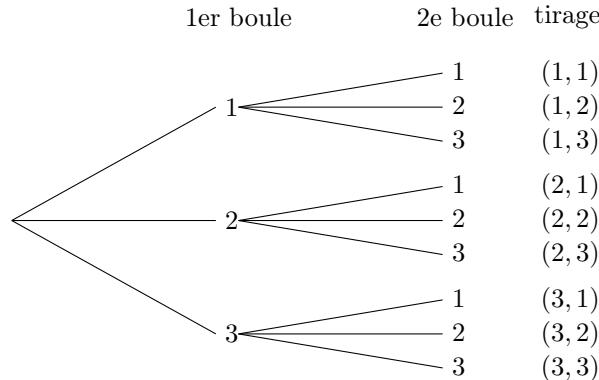


Diagramme en arbre d'un tirage avec ordre et avec remise dans une urne de 3 boules en tirant 2 boules.

Corollaire Cardinal d'un produit cartésien

Soit E de cardinal n .

Alors $\text{card}(E^p) = n^p$.

Démonstration

Soit un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. Pour chaque coordonnée x_i , i représente le numéro du tirage et x_i le numéro de la boule. (x_1, \dots, x_p) représente un tirage avec ordre et avec remise dans une urne n boules en tirant p fois. En conclusion le cardinal E^p est le nombre de tirages différents avec remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant p boules, soit n^p .

Définition-Proposition p-uplet

Soit E de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **p-liste** de E ou **p-uplet** de E tout élément de E^p . Un 2-uplet est un **couple**. Un 3-uplet est un **triplet**.

Il existe n^p p-uplet de E .

Exemple

Combien de combinaisons à quatre chiffres peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 ?

Une combinaison est un 4-uplet de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ correspondant à un tirage avec ordre et avec remise dans une urne de 10 boules en tirant 4 fois. Donc le nombre de combinaisons est 10^4 .

Corollaire Nombre d'applications entre deux ensembles

Soit E de cardinal p et F de cardinal n .

Alors le cardinal de l'ensemble des applications de E dans F est égale à n^p .

Démonstration

D'après la remarque ??, l'ensemble E de cardinal p est identifié à $\llbracket 1, p \rrbracket$ et l'ensemble F de cardinal n à $\llbracket 1, n \rrbracket$. La fonction ϕ définie par :

$$\phi \left| \begin{array}{l} \{f \in \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket\} \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket^p \\ f \longmapsto (f(1), f(2), \dots, f(p)) \end{array} \right.$$

associe à chaque numéro du tirage, i , le numéro de la boule $f(i)$. Elle est bijective.

Comme l'ensemble d'arrivée de la fonction ϕ est l'ensemble des tirages avec remise et avec ordre, de cardinal n^p , le cardinal de l'ensemble des applications E dans F est bien n^p .

IV Tirage avec ordre et sans remise

Définition Factoriel

Le nombre $\prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ est appelé **factorielle** n et est noté $n!$.

Définition-Proposition Arrangement

Un tirage sans remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant p boules correspond à p-uplet d'éléments distincts.

Le nombre de tirages différents avec $p \leq n$ est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

On l'appelle **arrangement** et on le note A_n^p .

Démonstration

Comme on a n façons de tirer la première boule, puis $n-1$ façons de tirer la seconde boule et ainsi de suite, d'après le principe de décomposition, on obtient $n.(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n.(n-1)\dots(n-p+1).(n-p).(n-p-1)\dots2.1}{(n-p).(n-p-1)\dots2.1} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

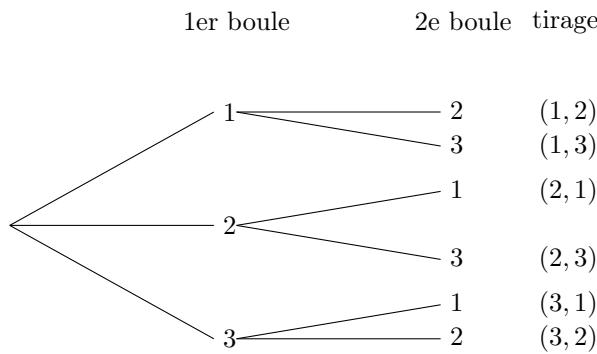


Diagramme en arbre d'un tirage avec ordre et avec remise dans une urne de 2 boules en tirant 2 fois.

Exemple

Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier pour le tierce ?
Un tierce correspond à un tirage avec ordre et sans remise dans une urne de 10 boules en tirant 3 boules.
Donc le nombre de tierce est $A_{10}^3 = 8.9.10 = 720$

Corollaire Nombre d'applications injectives entre deux ensembles

Soit E de cardinal p et F de cardinal n avec n et p deux entiers non nuls.
Alors le cardinal de l'ensemble des applications injectives de E dans F est égale à A_n^p .

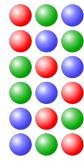
Démonstration

Idem que la démonstration du corollaire ?? sauf que, comme le tirage est sans remise, les numéros de chaque boule sont différents deux à deux. Cela implique l'injectivité de la fonction.

Corollaire $n = p$

Le nombre de tirages différents sans remise et avec ordre dans une urne n boules en tirant toutes les boules est $n!$.

Exemple



Pour 3 boules, on a $6 = 3.2.1$ manières

Définition-Proposition Permutation (cas $n=p$)

Tout classement ordonné de n éléments distincts correspondant à un triage avec ordre de toutes les boules est une **permutation** de ces n éléments.

Lorsque l'ensemble $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, on note S_n l'ensemble des permutations, soit l'ensemble des bijections de E sur lui-même. Cet ensemble possède une structure de groupe, on l'appelle **groupe symétrique**.

On a $\text{Card}(S_n) = n!$.

Exemple

Par exemple la liste $(1, 3, 2, 5, 4)$ est la permutation σ telle que $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 4$ que l'on peut écrire $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

V Tirage sans ordre et sans remise



Définition-Proposition Combinaison

Un tirage sans remise et sans ordre dans une urne n boules en tirant p boules avec $p \leq n$ est appelé **combinaison**. Le nombre de combinaisons est égale au coefficient binomial, $\binom{n}{p}$, tel que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Pour $p > n$, on pose $\binom{n}{p} = 0$

Démonstration

Avec le principe de double-comptage, on dénombre le nombre d'arrangements de deux façons différentes. L'un d'après la proposition ??, on a $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$, et l'autre on commence par choisir une combinaison de p boules parmi n ($\binom{n}{p}$ configurations possibles de choisir) et on l'ordonne par permutation des boules pour obtenir tous les arrangements simples ($p!$ configurations possibles de les ordonner), soit d'après le principe de décomposition $p! \binom{n}{p}$. D'où $p! \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, donc $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple

Le nombre de tirages au Loto (5 numéros parmi 49) est $\binom{49}{5} = 1906884$.

Exemple

Le nombre d'anagrammes 00111 est $\binom{5}{3}$. Un anagramme est une combinaison où les positions des 1 dans le mot correspondent au résultat d'un tirage sans remise et sans ordre dans une urne numérotée de 5 boules en tirant 3 boules. Par exemple, l'anagramme 01101 correspond au tirage {2, 3, 5}.

Corollaire Nombre de parties p éléments d'un ensemble

Le nombre de configurations de sous-ensemble à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

Démonstration

Soit $E = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $A = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ un sous-ensemble de p éléments de E . L'ensemble A correspond bien à un tirage sans ordre et sans remise dans une urne n boules en tirant p boules. CQFD.

Proposition

- $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
 - $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
 - $\forall n, p \in \mathbb{N}, \text{ avec } p \leq n \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
 - Formule de Pascale : $\forall n, p \in \mathbb{N}, \text{ avec } p \leq n, \quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Démonstration

Argumentation combinatoire :

- une urne à n boules a un unique tirage à zéro boule, l'ensemble vide \emptyset , et un unique tirage de n boules, lui-même
 - une urne de n boules a n tirages à une boule pour la première boule
 - choisir p boules parmi n revient à sélectionner les $n - k$ boules qu'on ne choisira pas.
 - Dénombrons par principe de double-comptage l'ensemble des combinaisons de p boules parmi n . D'abord, la proposition ?? nous donne $\binom{n}{p}$.

Puis on recherche le nombre d'anagrammes comportant p 0 et $(n - p)$ 1. On sépare en deux cas sur la dernière lettre du mot :

- égale à 0 : les anagrammes de la forme $\overbrace{* \dots *}^{n-1 \text{ lettres}} 0$ doivent comporter $p-1$ zéro parmi $n-1$ lettres pour être un anagramme de p zéro parmi n lettres. Son cardinal est $\binom{n-1}{p-1}$,
 - égale à 1 : les anagrammes de la forme $\overbrace{* \dots *}^{n-1 \text{ lettres}} 1$ doivent comporter p zéro parmi $n-1$ lettres pour être un anagramme de p zéro parmi n lettres. Son cardinal est $\binom{n-1}{p}$,

Au total on a donc $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ d'anagrammes, soit le nombre de combinaisons de p boules parmi n d'où le résultat.

La formule de Pascal nous permet de construire le triangle de Pascal.

n	p						
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6

Proposition Formule du binôme de Newton

Soit x, y des nombres réels et $n > 1$ un entier.

Alors :

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

Démonstration

Lorsqu'on développe $(x+y).(x+y)\dots(x+y)$, pour trouver le coefficient devant $x^p y^{n-p}$, parmi les n facteurs $(x+y)$, il faut en choisir p pour lesquels on garde le x et qui vont donner un terme x^p , et les $n - p$ autres facteurs pour lesquels on sélectionne y (et qui sont fixés par le choix des p premiers) vont donner le terme y^{n-p} . Le résultat s'ensuit.

Synthèse :

Tirage de p boules dans une urne en contenant n .

	avec remise	sans remise
avec ordre	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, si $n = p$ $A_n^p = n!$
sans ordre		$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$