

Exercice

Domaine de définition] Soit  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  et  $\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ . Déterminer le domaine de définition de la fonction  $\zeta$ , appelé fonction de Riemann et de la fonction  $\mu$ .

Exercice

Convergence uniforme] Soit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^{-nx}, \end{array} \right. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Étudier la convergence de cette suite de fonctions.

Exercice

Vrai/Faux] Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction  $f$  sur un intervalle

*I*. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et le prouver :

1. Si les  $f_n$  sont croissantes, alors  $f$  aussi.
2. Si les  $f_n$  sont strictement croissantes, alors  $f$  aussi.
3. Si les  $f_n$  sont périodiques de période  $T$ , alors  $f$  aussi.
4. Si les  $f_n$  sont continues en  $a$ , alors  $f$  aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice

Étude de convergence simple et uniforme détaillée] Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On note  $f(x)$  la limite de la suite  $(f_n(x))$  lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$ . Vérifier que

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

3. Quelle est la limite de  $\varphi_n$  en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur  $] -1, 1[$ .
4. Soit  $a \in ]0, 1[$ . Démontrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

Exercice

Convergence uniforme sur un intervalle plus petit...] On pose, pour  $n \geq 1$  et  $x \in ]0, 1]$ ,  $f_n(x) = nx^n \ln(x)$  et  $f_n(0) = 0$ .

1. Démontrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera. On note ensuite  $g = f - f_n$ .
2. Étudier les variations de  $g$ .
3. En déduire que la convergence de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .
4. Soit  $a \in ]0, 1]$ . En remarquant qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $e^{-1/n} \geq a$  pour tout  $n \geq n_0$ , démontrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ .

Exercice

Avec paramètre] Soit  $a \geq 0$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$ . Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0 sur  $[0, 1]$ , mais que la convergence est uniforme si et seulement si  $a < 1$ .

Exercice

Convergence uniforme et fonctions bornées] Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions bornées,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ . Montrer que  $f$  est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

## Exercice

Convergence simple et fonctions décroissantes] Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions décroissantes définies sur  $[0, 1]$  telle que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

## Exercice

Exemples et contre-exemples] Pour  $x \geq 0$ , on pose  $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge uniformément sur tout intervalle  $[0, A]$ , avec  $A > 0$ .
3. Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$ .
4. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .
5. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .
6. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$  converge normalement sur tout intervalle  $[0, A]$ , avec  $A > 0$ .
7. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Exercice

Série alternée] On considère la série de fonctions  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

1. Prouver que  $S$  est définie sur  $I = ]-1, +\infty[$ .
2. Prouver que  $S$  est continue sur  $I$ .
3. Prouver que  $S$  est dérivable sur  $I$ , calculer sa dérivée et en déduire que  $S$  est croissante sur  $I$ .
4. Quelle est la limite de  $S$  en  $-1$  ? en  $+\infty$  ?

## Exercice

Convergence normale] Soit  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Démontrer que la fonction *zeta* converge normalement sur tout intervalle  $[a, \infty[$  avec  $a > 1$ .

En déduire la continuité de la fonction  $\zeta$  sur  $]1, \infty[$ .

Donner la limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x)$ .

## Exercice

Equivalent Série-Intégrale] On considère la série de fonctions  $\sum f_n$ , où pour tout  $n > 0$ ,  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \end{cases}$

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ .
2. Démontrer que la fonction  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
3. Donner un équivalent de 0 de  $f$ .

## Exercice

Convergence suite de fonctions] On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où pour tout  $n > 0$ ,

$$f_n \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n(1-x)^n \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .
2. Démontrer que la suite de fonctions  $f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

## Exercice

Convergence suite de fonctions] On considère la suite de fonctions  $\sum f_n$ , où pour tout  $n > 1$ ,

$$f_n \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n} \end{cases}$$

- 
1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ .
  2. Démontrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
  3. Démontrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

Exercice

Espérance et variance de loi géométrique] Soit  $X$ , une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ ,  $\mathcal{G}(p)$ , c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

1. Calculer l'espérance de  $X$
2. Calculer la variance de  $X$

Exercice

Devoir Maison] CCP mp 2017 sujet 1 mathématique. Le problème est sur la série trigonométrique.