Exercice **Nature**

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n+1}{3^n}$
2. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
4. $u_n = n\sin(1/n)$
5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
6. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
7. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
8. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Correction

1. on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$
D'après le critère de d'Alembert, la série est convergente.
2. $\sum \frac{n}{n^3+1}$ est une série à termes positifs. On a :
$$\frac{n}{n^3+1} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum \frac{n}{n^3+1}$ est convergente par règle de comparaison.
3. $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs. On a :
$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n^2(1+\sqrt{n}/n^2)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente, la série $\sum \frac{n}{n^3+1}$ est convergente par règle d'équivalence.
4. Comme $n\sin(1/n) \sim_{n\to\infty} 1$, le terme générale de série ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une série à termes positifs. On a :
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente par règle d'équivalence.
6. $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs. On a :
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\frac{1}{2n})}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}.$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente, la série $\sum \frac{n}{n^3+1}$ est convergente par règle d'équivalence.
7. $\sum \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ est une série à termes positifs. On a :
$$\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ est divergente par règle d'équivalence.
8. $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ est une série à termes positifs.
   — Version courte :
$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice **Nature**

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
2. $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
3. $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch} n)}$

$$u_n = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}{2} - \left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) - \frac{(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = \frac{2}{\cdots} + o\left(\frac{1}{\cdots}\right) \sim \frac{2}{\cdots}$$

4. $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Correction

1. $\sum \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs. On a :

$$\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{1}{n(1+(-1)^n\sqrt{n}/n)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est divergente par règle de comparaison.

2. $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ est une série à termes positifs. On a :

$$\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} = e^{\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)} \sim_{n\to\infty} e^{\ln(n)\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\ln 2}}$ est divergente, la série $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ est divergente par règle de comparaison.

3. $\sum \frac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch} n)}$ est une série à termes positifs. On a :

$$\ln(\mathrm{ch}(n)) = \ln\left(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\right) \sim_{n\to\infty} \ln(e^n/2) \sim_{n\to\infty} n-2 \sim_{n\to\infty} n.$$

Étudions la nature de la série $\sum \frac{1}{\ln(n)n}$ à l'aide d'une comparaison série intégrale.
La fonction $x \to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Par suite, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln x}$ est continue, décroissante sur $]1,+\infty[$ et de limite 0 en l'infini. Les hypothèses étant vérifiée, la série $\sum \frac{1}{\ln(n)n}$ est de même nature que la suite $\left(\int_2^n \frac{1}{x\ln x}dx\right) = (\ln(\ln(n)) - 2)$. Cette suite diverge donc la série aussi.
Enfin par théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch} n)}$ diverge.

4. On a :

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e - e^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^2}))} = e(1-e^{-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n})}) \sim_{n\to\infty} \frac{e}{2n}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est divergente par règle de comparaison.

Exercice **Nature**

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$
2. $u_n = \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^2}$
3. $u_n = \frac{|\sin(n)|+|\cos(n)|}{n}$
4. $u_n = \frac{(n!)^2}{2n!}$
5. $u_n = (\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2$
6. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

Correction

1. $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$ est une série à termes positifs (SATP). On a :

$$\frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$ est convergente par règle de comparaison.

2. Étudions la nature de SATP $\sum \frac{|\sin(n)+\cos(n)|}{n^2}$. On a :

$$\frac{|\sin(n)+\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum \frac{|\sin(n)+\cos(n)|}{n^2}$ est convergente par règle de comparaison. La série $\sum \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

3. $\sum \frac{|\sin(n)|+|\cos(n)|}{n}$ est une STAP. On a :

$$\frac{|\sin(n)|+|\cos(n)|}{n} \geq \frac{|\sin(n)|^2+|\cos(n)|^2}{n} = \frac{1}{n}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{|\sin(n)|+|\cos(n)|}{n}$ est divergente par règle de comparaison.

4. $\sum \frac{(n!)^2}{2n!}$ est une SATP. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2(n+1)!}}{\frac{(n!)^2}{2n!}} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\frac{2n!}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to_{n\to\infty} \frac{1}{4}.$$

D'après la règle de d'Alembert ($\frac{1}{4} < 1$), la série $\sum \frac{(n!)^2}{2n!}$ est convergente.

5. On a $u_n = a_{n+1} - a_n$ avec $a_n = (\ln(n))^2$. $\sum(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2$ est une série télescopique. Sa somme partielle est égale :

$$S_n = (\ln(n+1))^2 - (\ln(1))^2 = (\ln(n+1))^2 \to_{n\to\infty} +\infty.$$

Donc la série diverge.

6. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est une SATP. On a :

$$\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/2}} = 0$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente ($\frac{3}{2} > 1$), la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente par règle de comparaison.

Exercice **Série harmonique**

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

2. En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose pour $n \geq 1$, $v_n = H_n - \ln(n)$. Vérifier que $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
4. Étudier la monotonie de (v_n).
5. En déduire que la suite $(H_n - \ln(n))$ est convergente.

Correction

1. Voir la démonstration sur la comparaison série-intégrale. On a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx = \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx = 1 + \ln(n)$$

.

2. On divise ces inégalités par $\ln(n)$:

$$1 + \ln(1 + 1/n) \leq H_n/\ln(n) \leq 1 + 1/\ln(n).$$

Les deux extrémités tendent vers 1 donc $H_n \sim_{n\to\infty} \ln(n)$.

3. $v_n - v_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
4. On a $\ln(1-x) \leq -x$. D'où $x + \ln(1-x) \leq 0$. Ainsi (v_n) est décroissante car $v_n - v_{n-1} \leq 0$.
5. D'après l'inégalité de la question 1 on $0 \geq \ln(n+1) - \ln(n) \leq H_n - \ln(n)$. La suite $(v_n) = (H_n - \ln(n))$ est minorée et décroissante donc convergente.

Exercice **Calcul d'une somme**

Calculer la somme de la série : $\sum \frac{n+1}{3^n}$.

Correction

Sans l'outil des séries entières, on bricole :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= (S-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $S = \frac{9}{4}$.

Exercice **Alternée**

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{\sin n^2}{n^2}$ **2**. $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
3. $u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$

Correction

1. On a : $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série converge absolument.
2. La série est alternée, et la suite $(\ln(n)/n$ est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers 0. Donc par application du critère des séries alternées, la série converge.
3. On a $cos(n^2\pi) = (?1)^n$. La suite $(1/\ln(n)n$ est décroissante et converge vers 0. Donc la série converge par application du critère des séries alternées.

Exercice **Cauchy**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k(n-k)!}$$

Montrer que la série$\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Correction

Le terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k(n-k)!}$ est le produit de Cauchy de la suite $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et de la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)$.
Les deux séries $\sum -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n!}$ sont absolument convergente donc la série produit de Cauchy est absolument convergente.

De plus, sa somme est égale au produit des deux sommes, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} e^1 = \frac{4e}{3}.$$

Exercice **Produit scalaire**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont convergentes.
Démontrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
Application : soit (a_n) une suite positive telle que la série de terme général a_n converge. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Correction

En développement l'inégalité $(|a|-|b|)^2 \geq 0$, on obtient $|a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Donc :

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont convergentes donc la série $\sum \frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$ est convergente. Par critère de comparaison, la série $\sum |u_n v_n|$ est convergente. Donc la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.
C'est une application directe du théorème précédent en prenant $u_n = \sqrt{a_n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

Exercice **convergence**

Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs.
Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

Correction

Puisque la série $\sum u_n$ converge, on a :

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

A partir d'un certain rang N, on a $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq N$. Multiplions cette inégalité par u_n, on a :

$$0 \leq u_n^2 \leq u_n, \forall n \geq N.$$

Comme la série $\sum u_n$ est convergente, la série $\sum_{n\geq N} u_n$ est convergente par critère par comparaison.
Donc la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice **Convergence**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positif convergente.
Démontrer que la suite $(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k))$ est convergente.

Correction

On a $\ln(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)) = \sum_{k=0}^{n} \ln((1+u_k))$. Comme la série $\sum u_n$ converge, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $\ln(1+u_n) \sim_{n\to\infty} u_n$. La série à termes positifs $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente car $\sum u_n$ est convergente.
Comme la fonction ln est continue, la suite $(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k))$ est convergente.