

Exemple fil de rouge de l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre numériquement des problèmes issus de divers domaines : des sciences physiques ou mécaniques, des sciences du vivant, de la chimie, de l'économie, des sciences de l'ingénieur...

Cette exemple introductif permet de présenter les **differentes représentations** de l'objet mathématique système d'équations linéaires.

Exemple

Problème : la somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0.5 mètres. Quelle est la taille du fils et du père ?

Modélisation :

Soit l'inconnue x représentant la taille du fils et l'inconnue y représentant la taille du père.

La somme est 2,5 donc $x + y = 2,5$.

La différence est 0,5 donc $y - x = 0,5$.

Ainsi on cherche x et y vérifiant le système (S) :

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2,5 \\ x + 0,5 = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2,5 \\ -x + y = 0,5 \end{array} \right.$$

I Système d'équations

A Résolution algébrique

Pour déterminer l'ensemble des solutions x et y vérifiant ce système, une idée est de découpler par itérations les dépendances entre les inconnues dans les équations par combinaison ou élimination. A chaque itération, ces deux opérations transforment un système d'équations en un autre équivalent (ayant les mêmes solutions).

L'application à l'exemple introductif est :

1. pour éliminer x de la ligne 2, on ajoute à la ligne 2 la ligne 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2,5 \\ 2y = 3 \end{array} \right.$$

2. pour déterminer y , on divise la ligne 2 par 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2,5 \\ y = 1,5 \end{array} \right.$$

3. pour éliminer y de la ligne 2, on soustraie à la ligne 1 la ligne 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1,5 \end{array} \right.$$

Ainsi l'ensemble des solution est l'unique solution $(1, 1, 5)$ car ce dernier système d'équations est équivalent au premier.

Cette approche sera l'objet du chapitre système d'équations linéaires.

B Résolution géométrique

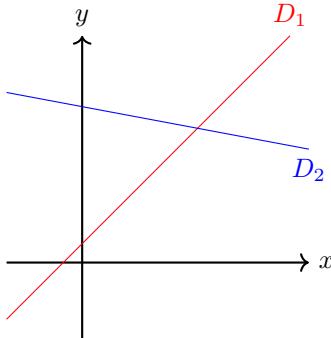
Le système équation :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = 2,5 & (D_1) \\ -x + y = 0,5 & (D_2) \end{cases}$$

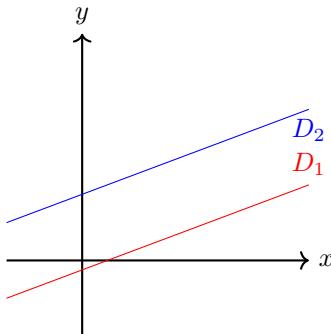
est constitué de deux équations de deux droites D_1 et D_2 .

Trois cas se présentent alors :

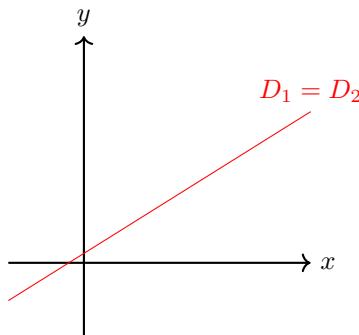
- Si les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, alors elle s'intersecte en un unique point et le système (S) a une unique solution.



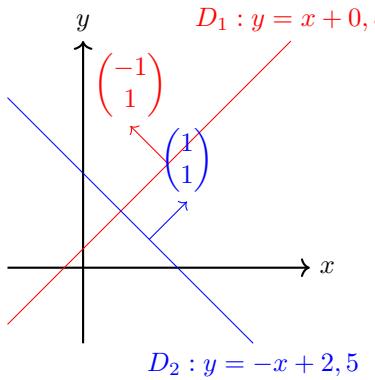
- Si les droites D_1 et D_2 sont parallèles et non confondues, alors elle ne s'intersecte pas et le système (S) n'a pas de solution.



- Si les droites D_1 et D_2 sont parallèles et confondues, alors elle s'intersecte en une infinité de points et le système (S) a une infinité de solutions.



Dans notre exemple, comme les vecteurs normaux aux deux droites $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles et donc admettent un unique point d'intersection.



Ainsi l'ensemble des solution admet une unique solution. Par lecture graphique, l'unique solution est $(1, 1, 5)$. La notion de vecteurs normaux sera l'objet du chapitre **espaces préhilbertiens**.

II Calcul matricielle

On sait résoudre par de simples opérations algébriques une équation linéaire à une inconnue. Par exemple, pour l'équation $2x + 1 = 5$, on additionne l'opposé de 1, soit -1

$$2x + 1 + (-1) = 5 + (-1)$$

ce qui donne $2x = 4$, puis on multiple par l'inverse de 2, ce qui donne $x = 2$.

Une idée est de transformer le système de deux équations à deux inconnues à une équation à une inconnue. Cette transformation est une abstraction sur la nature des coefficients et des variables des équations : de **réels à tableaux de nombres**.

Ainsi, l'équation équivalente au système d'équations linéaires est :

$$\begin{cases} \textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} = 2,5 \\ -\textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \textcolor{red}{x} \\ \textcolor{green}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on

$$A \times X = B$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

En calculant le déterminant de la matrice (voir chapitre **déterminant**), on démontre que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, c'est à dire qu'il existe une matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ telle que, en multipliant, par A^{-1} les deux membres de l'équation $A \times X = B$, on obtient :

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

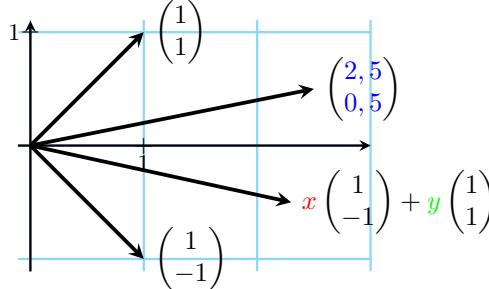
Par identification, l'ensemble des solution est de nouveau l'unique solution $x = 1$ et $y = 1,5$. Les**matrices** seront étudiées dans le chapitre **matrices**.

III Espace vectoriel

Une idée est de transformer ce système de deux équations à deux inconnues en un système d'une équation à deux inconnues. On a :

$$\begin{cases} \textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} = 2,5 \\ -\textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \textcolor{red}{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \textcolor{green}{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de déterminer x, y afin d'exprimer $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de la famille des vecteurs $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.



Avec GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/shsawcqc>), on trouve l'unique couple $(x = 1, y = 1, 5)$. D'un point de vue mathématiques, on se pose trois questions :

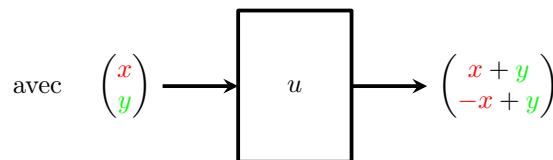
1. **Existence** : la famille est-elle **génératrice** de \mathbb{R}^2 ? C'est à dire, peut-on exprimer tout vecteur de \mathbb{R}^2 comme une combinaison linéaire de la famille des vecteurs $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$? Si cela est vraie, alors, en particulier, le vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ s'exprime comme une combinaison linéaire de la famille des vecteurs $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
2. **Unicité** : la famille est-elle **libre** ? Lorsque un vecteur de \mathbb{R}^2 s'exprime comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y-a-t-il unicité de cette combinaison linéaire ? Si cela est vrai, alors, en particulier, il y a unicité de la combinaison linéaire pour exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
3. **Existence et Unicité** : la famille est-elle **base** ? c'est à dire la famille est-elle **génératrice et libre** ? c'est à dire peut-on exprimer tout vecteur de \mathbb{R}^2 comme une unique combinaison linéaire de la famille des vecteurs $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$? Si cela est vrai, alors, en particulier, il y a existence et unicité de la combinaison linéaire pour exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ et l'ensemble des solutions est un unique couple.

L'étude des combinaisons linéaires sera fait dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

IV Application linéaire

La dernière idée est de considérer le membre de gauche de l'équation comme l'image d'une fonction :

$$\begin{cases} \textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} = 2,5 \\ -\textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} \\ -\textcolor{red}{x} + \textcolor{green}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u(\begin{pmatrix} \textcolor{red}{x} \\ \textcolor{green}{y} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$



Les solutions du système sont l'ensemble des antécédents $\begin{pmatrix} 2, 5 \\ 0, 5 \end{pmatrix}$ par la fonction à deux variables u
$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

L'étude générale des fonctions à plusieurs variables est compliquée et est fait dans un cours d'analyse, cependant, du fait que la fonction u possède une propriété de linéarité :

$$u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + u\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad u(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \lambda u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

son étude est plus facile. Ainsi on peut démontrer qu'elle est bijective et que donc il existe une unique vecteur antécédent au vecteur $\begin{pmatrix} 2, 5 \\ 0, 5 \end{pmatrix}$. Le système admet une unique solution.

L'étude des applications linéaires sera fait dans le chapitre **applications linéaires**.