

Espaces vectoriels

Exemple Tailles d'un père et d'un fils

La somme des tailles d'un fils et du père est de 2,5 mètres. La différence de tailles est de 0,5 mètres. Quel est la taille du fils ?

Soit la variable x représentant la taille du fils et la variable y représentant la taille du père.

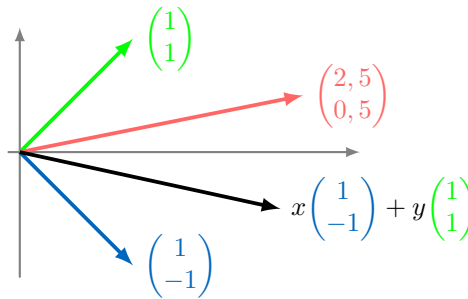
Le couple (x, y) vérifie le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y &= 2,5 \\ -x + y &= 0,5 \end{cases}$$

Une idée est de transformer ce système de deux équations à deux inconnues en un système d'une équation à deux inconnues. On a :

$$\begin{cases} x + y &= 2,5 \\ -x + y &= 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de déterminer x, y afin d'exprimer $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de la famille des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.




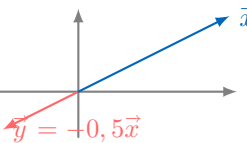
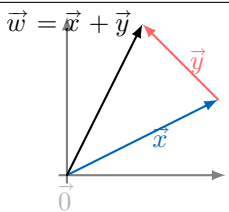
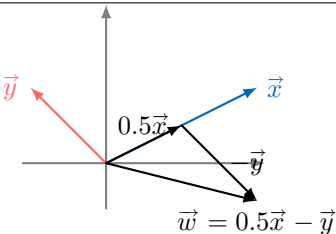
Avec GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/shsawcqc>, on trouve l'unique couple $(x = 1, y = 1,5)$. D'un point de vue mathématiques, on se pose trois questions :

1. **Existence** : la famille est-elle **génératrice** de \mathbb{R}^2 ? C'est à dire, peut-on exprimer tout vecteur de \mathbb{R}^2 comme une combinaison linéaire de la famille des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$? Si cela est vraie, alors, en particulier, le vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ s'exprime comme une combinaison linéaire de la famille des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. **Unicité** : la famille est-elle **libre** ? Lorsque un vecteur de \mathbb{R}^2 s'exprime comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y-a-il unicité de cette combinaison linéaire ? Si cela est vraie, alors, en particulier, il y a unicité de la combinaison linéaire pour exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
3. **Existence et Unicité** : la famille est-elle **base** ? c'est à dire la famille est-elle **génératrice et libre** ? c'est à dire peut-on exprimer tout vecteur de \mathbb{R}^2 comme une unique combinaison linéaire de la famille des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$? Si cela est vraie, alors, en particulier, il y a existence et unicité de la combinaison linéaire pour exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ et l'ensemble des solutions est un unique couple.

Pour répondre à ces questions, on pourrait se limiter à étudier l'ensemble des vecteurs du plan \mathbb{R}^2 . Cependant il existe de très nombreux ensembles où il est possible d'effectuer des combinaisons linéaires entre les éléments, c'est à dire additionner deux éléments $\vec{x} + \vec{y}$ et multiplier chaque élément par un facteur $\lambda \vec{x}$. Une stratégie efficace pour étudier ces ensembles est :

1. de définir une structure algébrique basée sur les propriétés de la **combinaison linéaire** entre les éléments : cette structure s'appelle **espace vectoriel**,
2. de démontrer des énoncés sur cette structure : ce qui est vrai ou faux dans cette structure l'est aussi pour tous les cas particuliers, par exemple la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une **base** de \mathbb{R}^2 donc il existe une unique solution au problème des tailles du père et du fils.

Afin de bien comprendre ce chapitre, il est très important de comprendre les différentes représentations d'un vecteur dans le plan et l'espace :

	Vecteur géométrique	Vecteur numérique	Vecteur algébrique
Représentation		$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	\vec{x}
Homothétie		$\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = -0.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{y} = -0.5\vec{x}$
Addition		$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$
Combinaison linéaire		$\begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{w} = 0.5\vec{x} - \vec{y}$

Il est très important de se représenter les espaces vectoriels, même les plus abstraits, comme des mondes géométriques semblables au plan ou à l'espace car il est toujours possible de le "géométriser".

Dans ce cours, un corps \mathbb{K} désigne soit l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ou soit l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

I Espaces vectoriels

A Définitions

Définition Espace vectoriel : $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$

Soit \mathbb{K} un corps.

Un **\mathbb{K} -espace vectoriel** est un triplet $(E, +, \cdot)$ où $+$ est une loi de composition interne sur E et \cdot est une loi de composition externe sur E , vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. la loi \cdot est compatible avec la structure de groupe $(E, +)$, c'est-à-dire
 - (a) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{x} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \vec{x}) + (\mu \cdot \vec{x})$;
 - (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda \cdot \vec{x}) + (\lambda \cdot \vec{y})$;
 - (c) $\forall \vec{x} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
 - (d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{x} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$.

Vocabulaire

- Un élément d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est appelé un **vecteur** et est noté dans ce cours avec une flèche \vec{x} .
- Un élément du corps \mathbb{K} est un **scalaire** et est noté dans ce cours à l'aide d'une lettre grecque, λ .
- L'**élément neutre** $\vec{0}_E$ s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de \mathbb{K} . Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, $\vec{0}_E$ sera aussi noté $\vec{0}$.
- Le **symétrique** $-\vec{x}$ d'un vecteur $\vec{x} \in E$ s'appelle aussi l'**opposé**.
- La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'**addition** et $\vec{x} + \vec{y}$ est appelée **somme** des vecteurs \vec{x} et \vec{y} .
- L'opération qui à (\vec{x}, \vec{y}) associe $\vec{x} + (-\vec{y})$ s'appelle la **soustraction**. Le vecteur $\vec{x} + (-\vec{y})$ est noté $\vec{x} - \vec{y}$.
- La loi de composition externe sur E est appelée couramment **multiplication par un scalaire**. La multiplication du vecteur \vec{x} par le scalaire λ sera souvent notée simplement $\lambda\vec{x}$, au lieu de $\lambda \cdot \vec{x}$.

Définition Somme de n vecteurs

On note la **somme de n vecteurs** :

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \vec{u}_i.$$

L'associativité de la loi $+$ nous permet de ne pas mettre de parenthèses dans la somme.

B Espaces vectoriels de référence

Exemple Plan \mathbb{R}^2

La plan est représenté par le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 .

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est donc un couple (x, y) avec x, y éléments de \mathbb{R} . Ceci s'écrit $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

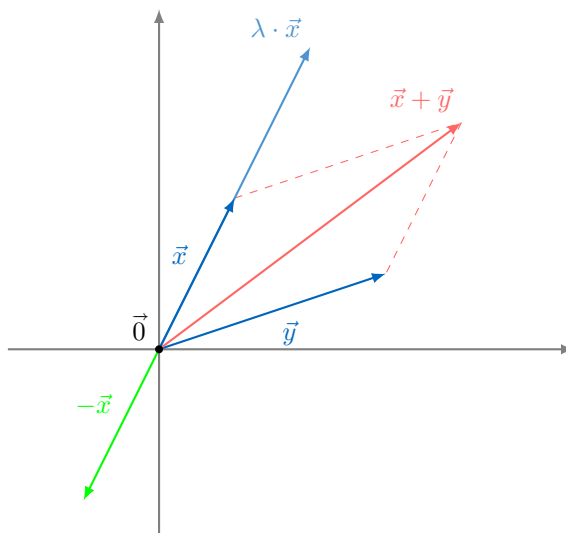
- **Définition de la loi interne.** Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de \mathbb{R}^2 , alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

- **Définition de la loi externe.** Si λ est un réel et (x, y) est un élément de \mathbb{R}^2 , alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.



Par exemple : $(1, 4) + 2(0, 2) = (1, 8)$.

Exemple Familles de scalaires \mathbb{R}^n

Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est donc un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) avec x_1, x_2, \dots, x_n des éléments de \mathbb{R} .

— **Définition de la loi interne.** Si (x_1, \dots, x_n) et (x'_1, \dots, x'_n) sont deux éléments de \mathbb{R}^n , alors :

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n).$$

— **Définition de la loi externe.** Si λ est un réel et (x_1, \dots, x_n) est un élément de \mathbb{R}^n , alors :

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0, \dots, 0)$. Le symétrique de (x_1, \dots, x_n) est $(-x_1, \dots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \dots, x_n)$.

De manière analogue, on peut définir le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^n , et plus généralement le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n .

Exemple Matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est donc une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec a_{ij} des éléments de \mathbb{K} .

— **Définition de la loi interne.** Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}.$$

— **Définition de la loi externe.** Si λ est un réel et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

L'élément neutre de la loi interne est le matrices nulle.

Par exemple, pour $n = 2$ et $p = 3$: $3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 12 \\ 8 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$

Exemple **Polynômes** $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est donc un polynôme de degré au plus n $P = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ avec a_0, a_1, \dots, a_n des éléments de \mathbb{K} .

- **Définition de la loi interne.** Si $P = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2 + \dots + b_nX^n$ sont deux éléments de $\mathbb{K}_n[X]$, alors :

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X^1 + (a_2 + b_2)X^2 + \dots + (a_n + b_n)X^n$$

- **Définition de la loi externe.** Si λ est un réel et $P = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$, alors :

$$\lambda \cdot P = \lambda a_0 + \lambda a_1X^1 + \lambda a_2X^2 + \dots + \lambda a_nX^n.$$

L'élément neutre de la loi interne est le polynôme nul 0. Le symétrique de $P = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ est $-P = -a_0 - a_1X^1 - a_2X^2 - \dots - a_nX^n$.

De même, l'ensemble des polynôme $\mathbb{K}[X]$ est aussi un espace vectoriel.

Par exemple, pour $P = X$ et $Q = 1 + X^2$: $2P + Q = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2$.

Exemple **Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel**

Soit X un ensemble non vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel. L'ensemble des fonctions de X dans E , noté $\mathcal{F}(X, E)$ est un espace vectoriel. Un vecteur est donc une fonction.

- **Définition de la loi interne.** Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}(X, E)$, alors :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

- **Définition de la loi externe.** Si λ est un réel et f un élément de $\mathcal{F}(X, E)$, alors :

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x).$$

L'élément neutre de la loi interne est l'application nulle : $x \mapsto \vec{0}_E$.

Par exemple, pour $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^2 x \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin^2 x \end{array} \right.$, la fonction $2f + 2g$ est définie par

$$2f + 2g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2 \end{array} \right.$$

C Règle de calculs

Proposition Règles de calculs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors on a :

1. $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$
2. $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$
3. $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$
4. $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E$

Démonstration

Les démonstrations des propriétés sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels.

1. On a $(0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x}$ du fait de l'égalité dans \mathbb{K} : $0 + 0 = 0$. En utilisant la distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne, on obtient $0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x}$. En ajoutant $-(0 \cdot \vec{x})$ de chaque côté de l'égalité, on obtient : $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
2. La preuve est semblable en partant de l'égalité $\vec{0}_E + \vec{0}_E = \vec{0}_E$.
3. Montrer $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$ signifie exactement que $(-1) \cdot \vec{x}$ est le symétrique de \vec{x} , c'est-à-dire vérifie

$\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$. En effet :

$$\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1 + (-1)) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E.$$

4. On sait déjà que si $\lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$, alors les propriétés précédentes impliquent $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
 Pour la réciproque, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $\vec{x} \in E$ un vecteur tels que $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
 Supposons λ différent de 0. On doit alors montrer que $\vec{x} = \vec{0}_E$.
 Comme $\lambda \neq 0$, alors λ est inversible pour le produit dans le corps \mathbb{K} . Soit λ^{-1} son inverse.
 En multipliant par λ^{-1} les deux membres de l'égalité $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$, il vient : $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0}_E$.
 D'où en utilisant les propriétés de la multiplication par un scalaire $(\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$ et donc $1 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
 D'où $\vec{x} = \vec{0}_E$.

D Combinaisons linéaires

Définition Combinaisons linéaires

Soit $n \geq 1$ un entier, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires.
 Tout vecteur de la forme

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$$

est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés **coefficient**s de la combinaison linéaire.

Si $n = 1$, alors $\vec{y} = \lambda_1 \vec{x}_1$ et on dit que \vec{y} est **colinéaire** à \vec{x}_1 .

Remarque

Plus généralement, on peut définir une combinaison linéaire d'une famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ (non nécessairement finie) comme étant la combinaison linéaire de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de \mathbb{K} contenant un nombre fini d'éléments non nulle.

Par exemple, $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Exemple \mathbb{R}^n

1. Dans \mathbb{R}^3 , $(3, 3, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ car on a l'égalité

$$(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1).$$

2. Démontrer que le vecteur $(2, 1)$ n'est pas colinéaire au vecteur $(1, 1)$.

Correction

Analyse : on cherche un réel λ tel que $(2, 1) = \lambda(1, 1)$, ce qui équivaudrait à l'égalité $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$. Ce système n'a aucune solution.

Conclusion : il n'existe pas λ tel que $(2, 1) = \lambda(1, 1)$ donc $(2, 1)$ n'est pas colinéaire au vecteur $(1, 1)$.

3. Démontrer que $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Correction

Analyse : on cherche donc λ et μ tel que :

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{cases} 9 &= \lambda + 6\mu \\ 2 &= 2\lambda + 4\mu \\ 7 &= -\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Une solution de ce système est $(\lambda = -3, \mu = 2)$.

Synthèse : on vérifie que l'on a bien

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Démontrer que $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Correction

Analyse : on cherche donc λ et μ tel que :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{équivaut au système} \quad \begin{cases} 4 &= \lambda + 6\mu \\ -1 &= 2\lambda + 4\mu \\ 8 &= -\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Or ce système n'a aucune solution.

Conclusion : il n'existe pas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$.

Exemple Fonctions réelles

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles.

1. La fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \end{array} \right.$ est une combinaison linéaire de

$$f_0 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array} \right., f_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array} \right., f_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. \text{ et } f_3 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array} \right.$$

car on a l'égalité $f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$.

2. Démontrer que la fonction exponentielle \exp n'est pas une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques \cos et \sin .

Correction

Analyse : on cherche donc λ et μ tel que : $\exp = \lambda \cos + \mu \sin$. Une première solution est d'évaluer les fonctions en $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ pour obtenir le système :

$$\begin{cases} e^0 &= \lambda \\ e^{\frac{\pi}{2}} &= \mu \\ e^{\pi} &= -\lambda \\ e^{\frac{3\pi}{2}} &= -\mu \end{cases}$$

Or ce système n'a aucune solution.

Une autre solution est une étude du comportement asymptotique, c'est-à-dire \exp tends vers l'infini en l'infini tandis que $\lambda \cos + \mu \sin$ est bornée.

Conclusion : il n'existe pas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$ donc la fonction \exp n'est pas une combinaison linéaire des fonctions \cos et \sin .

Exemple **Matrices**

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. On peut écrire A naturellement sous la forme suivante d'une combinaison linéaire de matrices élémentaires (des zéros partout, sauf un 1) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E Espace vectoriel produit**Définition Produit cartésien**

Soit $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On pose

$$E = E_1 \times E_2 = \{(\vec{x}_1, \vec{x}_2) : \vec{x}_1 \in E_1, \vec{x}_2 \in E_2\}.$$

E est le **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2 .

On définit la loi de composition interne $+$ sur E par :

$$\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E, (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in E, (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 +_1 \vec{y}_1, \vec{x}_2 +_2 \vec{y}_2).$$

et la loi de composition externe \cdot sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E, \lambda \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda \cdot_1 \vec{x}_1, \lambda \cdot_2 \vec{x}_2).$$

Ainsi défini, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

De même on définit le produit cartésien des \mathbb{K} -espaces vectoriels $(E_1, +_1, \cdot_1), (E_2, +_2, \cdot_2), \dots, (E_p, +_p, \cdot_p)$, en notant $E = \prod_{k=1}^p E_k$.

Exemple

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un \mathbb{K} -espace vectoriel, on définit E^p par

$$E^p = \prod_{k=1}^p E.$$

Notez le cas particulier $E = \mathbb{K}$, où $E^p = \mathbb{K}^p$.

II Sous-espace vectoriel

A Définitions

Définition-Proposition Sous espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si F

- non vide
- stable par $+$: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \vec{y} \in F$,
- stable par \cdot : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in F, \lambda \cdot \vec{x} \in F$.

Muni des lois induites, F est alors un espace vectoriel.

Démonstration

Les deux lois sur E induisent deux lois sur F qui vérifient les axiomes de la définition d'un espace vectoriel.

Remarque

Comme F est un sous espace vectoriel de E , F est un sous-groupe de E , donc : $\vec{0}_F = \vec{0}_E \in F$.

Méthode

Pour répondre à une question du type "L'ensemble F est-il un espace vectoriel?", une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel de référence E qui contient F , puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E . Il y a seulement trois propriétés à vérifier au lieu de huit !

Proposition Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

- $\vec{0}_E \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

Démonstration

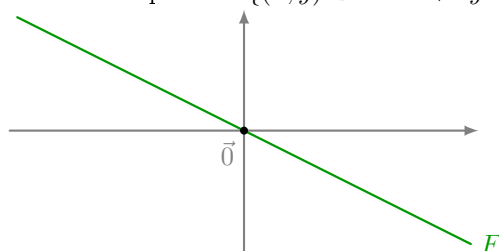
- Supposons que F soit un sous-espace vectoriel.
 - Comme F est sous-espace vectoriel, F est un espace vectoriel et en tant que groupe additif $\vec{0}_E \in F$.
 - Soit $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est sous-espace vectoriel, $\lambda \vec{x} \in F$ car stable par \cdot et $\lambda \vec{x} + \vec{y} \in F$ car stable par $+$.
- Réciproquement, supposons que $\vec{0}_E \in F$ et que pour chaque $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda \vec{x} + \vec{y} \in F$.
 - F n'est pas vide car $\vec{0}_E \in F$.
 - Soit $\vec{x}, \vec{y} \in F$. En posant $\lambda = 1$, on obtient $\vec{x} + \vec{y} = 1\vec{x} + \vec{y} \in F$.
 - Soit $\vec{x} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En posant $\vec{y} = \vec{0}_F$, on obtient $\lambda \vec{x} = \lambda \vec{x} + \vec{y} \in F$.

Exemple Espace vectoriel triviaux

$\vec{0}_E$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E , appelés triviaux.

Exemple Plan

Démontrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .



Correction

- **non vide** : $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ car $0 + 2 \cdot 0 = 0$.
- **stable par +** : Soit $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{x}_2 = (x_2, y_2) \in F$ d'où $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$.
On a $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = \overbrace{(x_1 + 2y_1)}^{=0} + \overbrace{(x_2 + 2y_2)}^{=0} = 0.$$

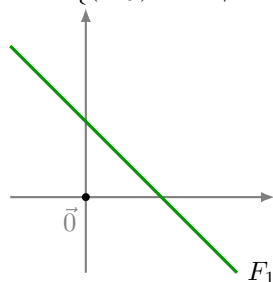
Donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F$.

- **stable par .** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} = (x, y) \in F$ d'où $x + 2y = 0$.
On a $\lambda\vec{x} = (\lambda x, \lambda y)$ et

$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda \overbrace{(x + 2y)}^{=0} = 0.$$

Donc $\lambda\vec{x} \in F$.

$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?



Correction

Le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1 donc F_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Exemple Fonctions

Démontrer que les fonctions continues sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Correction

La fonction nulle est continue, la somme de deux fonctions continues est continue et une constante fois une fonction continue est une fonction continue.

Démontrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Correction

La suite nulle est convergente (vers 0), la somme de deux suites convergentes est convergente et une constante fois une suite convergente est une suite convergente.

Exemple Matrices

Démontrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans \mathbb{K} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction

La matrice nulle est triangulaire, la somme de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire et une constante fois une matrice continue est une matrice triangulaire.

B Engendré par une famille

Définition Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs.

On appelle l'**espace engendré** l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$, noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$:

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \{\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{x}_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$.

Par convention, $\text{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

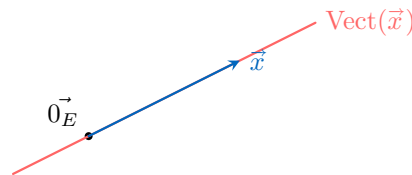
Remarque

Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$.

Par exemple, $\mathbb{K}[X] = \vec{X^i}_{i \in \mathbb{N}}$.

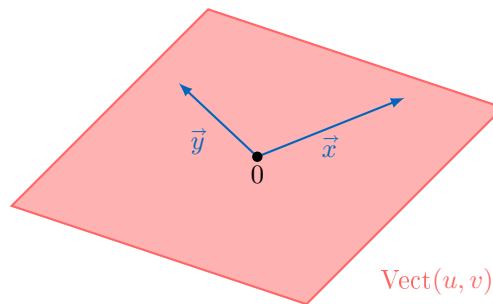
Exemple Droite vectorielle

Lorsque que $p = 1$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\text{Vect}(\vec{x}) = \{\lambda \cdot \vec{x} : \forall \lambda \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par \vec{x} . On la note $\mathbb{R}\vec{x}$.



Exemple Plan vectoriel

Lorsque que $p = 2$ avec \vec{x} non colinéaire à \vec{y} , $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \{\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est le **plan vectoriel** engendré par (\vec{x}, \vec{y}) . On le note $\mathbb{R}\vec{x} + \mathbb{R}\vec{y}$.



C Intersection

Proposition

Soit F, G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Alors l'intersection $F \cap G$ est également un sous espace vectoriel.

De même l'intersection $F_1 \cap G \cap F_3 \cap \dots \cap F_p$ d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.

Démonstration

- **non vide** : comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ donc $\vec{0}_E \in F \cap G$
- **stable par +** : soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F \cap G$ d'où $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F$ et $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in G$.
Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F$ implique $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F$. De même, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in G$ implique $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in G$. Donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in F \cap G$.

— **stable par \cdot** : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{x} \in F \cap G$.

Comme F est un sous-espace vectoriel, $\lambda\vec{x} \in F$. De même, $\lambda\vec{x} \in G$. Donc $\lambda\vec{x} \in F \cap G$.

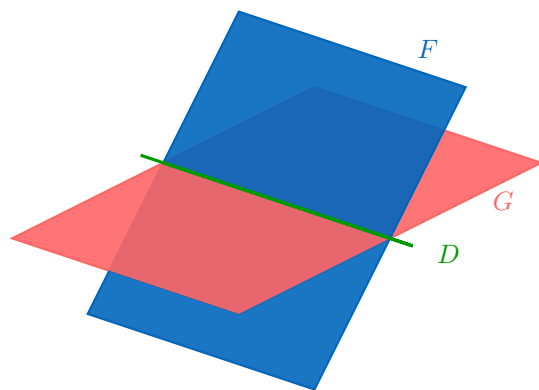
$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple Intersection de deux plans dans l'espace

Démontrer que $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Correction

l'intersection de deux plans vectoriels, F et G dans \mathbb{R}^3



D Somme de sous-espaces vectoriels

Définition-Proposition Somme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On appelle **somme** de F et G l'ensemble $F + G$ des vecteurs de la forme $\vec{x} + \vec{y}$ où $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$; autrement dit,

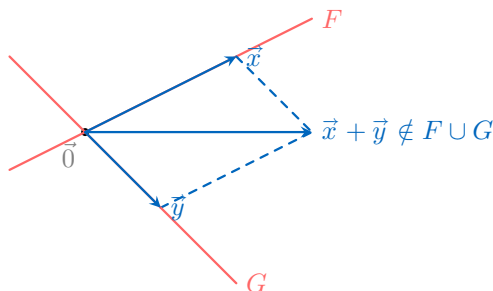
$$F + G = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\}.$$

$F + G$ est un sous espace vectoriel de E .

Plus précisément $F + G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E contenant F et G .

Remarque

Pour construire un sous-espace vectoriel contenant deux sous espaces vectoriels F et G , une idée aurait été de considérer l'union F et G . Cependant $F \cup G$ n'est presque jamais un sous espace vectoriel.



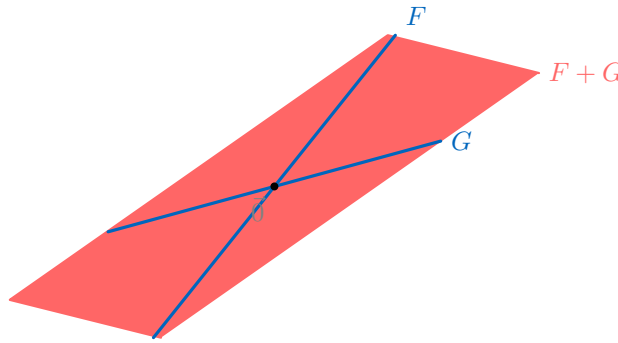
Bien que vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in F \cup G$, leur somme $\vec{x} + \vec{y}$ n'appartient pas à $F \cup G$.

Démonstration

- **non vide** : $\vec{0} \in F$ et G d'où $\vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} \in F + G$.
- **stable par +** : Soit $\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2 \in F + G$.
 $\vec{x}_1 + \vec{y}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_2 = \underbrace{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}_{\in F} + \underbrace{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}_{\in G} \in F + G$.
- **stable par .** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} + \vec{y} \in F + G$.
 $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \underbrace{\lambda\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\lambda\vec{y}}_{\in G} \in F + G$.

Exemple Somme de deux droites vectorielles

Soit F et G deux droites vectorielles distinctes. La somme $F + G$ est un plan vectoriel.



E Somme directe de sous espaces vectoriels

Définition Somme directe

On dit que la somme $F + G$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x} + \vec{y}$ où $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$, ce qui revient à dire :

$$\forall \vec{x}, \vec{x}' \in F, \forall \vec{y}, \vec{y}' \in G : \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}' + \vec{y}' \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}' \text{ et } \vec{y} = \vec{y}'.$$

On note alors la somme $F \oplus G$ la somme $F + G$ pour indiquer qu'il y a somme directe.

De même, la somme $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ est **directe** si tout vecteur de la somme se décompose **de façon unique** sous la forme $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_p$ où $\vec{x}_1 \in F_1, \dots, \vec{x}_p \in F_p$.

Proposition Caractérisation de la somme directe

La somme $F + G$ est directe si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in F, \forall \vec{y} \in G : \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}_E \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E \text{ et } \vec{y} = \vec{0}_E.$$

De même la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si

$$\vec{x}_1 \in F_1, \dots, \vec{x}_p \in F_p : \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_p = \vec{0}_E \Rightarrow \vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_p = \vec{0}_E.$$

Démonstration

- (\Rightarrow) : Soit $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$ tel que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. On a aussi $\underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} = \vec{0}$. L'unicité de décomposition permet d'identifier $\vec{x} = \vec{0}$ et $\vec{y} = \vec{0}$.
- (\Leftarrow) : Supposons qu'un vecteur $\vec{z} \in F + G$ se décompose de 2 façons : $\vec{z} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{y}}_{\in G}$ et $\vec{z} = \underbrace{\vec{x}'}_{\in F} + \underbrace{\vec{y}'}_{\in G}$.

On soustrait ces deux égalités :

$$\vec{0} = \underbrace{\vec{x} - \vec{x}'}_{\in F} + \underbrace{\vec{y} - \vec{y}'}_{\in G}.$$

D'après l'hypothèse, on a $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{0}$ et $\vec{y} - \vec{y}' = \vec{0}$, d'où $\vec{x} = \vec{x}'$ et $\vec{y} = \vec{y}'$.

Proposition Caractérisation de la somme directe

La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

Remarque

Cette caractérisation ne se généralise pas (simplement) pour $p > 2$.
 $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{x}_1 = (1, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1)$ et $\vec{x}_3 = (1, 1)$. On a $\mathbb{R}\vec{x}_1 \cap \mathbb{R}\vec{x}_2 = \mathbb{R}\vec{x}_1 \cap \mathbb{R}\vec{x}_3 = \mathbb{R}\vec{x}_2 \cap \mathbb{R}\vec{x}_3 = \{(0, 0)\}$.
 Cependant la somme $\mathbb{R}\vec{x}_1 + \mathbb{R}\vec{x}_2 + \mathbb{R}\vec{x}_3$ n'est pas directe car $(1, 1) = 1(1, 1)$ et $(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$.

Démonstration

— (\Rightarrow) :

— $\{\vec{0}_E\} \subset F \cap G$: $\vec{0}_E \in F, G$ donc $\vec{0}_E \in F \cap G$.

— $F \cap G \subset \{\vec{0}_E\}$: Soit $\vec{x} \in F \cap G$. On a $\vec{0} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{-\vec{x}}_{\in G} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$. Par unicité de la décomposition,

on identifie $\vec{x} = \vec{0}$.

Du fait de la double inclusion, on a $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

— (\Leftarrow) :

Supposons qu'un $\vec{z} \in F + G$ se décompose de 2 façons : $\vec{z} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{y}}_{\in G}$ et $\vec{z} = \underbrace{\vec{x}'}_{\in F} + \underbrace{\vec{y}'}_{\in G}$.

On soustrait ces deux égalités :

$$\underbrace{\vec{x} - \vec{x}'}_{\in F} = \underbrace{\vec{y}' - \vec{y}}_{\in G}.$$

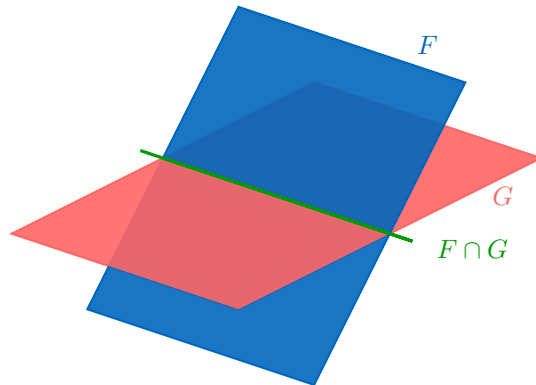
Comme $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$, on a $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{0}$ et $\vec{y} - \vec{y}' = \vec{0}$, d'où l'unicité de la décomposition avec $\vec{x} = \vec{x}'$ et $\vec{y} = \vec{y}'$.

Remarque

Pour démontrer que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$, dans le raisonnement de la double inclusion, on omettra l'inclusion $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ qui est évidente. En effet $\vec{0}_E \in F, G$ car F et G sont des espaces vectoriels.

Exemple

Géométriquement, l'intersection entre deux plans vectoriels distincts, F et G , est une droite vectoriel, donc la somme n'est pas directe.



Démontrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ ne sont pas en somme directe.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = \lambda, x = -\lambda, y = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(-1, 0, 1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}(-1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Finalement $F \cap G = \text{Vect}(-1, 0, 1)$ et F et G ne sont pas en somme directe.

F Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition Sous-espaces vectoriels supplémentaires

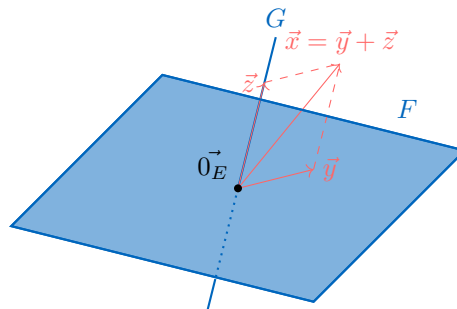
Si la somme $F + G$ est directe et égale à E , on dit que F et G sont **supplémentaires**, et on note

$$E = F \oplus G.$$

C'est-à-dire que tout vecteur de E se décompose d'une unique manière de la somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G : \quad \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$

De même si la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est directe et égale à E , on dit que F_1, F_2, \dots, F_p sont **supplémentaires**.



Remarque

Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Donc il est interdit d'écrire "le supplémentaire d'un sous espace vectoriel".

Il ne faut pas confondre "supplémentaire" et "complémentaire".

Exemple Espace

Démontrer que les sous-espaces vectoriels F et G de \mathbb{R}^3 définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Démonstration

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $(x_1, y_1, z_1) \in F$ et $(x_2, y_2, z_2) \in G$ tel que $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$.

Comme $(x_1, y_1, z_1) \in F$, $(x_1, y_1, z_1) = (\overbrace{y_1 + z_1}^{x_1 - y_1 - z_1 = 0}, y_1, z_1)$ et comme $(x_2, y_2, z_2) \in G$, $(x_2, y_2, z_2) = (x_2, 0, 0)$.

Ainsi

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (y_1 + z_1 + x_2, y_1, z_1).$$

On obtient $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x - y - z$. D'où l'unicité de la décomposition.

- **Synthèse** : On vérifie que $(x, y, z) = (\overbrace{y + z, y, z}^{\in F}) + (\overbrace{x - y - z, 0, 0}^{\in G})$. D'où l'existence de la décomposition.

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3.$$

Exemple Polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n .

Démontrer que $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où : $P\mathbb{K}[X] = \{PQ | Q \in \mathbb{K}[X]\}$

Correction

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne,

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] : A = \overbrace{PQ}^{\in \mathbb{K}[X]} + \overbrace{R}^{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]}.$$

Donc $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Exemple Fonctions pairs et impairs

Soit \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Démontrer que le sous-espace vectoriel des fonctions paires \mathcal{P} et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires \mathcal{I} sont supplémentaires.

Correction

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ tel que $f = g + h$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part, $f(x) = g(x) + h(x)$, et d'autre part, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$.

Par somme et différence, obtient

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

D'où l'unicité de la décomposition. **Synthèse.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose g, h définit par

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a $f = g + h$ et d'autre part $g \in \mathcal{P}$ car $\forall x \in \mathbb{R} : g(-x) = g(x)$ et $h \in \mathcal{I}$ car $\forall x \in \mathbb{R} : h(-x) = -h(x)$.

D'où l'existence de la décomposition.

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Proposition Existence d'un supplémentaire

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous espace vectoriel admet un supplémentaire.
Autrement dit, soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E .
Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration

La démonstration fait appel à des résultats ultérieurs (à visée pédagogique, cette proposition est placé ici).
Soit \mathcal{B}_1 une base de F que l'on complète avec \mathcal{B}_2 pour former une base de E .
Si on pose G l'espace vectoriel engendrée par \mathcal{B}_2 , alors $E = F \oplus G$.

III Base**A Famille génératrice****Définition Famille génératrice**

Une famille finie $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, c'est à dire si $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = E$, c'est à dire si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p.$$

Une famille génératrice garantit **l'existence pour tout vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire.**

Exemple Plan

Démontrer que la famille $\{(1, 1), (0, 1), (1, -1)\}$ est génératrice de \mathbb{R}^2 .

Correction

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1).$$

En revanche, la combinaison linéaire n'est pas unique car on a aussi $(x, y) = x(1, 1) + (y-1)(0, 1)$.

Exemple Espace

Déterminer une famille génératrice de l'espace vectoriel $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}$

Correction

Soit $(x, y, y) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in E \iff z = x + 2y.$$

Donc $E = \{(x, y, x+2y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) | x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, 0, 1), (0, 1, 1)$.

Exemple Espace

Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 .

Correction

Contre-exemple soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Si ce vecteur est combinaison linéaire de la famille, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. D'où le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$. D'où $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ce qui est impossible. Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 .

B Famille libre

Définition Famille libre

Une famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est **libre** si tout vecteur s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de la famille, c'est à dire si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}, \quad (\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_p \vec{x}_p \implies \lambda_1 = \beta_1, \dots, \lambda_p = \beta_p).$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**.

Remarque

La famille vide \emptyset est libre.

Une famille libre garantit **l'unicité des coefficients dans les combinaisons linéaires, donc le possibilité de pratiquer des identifications**.

Par exemple, si on a $\sum_{i=0}^p a_i (X+1)^i = \sum_{i=0}^p i (X+1)^i$, alors $a_i = i \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ car la famille $((X+1)^i)_{0 \leq i \leq p}$ est libre.

Exemple

Démontrer que la famille $\{(1, 1), (0, 1), (1, -1)\}$ n'est pas libre dans \mathbb{R}^2 .

Correction

Comme $(1, 1) + -2(0, 1) = 1(1, -1)$, un même vecteur s'exprime de manière différentes comme combinaison linéaire. Donc la famille n'est pas libre.

Proposition Caractérisation d'une famille libre

Une famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est **libre** si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Démonstration

— (\implies) : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}_E$. Comme $\vec{0}_E = 0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_p$. Par identification, on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

— (\impliedby) : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_p \vec{x}_p$. Par soustraction, on obtient :

$$(\lambda_1 - \beta_1) \vec{x}_1 + \dots + (\lambda_p - \beta_p) \vec{x}_p = \vec{0}_E.$$

D'après l'hypothèse, $\lambda_1 - \beta_1 = 0, \dots, \lambda_p - \beta_p = 0$, donc $\lambda_1 = \beta_1, \dots, \lambda_p = \beta_p$.

Proposition Caractérisation d'une famille liée

Une famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est **liée** si et seulement si au moins un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration

- (\Rightarrow) : Supposons que la famille est liée. D'après la caractérisation d'une famille libre, il existe une relation

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_p = \vec{0}_E$$

avec un $\lambda_k \neq 0$ pour au moins un $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Par soustraction de tous les autres termes, on obtient

$$\lambda_k \vec{x}_k = -\lambda_1 \vec{x}_1 - \dots - \lambda_{k-1} \vec{x}_{k-1} - \lambda_{k+1} \vec{x}_{k+1} - \dots - \lambda_p \vec{x}_p.$$

Comme $\lambda_k \neq 0$, on peut diviser cette égalité par λ_k et l'on obtient :

$$\vec{x}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \vec{x}_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \vec{x}_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \vec{x}_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_k} \vec{x}_p.$$

Donc \vec{x}_k est combinaison linéaire des autres vecteurs.

- (\Leftarrow) : Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que

$$\vec{x}_k = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \lambda_{k+1} \vec{x}_{k+1} + \dots + \lambda_p \vec{x}_p.$$

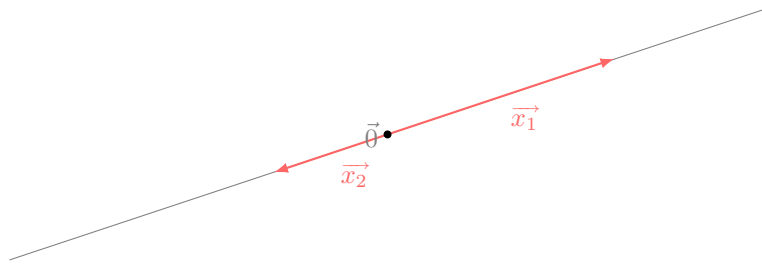
Par soustraction, on obtient :

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \vec{x}_k + \lambda_{k+1} \vec{x}_{k+1} + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}_E.$$

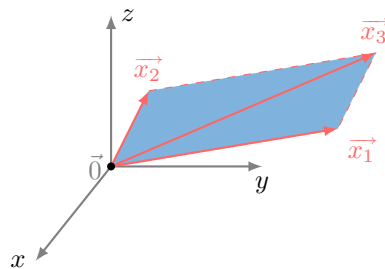
Comme $1 \neq 0$, la famille est liée d'après la caractérisation d'une famille libre.

Remarque Interprétation Géométrique

- Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.



- Dans \mathbb{R}^3 , trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires. Ils sont donc dans un même plan vectoriel.



Exemple **Espace**

Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas libre.

Correction

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -6\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ \text{Supprimer car } L_3 = L_2 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. On vérifie que

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est donc une famille liée.

Exemple **Polynôme**

Démontrer que la famille $((1 - X), (1 + 3X - X^2))$ est liée.

Correction

On a $3(1 - X) - (5 + 3X - 2X^2) + 2(1 + 3X - X^2) = 0$. donc la famille est liée.

Exemple **Exemple**

Démontrer que la famille $\{\cos, \sin\}$ est libre dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = 0$, cette égalité donne $\lambda = 0$. Et pour $x = \frac{\pi}{2}$, elle donne $\mu = 0$. Donc la famille $\{\cos, \sin\}$ est libre.

C Base

Définition Base

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire si tout vecteur de E est une et une seule manière combinaison linéaire de \mathcal{B} , c'est-à-dire,

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p.$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur \vec{x} dans la base \mathcal{B} .

Remarque

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, on introduit un **ordre** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permutait les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées. Le point de coordonnées $(1, 2)$ n'est pas le point de coordonnées $(2, 1)$.

On **n'a pas unicité** de la base. Les familles $((1, 0), (0, 1))$ et $((1, 0), (0, -1))$ sont deux bases de \mathbb{R}^2 .

Définition-Proposition Base canonique

- \mathbb{K}^n : la famille $(\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1))$ est une base de \mathbb{K}^n appelée sa **base canonique**.
- $\mathbb{K}_n[X]$: la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée sa **base canonique**.
- $\mathbb{K}[X]$: la famille $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée sa **base canonique**.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la famille $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ où la matrice $E_{i,j}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) , qui vaut 1 est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée sa **base canonique**.

Exemple

On a cette unique décomposition $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration

Toutes les démonstrations sont évidentes.

Pour les matrices, on a :

- Du fait de l'égalité, $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{i,j} E_{i,j}$, $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ des scalaires tel que

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{ij} E_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}.$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, $\lambda_{ij} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc la famille est libre.

La famille $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple Polynôme

Soit x_i $n + 1$ scalaires distincts.

On définit la famille des polynômes de Lagrange $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, l_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

Démontrer que la famille $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction

On vérifie que $l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

— Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

On pose $L = P(x_0)l_0 + P(x_1)l_1 + \dots + P(x_n)l_n$, d'où $L(x_i) = P(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Le polynôme $L - P$ s'annule aux $n+1$ points X_i . Comme $L - P$ est de degré au plus n , $L - P = 0$.

D'où $L = P$. La famille $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

— Soit $\lambda_0, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_0 l_0 + \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n = 0$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $\lambda_0 l_0(x_i) + \lambda_1 l_1(x_i) + \dots + \lambda_i l_i(x_i) + \lambda_n l_n(x_n) = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 + \dots + \lambda_i 1 + \lambda_n 0 = \lambda_i$, $\lambda_i = 0$.

La famille $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

La famille $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base $\mathbb{K}_n[X]$.

IV Dimension d'un espace vectoriel

A Définitions

Définition Dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On dit que E est **de dimension finie** s'il existe une famille finie génératrice de E , et **de dimension infinie** sinon.

Exemple

L'espace vectoriel des polynôme est de dimension infinie.

En revanche, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n est finie.

Exemple

L'espace vectoriel des fonctions continues réels est de dimension infinie.

B Existence de base finies

Théorème Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{L} une famille libre de E .

Alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Démonstration

Algorithme :

Soit la partie libre initiale \mathcal{L} .

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille finie, \mathcal{G} , génératrice de E .

On initialise \mathcal{B} à \mathcal{L} Tant que \mathcal{B} n'est pas génératrice de E :

1. Puisque \mathcal{G} engendre E et que \mathcal{B} n'est pas génératrice de E , il existe un vecteur \vec{g} de \mathcal{G} qui n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} .
2. On remplace \mathcal{B} par $\mathcal{B} \cup \{\vec{g}\}$, qui est encore libre car le nouveau vecteur n'est pas une combinaison linéaire des précédents.

La boucle se termine en un nombre fini d'étapes puisqu'on ajoute à chaque étape un élément de \mathcal{G} différent

des précédents et que \mathcal{G} est fini.

Preuve algorithmique :

- \mathcal{B} est libre par construction.
 - Pour montrer que \mathcal{B} est génératrice, il suffit de démontrer que tout vecteur de \mathcal{G} est combinaison linéaire de \mathcal{B} .
Soit $\vec{x} \in \mathcal{G}$. Par disjonction de cas, on a :
 - $\vec{x} \in \mathcal{B}$: évidemment \vec{x} combinaison linéaire de \mathcal{B} ($\vec{x} = 1\vec{x}$)
 - $\vec{x} \notin \mathcal{B}$: Donc, à une certaine étape, le vecteur \vec{x} n'a pas été ajouté à la famille \mathcal{B} parce qu'il était combinaison linéaire de certains vecteurs de \mathcal{B} à cette étape. Ce qui est toujours le cas au final.
- Donc \mathcal{B} est génératrice.

\mathcal{B} est une base de E

Théorème Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{G} une famille génératrice de E .
Alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration

La démonstration est identique à la précédente exceptée que $\mathcal{L} = \emptyset$.

Exemple Polynôme

Donner une base de l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ avec $P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X+1, P_4 = 1+X^3$.

Correction

Initialisons \mathcal{B}_0 avec la famille libre \emptyset .

$(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ est une famille génératrice de E .

1. P_1 : on pose $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \cup \{P_1\} = \{P_1\}$. Comme P_1 est non nul, \mathcal{L}_1 est une famille libre.
2. P_2 : comme les éléments P_1 et P_2 sont linéairement indépendants, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{P_2\} = \{P_1, P_2\}$ est une famille libre.
3. P_3 : Comme $P_3 = X + 1 = P_1 + P_2$, (P_1, P_2, P_3) est une famille liée.
4. P_4 : on prouverait que les vecteurs P_1, P_2 et P_4 sont linéairement indépendants. Alors $\mathcal{L}_3 = \{P_1, P_2, P_4\}$ est une famille libre.

$\mathcal{L}_3 = \{P_1, P_2, P_4\}$ est une base de E .

C Unicité du cardinal de la base

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration

On démontre **par récurrence** que, pour tout $n \geq 1$, la propriété suivante est vraie :

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

- **Initialisation** : Soit (\vec{g}_1) une famille génératrice de E .
Soit (\vec{v}_1, \vec{v}_2) une famille de E . Il existe λ_1 et λ_2 dans \mathbb{R} tel que $\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{g}_1$ et $\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{g}_1$. Par disjonction de cas, on a :
 - $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: la famille $(\vec{v}_1 = \vec{0}, \vec{v}_2 = \vec{0})$ est liée.
 - $\lambda_1 \neq 0$: on a $\vec{v}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2$. Les vecteurs sont colinéaires donc liés.
 - $\lambda_2 \neq 0$: de même par symétrie.

- **Hérédité** : Soit $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n)$ une famille génératrice de E .
 Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E .
 Si tous les vecteurs de la famille sont nuls, alors la famille est liée.
 Supposons qu'au moins un vecteur ne soit pas nul.
 Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, il existe $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\vec{v}_i = \lambda_{i,1}\vec{g}_1 + \lambda_{i,2}\vec{g}_2 + \dots + \lambda_{i,n}\vec{g}_n$$

Quitte à réorganiser les deux familles, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$.
 Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\vec{v}_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1} \in \text{Vect}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n-1}).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel générée par la famille $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n-1})$. Donc la famille $(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}, \dots, \vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1})$ est liée. Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\beta_1(\vec{v}_1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}) + \dots + \beta_n(\vec{v}_n - \frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}}\vec{v}_{n+1}) = \vec{0}.$$

d'où

$$\beta_1\vec{v}_1 + \dots + \beta_n\vec{v}_n - (\beta_1\frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{n+1,n}} + \dots + \beta_n\frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n+1,n}})\vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

La famille est donc liée.

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.

Démonstration

Si la famille a strictement plus de n vecteurs, on peut en enlever pour constituer une famille de $n+1$ vecteurs qui est donc liée d'après la proposition précédente. A fortiori, la famille initiale est liée.

Proposition Unicité du cardinal d'une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ deux bases de E .
 Alors $p = q$.

Démonstration

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une famille génératrice de E . Comme $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ est libre d'après la proposition précédente, $q \leq p$. Par symétrie, on a aussi $p \leq q$. Finalement $p = q$.

Cette proposition nous permet cette définition.

Définition-Proposition Dimension

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est égale au cardinal d'une base quelconque de E .
 Par convention, l'espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension 0.

Théorème Caractérisation des bases en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit \mathcal{F} est famille de n vecteurs. Il y a équivalence entre :

1. \mathcal{F} est une base de E ,
2. \mathcal{F} est une famille libre de E ,
3. \mathcal{F} est une famille génératrice de E .

Autrement dit, lorsque le nombre de vecteurs de la famille est **égal à la dimension** de l'espace vectoriel, il suffit que la famille soit libre ou génératrice pour être une base de E .

Démonstration

- (1) \implies (2) et (1) \implies (3) : par définition d'une base.
- (2) \implies (1) : d'après le théorème de la base incomplète, on la complète en une base \mathcal{F}' . Comme E est de dimension n , \mathcal{F}' est nécessairement une famille de n vecteurs. Donc on n'a pas ajouté des vecteurs à la famille \mathcal{F} de n vecteurs. Ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ est déjà une base de E .
- (3) \implies (1) : démonstration identique avec le théorème de la base extraite.

Exemple **Espace**

Déterminer si les familles suivantes $\mathcal{F}_1 = ((1, 3, 2), (2, 5, 6))$ et $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 4), (1, 3, t), (1, 1, t))$ sont des bases de \mathbb{R}^3 .

Correction

La famille \mathcal{F}_1 contient deux éléments dans un espace de dimension 3. Ce n'est pas une base de \mathbb{R}^3 .

Déterminons la condition pour que \mathcal{F}_2 soit libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1(1, 1, 4) + \lambda_2(1, 3, t) + \lambda_3(1, 1, t) = (0, 0, 0)$. Cela est équivalent au système

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (t-4)\lambda_2 + (t-4)\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ (t-4)\lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$t \neq 4$ si et seulement si la seule solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ si et seulement si \mathcal{F}_2 est libre si et seulement si \mathcal{F}_2 est une base.

V Théorème sur les dimensions

A Dimension d'un sous espace vectoriel

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E .

Alors F est également de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration

Soit \mathcal{B} une base E . \mathcal{B} est une famille génératrice de E . Donc, évidemment de F sous espace vectoriel de E . En utilisant l'algorithme de base extraite, on peut construire une base \mathcal{B}' de F en retirant certains vecteurs de \mathcal{B} . Donc la dimension de F égale au cardinal de \mathcal{B}' est inférieur au cardinal \mathcal{B} égale à la dimension de E . Ainsi, F est également de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$

Remarque

Si E est de dimension infinie, on ne peut rien affirmer. Par exemple pour l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}((\mathbb{R}), \mathbb{R})$ de dimension infinie, :

- il contient le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus n , qui est de dimension finie;
- et aussi le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes, qui lui est de dimension infinie.

Exemple

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, les sous-espaces vectoriels de E sont :

- soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace $\{0\}$
- soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbb{K}\vec{x} = \langle \vec{x} \rangle$ engendrés par les vecteurs non nuls \vec{x} de E
- soit de dimension 2 : ce sont les plans vectoriels, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbb{K}\vec{x} + \mathbb{K}\vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ engendrés par deux vecteurs non colinéaires de E

B Dimension de l'espace vectoriel produit

Proposition Dimension de l'espace vectoriel produit

Soit E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors, l'espace vectoriel produit $E \times F$ est de dimension finie

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

De même, le résultat se généralise au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ une base de F .

On pose la famille $((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_n, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f}_q))$.

- **Génératrice** : Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$.

Comme $\vec{x} \in E$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$.

Comme $\vec{y} \in F$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ est une famille génératrice de F , il existe $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_q \vec{f}_q$.

D'où $(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1(\vec{e}_1, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\vec{e}_n, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \vec{f}_1) + \dots + \beta_q(\vec{0}_E, \vec{f}_q)$.

- **Libre** : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que

$$\lambda_1(\vec{e}_1, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\vec{e}_n, \vec{0}_F) + \beta_1(\vec{0}_E, \vec{f}_1) + \dots + \beta_q(\vec{0}_E, \vec{f}_q) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

D'où :

$$(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n, \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_q \vec{f}_q) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

Par identification, on obtient $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}_E$ et $\beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_q \vec{f}_q = \vec{0}_F$. Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ sont des familles libres de E et de F respectivement, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$.

Donc la famille $((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_n, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f}_q))$ est une base de $E \times F$.

Corollaire Dimension de E^p

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Alors E^p est de dimension finie et on a $\dim(E^p) = p \cdot \dim(E)$.

C Théorème des quatre dimensions

Théorème Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel dimension finie et F, G deux sous espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors, on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration

Une idée est de remarquer l'analogie avec la formule ensembliste :

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B).$$

Soit $\mathcal{B}_{F \cap G} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de $F \cap G$. On la complète en une base $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_{p+1}, \dots, \vec{f}_{p+k})$ de F et en une base $\mathcal{B}_G = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{g}_{p+1}, \dots, \vec{g}_{p+m})$ de G . Montrons que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_{p+1}, \dots, \vec{f}_{p+k}, \vec{g}_{p+1}, \dots, \vec{g}_{p+m})$ est une base $F + G$.

— **Génératrice** : comme les bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ sont incluses dans \mathcal{B} , \mathcal{B} est génératrice de F et G , donc de $F + G$.

— **Libre** : soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+k}, \mu_{p+1}, \dots, \mu_{p+m} \in \mathbb{K}$ tel que

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=p+1}^{p+k} \beta_i \vec{f}_i + \sum_{i=p+1}^{p+m} \mu_i \vec{g}_i = \vec{0}_E.$$

D'où :

$$\underbrace{\sum_{i=0}^p \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=p+1}^{p+k} \beta_i \vec{f}_i}_{\in F \text{ car combinaison linéaire de la base}} = - \underbrace{\sum_{i=p+1}^{p+m} \mu_i \vec{g}_i}_{\in G \text{ car combinaison linéaire de la base}}.$$

Donc $\sum_{i=p+1}^{p+m} \mu_i \vec{g}_i$ est égale à un vecteur de F . Ainsi $\sum_{i=p+1}^{p+m} \mu_i \vec{g}_i \in F \cap G$. Donc $\mu_i = 0$ pour i car les vecteurs $\vec{g}_{p+1}, \dots, \vec{g}_{p+m}$ complètent la base $F \cap G$.

D'où

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=p+1}^{p+k} \beta_i \vec{f}_i = \vec{0}_E.$$

Donc $\alpha_i = 0$ et $\alpha_i = 0$ car $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_{p+1}, \dots, \vec{f}_{p+k})$ est une famille libre.

On compte le nombre de vecteurs de chaque base : $\dim F \cap G = \text{Card} \mathcal{B}_{F \cap G} = p$, $\dim F = \text{Card} \mathcal{B}_F = p + k$, $\dim G = \text{Card} \mathcal{B}_G = p + m$, $\dim(F + G) = \text{Card} \mathcal{B}_{F+G} = p + k + m$. Comme le cardinal d'une base est égale à la dimension de l'espace vectoriel, on obtient bien

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Théorème Caractérisation des sous espaces vectoriels supplémentaire en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel dimension finie et F, G deux sous espace vectoriel de E de dimension finie. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux assertions suivantes sont vraies

1. $F + G = E$
2. $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$
3. $\dim F + \dim G = \dim E$

Démonstration

D'après le théorème de caractérisation, F est supplémentaire si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $F + G = E$. Donc, il suffit de démontrer que

— **(1) et (3) \Rightarrow (2)** : d'après la formule de Grassmann

$$\underbrace{\dim E \text{ car } F+G=E}_{\dim(F+G)} = \underbrace{\dim E \text{ d'après (3)}}_{\dim F + \dim G - \dim(F \cap G)},$$

on obtient $\dim(F \cap G) = 0$. Donc $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

— **(2) et (3) \Rightarrow (1)** : d'après la formule de Grassmann

$$\underbrace{\dim E \text{ car } F+G=E}_{\dim(F+G)} = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0 \text{ car } F \cap G = \{\vec{0}_E\}},$$

on obtient $\dim(F + G) = \dim E$. Comme de plus $F + G$ est un sous espace vectoriel de E , $F + G = E$.

Exemple

Démontrer que $F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, 0, 0)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Correction

- F est un plan vectoriel donc de dimension 2 et G une droite vectoriel donc de dimension 1. Comme $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
- Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Comme $(x, y, z) \in G$, $y = z = 0$. Comme $(x, 0, 0) \in F$, $x + 0 + 0 = 0$. Donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

D'après le théorème de caractérisation des sous espaces vectoriels supplémentaire, F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

VI Base adaptée

Définition Base adaptée

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E .

On dit qu'une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E est **adaptée** à F s'il existe $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ soit une base de F .

Exemple

La base $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ est adaptée à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 car $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ est une base de F .

Proposition Existence d'une base adaptée

La base ainsi définie existe.

Démonstration

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de F . Cette famille est libre dans E . On la complète en une base de E d'après le théorème de la base incomplète.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F, G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et B une base de E .

La base B est dite **adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$ si B peut s'écrire comme la concaténation de B, B' où B base de F et B' base de G .

De même, avec F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . La base B est dite **adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ si B peut s'écrire comme la concaténation de B_1, \dots, B_p où B_k est une base de F_k pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Proposition

La base ainsi définie existe.

Démonstration

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F et $B' = (\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ une base de G .

On pose $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p+1}, \vec{e}_p, \dots, \vec{e}_n)$ la concaténation de B et B'

- **Génératrice** : Soit $\vec{x} \in E$.

Comme $E = F \oplus G$, il existe $\vec{x}_1 \in F$ et $\vec{x}_2 \in G$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Comme B est une base de F , \vec{x}_1 est une combinaison linéaire de F , soit $\vec{x}_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{e}_i$. De même, \vec{x}_2 est une combinaison linéaire de G , $\vec{x}_2 = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \vec{e}_i$. Ainsi, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ est une combinaison linéaire de B . Donc, la famille B est génératrice.

- **Libre** : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = 0_E$.

On décompose la somme en deux :

$$\overbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{e}_i}^{\in F} + \overbrace{\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \vec{e}_i}^{\in G} = \vec{0}_E.$$

Comme F et G sont en somme directe, $\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$ et $\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$.

Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une base libre de F , $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Comme $(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ est une base libre de G , $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$.

En conclusion, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc, la famille \mathcal{B} est libre.

\mathcal{B} est une famille libre et génératrice de E donc une base de E .