

Modélisation probabilistes pour un univers fini

Algèbre des événements

Exercice Écriture ensembliste

Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω . Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A , B et C) les événements suivants :

1. Seul A se réalise ;
2. A et B se réalisent, mais pas C .
3. les trois événements se réalisent ;
4. au moins l'un des trois événements se réalise ;
5. au moins deux des trois événements se réalisent ;
6. aucun ne se réalise ;
7. au plus l'un des trois se réalise ;
8. exactement deux des trois se réalisent ;

Exercice Evenements

On jette deux dés (à 6 faces). Expliciter l'univers Ω .

Soit A_0 l'événement « la somme des points est paire », A_1 l'événement « la somme des points est impaire » et B l'événement « la valeur absolue de la différence des points est égale à 4 ». Combien comptez-vous d'événements élémentaires dans $A_0 \setminus B$, dans $A_1 \setminus B$?

Axiomes des probabilités

Exercice Sur la probabilité de l'intersection

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Démontrer que

$$\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)).$$

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$.

Donner un encadrement, le meilleur possible, de $P(A \cap B)$?

Exercice Dés pipés

On plombe un dé à 6 faces de sorte que la probabilité d'apparition d'une face donnée est proportionnelle au nombre de points de cette face. On lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme des points égale à 4 ?

Probabilité uniforme

Exercice Course de chevaux

Dans une course de 20 chevaux, quelle est la probabilité, en jouant 3 chevaux, de gagner le tiercé dans l'ordre ? dans l'ordre ou le désordre ? dans le désordre ?

Exercice Loto

Au Loto, on doit cocher 6 cases dans une grille comportant 49 numéros.

1. Quelle est la probabilité de gagner le gros lot (c'est-à-dire d'avoir les 6 bons numéros) ?
2. On gagne quelque chose à partir du moment où l'on a au moins 3 bons numéros. Avec quelle probabilité cela arrive-t-il ?
3. En fait, on peut aussi (en payant plus cher) cocher 7, 8, 9 ou même 10 numéros sur la grille. Dans chacun des cas, quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?

Exercice Comité

- On choisit au hasard un comité de quatre personnes parmi huit américains, cinq anglais et trois français.
 Quelle est la probabilité :
- qu'il ne se compose que d'américains ?
 - qu'aucun américain ne figure dans ce comité ?
 - qu'au moins un membre de chaque nation figure dans le comité ?

Exercice « paradoxe » des anniversaires

- Dans une classe de n élèves, quelle est la probabilité pour que deux étudiants au moins aient même anniversaire ?
 Quel est le nombre minimum de personnes dans le groupe pour que cette probabilité soit d'au moins 50% ? de 90% ?

Exercice Bridge

Alice, Bob, Charly et Denis jouent au bridge, et reçoivent chacuns 13 cartes d'un (même) jeu de 52 cartes. Sachant qu'Alice et Charly ont à eux deux 8 Piques, on en déduit que Bob et Denis ont 5 Piques à eux deux. Quelle est la probabilité pour que les Piques soient « bien répartis », c.-à-d. pour que la répartition des 5 Piques soit 3 – 2 ou 2 – 3 entre Bob et Denis ?

Indépendance

Exercice Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

- Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants :
- $A = \text{"les deux enfants sont de sexes différents"}$
 - $B = \text{"l'ainé est une fille"}$
 - $C = \text{"le cadet est un garçon"}$.

Montrer que A , B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice Indépendance et contexte

- Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements
- $$A = \text{"tirage d'un nombre pair"},$$
- $$B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice Probabilité d'une réunion et indépendance

Soient A_1, \dots, A_n n événements d'un espace probabilisé (Ω, P) . On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$. Donner une expression simple de $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ en fonction de p_1, \dots, p_n .

Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?

Exercice Irradiation

L'irradiation par les rayons X de vers à soie induit certaines anomalies. La probabilité d'une anomalie particulière est $p = \frac{1}{10}$.

- Quelle est la probabilité de trouver au moins un embryon présentant cette anomalie, sur dix disséqués ?
- Combien faut-il en disséquer pour trouver au moins une anomalie avec une probabilité supérieure à 50% ? à 95% ?

Exercice Vrai/Faux

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Si $P(A) + P(B) = 1$, alors $A = \bar{B}$.
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
5. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ deux systèmes complets d'événements. Alors $(A_n \cap B_p)_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événement.

Système complets d'événements

Exercice la chaîne des menteurs

On suppose qu'un message binaire (0 ou 1) est transmis depuis un émetteur M_0 à travers une chaîne M_1, M_2, \dots, M_n de messagers menteurs, qui transmettent correctement le message avec une probabilité p , mais qui changent sa valeur avec une probabilité $1 - p$.

Si l'on note a_n la probabilité que l'information transmise par M_n soit identique à celle envoyée par M_0 (avec comme convention que $a_0 = 1$), déterminer a_{n+1} en fonction de a_n , puis une expression explicite de a_n en fonction de n , ainsi que la valeur limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le résultat est-il conforme à ce à quoi l'on pouvait s'attendre ?

Formule des probabilités composées

Exercice Tirage sans remise

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice Roulette russe

Trois personnes (Alduire, Basilis et Cléophie) jouent à la roulette russe de la façon suivante : on fait tourner une fois le barillet au début, puis chacun appuie sur la détente à son tour (Alduire, puis Basilis, puis Cléophie). Préféreriez-vous être à la place d'Alduire, de Basilis ou de Cléophie ?

Probabilité conditionnelle

Exercice Optimisation

Un professeur décide de faire passer rapidement l'oral de « probabilités ». L'étudiant est autorisé à répartir quatre boules, deux blanches et deux noires, entre deux urnes. Le professeur choisit au hasard une des urnes et en extrait une boule. Si la boule est noire, l'étudiant est reçu. Comment répartiriez-vous les boules ?

Formule de Bayes

Exercice QCM

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice Dé pipé

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de $1/2$. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice Deux ateliers

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse ;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice Clés USB

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abîmée" et par D l'événement "la boîte achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D .
2. Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice Pièces défectueuses

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice Compagnie d'assurance

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1 , R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1 , 50% pour la classe R_2 , et 30% pour la classe R_3 . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Variables aléatoires

Loi de probabilité

Exercice En plein dans le mille !

Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice Lancer de dés

On lance deux dés parfaitement équilibrés.

On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

On note Y la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On note Z la produit des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z .

Espérance

Exercice Garagiste

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \quad P(X = 1) = 0,3 \quad P(X = 2) = 0,4 \quad P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z . On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : "nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y .
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice Note

Pour déterminer la note de fin d'année, un professeur procède ainsi : il lance deux dés, et considère la plus petite valeur obtenue. Il définit alors la variable aléatoire N , valant 3 fois la plus petite valeur obtenue. Décrire la loi de N , puis calculer son espérance et son écart-type.

Exercice Arnaque

Monsieur Duchmol affirme que, grâce à son ordinateur, il peut prédire le sexe des enfants à naître. Pour cette prédiction, il ne demande que 5 Euros, destinés à couvrir les frais de gestion ; de plus, pour « prouver » sa bonne foi, il s'engage à rembourser intégralement en cas de prédiction erronée.

1. Soit X le gain de monsieur Duchmol ; écrire la loi de probabilité de X .
2. Si monsieur Duchmol trouve 1000 naïfs, combien peut-il espérer gagner ?

Lois usuels

Exercice Pour commencer !

1. Un automobiliste rencontre successivement 5 feux de circulation indépendants sur le boulevard de Strasbourg. La probabilité qu'un feu soit vert est de $1/2$. On note X le nombre de feux verts pour l'automobiliste. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Un parking souterrain contient 20 scooters à trois roues, 20 motos et 20 voitures. On choisit un véhicule au hasard, et on note X le nombre de roues de ce véhicule. Déterminer la loi de X , son espérance, et

sa variance.

3. Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère. Quelle est la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne un seul gaucher ? Au plus deux gauchers ?
4. Le stock d'un fournisseur de lasagnes contient une proportion $p = 49/1000$ de barquettes de lasagnes à base de viande de cheval. Un contrôleur examine des barquettes de lasagnes chez ce fournisseur. Combien doit-il contrôler de barquettes en moyenne pour qu'il trouve au moins une barquette à base de viande de cheval ?

Exercice Avions

Deux avions A_1 et A_2 possèdent respectivement deux et quatre moteurs. Chaque moteur a la probabilité p (où $p \in]0, 1[$) de tomber en panne et les moteurs sont indépendants les uns des autres. Les deux avions partent pour un même trajet. Chacun des avions arrivent à destination si strictement plus de la moitié de ses moteurs reste en état de marche. Vous partez pour cette destination. Quel avion choisissez-vous ?

Exercice Trouver le paramètre d'une loi uniforme connaissant son espérance

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, a\}$, où $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(X) = 6$. Déterminer a .

Exercice Harry Potter

Harry P., apprenti-sorcier de son état, sort en moyenne deux soirs par semaine. Comme les lendemains matins sont plutôt difficile, il soulage alors ses maux de tête par un sortilège. Cependant, ainsi que Hermione G. l'en avait averti, ce sortilège possède un effet secondaire parfois gênant : une fois sur cent, aléatoirement, le sorcier se retrouve transformé pour la journée en une icône disco, dans son cas un *Village People*.

Quelle est la probabilité que Harry P., sur le cours d'une année entière, se retrouve au moins 3 jours sous cette forme ?

Exercice Méthode du maximum de vraisemblance

Un étang contient des brochets et des truites. On note p la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer p . On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de p la quantité $P(X = 8)$ est-elle maximale ?

Exercice Code de la route !

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p . On note, pour $1 \leq i \leq 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i -ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Quelle est la loi de S (justifier !) ?
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Exercice Restaurateur

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne, deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.

1. A-t-il raison ?
2. Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90% des cas.

Grand classiques

Exercice Marche aléatoire

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est à l'origine. À chaque instant entier, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou d'un pas vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$, et de ce façon indépendante. On note X_n son abscisse après n pas.

1. Soit D_n la variable aléatoire égale au nombre de pas vers la droite. Quelle est la loi de D_n ? Exprimer X_n en fonction de D_n .
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n . Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée? Interpréter.
3. Reprendre l'exercice avec une autre méthode : on note, pour $n \geq 1$, $Y_n = X_n - X_{n-1}$.
 - (a) Déterminer la loi de Y_n .
 - (b) Justifier l'indépendance de Y_1, \dots, Y_n .
 - (c) En déduire l'espérance et la variance de X_n .

Exercice Première occurrence

Une urne contient deux boules blanches et $n - 2$ boules noires. On tire les boules successivement, sans remise. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules noires restantes à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la seconde boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X et en déduire la loi de Z .

Exercice Analyse de sang

On cherche à dépister une maladie détectable à l'aide d'un examen sanguin. On suppose que dans notre population, il y a une proportion p de personnes qui n'ont pas cette maladie.

1. On analyse le sang de r personnes de la population, avec r entier au moins égal à 2. On suppose que l'effectif de la population est suffisamment grand pour que le choix de ces r personnes s'apparente à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes ne soit atteinte de la maladie?
2. On regroupe le sang de ces r personnes, puis on procède à l'analyse de sang. Si l'analyse est négative, aucune de ces personnes n'est malade et on arrête. Si l'analyse est positive, on fait toutes les analyses individuelles (on avait pris soin de conserver une partie du sang recueilli avant l'analyse groupée). On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses de sang effectuées. Donner la loi de probabilité de Y et calculer son espérance en fonction de r et de p .
3. On s'intéresse à une population de n personnes, et on effectue des analyses collectives après avoir mélangé les prélèvements par groupe de r personnes, où r est un diviseur de n . Montrer que le nombre d'analyses que l'on peut espérer économiser, par rapport à la démarche consistant à tester immédiatement toutes les personnes, est égal à $np^r - \frac{n}{r}$.
4. Dans cette question, on suppose que $p = 0,9$ et on admet qu'il existe un réel $a > 1$ de sorte que la fonction $x \mapsto p^x - \frac{1}{x}$ est croissante sur $[1, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$. Écrire un algorithme permettant de déterminer pour quelle valeur de l'entier r le nombre $p^r - \frac{1}{r}$ est maximal.

Exercice Choix de CD

Casimir a une technique bien particulière pour choisir quel nouveau CD il va acheter. Il commence par choisir un CD au hasard, et l'achète s'il lui plaît, et le repose dans le cas contraire. Or Casimir est difficile : il n'aime que 1% des CDs. Bien sûr, tant qu'il n'a pas trouvé de CD à sa convenance, il recommence l'opération.

1. Soit N le nombre de CDs que Casimir regarde avant de se décider. Calculer $P(N = k)$.
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de N .
3. En fait, Casimir, toujours curieux, lance deux dés quand le CD ne lui plaît pas. S'il obtient deux as, il prend le CD quand même, se disant qu'il y a là un signe. Que vaut maintenant l'espérance de N ?

Exercice ***, Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements dans un même espace probabilisé. On note $A = \langle\!\langle$ Il y a une infinité d'évènements parmi les A_n qui sont réalisés $\rangle\!\rangle$.

- Montrer que A est un évènement.
- Si la série $\sum_k P(A_k)$ est convergente, montrer que $P(A) = 0$.
- Si la série $\sum_k P(A_k)$ est divergente et si les A_k sont mutuellement indépendants, montrer que $P(A) = 1$.
- Donner un cas où $P(A) = \frac{1}{2}$.

Correction

$$\begin{aligned} A &= \cap_{n=0}^{\infty} (\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\ b) P(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \\ c) 1 - P(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) &= 1 - P(A_n) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2}) + \dots = (1 - P(A_n))(1 - P(A_{n+1})) \dots \end{aligned}$$

La série de terme général $-\ln(1 - P(A_n))$ est divergente : grossièrement si $P(A_n)$ ne tend pas vers zéro, sinon par équivalence si $P(A_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Donc le produit infini précédent est nul, ce qui suffit à conclure.

- Tous les A_k égaux à un même évènement de probabilité $\frac{1}{2}$.

Exercice Marche aléatoire

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). À chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité p ($0 < p < 1/2$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n , on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

- Écrire un algorithme qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cet algorithme prendra en entrée l'abscisse a de départ, la longueur N du segment, et produira en sortie un message indiquant si la marche s'arrête en 0 ou en N , et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête. On supposera qu'on dispose d'une fonction alea() qui retourne un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
- On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a , le processus s'arrête en 0.
 - Que vaut u_0 ? u_N ?
 - Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.
 - En déduire l'expression exacte de u_a .
- On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a , le processus s'arrête en N . Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a .
- Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice loi hypergéométrique

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne, avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $n \in \{1, \dots, a+b\}$. On appelle X le nombre de boules blanches dans la poignée.

- Déterminer le support de X .
- Déterminer la loi de X .
- Calculer l'espérance de X .
- Calculer l'espérance de $X(X - 1)$ puis la variance de X .
- Comparer l'espérance et la variance de X à celle d'une loi binomiale de paramètres n et $a/(a+b)$.
Commentaire ?