Exercice **Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$
2. $\sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
3. $\sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$
4. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$
5. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
6. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{\mathrm{i}^n n^2}{n^2+1}$
7. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n\binom{2n}{n}}$
8. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
9. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} a_{2n} & = a^n \\ a_{2n+1} & = b^n \end{cases}$ où $0 < a < b$

Correction

On prend dans chaque cas $z \neq 0$. et on revient à la règle de d'Alembert des séries numériques :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n^2+1}{3^n} > 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}}|z| \\ &= \frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)}|z| \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3n^2}|z|\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = |z|\frac{1}{3}$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = 3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathrm{e}^{-n^2} > 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}|z| &= \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}}|z| \\ &= \mathrm{e}^{-2n-1}|z|\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = 0$$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV vaut : $R_a = +\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$: $a_n = \frac{\ln n}{n^2} > 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}|z|^{2(n+1)}}{a_n|z|^{2n}} &= \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}}|z|^2 \\ &= \frac{n^2\ln(n+1)}{(n+1)^2\ln n}|z|^2\end{aligned}$$

$\sim \quad |z|^2$

Exercice **Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ **2.** $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}x^n$

4. $\sum_n (\ln n)x^n$ **5.** $\sum_n \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$ **6.** $\sum_n (2+ni)z^n$

7. $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$

Correction

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}\times|z|^3$$

D'après la règle de D'Alembert la série CV pour $\mathrm{e}\times|z|^3 < 1$ soit $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$, et diverge pour $r > \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

On en déduit d'après la caractérisation du rayon de CV que $R_a = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ et :

Exercice **Rayon de convergence et somme**

Calculer le rayon de convergence puis la somme de :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!}x^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2}x^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

D'après la règle de D'Alembert le rayon de CV de $\sum |a_n|z^n$ vaut : $R_a = 1$, .

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{n\binom{2n}{n}} > 0$ et :

$\frac{1}{(2n+2)}$

Correction

1. — Rayon de CV $R = +\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
&= x \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
&= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

2. — Rayon de CV $R = +\infty$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$: sachant que $(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2$
   L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi $+\infty$ pour rayon de CV

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{n(n-1)}{n!} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{n(n-1)}{n!} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-2)!} x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
&= x^2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

3. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x \in]-1;1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
   L'égalité est bien valable car chacune des séries du membre de droite a aussi 1 pour rayon de CV

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n} \\
&= x \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n} + x \\
&= x \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n} + x \\
&= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x
\end{aligned}$$

4. — Rayon de CV $R = 1$ (utiliser la règle de D'Alembert ...)
   — Pour tout $x \in]-1;1[$: sachant que par décomposition en éléments simples $\frac{3n}{n+2} =$

Exercice **DSE en 0**

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$ **2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$

3. $\ln(a+x)$ avec $a > 0$ **4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$

5. $\ln(1+x-2x^2)$ **6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \tfrac{2}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n}\right)$$

$= 3\,($ [illegible] $)$

Correction

Exercice **Équation différentielle**

On considère l'équation différentielle $y''+xy'+y=1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0)=y'(0)=0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

Exercice **derivation**

On considère la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Est-elle convergente pour $|x|=R$?
2. Pour tout nombre réel x tel que la série entière précédente converge, on note $S(x)$ sa somme.
   Expliciter la dérivée de la fonction $x\mapsto xS(x)$ sur $]-R,R[$.
   En déduire $S(x)$ pour x appartenant à $]-R,R[$.
3. Calculer la somme de chacune des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{R^n}{(n+1)(n-2)},$$

$$\sum_{n\geq 3}\frac{R^n}{(n+1)(n-2)}.$$

Correction

1. $R=1$. En effet, $\frac{|x|^n}{(n+1)(n-2)}\sim\frac{|x|^n}{n^2}$. Donc si $|x|\leq 1$, la série est absolument convergente (par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$) tandis que si $|x|>1$, $\frac{|x|^n}{n^2}\to+\infty$ et la série diverge grossièrement.
2. On peut naturellement dériver la fonction sur son ouvert de convergence, soit ici $]-R,R[$.

$$xS(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-2)}.$$

   On a donc $(xS)'(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n-2}=x^2\sum_{k\geq 1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-x^2\ln(1-x)$. Une intégration par parties, suivie d'une intégration de fraction rationnelle, permet d'en déduire $xS(x)$, puis

$$S(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{x}\ln(1-x)+1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right).$$

   (Une autre méthode aboutissant à ce résultat est d'écrire :

$$3S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n-2}-\frac{x^n}{n+1}\right)=\frac{x^3}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\frac{x^3-1}{x}\sum_{n\geq 4}\frac{x^n}{n}=x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\frac{1-x^3}{x}\left(\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right).$$

3. Par continuité, $S(-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{-1}\ln 2+1-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^2}{3}\right)=\frac{5}{18}-\frac{2}{3}\ln 2$ et $S(1)=\frac{1}{3}\left(0+1+\frac{1}{2}+\frac{1^2}{3}\right)=\frac{11}{18}$.

Exercice **Fonction impaire**

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice **Rayon de convergence**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels décroissante, de limite 0, et telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

Correction

La série entière diverge en $z = 1$ et converge en $z = -1$ (par le critère de convergence des séries alternées) donc $R = 1$.