

## Equation différentielle d'ordre 1

### Exercice Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $x' + x = 1$
2.  $7x' + 2x = -5t^2 + 4t - 1$
3.  $x' + 2x = t^2 - 2t + 3$
4.  $x' + x = te^{-t}$
5.  $x' - 2x = \cos(t)$

### Exercice Datation

Le carbone 14 possède plusieurs isotopes dont le carbone 14 - noté  $C^{14}$ , utilisé pour la datation. La proportion de carbone 14 est constante chez un organisme vivant. Après sa mort, la vitesse de disparition du carbone 14 est proportionnelle à la proportion de  $C^{14}$  présente dans l'organisme. On note  $k$  la constante de proportionnalité.

1. On note  $x(t)$  la proportion de  $C^{14}$  à un instant  $t$  dans l'organisme. Écrire l'équation différentielle satisfaite par  $x$ .
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. On appelle période de demi-vie la durée nécessaire pour que la proportion de  $C^{14}$  ait diminuée de moitié. Sachant que la période de demi-vie du  $C^{14}$  est de 40 ans, calculer la constante  $k$ .
4. Une équipe d'archéologues a mesuré dans une momie une proportion de  $C^{14}$  de  $9,15 \cdot 10^{-38}$ . A quelle dynastie appartient ce pharaon () ?

### Exercice Equation différentielle linéaire de premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Sur  $\mathbb{R}$  :

$$E_1 : x' + x = \cos t + \sin t$$

Puis déterminer la solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' + x = \cos t + \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

2. Sur  $\mathbb{R}$  :

$$E_2 : x' - 2tx = \sinht - 2t\cosh t$$

3. Sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$E_3 : tx' + (t-1)x = t^2$$

## Correction

1. (a) Résolvons l'équation homogène ( $H$ ) :  $x' = -x$ , associée à ( $E$ ).
- Posons  $a(t) = -1$ ,  $a$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - $A(t) = -t$  primitive de  $a$  sur  $\mathbb{R}$
  - La solution générale de ( $H$ ) est :
- $$x_0 = Ce^{-t} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$
- (b) Par superposition des solutions, il suffit de trouver une solution particulière à  $x' + x = \cos t$  d'une part et à  $x' + x = \sin t$  d'autre part, pour déterminer une solution particulière à ( $E$ ). De plus par linéarité, il suffit de trouver une solution particulière à  $x' + x = e^{it}$  pour trouver les solutions particulières ci-dessus.
- (c) Déterminons une solution particulière à  $x' + x = e^{it}$  par la méthode de la variation de la constante.

Posons  $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et cherchons une solution sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda(t)e^{-t} & x_1 \text{ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :} \\ x'_1 &= \lambda'e^{-t} - \lambda e^{-t} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x_1 \text{ solution} &\iff x'_1 + x_1 = e^{it} \\ &\iff \lambda'e^{-t} - \lambda e^{-t} + \lambda e^{-t} = e^{it} \\ &\iff \lambda'e^{-t} = e^{it} \\ &\iff \lambda' = e^{(1+i)t} \end{aligned}$$

Donc :  $\lambda = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}$  convient et une solution particulière est :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1+i}e^{it} \\ &= \frac{1-i}{2}e^{it} \\ &= \frac{\cos t + i \sin t}{2} + i \frac{-\cos t + \sin t}{2} \end{aligned}$$

- (d) Solutions particulières à :

$$\begin{aligned} — x' + x = \cos t : \mathcal{R}e(x_1) &= \frac{\cos t + \sin t}{2} \\ — x' + x = \sin t : \mathcal{I}m(x_1) &= \frac{-\cos t + \sin t}{2} \end{aligned}$$

- (e) Solution générale de ( $E$ ) :

$$\begin{aligned} x &= Ce^{-t} + \frac{\cos t + \sin t}{2} + \frac{-\cos t + \sin t}{2} \text{ où } C \in \mathbb{R}. \\ x &= Ce^{-t} + \sin t \text{ où } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (f) Résolution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} x(0) = 2 &\iff C + 0 = 2 \\ &\iff C = 2 \end{aligned}$$

Donc la solution au problème de Cauchy est :

$$x = 2e^{-t} + \sin t$$

Vous avez la méthode et une rédaction (trop) détaillée... pour la suite je vous donne les résultats.

2. (a) Solution générale de l'équation homogène associée ( $H$ ) :  $x' = 2tx$  :

$$x_0 = Ce^{t^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

- (b) Solution particulière de ( $E_2$ ) : (il faut le « voir » à la forme de l'équation)

$$x_1 = cht$$

- (c) Solution générale de ( $E$ ) :

$$x = Ce^{t^2} + cht \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

3. (a) On normalise, c'est possible sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$x' + \frac{t-1}{t}x = t$$

- (b) Solution générale de l'équation homogène associée ( $H$ ) :  $x' = -\frac{t-1}{t}x$  :

$$x_0 = Cte^{-t} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

- (c) Solution particulière de ( $E_3$ ) :

$$x_1 = t$$

- (d) Solution générale de ( $E$ ) :

$$x = Cte^{-t} + t \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

### Exercice Équation différentielle linéaire de premier ordre non homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$tx'(t) + x(t) = 0 \quad (I = \mathbb{R})$$

$$2tx'(t) + x(t) = t^2 \quad (I = \mathbb{R})$$

$$(1+t^2)^2 x'(t) + 2tx(t) = te^{\frac{1}{1+t^2}}$$

### Exercice Varions la constante...

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $x' + x = \frac{1}{1+e^t}$  sur  $\mathbb{R}$  ;
2.  $(1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t)$  sur  $] -1, +\infty [$  ;
3.  $x' - \frac{x}{t} = t^2$  sur  $]0, +\infty [$  ;
4.  $x' - 2tx = -(2t-1)e^t$  sur  $\mathbb{R}$  ;
5.  $x' - \frac{2}{t}x = t^2$  sur  $]0, +\infty [$  ;

### Exercice Raccordement des solutions- tous les cas possibles

Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $tx' - 2x = t^3$  ;
2.  $t^2x' - x = 0$  ;
3.  $(1-t)x' - x = t$  ;
4.  $(1+t)x' - x = t^2 + 2t + 2$

## Systèmes différentiels linéaires

### Exercice Diagonalisable

Résoudre le système suivant :

$$x'(t) = 5x(t) - 3y(t)$$

$$y'(t) = 6x(t) - 4y(t)$$

### Exercice Triangulaire supérieur

Résoudre le système suivant :

$$x'(t) = x(t) + y(t)$$

$$y'(t) = y(t)$$

### Exercice Champs magnétique

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe ( $Oz$ ) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où  $\omega$  dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant  $u = x' + iy'$ , résoudre ce système différentiel.

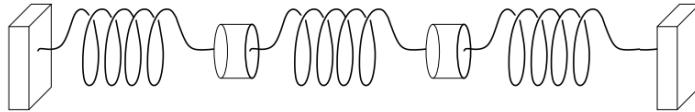
### Exercice Diagonalisable

Donner le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$$

### Exercice Un peu de physique : étude du mouvement d'un système de masses reliées par des ressorts, glissant le long d'une surface

Pour simplifier, les ressorts ont même raideur  $k$  et les corps même masse  $m$ . Notons  $x_i(t)$  l'écart par rapport à la position d'équilibre pour le  $i$ -ème corps.



Le principe fondamental s'écrit :

$$mx_1''(t) = -2k.x_1(t) + k.x_2(t)$$

$$mx_2''(t) = k.x_1(t) - 2k.x_2(t)$$

1. Modéliser ce système linéaire sous forme matricielle ;
2. Résoudre le système ;
3. Les physiciens ont compris qu'en général, le mouvement est une superposition de mouvements fondamentaux appelés modes propres. Ce sont les mouvements où tous les corps oscillent à la même fréquence. Déterminer les fréquences propres  $w$  du système.

## Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

### Exercice Équations du second ordre à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $x'' - 2x' + x = t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$  ;
2.  $x'' + 9x = t + 1$ ,  $x(0) = 0$  ;
3.  $x'' - 2x' + x = \sin^2 t$  ;

### Exercice Equation différentielle linéaire de second ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Sur  $\mathbb{R}$  :

$$E_1 : x'' + 2x' - 3x = 11e^{2t}$$

2. Sur  $[0; \pi[$

$$E_2 : x'' + x = \cos t$$

3. Sur  $\mathbb{R}$

$$E_3 : x'' - 2x' + x = \operatorname{cht} t$$

4. Sur  $\mathbb{R}$  :

$$E_4 : x'' + x' + 2x = 6e^{2t}$$

5. Sur  $\mathbb{R}$  :

$$E_5 : x'' + 2x' + 5x = \cos t$$

6. Sur  $\mathbb{R}$  :

$$E_6 : x'' - x = \operatorname{sht} t$$

### Correction

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (a) Équation différentielle homogène associée :  $(H) x'' + 2x' - 3x = 0$   
 polynôme caractéristique associé :  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

Discriminant :  $\Delta = 16 > 0$

Racines du polynôme :  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -3$ .

La solution générale de  $(H)$  est :

$$x_H = Ae^t + Be^{-3t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- (b) Détermination une solution particulière à  $(E)$ , comme 2 n'est pas racine du polynôme caractéristique on la cherche sous la forme  $x_1 = Ce^{2t}$  où  $C \in \mathbb{R}$ , qui est deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

$$x'_1 = 2Ce^{2t}$$

$$x''_1 = 4Ce^{2t}$$

$$x_1 \text{ solution de } (E) \iff x''_1 + 2x'_1 - 3x_1 = 11e^{2x}$$

$$\iff \dots$$

$$\iff C = \frac{11}{5}$$

$$x_1 = \frac{11}{5}e^{2t} \text{ solution de } (E).$$

- (c) Solution générale de  $(E)$  :

$$x = Ae^t + Be^{-3t} + \frac{11}{5}e^{2t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Équation différentielle homogène associée :  $(H) x'' + x = 0$

...

La solution générale de  $(H)$  est :

$$x_H = A \cos t + B \sin t, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- (b) On détermine une solution particulière à  $(\tilde{E})x'' + x = e^{it}$  et une solution particulière de  $(E)$  sera, par linéarité, la partie réelle de la solution trouvée.

Attention, comme  $i$  est racine simple du polynôme caractéristique on la cherche sous la forme  $x_1 = Cte^{it}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , qui est deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

...

$$x_1 = \frac{i}{2}te^{it} \text{ solution de } (\tilde{E}).$$

...

$$x_2 = -\frac{t}{2} \sin t \text{ solution de } (E).$$

- (c) Solution générale de  $(E)$  :

$$x = A \cos t + B \sin t - \frac{t}{2} \sin t, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Équation différentielle homogène associée :  $(H) x'' - 2x' + x = 0$

...

La solution générale de  $(H)$  est :

$$x_H = Ae^t + Bte^{-t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- (b) On détermine une solution particulière  $x_1$  à  $(E_1)x'' - 2x' + x = e^t$ , puis  $x_2$  à  $(E_2)x'' - 2x' + x = e^{-t}$  et une solution particulière de  $(E)$  sera, par superposition,  $\frac{x_1+x_2}{2}$ .

Attention, comme 1 est racine double du polynôme caractéristique on cherche  $x_1$  sous la forme  $x_1 = Ct^2e^t$  avec  $C \in \mathbb{R}$ , qui est deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

...

$$x_1 = \frac{1}{2}t^2e^t \text{ solution de } (E_1).$$

...

$$x_2 = \frac{1}{4}e^{-t} \text{ solution de } (E_2).$$

...

$$x_3 = \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{1}{8}e^{-t} \text{ solution de } (E_2).$$

- (c) Solution générale de  $(E)$  :

$$x = Ae^t + Bte^{-t} + \frac{1}{4}t^2e^t + \frac{1}{8}e^{-t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

### Exercice Changement de variable

On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \quad (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit  $y$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $z(t) = y(e^t)$ .
  - (a) Calculer pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z'(t)$  et  $z''(t)$ .
  - (b) En déduire que  $z$  vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser  $x = e^t$  dans  $(E)$ ).
  - (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
  - (d) En déduire le "portrait robot" de  $y$ .
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la question de l'analyse sont bien toutes les solutions de  $(E)$  et conclure.

### Exercice Dissolution

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5min plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?

### Exercice Séparation des variables

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^t e^y = 0$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition.

### Exercice Développement en série entière

Pour les équations différentielles suivantes :

- Chercher les solutions développables en séries entières
- Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode d'abaissement de l'ordre
- Résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}$  :

$$t(t-1)x'' + 3tx' + x = 0.$$