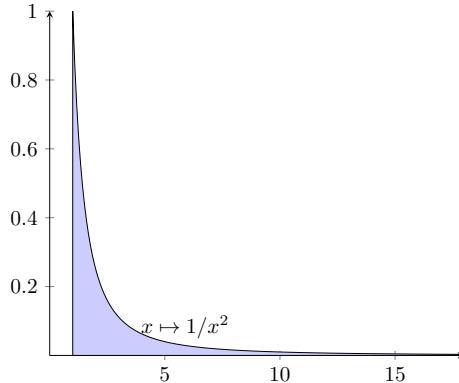


# Intégrales généralisées

Ce chapitre a pour objectif d'étendre la notion d'intégrale sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment, par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$



## I Généralités

L'intégrale impropre désigne l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. Elle est définie comme une extension de l'intégrale usuelle sur un segment par un passage à la limite sur les bornes d'intégration de l'intégrale.

### A Définition

#### Définition Intégrale impropre sur $[a, b[$

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b[$  avec  $b \in \mathbb{R}$  ou  $b = +\infty$ .

Si  $\int_a^t f(x) dx$  admet une limite finie lorsque  $t$  tend vers  $b$ , on dit que l'**intégrale impropre** converge et on note  $\int_a^b f(x) dx$  cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple

Soit l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

Soit  $t \in [1, +\infty[$ .

On a  $\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_1^t = 1 - \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ .

L'intégrale est convergente et son intégrale impropre est égale à 1.

#### Proposition Indépendance de la borne fermée

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b[$  avec  $b \in \mathbb{R}$  ou  $b = +\infty$ . Soit  $c \in [a, b[$ .

$\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_c^b f(x) dx$  sont de même nature.

#### Démonstration

Soit  $t \in [a, b]$ . On applique la relation de Chasles à l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx = A + \int_c^t f(x) dx.$$

Par passage à la limite sur cette égalité, on obtient que  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_c^b f(x) dx$  sont de même nature.

Exemple

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge.}$$

### Définition Intégrale impropre sur $]a, b]$

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b]$  avec  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = -\infty$ .

Si  $\int_t^b f(x) dx$  admet une limite finie lorsque  $t$  tend vers  $a$ , on dit que l'**intégrale impropre** converge et on note  $\int_a^b f(x) dx$  cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple

Soit l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0, 1]$ . Soit  $t \in ]0, 1]$ .

On a  $\int_t^1 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_t^1 = -\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty$ . Donc l'intégrale est divergente.

### Définition Intégrale impropre sur $]a, b[$

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = -\infty$  et  $b \in \mathbb{R}$  ou  $b = +\infty$ .

Si  $\int_a^c f(x) dx$  et  $\int_c^b f(x) dx$  convergent avec  $c \in ]a, b[$ , on dit que l'**intégrale impropre** converge et on note  $\int_a^b f(x) dx$  cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple

Soit l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

— En 0 : Soit  $t \in ]0, 1]$ .

$$\text{On a } \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2(1 - \sqrt{t}) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2.$$

Donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  est convergente.

— En  $+\infty$  : Soit  $t \in [1, +\infty[$ .

$$\text{On a } \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^t = 2(\sqrt{t} - 1) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \infty.$$

Donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  est divergente.

En conclusion, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  est divergente.

Remarque

Attention au passage à la limite ! Pour prouver que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge, il ne suffit pas de calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$ .

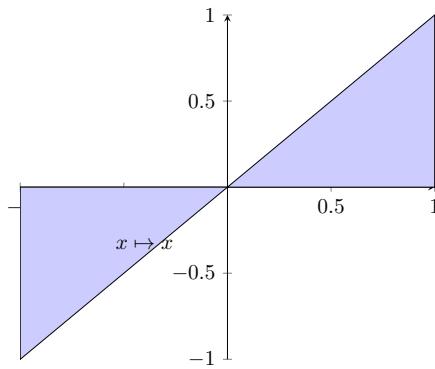
En effet soit  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ .

On a :

1.  $x \mapsto x$  est continue sur  $]-\infty, +\infty[$ ,

$$2. \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t x dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\frac{x^2}{2}]_t^t = 0 \text{ existe et est nulle,}$$

3. pourtant, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  diverge car  $\int_0^{+\infty} x dx$  est divergente.



### Proposition Prolongeable par continuité

Si une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $b \in \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b[$  et prolongeable par continuité en  $b$ , Alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  converge et vaut  $\int_a^b \tilde{f}(x) dx$  où l'on a noté  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$ . L'intégrale est faussement impropre.

#### Démonstration

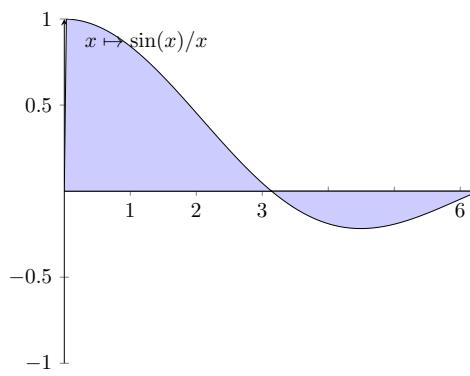
Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b[$  prolongeable par continuité en  $b$ . On note  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$ . Comme  $\tilde{f}$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $\tilde{f}$  admet une primitive  $\Phi$  sur  $[a, b]$ . Soit  $t \in [a, b[$ .

$$\begin{aligned} \int_a^t f(x) dx &= \int_a^t \tilde{f}(x) dx && \text{car } \forall x \in [a, b[ : f(x) = \tilde{f}(x) \\ \int_a^t f(x) dx &= \Phi(t) - \Phi(a) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \tilde{f}(x) dx && \text{car } \Phi \text{ est continue sur } [a, b] \end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  converge de limite  $\int_a^b \tilde{f}(x) dx$ .

#### Exemple

L'intégrale  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$  est convergente car la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est continue sur  $]0, 2\pi]$  et plongeable par continuité en 0 en posant  $\tilde{f}(0) = 1$ .



Par analogie sur les séries numériques, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$  alors  $\sum u_n$  diverge, a-t-on si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$  alors  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  diverge ?

La réponse est oui à condition d'avoir une hypothèse plus forte.

### Théorème Divergence grossière à l'infini

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Si  $f$  admet une limite non nulle en  $\infty$  alors  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  diverge. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.

### Démonstration

La preuve anticipe les outils mis en place dans la section sur les fonctions positives.

Comme  $f$  admet une limite  $l$  non nulle en  $\infty$ , il existe  $A > 0$  tel que  $f(x)$  soit de signe constant pour tout  $x > A$ . Comme  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} l$  et  $\int_A^{+\infty} l \, dx$  diverge,  $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$  diverge.

Exemple

$\int_0^{+\infty} x \sin(1/x) \, dx$  diverge grossièrement car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x) = 1$ .

## B Intégrales de références

### Proposition Intégrales de Riemann

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ ,
2.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

### Démonstration

$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

Soit  $t \in [1, +\infty[$ . On a

—  $\alpha \neq 1$

$$\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^t = \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - 1) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

—  $\alpha = 1$

$$\int_1^t \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^t = \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

En conclusion  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

La démonstration est similaire pour  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

### Proposition Exponentielle et logarithme

- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, dx$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ ,
- $\int_0^1 \ln(x) \, dx$  converge.

### Démonstration

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est continue sur  $]0, 1]$ . Soit  $t \in ]0, 1]$ .

$$\int_t^1 \ln(x) \, dx \stackrel{\text{IPP avec } u(x)=\ln(x), v'(x)=1}{=} [\ln(x)x]_t^1 - \int_t^1 \frac{1}{x} x \, dx = -\ln(t)t + (t-1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -1 \text{ par croissance comparée.}$$

Donc  $\int_0^1 \ln(x) \, dx$  est convergente.

## C Propriétés

### Proposition Linéarité

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{K}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Si les intégrales  $\int_a^b f(x) \, dx$  et  $\int_a^b g(x) \, dx$  convergent, alors l'intégrale  $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx$  converge et on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx.$$

**Démonstration**

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$ . Soit  $t \in [a, b]$ .

On a

$$\int_a^t (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx \stackrel{\text{linéarité sur un segment}}{\equiv} \lambda \int_a^t f(x) dx + \mu \int_a^t g(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Donc l'intégrale  $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx$  converge et l'égalité.

**Exemple**

On peut écrire

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^2} - e^{-x} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

car les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  et  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  convergent.

En revanche on ne peut pas écrire

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx.$$

car l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge.

Ici il faut intégrer sur le segment  $[a, t]$  avec  $t \in [a, b]$  avant de passer à la limite. On a :

$$\int_1^t \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^t \frac{1}{x} dx - \int_1^t \frac{1}{x+1} dx = \ln(2) + \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ln(2).$$

**Corollaire Cas complexe**

Soit  $f$  continue par morceaux de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ .

$\int_a^b Re(f(x)) dx$  et  $\int_a^b Im(f(x)) dx$  convergent si et seulement si  $\int_a^b f(x) dx$ .

Dans ce cas

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b Re(f(x)) dx + i \int_a^b Im(f(x)) dx.$$

**Proposition Relation de Chasles**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{K}$  telle que  $\int_a^b f(x) dx$  converge. Alors, pour tout  $c \in ]a, b[$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Proposition Positivité**

Soit  $f$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{K}$  et positive telle que  $\int_a^b f(x) dx$  converge.

Alors,  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

De plus, si  $\int_a^b f(x) dx = 0$  alors  $f = 0$ , c'est à dire  $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ .

**Démonstration**

De nouveau, il faut intégrer sur le segment  $[a, t]$  avec  $t \in [a, b]$

$$\int_a^t f(x) dx \stackrel{\text{positivité sur un segment}}{\geq} 0$$

puis le passage à la limite.

### Corollaire Croissance

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux de  $[a, b]$  telles que les intégrales  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_a^b g(x) dx$  convergent.

Si  $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x)$ , Alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

### Démonstration

Comme  $g - f \geq 0$ , du fait de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, on a  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

## D Calcul d'intégrale

### Théorème Changement de variables

Soit  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux,  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  une bijection strictement croissante de classe  $C^1$ .

Alors l'intégrale  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x) dx$  est convergente si et seulement si  $\int_a^b f(x) dx$  est convergente. En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

### Démonstration

Supposons que  $\int_a^b f(x) dx$  converge.

Soit  $t \in [\alpha, \beta]$ . Par changement de variable sur le segment  $[\alpha, t]$ ,

$$\int_{\alpha}^t f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_a^{\phi(t)} f(x) dx.$$

Comme  $\phi$  est une bijection croissante,  $\phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \beta]{} b$ . Donc par passage à la limite,

$$\int_{\alpha}^t f(\phi(x))\phi'(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow \beta]{} \int_a^b f(x) dx.$$

Donc  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x) dx$  converge et est égale à  $\int_a^b f(x) dx$ . Idem si l'on suppose que  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x) dx$  converge.

### Exemple

Calculons l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ .

On suppose que l'intégrale converge (voir la prochaine sous-section pour la démonstration).

Le changement de variables  $u = 1/t$  donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln u}{1+1/u^2} \frac{-1}{u^2} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du.$$

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$ .

**Théorème Intégration par parties**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions  $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  dérivables telles que  $u'$  et  $v'$  sont continues par morceaux. On suppose que  $uv$  a une limite en  $b$ .

Alors les intégrales  $\int_a^b u(x)v'(x) dx$  et  $\int_a^b u'(x)v(x) dx$  sont de même nature.

En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

où  $[u(x)v(x)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} [u(x)v(x)]_a^t$ .

**Démonstration**

Supposons que  $\int_a^b u'(x)v(x) dx$  converge.

Soit  $t \in [a, b]$ . Par intégration par parties sur le segment  $[a, t]$ ,

$$\int_a^t u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^t - \int_a^t u'(x)v(x) dx$$

Comme  $uv$  a une limite en  $b$ , par passage à la limite,  $\int_a^b u(x)v'(x) dx$  converge et est égale à  $[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ .

Idem  $\int_a^b u'(x)v(x) dx$  converge.

**II Intégrale de fonctions réelles et positives :  $f \geq 0$** **A Croissance de la fonction intégrale**

L'étude de la convergence d'une intégrale comme passage à la limite n'est pas toujours possible. Cependant lorsque  $f$  est positive, certaines règles permettent d'étudier la nature de l'intégrale. L'étude est semblable à celle des séries numériques.

**Remarque**

Si  $f$  est négative, on se ramène à positive avec  $-f$ .

Les intégrales de fonctions positives jouent un rôle clé dans la théorie de l'intégration. Si elle diverge, alors la limite de l'intégrale sur un segment tend vers  $+\infty$ . Les possibilités de divergence sont bien plus diverses pour une intégrale dont le signe de la fonction change une infinité de fois.

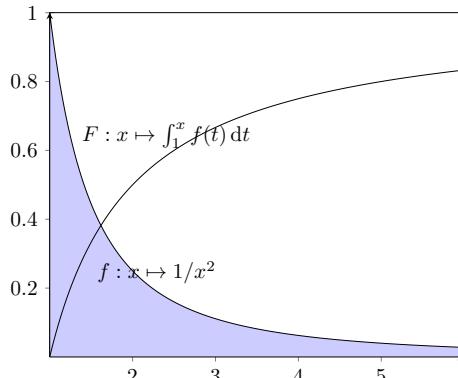
### Proposition Caractérisation de la majoration

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive.

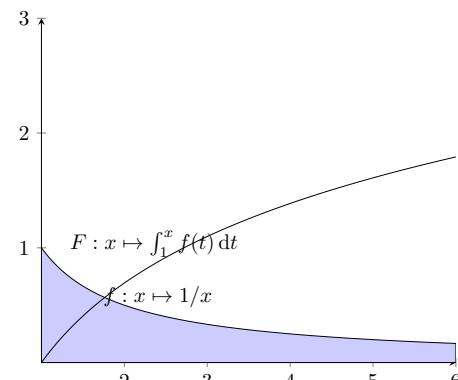
$\int_a^b f(x) dx$  converge si seulement si la fonction  $F : t \mapsto \int_a^t f(x) dx$  est majorée, c'est à dire il existe  $M > 0$  tel que :  $\forall t \in [a, b] : F(t) \leq M$ .

De plus, si elle converge, son intégrale est égale à la borne supérieure de  $F$ .

Et si elle diverge, elle diverge vers l'infinie.



$\int_a^b f(x) dx$  converge car  $F$  est majorée par 1.



$\int_a^b f(x) dx$  diverge vers  $+\infty$  car  $F$  n'est pas majorée.

### Démonstration

$F$  est croissante car  $F'(x) = f(x) \geq 0$ . D'après le théorème de la limite monotone,  $F$  admet une limite en  $\infty$  qui est finie si et seulement si  $F$  est majorée.

## B Règles de convergence

### Théorème Règle de comparaison

Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et positives tel que

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x).$$

Alors

- si l'intégrale  $\int_a^b g(x) dx$  converge, alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  converge également, et alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

- si l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  diverge, alors l'intégrale  $\int_a^b g(x) dx$  diverge également.

**Démonstration**

Soit  $t \in [a, b[$ .

$$\int_a^t f(x) dx \stackrel{\text{croissance sur un segment}}{\leq} \int_a^t g(x) dx \stackrel{\text{Majoration du théorème de la limite monotone}}{\leq} \int_a^b g(x) dx.$$

Donc la fonction  $F : t \mapsto \int_a^t f(x) dx$  est croissante et majorée donc admet une limite en l'infini. Par passage à la limite, on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Exemple

Quelle est la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ ?  
 $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2 + \sqrt{x}}$  est continue et positive sur  $[1, +\infty[$ . On a

$$\forall t \in [1, +\infty[ : \quad \frac{\sin^2(x)}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2 + \sqrt{x}} dx$  converge.

**Théorème Règle de petit 0 et grand O**

Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et positives tel que

$$f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x)) \text{ ou } f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$$

Alors

- si l'intégrale  $\int_a^b g(x) dx$  converge, alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  converge également,
- si l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  diverge, alors l'intégrale  $\int_a^b g(x) dx$  diverge également.

**Démonstration**

Comme  $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ , il existe  $t \in [a, b[$  tel que  $f(x) \leq g(x), \forall x \geq t$ . Comme  $\int_t^b g(x) dx$  converge,  $\int_t^b f(x) dx$  converge par règle de comparaison.  $\int_a^b f(x) dx$  converge par raccordement.

Exemple

Quelle est la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ ?  
 $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$  est continue et positive sur  $[1, +\infty[$ . On a

$$\frac{\ln(x)}{x^2} = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{3/2}} \right)$$

Comme l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$  converge,  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$  converge par règle du petit o.

**Théorème Règle de l'équivalent**

Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et de signe constant au voisinage de  $b$  tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x).$$

Alors les intégrales  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_a^b g(x) dx$  sont de même nature.

### Démonstration

Supposons  $f$  positive au voisinage de  $b$ . Comme  $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$ , il existe alors  $t \in [a, b[$  tel que tel que

$$\forall x \in [t, b[ : \quad \frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq \frac{3}{2}f(x).$$

On conclut par application de la règle de comparaison.

Dans le cas négatif, la preuve est identique pour  $-f$  et  $-g$ .

### Exemple

Quelle est la nature de  $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^2} dx$  ?

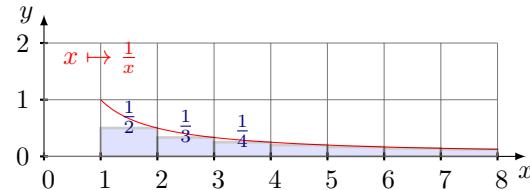
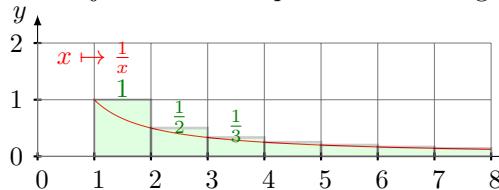
$x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$  est continue et positive sur  $]0, 1]$ . On a

$$\frac{\sin(\sqrt{x})}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Comme l'intégrale de Riemann  $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx$  diverge,  $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^2} dx$  diverge par règle d'équivalent.

## C Comparaison série-intégrale

Les séries sont un procédé de sommation de grandeurs discrètes, l'intégrale de grandeurs continues. L'analogie formelle entre les deux domaines permet de faire passer des idées intéressantes de l'une à l'autre. On compare ces deux objets mathématiques à l'aide d'inégalités.



L'aire entre 1 et  $n$  est :

- sous la courbe rouge :  $\int_1^N f(x)dx$ ,
- des rectangles verte :  $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$ ,
- des rectangles bleues :  $\sum_{n=2}^N f(n)$ .

Géométriquement, on a les inégalités :

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Si  $\sum f(n)$  diverge alors  $t \mapsto \int_1^t f(x) dx$  n'est pas majorée. Comme  $t \mapsto \int_1^t f(x) dx$  est croissante,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge. Idem si  $\sum f(n)$  diverge.

En conclusion, la série  $\sum f(n)$  converge si et seulement si l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge.

### Théorème Comparaison séries/intégrales

Soit  $f$  une application continue, positive et décroissante sur  $[a, +\infty[$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq a} f(n)$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

### Théorème Séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

### Démonstration

On a :

- $\alpha \leq 0$  : comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ , la série diverge grossièrement.
- $\alpha > 0$  : la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  et la série  $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  sont de même nature. Donc la série converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

## III Intégrale de fonctions réelles de signe variable

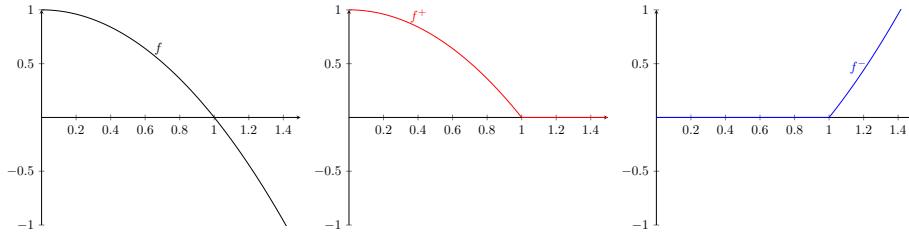
### A Absolument convergente

Nous passons maintenant à l'étude d'intégrale de fonctions réelles de signe variable. Pour expliquer le titre de cette section, il convient de remarquer que si le signe de  $f$  est constant à partir d'un certaine valeur  $c$ , l'étude de la convergence de  $\int_a^b f(x) dx$  se ramène à celle d'une intégrale de signe constant. En effet,  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_c^b f(x) dx$  sont de même nature.

Ce que nous allons voir dans cette section n'est donc réellement nouveau que pour les intégrales de fonctions qui changent de signe une infinité de fois.

Une première idée pour l'étude des intégrales de signe variable est de décomposer la fonction  $f$  sur sa partie positive et négative  $f = f^+ - f^-$  où

$$\forall x \in [a, b]: \quad f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ et } f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$



Soit  $c \in [a, b]$ . L'intégrale sur le segment  $[a, c]$  est :

$$\int_a^v f(x) dx = \int_a^c (f^+(x) - f^-(x)) dx = \int_a^c f^+(x) dx - \int_a^c f^-(x) dx.$$

Par passage à la limite, une condition suffisante pour que  $\int_a^v f(x) dx$  converge et que les deux intégrales  $\int_a^b f^+(x) dx$  et  $\int_a^b f^-(x) dx$  convergent.

Compte tenu des inégalités

$$0 \leq f^+ \leq |f|, \quad 0 \leq f^- \leq |f|,$$

le théorème de comparaison des intégrales à fonctions positives nous permet de conclure qu'une condition suffisante pour la convergence de  $\int_a^b f^+(x) dx$  et  $\int_a^b f^-(x) dx$  et donc aussi  $\int_a^b |f(x)| dx$  converge. Nous venons ainsi d'établir le résultat le plus important pour la convergence d'une intégrale de fonctions réelles de signe variable.

#### Théorème

Si  $\int_a^b |f(x)| dx$  converge alors  $\int_a^b f(x) dx$  converge.

#### Définition Absolue convergence

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ .

On dit que  $\int_a^b f(x) dx$  est **absolument convergente** lorsque  $\int_a^b |f(x)| dx$  converge.

Exemple

Démontrons que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  est absolument convergente. On a :

$$\forall x \in [1, +\infty[ : \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est convergente par intégrale de Riemann, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  est absolument convergente.

### Théorème

Une intégrale absolument convergente est convergente.

### Définition Intégrable

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ .

On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  si  $\int_I f(x) dx$  est absolument convergente.

### Proposition Espace vectoriel

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur  $I$  est un espace vectoriel.

### Définition Semi-convergente

Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Exemple **Intégrale de Dirichlet**

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  est semi-convergente.

— Non absolument convergente :

$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  en la prolongeant par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \inf_{x \in [n\pi, (n+1)\pi]} \frac{1}{|x|} \times \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \times 2.$$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N} : \int_0^{p\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{n=0}^{p-1} \frac{2}{(n+1)\pi} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{\text{Série harmonique}} +\infty.$$

— Convergente :

Par intégration par parties, les fonctions  $u : x \mapsto 1 - \cos x$  et  $v : x \mapsto 1/x$  sont  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et le produit  $u.v$  admet des limites finies en 0 et en  $+\infty$ , donc les intégrales  $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx$  et  $\int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx$  sont de même nature.

Or  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$  est absolument convergente sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par règle de comparaison. Donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  converge également.

### Proposition Inégalité de la moyenne

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{K}$  telle que  $\int_a^b f(x) dx$  est absolument convergente.  
Alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

### Démonstration

Comme  $\int_a^b f(x) dx$  est absolument convergente,  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_a^b -f(x) dx$  sont convergentes. On a :

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \leq |f(x)| \text{ et } -f(x) \leq |f(x)|$$

On obtient l'inégalité car  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . et  $-\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .