

---

# Série entière

---

## Exemple Série exponentielle

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad (E)$$

Par définition, l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre est l'application  $x \rightarrow e^x$ .

1. Déterminons les solutions de (E) sous forme polynomiale. Soit  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^N a_n x^n$ . Pour des raisons de degré, uniquement le polynôme nul convient. Comme  $f(0) = 1$ , il n'existe pas de solutions.
2. Déterminons les solutions de (E) sous forme "polynomiale de degré infini". Soit  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .  
"Soit  $x$ ."  
"Par dérivation", on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) \quad \text{"par interversion des symboles dérivée et somme"} \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{par translation d'indice} \end{aligned}$$

Comme  $f'(x) = f(x)$ , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

"Par identification", on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+1) a_{n+1} = a_n.$$

Par récurrence, on prouve que

$$a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

Comme la condition initiale est  $f(0) = 1$  et  $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$ , on obtient  $a_0 = 1$ . Comme la fonction exponentielle est l'unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale, on trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans ce chapitre, nous allons donner du sens aux guillemets de l'exemple précédent :

1. "Soit  $x$ ." : déterminer le domaine de définition de la fonction  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , c'est à dire déterminer le domaine de convergence de la série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,
2. "Par dérivation" : déterminer la dérivabilité de la fonction  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,
3. "Par interversion des symboles dérivée et somme" : démontrer l'égalité,
4. "Par identification" : démontrer l'unicité du développement sous la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

Une **série entière** est un "polynôme de degré infini" :

$$\sum a_n z^n$$

où les coefficients  $a_n$  forment une suite réelle ou complexe et  $z$  une variable complexe.

Les séries entières sont

1. un outil :

- (a) dans la résolution d'équations différentielles, par exemple  $(1+x)y' = \alpha y$ , en cherchant les solutions sous la forme  $y(x) = \sum a_n x^n$ ,
- (b) dans l'étude du comportement asymptotique d'une somme de variable aléatoires et la caractérisation d'une variable aléatoire par la fonction génératrice :  $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0} P(X=k)t^k$ ,
- (c) dans la modélisation des systèmes dynamiques de manière discrète à l'aide de la transformée en  $Z$ , soit  $s(n)$  l'état du système au temps  $n$ , sa transformée en  $Z$  est

$$S(z) = \mathcal{Z}\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}.$$

- 2. un objet préalable à l'analyse complexe des fonctions holomorphes et analytiques par exemple la fonction exponentielle définie sur  $\mathbb{C}$ .

L'étude du cadre général des suites et séries de fonctions est un préalable à l'étude des séries entières qui sont un exemple de suites et de séries de fonctions.

## I Généralités

### A Définition

#### Définition Série entière

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme  $\sum_n f_n$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite numérique et où  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_n(z) = a_n z^n$ . La **somme** de la série entière est la fonction

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

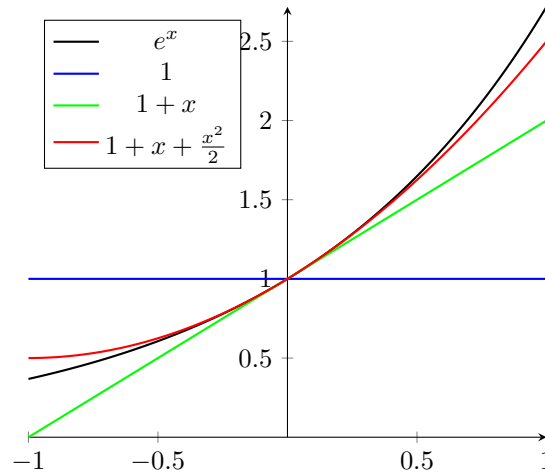
Remarque

Il faut bien distinguer la série entière  $\sum a_n z^n$  qui est une **série de fonctions** ( $z$  étant une "variable muette") et la **série numérique**  $\sum a_n z^n$  pour  $z$  complexe fixé.

Exemple **Série exponentielle**

Comme vu dans l'exemple 1, la somme de la série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  est la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



La fonction exponentielle,  $x \mapsto e^x$  en bleue, et les fonctions sommes partielles  $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  pour différents valeurs de  $n$ . On observe la convergence de la fonction somme partielle vers la fonction exponentielle.

Exemple **Série géométrique**

Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

Par passage à la limite dans l'égalité,

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k,$$

on obtient que la somme de la série  $\sum x^n$  est :

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

**B Rayon de convergence****Définition Domaine de convergence**

On appelle **domaine de convergence** l'ensemble de définition de la fonction  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

Exemple **Série géométrique**

Le domaine de convergence de la série géométrique  $\sum x^n$  est  $] -1, 1[$ .

**Lemme Lemme d'Abel**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$  telle que la suite numérique  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée. Alors :

1. La série numérique  $\sum a_n z^n$  converge absolument pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ .
2. Plus précisément, la série de fonctions  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  dès que  $0 \leq r < |z_0|$ .

**Démonstration**

Fixons  $|z| < |z_0|$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Par hypothèse, le premier des facteurs de ce produit est borné, le second forme une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique  $\sum a_n z^n$  converge absolument.

La démonstration pour la convergence normale est identique ( $|a_n z^n| \leq |a_n r^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{r}{z_0} \right|^n$ ).

Remarque

Il n'y a pas toujours convergence normale (ni uniforme) sur  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$ .

### Lemme

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$  telle que la suite numérique  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne soit pas bornée. Alors la série numérique  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \geq |z_0|$ .

### Démonstration

Fixons  $|z| \geq |z_0|$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \geq |a_n z_0^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ car } (a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée.}$$

Le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série numérique  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement.

Si on note  $R$ , la borne supérieure des rayons telle que la suite  $(|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors

- la série converge si le module du complexe  $z$  est strictement inférieur à  $R$  d'après le premier lemme,
- la série diverge si le module du complexe  $z$  est strictement supérieur à  $R$  d'après le second lemme.

Donc la "forme" géométrique du disque de convergence est un disque.

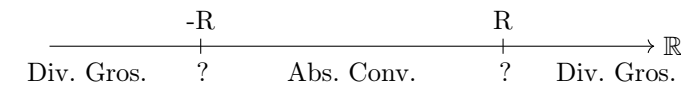
### Définition-Proposition Rayon de convergence

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière.

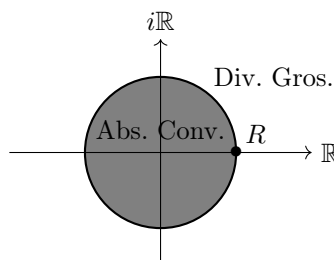
Le **rayon de convergence**  $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de la série entière  $\sum a_n z^n$  est défini par

$$R = \sup \left\{ r > 0 \text{ tel que la suite de terme général } |a_n| r^n \text{ est bornée} \right\}.$$

- Si  $|z_0| < R$ , la série numérique  $\sum_n a_n z_0^n$  converge absolument.
- Si  $|z_0| > R$ , la série numérique  $\sum_n a_n z_0^n$  diverge grossièrement ; plus précisément, la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée.
- Si  $|z_0| = R$ , la série peut ou non converger.



Disque de convergence d'une série entière dans le cas réelle



Disque de convergence d'une série entière dans le cas complexe

## Démonstration

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  fixé.

- Si  $|z| < R$  alors il existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|z| < r < R$ . Comme  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, d'après le lemme d'Abel, la série numérique  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.
- Si  $|z| > R$  alors la suite  $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série numérique  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement.

## Définition Disque ouvert de convergence

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

- On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière  $\sum a_n x^n$  à variable réelle l'intervalle

$$]-R, R[.$$

- On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière  $\sum a_n z^n$  à variable complexe l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

- On appelle **cercle d'incertitude** (et parfois aussi, malheureusement, cercle de convergence) de la série entière  $\sum a_n z^n$  l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

## II Détermination du rayon de convergence

## A Encadrement du rayon de convergence

Si pour un  $z_0$  l'on connaît la nature de la série numérique  $\sum a_n z_0^n$ , on en déduit des informations sur le rayon de convergence.

## Proposition

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

- Si la série numérique  $\sum a_n z_0^n$  converge, alors  $|z_0| \geq R$ .
- Si la série numérique  $\sum a_n z_0^n$  diverge, alors  $|z_0| \leq R$ .
- Si la série numérique  $\sum a_n z_0^n$  est semi convergente, alors  $|z_0| = R$ .

Exemple

Soit la série entière  $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n}$ .

Si  $x = -1$ , la série alternée  $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$  est semi-convergente. Donc le rayon de convergence est  $R = 1$ .

## B Utilisation de la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes strictement positifs nous permet la plupart du temps de déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Exemple

Soit la série entière  $\sum \frac{x^n}{n}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. En posant  $u_n = \frac{x^n}{n}$ , déterminons la nature de la série numérique  $\sum u_n$ .

D'après la règle de d'Alembert, on a :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = |x| \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Si  $|x| < 1$  la série numérique converge absolument, donc  $R \geq 1$ .  
 Si  $|x| > 1$  la série numérique ne converge pas absolument, donc  $R \leq 1$ .  
 Finalement,  $R = 1$ .

Exemple  $\sum a_n x^{\alpha n}$

Soit la série entière  $\sum \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. En posant  $u_n = \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$ , déterminons la nature de la série numérique  $\sum u_n$ .  
 D'après la règle de d'Alembert, on a :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1+1}}}{\frac{x^{2n}}{2^{n+1}}} \right| = |x|^2 \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^2}{2}.$$

Si  $\frac{|x|^2}{2} < 1$ , soit  $|x| < \sqrt{2}$ , la série numérique converge absolument, donc  $R \geq \sqrt{2}$ .

Si  $\frac{|x|^2}{2} > 1$ , soit  $|x| > \sqrt{2}$ , la série numérique ne converge pas absolument, donc  $R \leq \sqrt{2}$ .

Finalement,  $R = \sqrt{2}$ .

## C Utilisation de la règle de comparaison

### Proposition

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectivement  $R_a$  et  $R_b$ .

1. Si  $|a_n| \leq |b_n|$  à partir d'un certain rang, alors  $R_a \geq R_b$ .
2. Si  $|a_n| = o(|b_n|)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $R_a \geq R_b$ .
3. Si  $|a_n| = O(|b_n|)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $R_a \geq R_b$ .
4. S'il existe  $K > 0$  tel que  $|a_n| \sim K|b_n|$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $R_a = R_b$ .

### Démonstration

Démontrons uniquement la première proposition.

Soit  $|z| < R_b$  fixé. La série numérique  $\sum |b_n z^n|$  est donc convergente. Comme  $|a_n| \leq |b_n|$  à partir d'un certain rang, on a  $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ . Cela implique que la série numérique  $\sum |a_n z^n|$  est convergente. En conclusion,  $R_a \geq R_b$ .

Exemple

Déterminer une borne du rayon de convergence de la série  $\sum \sin(n) z^n$ .

Comme  $|\sin(n)| \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le rayon de convergence est supérieur ou égale à 1, rayon de convergence de  $\sum z^n$ .

Exemple

Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum \ln(1 + 1/n) z^n$ .

Comme  $|\ln(1 + 1/n)| \sim 1/n$ , le rayon de convergence est égale à 1, rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{n}$ .

## D Série entière de la forme $\sum n^\alpha a_n z^n$

### Proposition

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

### Démonstration

Soit  $R$  et  $R'$  les rayons de convergences des séries  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n$  respectivement.

On suppose  $\alpha \geq 0$ .

- Comme  $|a_n| \leq |n^\alpha a_n|$ , d'après la règle de comparaison,  $R \geq R'$ .
- Soit  $|z| < R$  fixé. Montrons que la série numérique  $\sum n^\alpha a_n z^n$  converge absolument. Soit  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $|z| < r < R$ . On a :

$$|n^\alpha a_n z^n| = |n^\alpha \frac{z^n}{r^n}| |a_n r^n| \leq M |a_n r^n| \text{ car } |n^\alpha \frac{z^n}{r^n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme la série numérique  $\sum |a_n r^n|$  converge puisque  $|r| < R$ , la série numérique  $\sum |n^\alpha a_n z^n|$  converge par règle de comparaison. En conclusion  $R' \geq R$ .

Pour  $\alpha \leq 0$ , il faut reprendre cette preuve en inversant l'ordre.

Exemple

Le rayon de convergence de la série  $\sum n^{2019} z^n$  est égale au rayon de convergence de  $\sum z^n$ , soit 1.

### III Opérations sur les séries entières

#### A Combinaison linéaire

##### Proposition

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence respectif  $R_a$  et  $R_b$ .

1.  $\sum (a_n + b_n) z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R$  avec  $R = \min(R_a, R_b)$  si  $R_a \neq R_b$  ou  $R \geq R_a$  si  $R_a = R_b$ . De plus, pour  $|z| < R$ , sa somme est égale à :

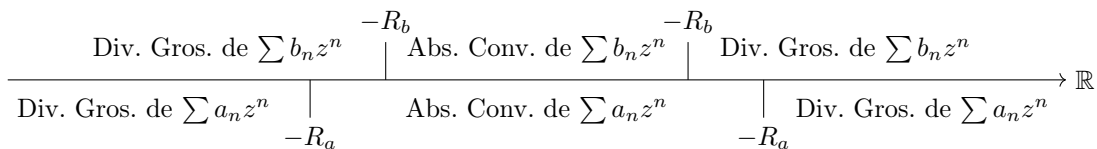
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

2.  $\sum \alpha a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R_a$  si  $\alpha \neq 0$  et  $+\infty$  si  $\alpha = 0$ . De plus, pour  $|z| < R$ , sa somme est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

##### Démonstration

Ce schéma permet de guider la preuve.



Les rayons de convergence dans le cas réelle

- Cas  $R_a \neq R_b$  : supposons sans perte de généralité que  $R_a < R_b$ .
  - Soit  $|z| < R_a$  fixé d'où  $|z| < R_b$ . Les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  convergent absolument. Donc la série numérique  $\sum (a_n + b_n) z^n$  converge absolument. D'où  $R \geq R_a$ .
  - Soit  $R_a < |z| < R_b$ . La série numérique  $\sum a_n z^n$  diverge et la série numérique  $\sum b_n z^n$  converge. Donc la série numérique  $\sum (a_n + b_n) z^n$  diverge. D'où  $R \leq R_a$ .
 Finalement  $R \geq R_a$ .
- Cas  $R_a = R_b$  :
  - Soit  $|z| < R_a = R_b$  fixé. Les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  convergent absolument. Donc la série numérique  $\sum (a_n + b_n) z^n$  converge absolument. D'où  $R \geq R_a$ .
  - Soit  $|z| > R_a = R_b$  fixé. Les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  divergent. Donc on ne peut rien conclure sur la convergence de la série  $\sum (a_n + b_n) z^n$ .

Finalement  $R \geq R_a$ .

### Exemple Rayon de convergence

1.  $\sum z^n$  et  $\sum nz^n$  sont de rayon 1 et leur série entière somme  $\sum(1+n)z^n$  est de rayon 1.
2.  $\sum z^n$  et  $\sum(2^{-n} - 1)z^n$  sont de rayon 1 et leur série entière somme  $\sum(1+n)z^n$  est de rayon 2.
3.  $\sum z^n$  et  $\sum -z^n$  sont de rayon 1 et leur série entière somme  $\sum 0z^n$  est de rayon  $\infty$ .

### Exemple Déterminer la somme

Soit la série entière  $\sum(1 + \frac{1}{n!})x^n$ .

Comme  $\sum x^n$  est de rayon 1 et  $\sum \frac{x^n}{n!}$  de rayon  $\infty$ , le rayon de  $\sum(1 + \frac{1}{n!})x^n$  est 1.

Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{n!} + 1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = e^x + \frac{1}{1-x}.$$

## B Produit de Cauchy

### Proposition

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence respectif  $R_a$  et  $R_b$ .

Le **produit de Cauchy**  $\sum c_n z^n$  avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  est une série entière de rayon de convergence  $R$  avec  $R \geq \min(R_a, R_b)$ . De plus, pour  $|z| < R$ , sa somme est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

### Démonstration

Soit  $|z| < \min(R_a, R_b)$ . Soit la série numérique  $\sum w_n$  produit de Cauchy des séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : w_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = c_n z^n$$

Comme  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont absolument convergentes, la série numérique  $\sum w_n$  est absolument convergente, soit  $R \geq \min(R_a, R_b)$  et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

### Exemple

Le produit de Cauchy de la série géométrique avec elle-même a un rayon égale à 1. De plus, pour tout  $|x| < 1$ , on a :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n 1 \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

### Exemple

Le produit de Cauchy de la série exponentielle et de la série géométrique a un rayon égale à 1. De plus, pour tout  $|x| < 1$ , on a :

$$\frac{e^x}{1-x} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n.$$



## IV Propriétés de la somme

La régularité des séries entières est étudiée uniquement dans le cas d'une variable réelle.

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière réelle de rayon de convergence  $R$  et de somme  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n)x^n$ .

### Théorème continuité

$f$  est continue sur l'intervalle de convergence  $] - R, R[$ .

Exemple

$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n)x^n$  est continue sur  $] - R, R[$ .

### Théorème dérivation terme à terme

$\sum n a_n x^{n-1}$  est une série entière de rayon de convergence  $R$ .

$f$  est dérivable sur  $] - R, R[$  et sa fonction dérivée sur  $] - R, R[$ ,  $f'$ , est égale à :

$$\forall x \in ]R, R[: f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple **dérivation de la série géométrique**

Soit la série géométrique  $\sum x^n$ . On a

$$\forall x \in ]-1, 1[: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par le théorème de dérivation terme à terme, on obtient :

$$\forall x \in ]-1, 1[: \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Donc la somme de la série entière  $\sum_n n x^{n-1}$  est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ .

### Théorème intégration terme à terme

$\sum n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  est une série entière de rayon de convergence  $R$ .

Soit  $F$  une primitive de  $f$ . On a

$$\forall x \in ]R, R[: F(x) - F(0) = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple **intégration de la série géométrique**

Soit la série géométrique  $\sum x^n$ . On a

$$\forall x \in ]-1, 1[: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient :

$$\forall x \in ]-1, 1[: -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Donc la somme de la série entière  $\sum_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  est la fonction  $x \mapsto -\ln(1-x)$ .

## V Développements en séries entières

### A Généralités

#### Définition fonction développable en série entière

On dit que  $f$  est **développable en série entière** sur  $] - r, r[$  (au voisinage de 0) si il existe une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R \geq r$  telle que

$$\forall x \in ] - r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

#### Exemple série géométrique

On a :

$$\forall x \in ] - 1, 1[: \quad \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \sum_{n=0}^N x^n.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\forall x \in ] - 1, 1[: \quad \frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Donc la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  est développable en série entière.

#### Théorème condition nécessaire

Si  $f$  admet un développement en série entière sur  $] - r, r[$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $] - r, r[$ , son développement en série entière est unique et est donné par sa **série de Taylor** :

$$\forall x \in ] - r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

#### Remarque

La réciproque du théorème est fausse. Il se peut qu'une fonction  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $] - r, r[$  sans que  $f$  soit développable en série entière. Considérons, par exemple, la fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- L'application  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et on montre, par récurrence sur  $n$ , que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Une application répétée du théorème limite de la dérivée permet de déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

- Si  $f$  était développable en série entière, il existerait  $r$  tel que :

$$\forall x \in ] - r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \stackrel{f^{(n)}(0)=0}{=} 0,$$

ce qui est impossible puisque  $f$  ne s'annule qu'en 0.

**Corollaire unicité du développement en série entière**

Si

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

Remarque

Cette égalité  $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n$  est importante.

**Corollaire développement limitée**

Si

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors on a :

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o(x^N).$$

**B Méthodes pratiques**

1. Utilisation des opérations somme et produit.

Exemple

Déterminer le développement en série entière de  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} + 2e^x$ .

$$\forall x \in ]-1, 1[: \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{n!}\right) x^n.$$

2. Changement de variable.

Exemple

Déterminer le développement en série entière de  $f : x \mapsto \frac{1}{a-x}$ .

$$\forall x \in ]-a, a[: \quad f(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} \quad \underbrace{\text{en posant } y = \frac{x}{a} \text{ avec } \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n}_{=}$$

$$\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

3. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Exemple

Déterminer le développement en série entière de  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

$$\forall x \in ]-1, 1[: \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

4. Dérivation et intégration terme à terme.

## Exemple

Déterminer le développement en série entière de  $f : x \mapsto \ln(1 - x)$ .  
Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned}\ln(1 - x) &= - \int_0^x \frac{1}{1 - t} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt \text{ (théorème d'intégration terme à terme)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

## 5. Utilisation d'une équation différentielle.

## Exemple

Déterminer le développement en série entière de  $f : x \mapsto \cos(x)$ .  
La fonction  $f$  est l'unique solution du problème de Cauchy de l'équation différentielle :

$$y'' = -y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, \text{ sur } \mathbb{R} \quad (E).$$

Supposons qu'il existe une solution de  $(E)$  sous forme de série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de somme  $f$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \text{ (les deux premiers termes sont nuls)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \text{ (translation d'indice)}.\end{aligned}$$

Comme  $f'' = -f$ , par identification, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n.$$

On a  $f(0) = a_0$  et  $f'(0) = a_1$ . D'après les conditions initiales  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ , d'où  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$ . Par récurrence, on démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

## VI Développement en série entière usuels

Dans l'exemple introductif du chapitre, la fonction  $\exp$  est l'unique solution du problème de Cauchy  $y' = y$  avec  $y(0) = 1$ . On prolonge  $\exp$  à  $\mathbb{C}$ .

**Définition Exponentielle complexe**

La série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  est de rayon de convergence infini. Sa somme est appelé l'**exponentielle complexe**.  
On a ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On note  $e^z = \exp(z)$ .

**Proposition**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}.$$

**Démonstration**

La démonstration est faite dans le chapitre sur les séries numériques à la section produit de Cauchy.

On a aussi :

$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$
$R = \infty$	$\forall x \in \mathbb{R} :$	$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$R = 1$	$\forall x \in ]-1, 1[ :$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$R = 1$	$\forall x \in ]-1, 1[ :$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$