Application linéaires : exercices

I Applications linéaires

A Proportionnalité

Exercice **Dilution**

Quelle quantité d'alcool à 70° dois-je mette dans 1L l'alcool a 90 ° pour diluer 75 ° ?

B Calcul matriciel

Exercice **Des calculs de produits**

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice **Commutant**

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice **Annulateur**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice **Produit non commutatif**

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice **Matrices stochastiques en petite taille**

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de A est égale à 1. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique si $n = 2$. Reprendre la question si $n \leq 1$.

Exercice **Puissance n-ième, par récurrence**

Calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice **Puissance n-ième - avec la formule du binôme**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice **Puissance n-ième - avec un polynôme annulateur**

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geq 2$.

Exercice **Inverser une matrice sans calculs !**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice **Inverse avec calculs !**

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice **Matrice nilpotente**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

C Applications linéaires

Exercice **Applications linéaires ou non ?**

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$;
4. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2,\ P \mapsto \big(P(0), P'(1)\big)$.

Exercice **Définie par une base**

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

Exercice **Du local au global...**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

D Dualité

Exercice **Application linéaire définie sur les matrices**

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

II Images et noyaux

Exercice **Noyau et image**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice **Application linéaire donnée par l'image d'une base**

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3\ , u(e_2) = 3e_2\ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
2. Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

Exercice **Noyau prescrit ?**

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice **A noyau fixé**

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Exercice **Application linéaire à contraintes**

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que, si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique, alors on a

1. $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.
2. $\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

Exercice **Espace vectoriel des polynômes de dimension infinie**

1. Montrer que l'application $\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & (P(0), P') \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

2. En déduire que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

III Matrices par blocs

Exercice ***, Trace du produit tensoriel de deux matrices**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on définit le produit tensoriel de A et B par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Quelle est la taille de la matrice $A \otimes B$? Démontrer que $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Exercice ****, Matrices de Walsh**

La suite de matrices de Walsh, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est définie par :

$$W_0 = (1) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \quad W_{n+1} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer la taille de W_n et calculer w_n^2, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice ****, Déterminant d'une matrice triangulaire supérieur par blocs**

On définit par blocs une matrice A par $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n, p et q avec $p + q = n$. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

IV Symétrie et projection

Exercice **Noyau et image**

On considère $s \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, -y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que s est une symétrie. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Démontrer $p = \frac{\mathrm{Id}+s}{2}$ est une projection.

Exercice **Noyau et image**

On considère les espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y+z = 0 \text{ et } 2x+y-z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+2z = 0\}$.

1. Déterminer une base de F, puis démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $p(x, y, z)$.
   Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
   Même question avec q la projection sur G parallèlement à F.

Exercice

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice

> Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$.
> Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_E$.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit l'application ϕ par :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme.
2. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer l'inverse de ϕ.

Correction :

1. 2 solutions :
   (a) — *Définie* : L'application ϕ est bien définie car $deg(P - P') \leq deg(P)$.
   — *Linéaire* : soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   $$\phi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - (\lambda P + \mu Q)' = \lambda(P - P') + \mu(Q - Q') = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$$
   (b) Les applications, identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} : P \mapsto P$ et dérivée $\psi : P \mapsto P'$, sont linéaires. Comme $\mathcal{L}(R_2[X])$ est un espace vectoriel, ϕ est une application linéaire car combinaison linéaire de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ et ψ.
2. 2 solutions :
   (a) Comme ϕ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de démontrer que ϕ est injective, soit $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
   Montrons que $\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \subset \mathrm{Ker}\,\phi$.
   $\mathrm{Ker}\,\phi$ est un espace vectoriel donc il contient l'élément neutre.
   Montrons que $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
   Soit $P \in \mathrm{Ker}\,\phi$, c'est à dire que $\phi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Soit $P = P'$. D'où $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
   (b) Déterminons la matrice de l'endomorphisme de ϕ dans la base canonique, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   $$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } \phi(X^i) = X^i - iX^{i-1}.$$
   Comme $\det([\phi]_{\mathcal{B}}) = 1$, produit des coefficients de la diagonale pour une matrice triangulaire supérieur, $[\phi]_{\mathcal{B}}$ est inversible, donc ϕ est bijectif.
3. 2 solutions :
   (a) L'application dérivée $\psi : P \mapsto P'$, est nilpotente car $\psi^3 = 0$. Comme ψ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ commutent, on a
   $$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} = \mathrm{Id}^3_{\mathbb{R}_2[X]} - \psi^3 = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} - \psi) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2) = \phi \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2).$$
   Donc l'inverse de ϕ est $\phi^{-1} = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2)$.
   (b) Déterminons l'inverse de matrice de l'endomorphisme de ϕ par la méthode du pivot de Gauss :
   $$\begin{array}{rc} & \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ (L2) \leftarrow (L2) + 2(L3) & \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ (L1) \leftarrow (L1) + (L2) & \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$
   D'où $\phi^{-1}(1) = 1, \phi^{-1}(X) = 1 + X$ et $\phi^{-1}(X^2) = 2 + 2X + X^2$. Soit $\phi^{-1} = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} + \psi + \psi^2)$.