Série numérique

En mathématiques, la notion de série permet de généraliser la notion de somme finie.
Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en prenant la somme des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

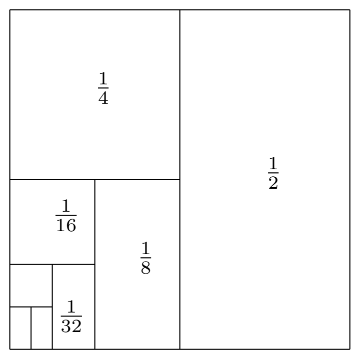
Peut-on donner un sens à la somme de tous les termes d'une suite infinie de nombres réels :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = u_0 + u_1 + u_3 + u_4 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_n?$$

Peut-on permuter les termes de la suite ou opérer des regroupement sans modifier ni la convergence ni la somme de la série ?

Exemple **Partager un carré**

Peut-on partager un carré en une infinité de rectangles de façon à enlever à chaque étape la moitié de l'aire restante ? La figure ci-dessous montre une solution.



En prenant comme unité d'aire, l'aire du carré de départ, on en déduit la relation :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$$

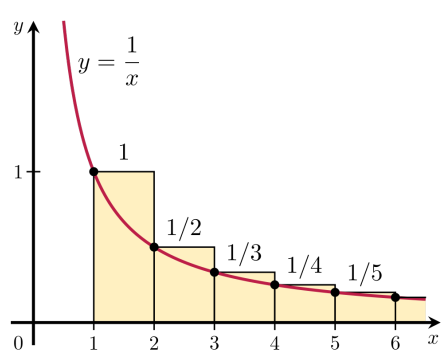
La somme de tous les termes de la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et est égale à 1.

Exemple **Somme harmonique**

La somme harmonique est la somme des inverses des entiers naturels non nuls qui est donc égale à

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On peut remarquer [a] que l'aire sous la courbe rouge est inférieur à la somme des aires des rectangles oranges



d'où

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, la suite (H_n) diverge.
La somme de tous les termes de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers l'infini.

---

a. On peut aussi regrouper les termes

$$\lim_{n\to\infty} H_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}^{\geq\frac{1}{2}}}_{2 \text{ termes}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}^{\geq\frac{1}{2}}}_{4 \text{ termes}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}^{\geq\frac{1}{2}}}_{8 \text{ termes}} + \ldots$$

et la limite est donc supérieur à une somme infini de 1/2 donc la limite est l'infinie (voir https://www.youtube.com/watch?v=_AtkIpi6KP0).

Exemple **Non commutativité des sommes infinies**

On considère cette somme

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \overbrace{1 - \frac{1}{2}}^{\geq\frac{1}{2}} + \overbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}^{\geq 0} + \overbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}^{\geq 0} + \cdots \geq \frac{1}{2}.$$

En réorganisant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots) \\
&= \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} S_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où une contradiction car $\lim_{n\to\infty} S_n \geq \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$.

I Généralités

Définition Série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
On appelle suite des **somme partielle** donnée par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série numérique** de **terme général** et noté $\sum u_n$.

Exemple

La somme partielle de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est égale à $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est convergente (respectivement divergente, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante) si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.
Dans ce cas, on appelle **somme de la série** la limite S de la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Ainsi,

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.}$$

De plus, on appelle **reste** d'ordre n de la série la quantité

$$\boxed{R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k>n} u_k.}$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Remarque

Attention :

— $\sum u_n$ est une suite,
— $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est un nombre,
— $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est un nombre si la série est convergente.

Exemple **Série géométrique**

Soit $\sum q^n$ la série géométrique. Pour $q \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ -qS_n &= -q - q^2 + \cdots + q^n - q^{n+1} \\ S_n - qS_n &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

La série converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans le cas de convergence, sa somme est $\frac{1}{1-q}$.
On retrouve par exemple que $\frac{1}{9} = 0,111\ldots$, d'où $1 = 0,999\ldots$ car $0,111\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1/10}{1-1/10} = \frac{1}{9}$.

Exemple **Séries télescopiques**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $u_n = a_{n+1} - a_n$.
On a

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_0. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum u_n$ télescopiques converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si la série converge, sa limite est $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - a_0$.

Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge vers 1.

Proposition Indépendance du rang

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature, c'est-à-dire ou toutes deux convergentes ou toutes deux divergent.

Démonstration

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} &\Leftrightarrow \forall\epsilon\in\mathbb{R}^{+*}, \exists N\in N, \forall n\geq N : |\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k| \leq \epsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\epsilon\in\mathbb{R}^{+*}, \exists N\in N, \forall n\geq N : |\sum_{k=n_0}^{n} u_k - (\sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k)| \leq \epsilon\\ &\Leftrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge.}\end{aligned}$$

Proposition Espace vectoriel

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, c'est à dire si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers S et S', la série $\sum(au_n + bv_n)$ converge pour toutes constantes réelle a, b. De plus, dans ce cas, le somme est $aS + bS'$.

Démonstration

Voir le cours sur les suites.

Exemple

La série $\sum \left(3(\frac{\sqrt{2}}{2})^n - 5(0.999)^n\right)$ converge.

Remarque

Attention la réciproque est FAUSSE ($\sum(au_n+bv_n)$ converge implique que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent). Comme contre-exemple, la série $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente comme série télescopique. Cependant la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Proposition Grossièrement divergente

Soit $\sum u_n$ une série numérique.
Si la série converge, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
On dit que la série numérique $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si u_n ne tend pas vers 0.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Par passage à la limite (l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel), on a :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Remarque

La réciproque est fausse. Le contre-exemple classique est la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente, bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

II Séries à termes positifs (SATP)

A Croissance des sommes partielles

Les séries à termes positifs jouent un rôle clé dans la théorie des séries. Si elle diverge, alors la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$. Les possibilités de divergence sont bien plus diverses pour une série dont les termes changent de signe une infinité de fois.

Pour comprendre le comportement d'une série $\sum u_n$ à termes positifs, il convient d'observer que dans ce cas la suite de ses sommes partielles (S_n) est une suite croissante de réels positifs. En effet, pour tout $n \geq 1, S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$, donc $S_n \geq S_{n-1}$. Il est commode de représenter une telle suite croissante (S_n) par un escalier infini, où la n^e marche est le segment horizontal d'extrémités les points de coordonnées (n, S_n) et $(n+1, S_n)$. Ainsi la figure 1.2 représente l'escalier associé à la série harmonique (en posant $u_0 = 0$),

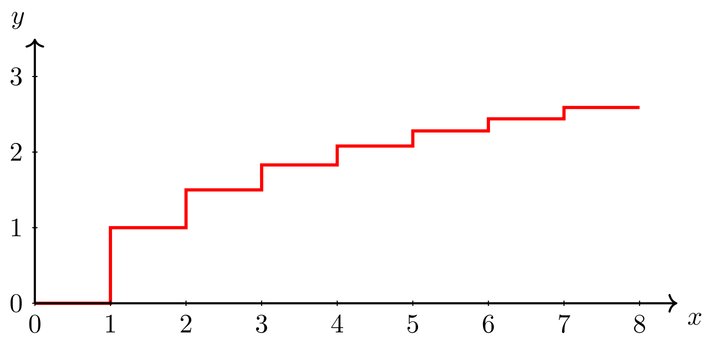


Figure 1 – Escalier infini de la série harmonique

Sur cette figure, on voit que la pente est de plus en plus douce, mais comme dans le cas d'une représentation graphique de fonction, cela ne suffit pas pour conclure à l'existence d'une asymptote horizontale. On observe le même phénomène avec la représentation graphique de la fonction logarithme et il est bien connu que $\ln x$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini et donc qu'il ne peut y avoir d'asymptote horizontale.

Pour un escalier infini représentant une série à termes positifs, il y a que deux possibilités :

— ou bien l'escalier est plafonné, autrement dit il existe une altitude M qu'il ne peut jamais franchir (mathématiquement, M est un majorant de l'ensemble de toutes les valeurs de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M)$;

— ou bien il n'est pas plafonné et finit donc par dépasser toute altitude fixée à l'avance. Dans le deuxième cas, comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour chaque altitude A fixée, à partir d'un certain rang n_0, $S_n \geq A$ pour tous les indices suivants. Comme A est quelconque, cela signifie que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

Définition **Série à termes positifs**

Une **série à termes positifs** est une série réelle $\sum u_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0.$$

Proposition **Adaptation du théorème de la limite monotone**

Une SATP converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
De plus, si elle converge, sa somme est égale à la borne supérieure des sommes partielles.
De plus, si elle diverge, elle diverge vers l'infinie.

Démonstration

Comme $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Une suite croissante converge si set seulement si la suite est majorée. De plus, si elle converge, sa somme est égale à la borne supérieure.

B Règles de convergence

Proposition Règle de comparaison

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.
— Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$. Soit $\sum v_n$ convergente. $\sum u_n$ est une SATP. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=0}^{n} u_n \leq \sum_{k=0}^{n} v_n \overbrace{\leq}^{\text{théorème de limité monotome}} \sum_{k=0}^{+\infty} v_n < +\infty.$$

Comme la suite des sommes partielles est bornée, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ est convergente. Idem pour la divergence.

Remarque

Les inégalités

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

peuvent être vérifiées uniquement à partir d'un certain rang car la convergence ou la divergence d'une série ne dépendent pas des premiers termes.

Exemple

Étudions la nature de la série $\sum e^{-n^2}$ à termes positifs. On a $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq e^{-n^2} \leq e^{-n} = (\frac{1}{e})^n$. Comme la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est convergente car $|\left(\frac{1}{e}\right)| < 1$, la série $\sum e^{-n^2}$ est convergente d'après la règle de comparaison.

Proposition Règle du petit o et grand O

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP. On suppose que $u_n = O_{n\to\infty}(v_n)$ (ou $u_n = o_{n\to\infty}(v_n)$). Alors :

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.
— Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.

Démonstration

On suppose $\sum v_n$ converge.
On a (u_n) et (u_n) deux suites réelles positives tel que $u_n = O_{n\to\infty}(v_n)$. Cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq N : \quad u_n \leq M v_n$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} (M v_k) \leq M \sum_{k=0}^{n} v_k \overbrace{\leq}^{\text{théorème de limité monotome}} M \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Donc la suite des sommes partielles est bornée, donc la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple

Étudions la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ à termes positifs. On a $\frac{1}{n} = o_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente d'après la règle de comparaison.

Proposition Règle d'équivalence

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP telles que $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$.
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

$u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ implique que $u_n = O_{n\to\infty}(v_n)$ et que $v_n = O_{n\to\infty}(u_n)$. On conclut à l'aide de la proposition **??**.

Exemple

Étudions la nature de la série $\sum \frac{1}{\ln(1+n)}$ à termes positifs. On a $\frac{1}{\ln(1+n)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{1}{\ln(1+n)}$ est divergente d'après la règle d'équivalence.

Proposition Règle de d'Alembert

Soit une SATP $\sum u_n$. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et admet une limite L quand n tend vers $+\infty$.
Alors

— si $L < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente,

— si $L > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.

Remarque

Si $L = 1$, on ne pas conclure. En effet, on a $L = 1$ pour la série $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ et pourtant la première diverge et la seconde converge.

Démonstration

Supposons $L < 1$. Soit $L \leq A \leq 1$. A partir d'un certain rang n_0, on a

$$\forall n \geq n_0 : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq A$$

$$\forall n \geq n_0 : \quad u_n \leq A^{n-n_0} u_{n_0}$$

La série géométrique $\sum_{n\geq n_0} A^{n-n_0}$ converge car $|A| < 1$. Par règle de comparaison, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, donc $\sum u_n$ convergente.
Supposons $L > 1$. Soit $L \geq A \geq 1$. A partir d'un certain rang n_0, on a

$$\forall n \geq n_0 : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq A$$

$$\forall n \geq n_0 : \quad u_n \geq A^{n-n_0} u_{n_0}$$

La série géométrique $\sum_{n\geq n_0} A^{n-n_0}$ diverge car $|A| > 1$. Par règle de comparaison, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge, donc $\sum u_n$ est diverge.

Exemple **Série exponentielle**

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge car d'après la règle de d'Alembert, on a :

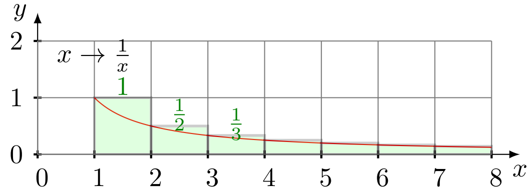
$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{(n)!}} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

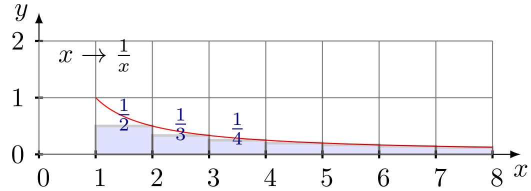
Dans le chapitre sur les séries entières, on définira la fonction exponentielle ainsi

$$\exp : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

C Comparaison série-intégrale

Les séries sont un procédé de sommation de grandeurs discrètes, l'intégrale de grandeurs continues. L'analogie formelle entre les deux domaines permet de faire passer des idées intéressantes de l'une à l'autre. On compare ces deux objets mathématiques à l'aide d'inégalités.





L'aire entre 1 et n est :

- sous la courbe rouge : $\int_1^N f(x)dx$,
- des rectangles verte : $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$,
- des rectangles bleues : $\sum_{n=2}^{N} f(n)$.

Géométriquement, on a les inégalités :

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=2}^{N} f(n).$$

Par passage à la limite, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=2}^{+\infty} f(n).$$

On peut affirmer que série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème Comparaison série-intégrale

Soit f continue sur $[1, +\infty[$, décroissante et positive sur cet intervalle.
La série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration

Par décroissance de f, on a :

$$\forall n > 0, \quad \forall x \in [n, n+1] : \quad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

On intègre :

$$\forall n > 0 : \quad \int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$$

$$\forall n > 0 : \quad f(n+1)\int_n^{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)\int_n^{n} dx$$

$$\forall n > 0 : \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

En sommant ces inégalités depuis 1 jusqu'à $N-1$, les intégrales se raccordent et l'on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge. Comme $\int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) < +\infty$, la suite croissante $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc convergente.
Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ diverge. Comme elle est à termes positifs, elle diverge vers l'infini. Comme $\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx$, la suite croissante $\left(\int_{n_0}^n f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc divergente.

Théorème Comparaison série-intégrale (version intégrale impropre)

Soit f continue sur $[1, +\infty[$, décroissante et positive sur cet intervalle.
La série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

Proposition Séries de Riemann

La série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

Démonstration

Pour $a \leq 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 en l'infini donc la série diverge grossièrement.
Pour $a > 0$, on applique le théorème de la comparaison série-intégrale avec la fonction $f : x \to \frac{1}{x^a}$ décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.
De plus si $a \neq 1$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{x^a}dx = \left[\frac{1}{(-a+1)x^{a-1}}\right]_1^n = \frac{1}{-a+1}\left(\frac{1}{n^{a-1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{a-1} \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } a < 1 \end{cases} .$$

De plus si $a = 1$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

En conclusion, la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

III Séries à termes de signe variable

A Absolument convergente

Nous passons maintenant à l'étude des séries qui ne sont pas à termes positifs. Pour expliquer le titre de cette section, il convient de remarquer que si le signe de u_n est constant à partir d'un certain rang n_0, l'étude de la convergence de $\sum u_n$ se ramène à celle d'une série à termes positifs. En effet, $\sum_{n\geq 0} u_n$et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature et si $u_n < 0$ à partir du rang n_0, il suffit de considérer la série $\sum_{n\geq n_0}(-u_)n$.

Ce que nous allons voir dans cette section n'est donc réellement nouveau que pour les séries dont le terme général change de signe une infinité de fois.

Une première idée pour l'étude des séries à terme de signe variable est d'exprimer ses sommes partielles comme différences de sommes partielles de deux séries à termes positifs. Pour cela, il suffit d'utiliser la décomposition $u_n = u_n^+ - u_n^-$ où u_n^+ est la partie positive du réel u_n et u_n^- sa partie négative[1]. On a : $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^-$. Une condition suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge et que les deux SATP $\sum u_k^+$ et $\sum u_k^-$ convergent. Compte tenu des inégalités $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|, \quad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet de conclure qu'une condition suffisante pour la convergence de $\sum u_k^+$ et $\sum u_k^-$ et donc aussi $\sum |u_n|$ converge. Nous venons ainsi d'établir le résultat le plus important pour la convergence d'une série à termes de signe variable.

1. Soit x un nombre réel. Sa partie positive x^+ et sa partie négative x^- sont les réels positifs :

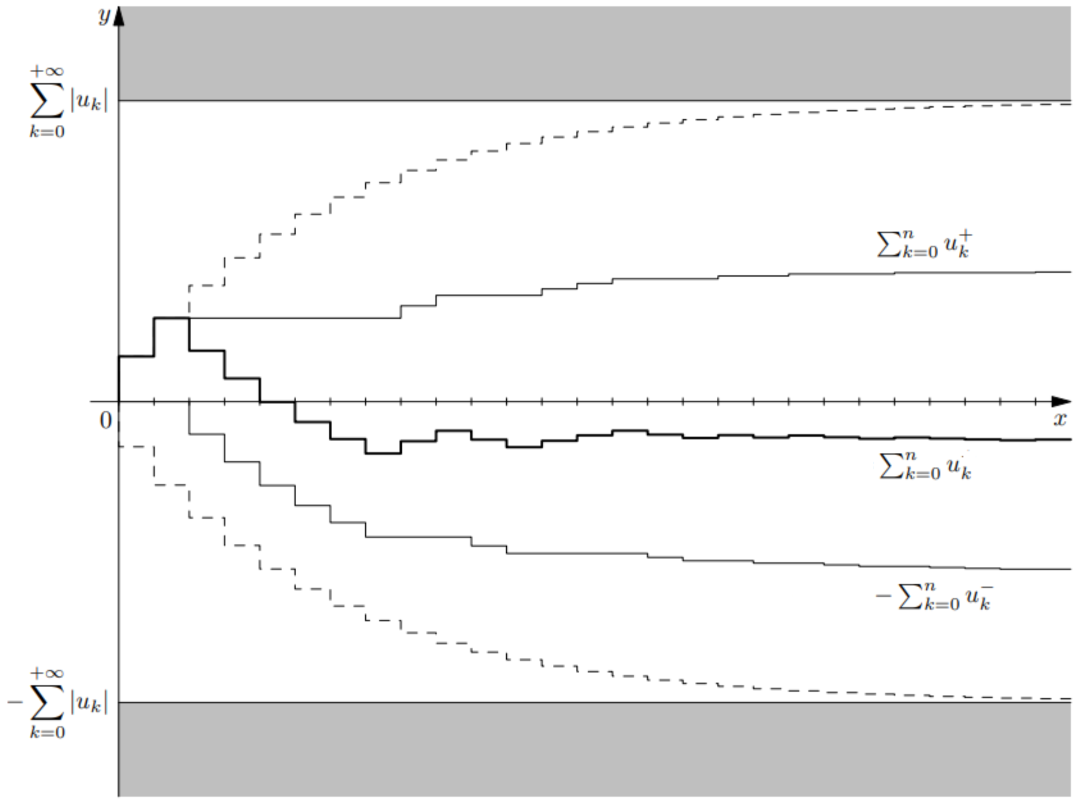
$$x^+ = \max(0, x), \quad x^- = \max(0, -x).$$

On a les égalités suivantes :

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ = \frac{x + |x|}{2} \quad x^- = \frac{-x + |x|}{2}$$

et les inégalités suivantes :

$$0 \leq x^+ \leq |x|, \quad 0 \leq x^- \leq |x|.$$



Théorème

Si la SATP $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Définition Absolue convergence

La série est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.
Le théorème précédent s'énonce ainsi : "toute série absolument convergente est convergente".

Exemple

Nature de la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergent par règle de comparaison donc convergente.

B Série alternée

Définition Alternée

Une série $\sum u_n$ est dite **alternée** si u_n et u_{n+1} sont de signes contraires, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On écrira cette série sous cette forme $\sum u_n = \sum (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Théorème Critère spécial

Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante tendant vers 0,
Alors

1. $\sum(-1)^n a_n$ converge,
2. les deux sommes partielles consécutives encadrent la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n},$$

3. la reste est borné par le terme générale de la série :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |R_n| \leq a_{n+1}.$$

Démonstration

Montrons que les suites des sommes partielles paires et impaires $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

1. *décroissance de* $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$: on a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^n a_n - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^n a_n = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$$

car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante positive,

2. *croissance de* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: de même avec $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$,
3. *limite* : $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car (a_n) tend vers 0.

Donc, les suites d'indices pairs et impairs $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite S. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite.
De plus, on $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour borné le reste, on part de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &\leq S \leq S_{2n} \\ S_{2n+1} \leq S_{2n} &+ R_{2n} \leq S_{2n} \\ S_{2n+1} - S_{2n} &\leq R_{2n} \leq 0 \\ -a_{2n+1} &\leq R_{2n} \leq 0 \\ |R_{2n}| &\leq a_{2n+1} \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &\leq S \leq S_{2n} \\ S_{2n+1} \leq S_{2n+1} &+ R_{2n+1} \leq S_{2n} \\ 0 \leq R_{2n+1} &\leq S_{2n+1} - S_{2n+1} \\ |R_{2n+1}| &\leq a_{2n+2}. \end{aligned}$$

En conclusion, on a $\forall n \in \mathbb{N} : \quad |R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple

La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ respecte le critère spéciale donc elle est convergente. Cependant elle n'est pas absolument convergente car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

IV Produit de Cauchy

Définition **Produit de Cauchy**

Le **produit de Cauchy** de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Théorème

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes.
Alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Démonstration

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs convergentes.
On a :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} c_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j} b_k \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j} \end{aligned}$$

Montrons que la suite (C_n) converge vers AB avec $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. On a :

$$|C_n - AB| \leq |C_n - A_n B| + |A_n B - AB|.$$

Le second terme $|A_n B - AB|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.
Pour le premier terme, on a :

$$|C_n - A_n B| = |\sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j} - \sum_{j=0}^{n} a_j B|$$

$$|C_n - A_n B| = |\sum_{j=0}^{n} a_j (B_{n-j} - B)|$$

$$|C_n - A_n B| \leq \sum_{j=0}^{n} a_j |B_{n-j} - B|$$

Comme $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$, à partir d'un certain rang N, on a $|B_n - B| \leq \epsilon$, d'où :

$$|C_n - A_nB| \leq \sum_{j=0}^{n-N} a_j|B_{n-j} - B| + \sum_{j=n-N}^{n} a_j|B_{n-j} - B|$$
$$|C_n - A_nB| \leq \epsilon A + \sum_{j=n-N}^{n} a_j|B_{n-j} - B|$$

La suite (B_n) est convergente donc bornée par une constante M. Comme la série $\sum a_n$, la suite (a_n) converge vers 0. Donc à partir d'un certain rang $N' \geq N$, $|a_n| \leq \frac{\epsilon}{N}$. D'où

$$|C_n - A_nB| \leq \epsilon A + 2M \sum_{j=n-N}^{n} a_j$$
$$|C_n - A_nB| \leq \epsilon(A + 2M).$$

Ce qui achève la preuve.

Exemple **Produit de séries exponentielles**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
Le produit de Cauchy des séries exponentielles $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum \frac{(a+b)^n}{n!}$. On a :

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!}\frac{b^{n-j}}{n-j!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Les séries exponentielles sont absolument convergentes en utilisant la règle d'Alembert. Donc :

$$\exp(a) \times \exp(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \underbrace{=}_{\text{th Cauchy}} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$$