

数模第二次作业报告

王梓桐 潘浩翔 周景星 刘祚旭 黄天域

May 2025

1 物理建模与数值算法

1.1 记号约定

我们在此节首先约定本片报告中使用的记号: 设恒星为 0 号天体, 其余星体编号为 $1, \dots, N-1$ 他们的速度、加速度、质量、位置分别记为

- 速度: $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{N-1}$
- 加速度: $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{N-1}$
- 质量: m_0, \dots, m_{N-1}
- 位置: $[x_0, y_0, z_0], \dots, [x_{N-1}, y_{N-1}, z_{N-1}]$, 也以 $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{N-1}$ 记

1.2 物理建模

我们对于本问题的物理建模基于经典力学, 根据牛顿定理有

$$\mathbf{a}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (1)$$

由于我们使用的是显式计算算法而非如 FMM 等快速算法, 出于减少计算复杂度的考虑, 我们仅考虑经典力学的作用, 不考虑相对论效应。

1.3 数值算法

我们使用分子动力学中的经典 Velocity-Verlet 算法来求解上述方程。该算法的核心思想是将速度和位置的更新分开进行, 具体步骤如下:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a}_n \Delta t^2 \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \Delta t. \end{cases}$$

这里更新 \mathbf{v}_{n+1} 公式中的 \mathbf{a}_{n+1} 是根据第一步得到的 \mathbf{r}_{n+1} 利用 (1) 计算得到的加速度。

该算法对于 \mathbf{r} 的局部截断误差为 $O(\Delta t^4)$, 对于 \mathbf{v} 的局部截断误差为 $O(\Delta t^2)$ 。其计算复杂度小于 Runge-Kutta 方法, 但能得到相同精度的解, 这是其充分利用了 Newton 方程形式特殊性的结果。

2 可视化与模拟算法

我们的代码已上传至Github, 地址为 <https://github.com/VincentWangzt/Planet-Cluster>.

2.1 无量纲处理

我们的目标是高效可视化地模拟该物理模型, 为此我们需要对模型做无量纲化处理, 因为使用真实的天体物理参数会导致可视化及其困难. 该处理过程如下:

取定 scaling 常数 $L_{scale}, M_{scale}, T_{scale}$ 并对所有物理量进行无量纲化处理:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{L_{scale}} \\ \tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{L_{scale}/T_{scale}} \\ \tilde{\mathbf{a}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{L_{scale}/T_{scale}^2} \\ \tilde{m}_i = \frac{m_i}{M_{scale}} \end{cases}$$

这些无量纲化的量仍然满足 Newton 方程, 所以仍可以使用 Velocity-Verlet 算法进行求解。

2.2 模拟算法实现

我们采用了 Python 开源库Taichi作为我们的具体模拟主体部分, 并在此基础上实现了 3D 模型在 CPU 和 GPU 上的高效并行化计算.

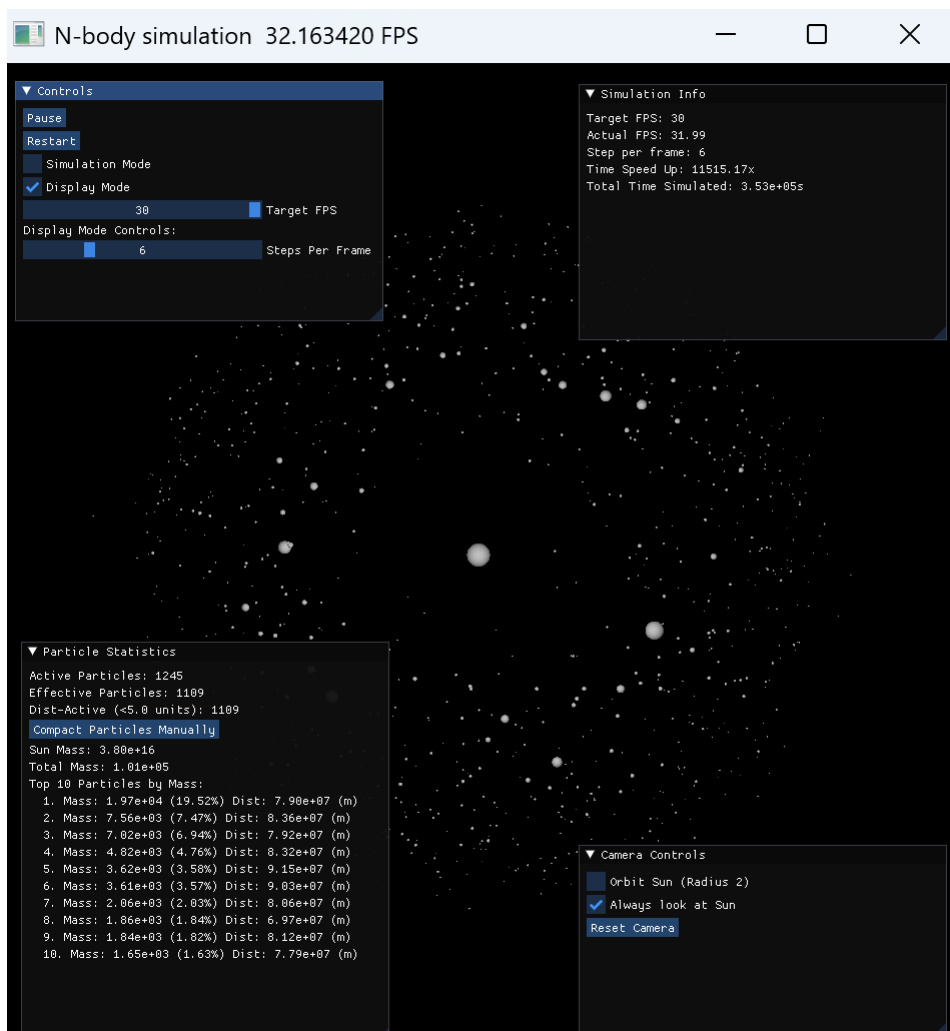
对于模拟部分, 我们采用前述提到的 Verlet 方法, 默认分辨率为 1 分钟. 需要注意的是, 为了可视化效果, 我们的星体半径, 中心天体半径, 星体轨道并不严格成比例.

对于碰撞部分, 我们采用了最常规的办法, 更新其中一个粒子的位置, 质量, 速度, 随后将另一个粒子的质量设为 0. 每隔一段时间 (默认是粒子数减少到前一次的一半时), 清除所有质量为 0 的幽灵粒子, 加快模拟速度.

以一台无独立显卡, 配备 Intel Core Ultra 9 185H 的电脑为例, 我们能够实现在 10^4 个粒子的情形下每秒更新 90 余次, 并且模拟速度随模拟进程中粒子的合并而不断加快. 如果是一台配备 Nvidia GTX 4060 独立显卡的笔记本电脑, 则可以达到每秒更新 240 余次.

2.3 可视化界面

此外, 我们设置了相应的可视化交互界面. 可视化界面由 5 部分组成, 分别是主粒子模拟区和 4 个子窗口: 控制, 模拟信息, 粒子统计信息, 和视角控制.



1. 控制子窗口: (Controls)

- Pause/Resume: 暂停/继续模拟
- Restart: 重置粒子
- Target FPS: 目标帧率, 用于设定 Display Mode 和 Simulation Mode
- Steps Per Frame: 每两次渲染之间的模拟步数
- Simulation mode: 限制渲染帧率, 调高 Steps Per Frame, 把更多算力资源投入到模拟中, 同时不受屏幕刷新率限制, 一般在不关心模拟过程时使用. 在原本的渲染已经达到较高速时比较好用, 可以达到 40+fps 之后打开, 通常可以达到 200+ 的 Steps per Frame.
- Display mode: 与 Simulation mode 不能同时使用, 可以调节当前的帧率以及 Steps per Frame, 适用于想要详细查看一下当前演化情况, 可以和 Simulation mode 配合使用. 比如先开 Simulation Mode 模拟, 然后开 24 帧 1 Step per Frame 查看演化结果. 默认 30FPS, 6 Steps per Frame.

2. 视角控制子窗口: (Camera Controls)

- 按键 w,a,s,d: 相对于相机本身的视角, 移动相机位置
 - 按键 e,q: 前者是相机绝对垂直向上, 后者是相机绝对垂直向下 (运动方向与相机朝向和位置均无关, 参考 MC 空中移动方式);
 - 按住 shift 移动鼠标: 旋转视角, 如果开启了固定视角则不起作用
 - Orbit Sun: 固定相机与太阳的距离, 所有移动相机位置的操作会被投影到以中心天体为球心的球面上.
 - Always Look at Sun: 视角永远指向太阳
 - Reset Camera: 重置相机位置
- 建议移动视角的时候暂停模拟, 不然很容易搞晕自己在哪里.

3. 粒子统计数据子窗口: (Particle Statistics)

- Active Particles: 参与计算的粒子数量 (性能指标)
- Effective Particles: 当前实际质量非 0 的有效粒子数量
- Dist-Active Particles: 当前与中心天体距离在 5 个长度单位以内的有效粒子数量
- Compact Particles Manually: 手动清除所有幽灵粒子
- Sun Mass: 归一化 (i.e. 无量纲化) 之后的中心天体质量, 以下的质量均为归一化之后的.
- Total Mass: 小型星体的总质量
- Top 10 Particles by Mass: 质量最大的 10 个小型星体的质量, 质量占比, 和与中心天体的距离 (单位为米).

4. 模拟数据子窗口: (Simulation Info)

- Target FPS: 同控制子窗口
- Actual FPS: 当前的实时刷新帧率
- Step Per Frame: 当前的两帧渲染之间的模拟步数
- Time Speed Up: 模拟的时间速度相比于用户时间的速度的比值
- Total Time Simulated: 当前模拟的总时间

2.4 接口设置

- -h, -help: 显示帮助
- -gui_res_width GUI_RES_WIDTH: 交互界面宽度, 默认 1600px
- -gui_res_height GUI_RES_HEIGHT: 交互界面高度, 默认 1600px
- -init_step_per_frame INIT_STEP_PER_FRAME: 初始 Step per Frame, 默认为 6
- -init_num_particles INIT_NUM_PARTICLES: 模拟粒子数目, 默认为 10^4

- `-sun_mass_val` `SUN_MASS_VAL`: 中心天体质量, 默认为 $1.898 \cdot 10^{27} \text{kg}$
- `-original_dt_value` `ORIGINAL_DT_VALUE`: 模拟步长 (以秒为单位), 默认为 60 秒
- `-compact_rate` `COMPACT_RATE`: 缩减幽灵粒子的频率, 默认为有效粒子数量每减少至 0.5 倍清除一次幽灵粒子
- `-dist_active_threshold_sim_units` `DIST_ACTIVE_THRESHOLD_SIM_UNITS`: 粒子统计数据中的距离限定值, 默认为 5(个归一化的长度单位)
- `-length_scale` `LENGTH_SCALE`: 长度归一化系数, 即一个长度单位的实际长度, 默认为 $2.44 \cdot 10^8$ 米
- `-mass_scale` `MASS_SCALE`: 质量归一化单位, 即一个质量单位的实际质量, 默认为 $5 \cdot 10^{10}$ 千克
- `-time_scale` `TIME_SCALE`: 时间归一化系数, 为数值稳定性而确定的时间系数, 无实际用途, 默认为 $3.6 \cdot 10^{10}$
- `-radii_coeff` `RADII_COEFF`: 半径系数, 用于可视化粒子半径, 默认为 $6 \cdot 10^{-4}$
- `-sun_radii_coeff` `SUN_RADII_COEFF`: 中心天体额外的半径系数, 默认为 $1 \cdot 10^{-4}$
- `-scheme` Euler, Verlet: 模拟方式, 有 Euler 和 Verlet 两个选项, 默认为 Verlet

3 实验结果

我们设计了如下几个初始条件, 为贴合实际假设, 全部采用均匀分布 (在指定区域内)。在速度上, 我们对切向速度和径向速度分别赋值。对于切向速度, 主体部分符合天体力学运动规律, 为增加随机性, 我们随机化了切向速度方向, 以及添加了一个随机小量; 对于径向速度, 我们采用在切向速度的标量上乘以 $[-0.01, 0.01]$ 上的随机变量。

我们以土星与土星环为例生成初始分布, 其基本参数为: 最大半径约 $1.29 \times 10^8 \text{m}$, 中心天体质量约 $1.898 \times 10^{27} \text{kg}$, 小行星质量取在 $10^{10} \text{kg} - 10^{12} \text{kg}$ 范围内。模拟初始小行星尘埃数为 10000 个。

3.1 球体内的均匀分布

此初始分布是以原点为球心的球内均匀分布, 初始图如下:

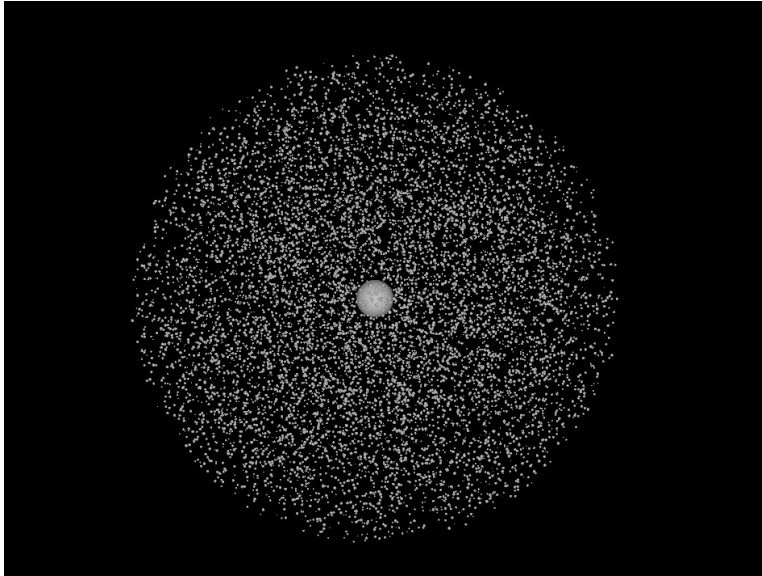


图 1: 初始图: 粒子均匀分布在球体内

最终模拟结果显示，粒子无合并趋势，且有大量粒子逃逸恒星的引力：

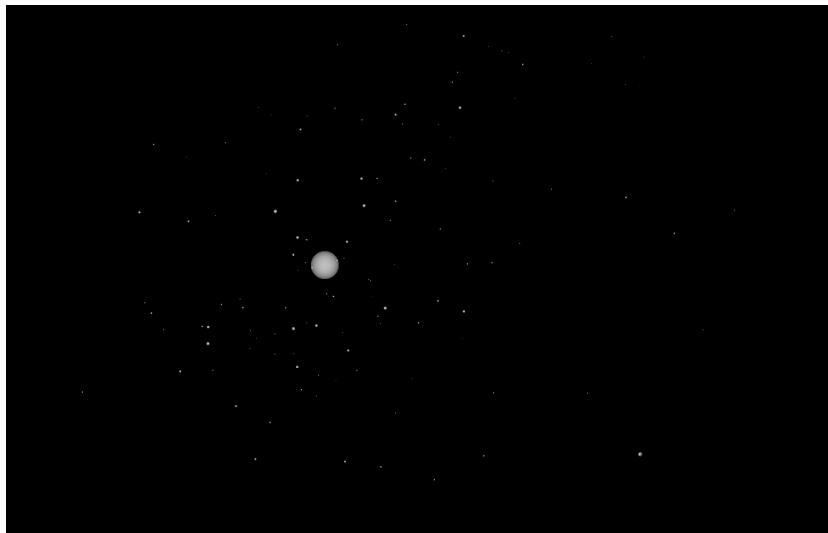


图 2: 中间图: 粒子稀疏

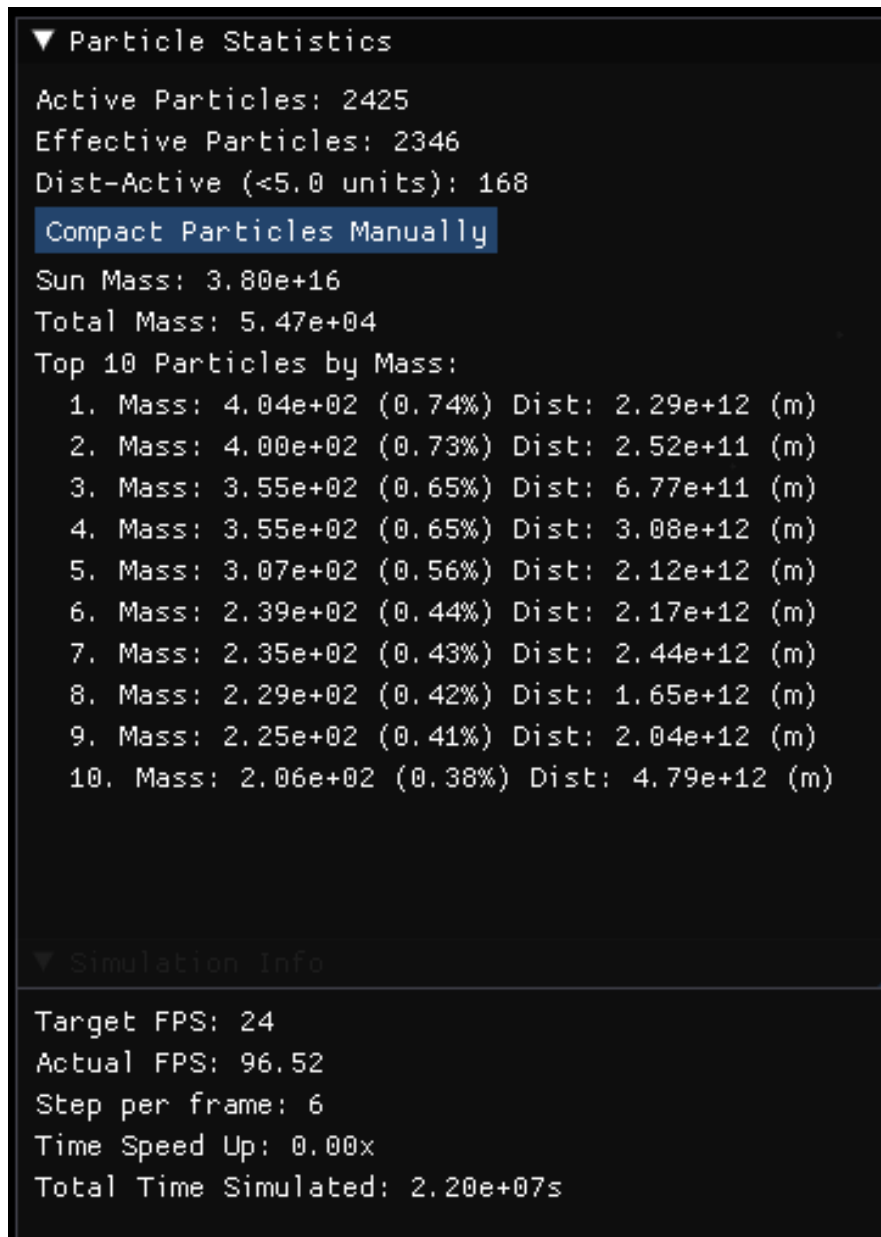


图 3: 质量数据分布

从最后的统计数据可以看出，大量粒子逃逸自中心天体的引力，且并无明显聚合得到的小行星。

3.2 原点外一球体内的均匀分布 (切向速度随机)

此初始分布考虑的是原点之外一小球体内的均匀分布，初始图如下：

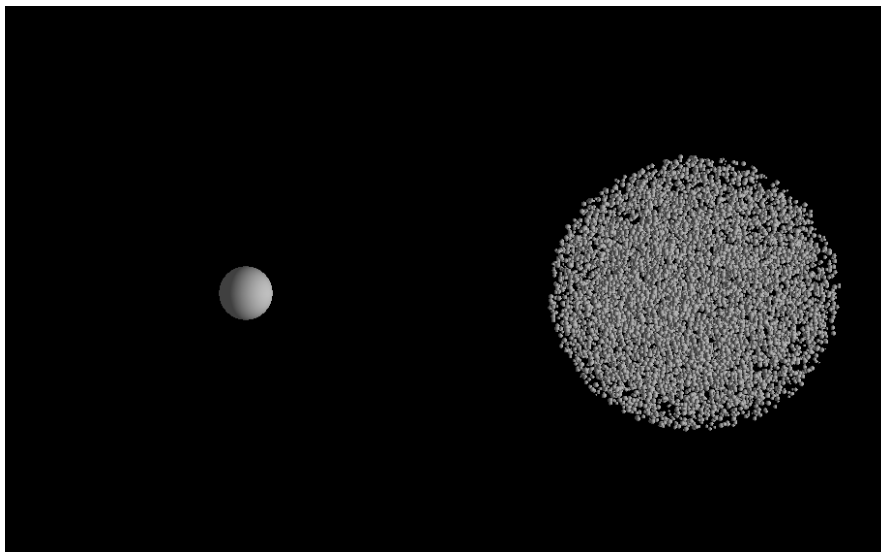


图 4: 初始图

演化时间 100 天左右时，质量最大的合并粒子环绕轨道为一个椭圆轨道，其余质量粒子呈现逃逸状态，再演化若干时间后，发现最大粒子也呈现逃逸现象，逐渐远离中心星体。其模拟结果如下：

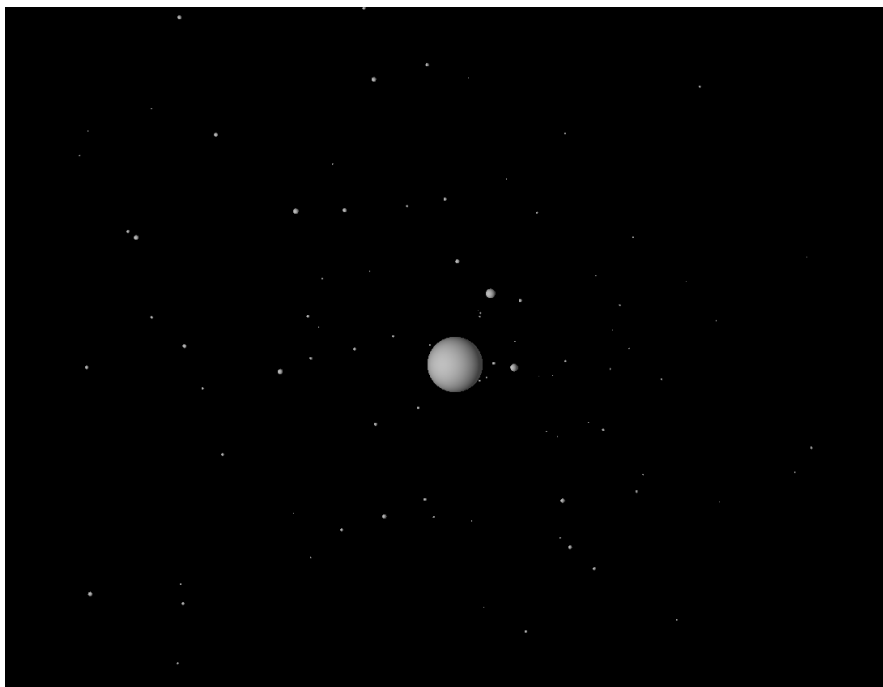


图 5: 视图 1



图 6: 视图 2

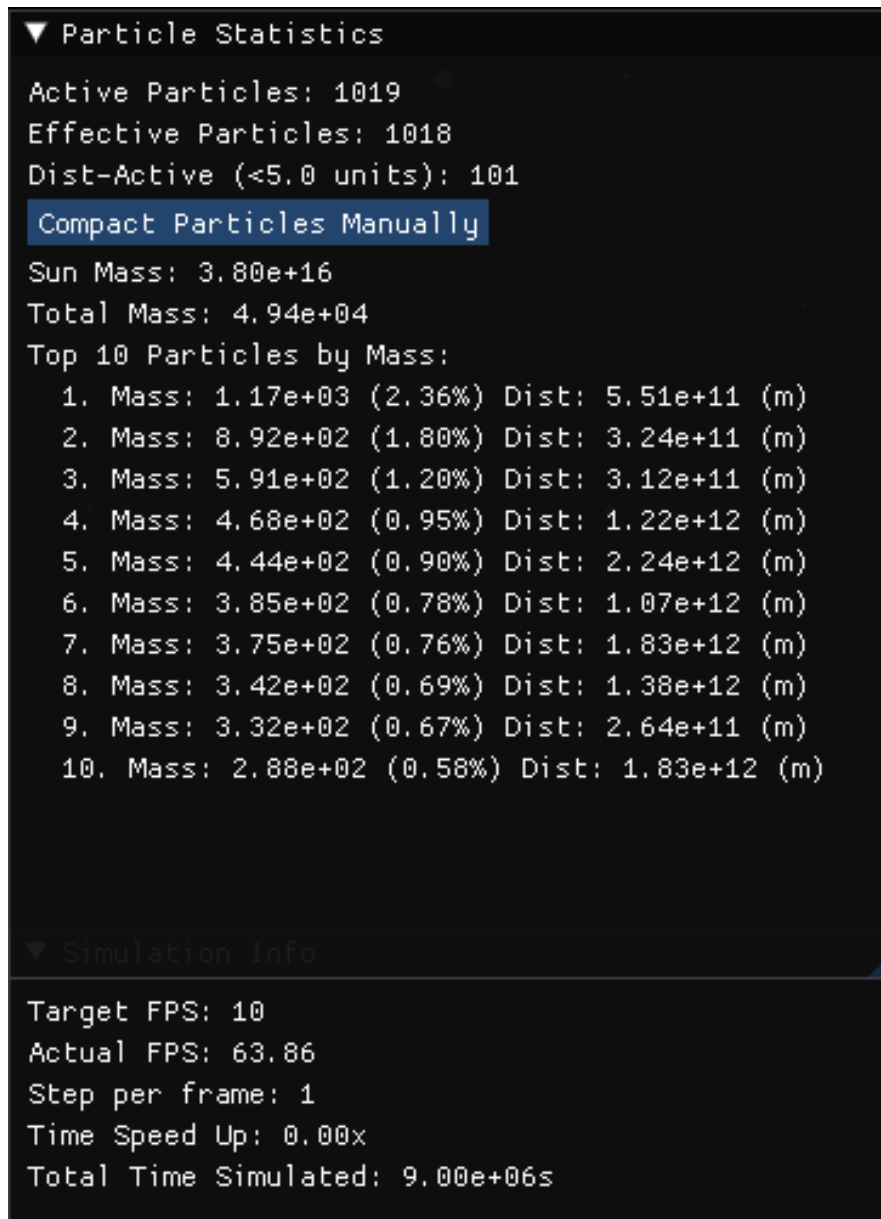


图 7: 质量分布数据

从最后的统计数据可以看出，大量粒子逃逸自中心天体的引力，且并无明显聚合得到的小行星。

3.3 球盖上的均匀分布

此初始分布考虑的球壳的一部分——球盖上的均匀分布（球壳以原点为圆心），初始速度方向随机，其初始图如下：

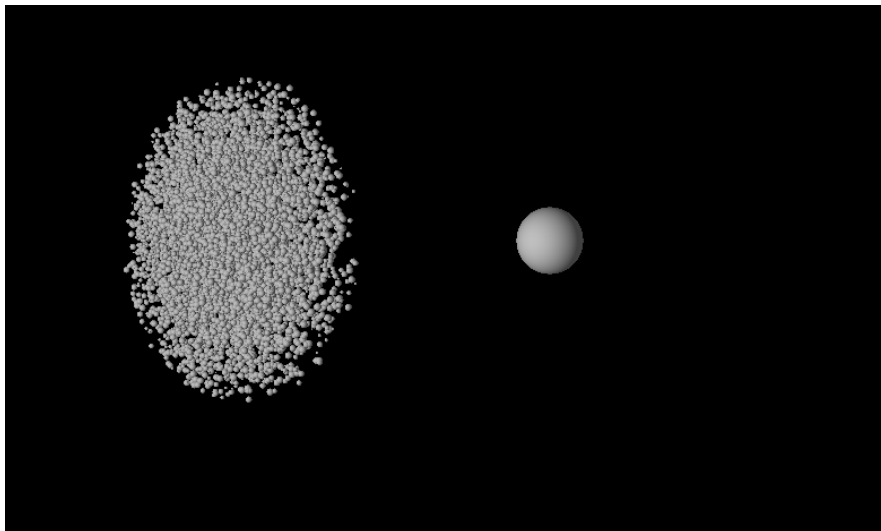


图 8: 初始图

模拟过程显示：大部分的粒子撞入中间星体，其余粒子以较快的速度逃逸，并未形成较大的合并粒子。



图 9: 视图 1



图 10: 视图 2

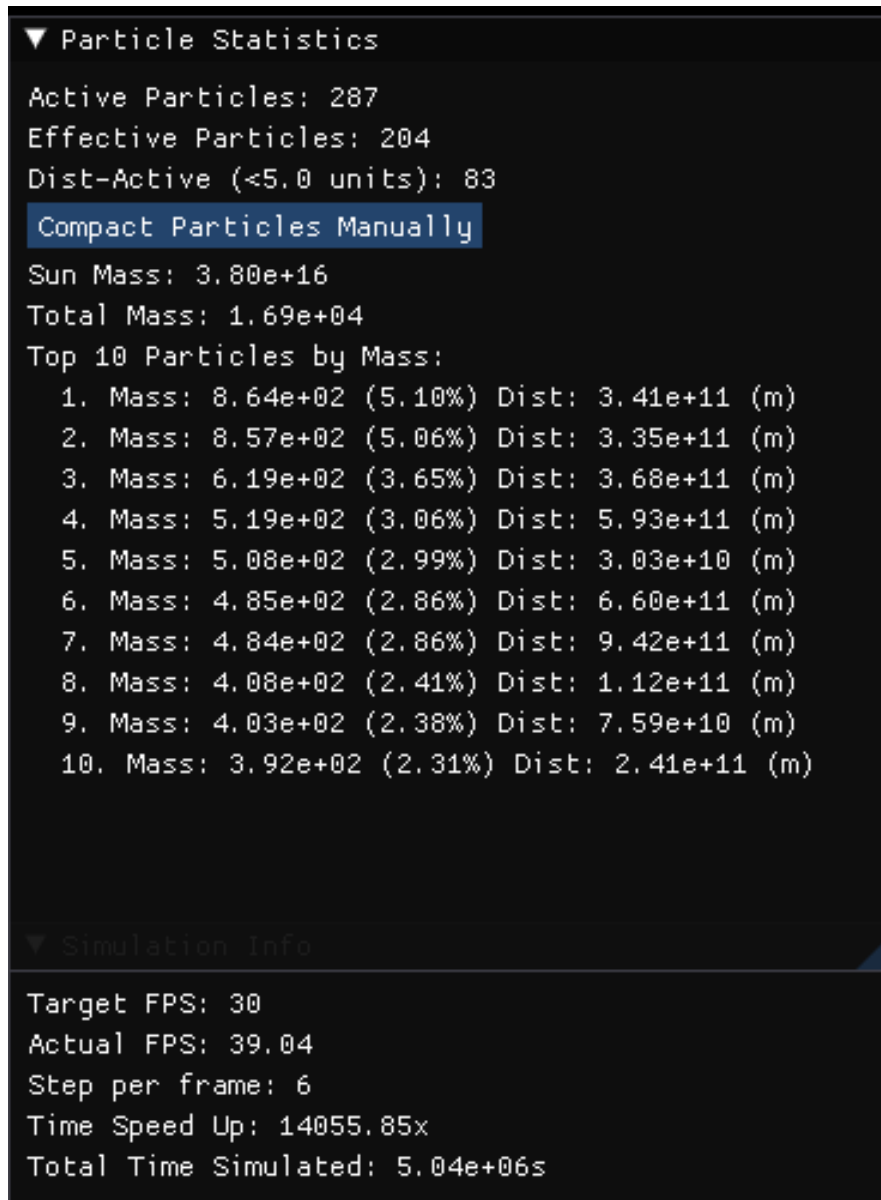


图 11: 质量分布数据

从统计数据来看确实大部分小行星与中心星体融合，且并未出现被中心星体引力捕获的聚合得到得小行星，但有聚合而得的小行星逃逸了中心星体的引力。

3.4 球盖上的均匀分布（切向速度平行与同一平面时）

保持上面的状态，但对切向速度略作修改，使其近乎平行于同一平面，而不是随机方向。此时的模拟结果则大有不同。

发现了一个很有意思的中间态：粒子很快合并为三个较大的粒子，且三个轨道保持一定角度，其中两个近乎垂直，此状态保持了一段时间，最终合并为两个粒子（两轨道夹角约 45 度），轨道半径差异也较大。

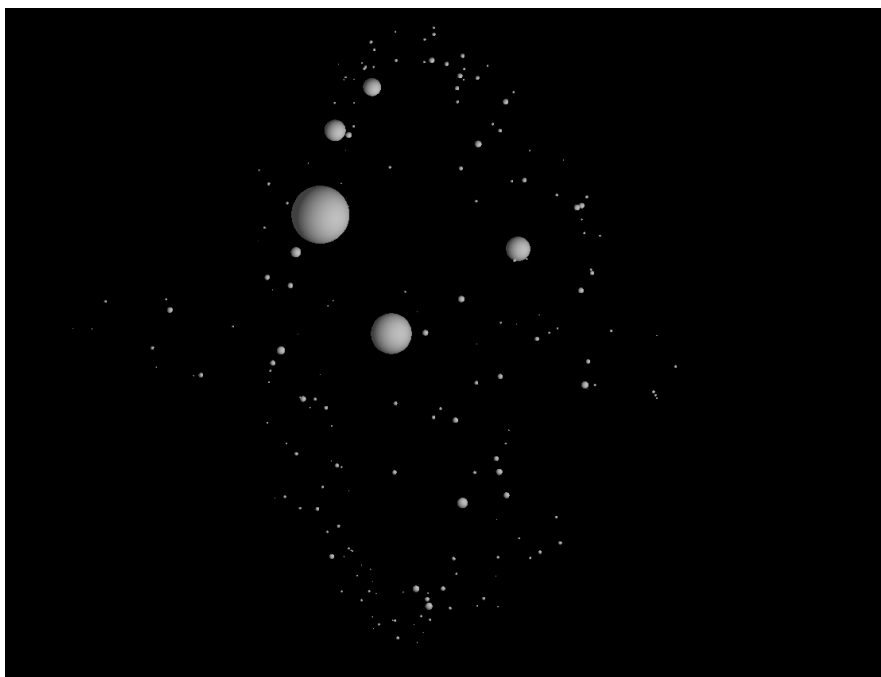


图 12: 中间态

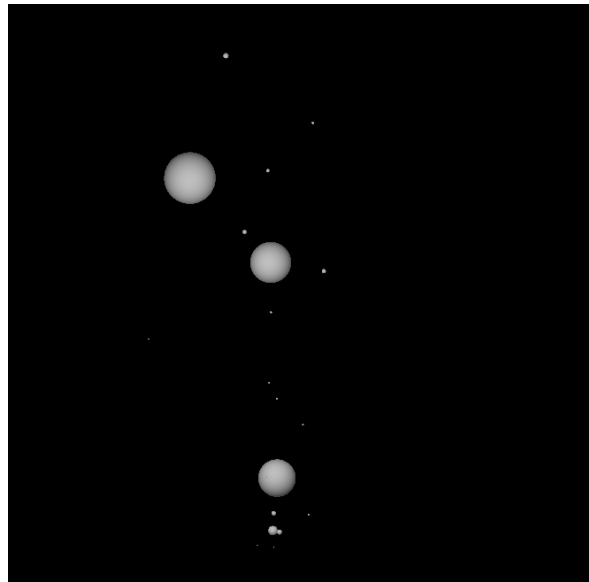


图 13: 稳定态

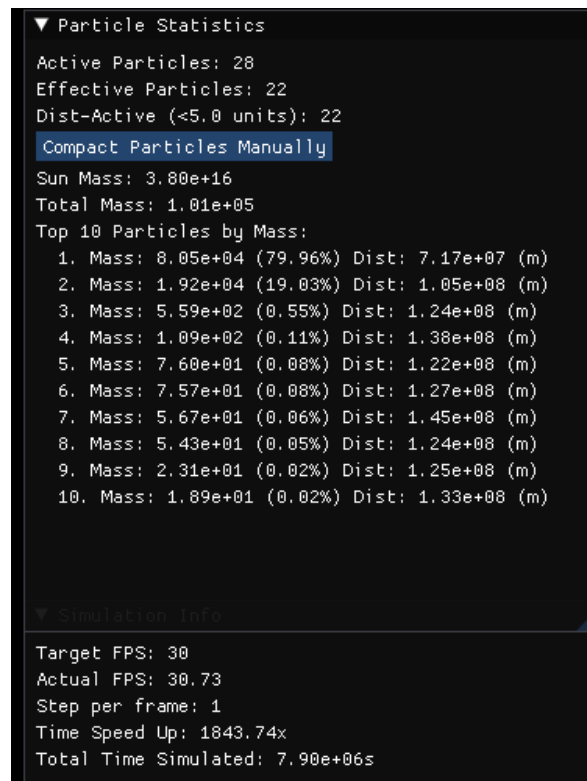


图 14: 质量分布数据

3.5 单环面内的均匀分布

此初始分布考虑的是以原点为圆心的环形均匀分布，为增加随机性，赋予环的一个厚度以少量；速度上也略微调整，去除了径向速度。初始图如下：

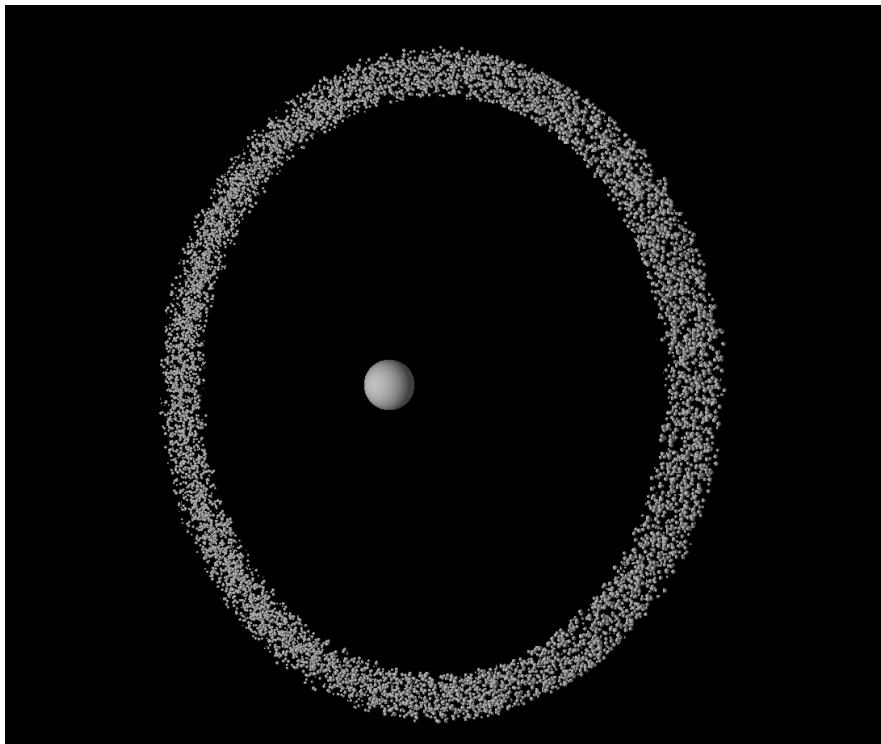


图 15: 初始图

此状态演化速度较快，100 天时已经有明显合并趋势，最大质量已经占比 98%，有稳定的近似圆周轨道，这也与我们一开始的直觉相同。

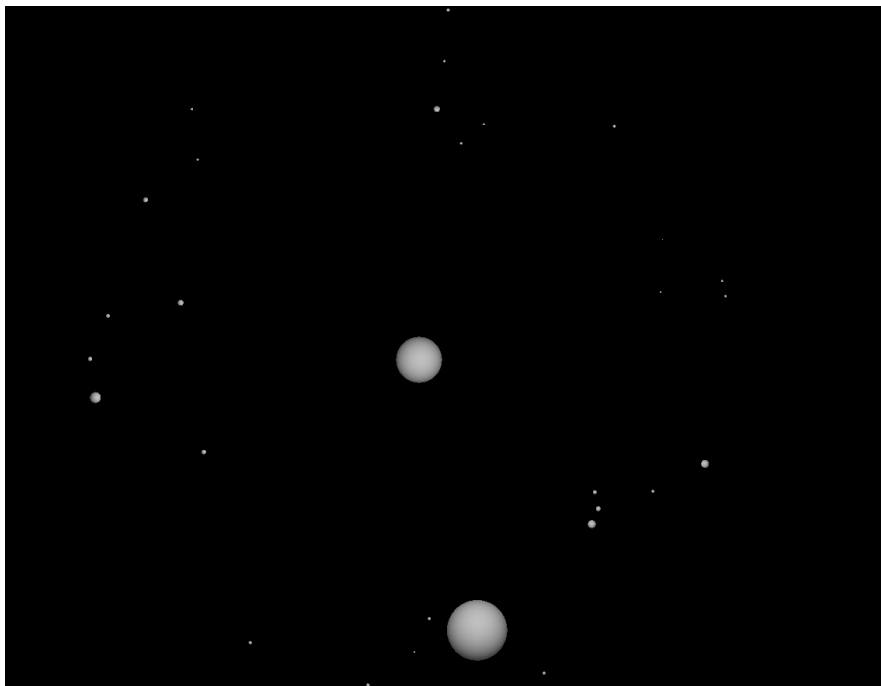


图 16: 视图 1

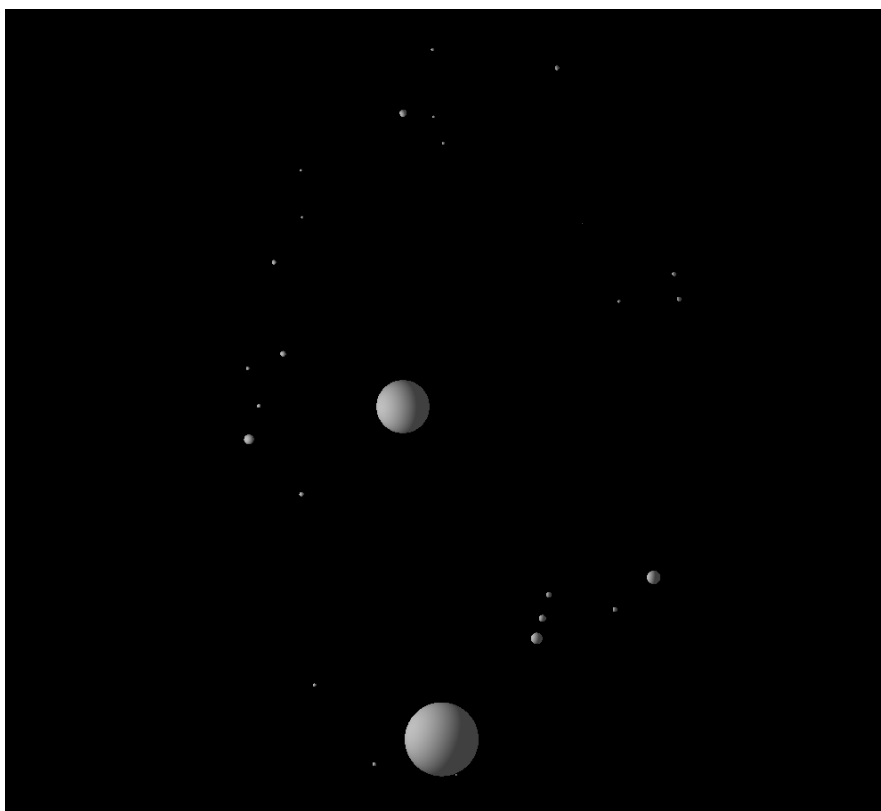


图 17: 视图 2