数模第二次作业报告

王梓桐 潘浩翔 周景星 刘祚旭 黄天域

May 2025

1 物理建模与数值算法

1.1 记号约定

我们在此节首先约定本片报告中使用的记号:设恒星为0号天体,其余星体编号为1,...,N-1他们的速度、加速度、质量、位置分别记为

- 速度: **v**₀, . . . **v**_{N-1}
- 加速度: **a**₀, . . . **a**_{N-1}
- 质量: $m_0, \ldots m_{N-1}$
- 位置: $[x_0, y_0, z_0], \ldots, [x_{N-1}, y_{N-1}, z_{N-1}]$, 也以 $\mathbf{r_0}, \ldots, \mathbf{r_{N-1}}$ 记

1.2 物理建模

我们对于本问题的物理建模基于经典力学, 根据牛顿定理有

$$\mathbf{a}_i = -\sum_{i \neq i} \frac{G \, m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} \, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \tag{1}$$

由于我们使用的是显式计算算法而非如 FMM 等快速算法,出于减少计算复杂度的考虑,我们仅 考虑经典力学的作用,不考虑相对论效应。

1.3 数值算法

我们使用分子动力学中的经典 Velocity-Verlet 算法来求解上述方程。该算法的核心思想是将速度和位置的更新分开进行,具体步骤如下:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a}_n \Delta t^2 \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \Delta t. \end{cases}$$

这里更新 \mathbf{v}_{n+1} 公式中的 \mathbf{a}_{n+1} 是根据第一步得到的 \mathbf{r}_{n+1} 利用 (1) 计算得到的加速度。

该算法对于 \mathbf{r} 的局部截断误差为 $O(\Delta t^4)$,对于 \mathbf{v} 的局部截断误差为 $O(\Delta t^2)$ 。其计算复杂度小于 Runge-Kutta 方法, 但能得到相同精度的解,这是其充分利用了 Newton 方程形式特殊性的结果。

2 可视化与模拟算法

我们的代码已上传至Github, 地址为 https://github.com/VincentWangzt/Planet-Cluster.

2.1 无量纲处理

我们的目标是高效可视化地模拟该物理模型,为此我们需要对模型做无量纲化处理,因为使用真实的天体物理参数会导致可视化及其困难。该处理过程如下:

取定 scaling 常数 L_{scale} , M_{scale} , T_{scale} 并对所有物理量进行无量纲化处理:

$$\begin{cases} \mathbf{\tilde{r}}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{L_{scale}} \\ \mathbf{\tilde{v}}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{L_{scale}/T_{scale}} \\ \mathbf{\tilde{a}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{L_{scale}/T_{scale}^2} \\ \mathbf{\tilde{m}}_i = \frac{m_i}{M_{scale}} \end{cases}$$

这些无量纲化的量仍然满足 Newton 方程,所以仍可以使用 Velocity-Verlet 算法进行求解。

2.2 模拟算法实现

我们采用了 Python 开源库Taichi作为我们的具体模拟主体部分,并在此基础上实现了 3D 模型 在 CPU 和 GPU 上的高效并行化计算.

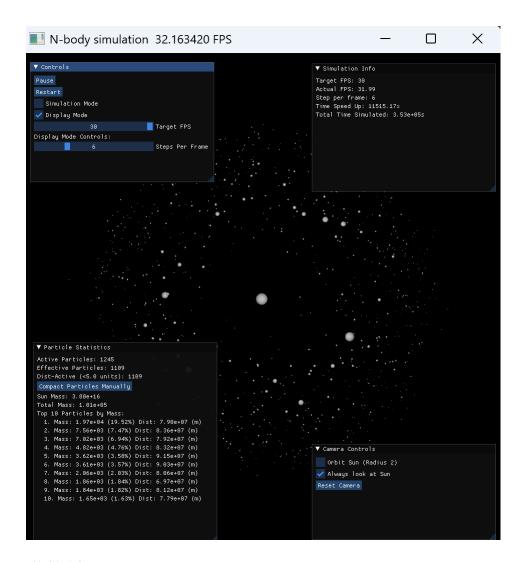
对于模拟部分, 我们采用前述提到的 Verlet 方法, 默认分辨率为 1 分钟. 需要注意的是, 为了可视化效果, 我们的星体半径, 中心天体半径, 星体轨道并不严格成比例.

对于碰撞部分, 我们采用了最常规的办法, 更新其中一个粒子的位置, 质量, 速度, 随后将另一个粒子的质量设为 0. 每隔一段时间(默认是粒子数减少到前一次的一半时), 清除所有质量为 0 的幽灵粒子, 加快模拟速度.

以一台无独立显卡, 配备 Intel Core Ultra 9 185H 的电脑为例, 我们能够实现在 10⁴ 个粒子的情形下每秒更新 90 余次, 并且模拟速度随模拟进程中粒子的合并而不断加快. 如果是一台配备 Nvidia GTX 4060 独立显卡的笔记本电脑, 则可以达到每秒更新 240 余次.

2.3 可视化界面

此外, 我们设置了相应的可视化交互界面. 可视化界面由 5 部分组成, 分别是主粒子模拟区和 4 个子窗口: 控制, 模拟信息, 粒子统计信息, 和视角控制.



1. 控制子窗口: (Controls)

• Pause/Resume: 暂停/继续模拟

• Restart: 重置粒子

• Target FPS: 目标帧率, 用于设定 Display Mode 和 Simulation Mode

• Steps Per Frame: 每两次渲染之间的模拟步数

- Simulation mode: 限制渲染帧率, 调高 Steps Per Frame, 把更多算力资源投入到模拟中, 同时不受屏幕刷新率限制, 一般在不关心模拟过程时使用. 在原本的渲染已经达到较高速时比较好用, 可以达到 40+fps 之后打开, 通常可以达到 200+ 的 Steps per Frame.
- Display mode: 与 Simulation mode 不能同时使用,可以调节当前的帧率以及 Steps per Frame,适用于想要详细查看一下当前演化情况,可以和 Simulation mode 配合使用. 比如先开 Simulation Mode 模拟,然后开 24 帧 1 Step per Frame 查看演化结果. 默认 30FPS, 6 Steps per Frame.

2. 视角控制子窗口: (Camera Controls)

- 按键 w,a,s,d: 相对于相机本身的视角, 移动相机位置
- 按键 e,q: 前者是相机绝对垂直向上,后者是相机绝对垂直向下(运动方向与相机朝向和位置均无关,参考 MC 空中移动方式);
- 按住 shift 移动鼠标: 旋转视角, 如果开启了固定视角则不起作用
- Orbit Sun: 固定相机与太阳的距离, 所有移动相机位置的操作会被投影到以中心天体为球心的球面上.
- Always Look at Sun: 视角永远指向太阳
- Reset Camera: 重置相机位置 建议移动视角的时候暂停模拟,不然很容易搞晕自己在哪里.
- 3. 粒子统计数据子窗口: (Particle Statistics)
 - Active Particles: 参与计算的粒子数量 (性能指标)
 - Effective Particles: 当前实际质量非 0 的有效粒子数量
 - Dist-Active Particles: 当前与中心天体距离在 5 个长度单位以内的有效粒子数量
 - Compact Particles Manually: 手动清除所有幽灵粒子
 - Sun Mass: 归一化 (i.e. 无量纲化) 之后的中心天体质量, 以下的质量均为归一化之后的.
 - Total Mass: 小型星体的总质量
 - Top 10 Particles by Mass: 质量最大的 10 个小型星体的质量, 质量占比, 和与中心天体的 距离 (单位为米).
- 4. 模拟数据子窗口: (Simulation Info)
 - Target FPS: 同控制子窗口
 - Actual FPS: 当前的实时刷新帧率
 - Step Per Frame: 当前的两帧渲染之间的模拟步数
 - Time Speed Up: 模拟的时间速度相比于用户时间的速度的比值
 - Total Time Simulated: 当前模拟的总时间

2.4 接口设置

- -h, -help: 显示帮助
- -gui_res_width GUI_RES_WIDTH: 交互界面宽度, 默认 1600px
- -gui_res_height GUI_RES_HEIGHT: 交互界面高度, 默认 1600px
- -init_step_per_frame INIT_STEP_PER_FRAME: 初始 Step per Frame, 默认为 6
- -init_num_particles INIT_NUM_PARTICLES: 模拟粒子数目, 默认为 10⁴

- -sun_mass_val SUN_MASS_VAL: 中心天体质量, 默认为 1.898 · 10²⁷kg
- -original_dt_value ORIGINAL_DT_VALUE: 模拟步长 (以秒为单位), 默认为 60 秒
- -compact_rate COMPACT_RATE: 缩减幽灵粒子的频率, 默认为有效粒子数量每减少至 0.5 倍清除一次幽灵粒子
- -dist_active_threshold_sim_units DIST_ACTIVE_THRESHOLD_SIM_UNITS: 粒子统计数据中的距离限定值, 默认为 5(个归一化的长度单位)
- -length_scale LENGTH_SCALE: 长度归一化系数, 即一个长度单位的实际长度, 默认为 2.44 · 10⁸ 米
- -mass_scale MASS_SCALE: 质量归一化单位, 即一个质量单位的实际质量, 默认为 $5\cdot 10^{10}$ 千克
- -time_scale TIME_SCALE: 时间归一化系数, 为数值稳定性而确定的时间系数, 无实际用途, 默认为 $3.6\cdot 10^{10}$
- -radii_coeff RADII_COEFF: 半径系数, 用于可视化粒子半径, 默认为 6 · 10-4
- -sun_radii_coeff SUN_RADII_COEFF: 中心天体额外的半径系数, 默认为 1 · 10⁻⁴
- -scheme Euler, Verlet: 模拟方式, 有 Euler 和 Verlet 两个选项, 默认为 Verlet

3 实验结果

我们设计了如下几个初始条件,为贴合实际假设,全部采用均匀分布(在指定区域内)。在速度上,我们对切向速度和径向速度分别赋值。对于切向速度,主体部分符合天体力学运动规律,为增加随机性,我们随机化了切向速度方向,以及添加了一个随机小量;对于径向速度,我们采用在切向速度的标量上乘以一个[-0.01,0.01]上的随机变量。

我们以土星与土星环为例生成初始分布,其基本参数为:最大半径约 1.29×10^8 m,中心天体质量约 1.898×10^{27} kg,小行星质量取在 10^{10} kg – 10^{12} kg 范围内。模拟初始小行星尘埃数为 10000个。

3.1 球体内的均匀分布

此初始分布是以原点为球心的球内均匀分布,初始图如下:

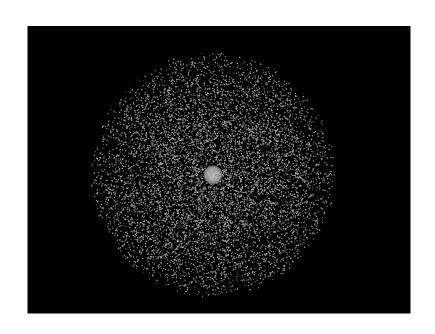


图 1: 初始图: 粒子均匀分布在球体内

最终模拟结果显示,粒子无合并趋势,且有大量粒子逃逸恒星的引力:

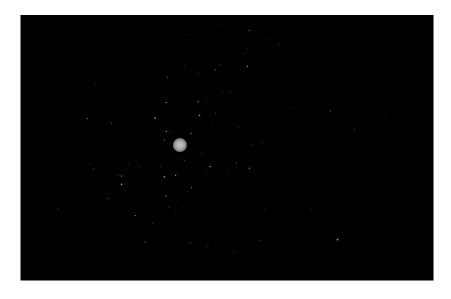


图 2: 中间图: 粒子稀疏

```
▼ Particle Statistics
Active Particles: 2425
Effective Particles: 2346
Dist-Active (<5.0 units): 168
Compact Particles Manually
Sun Mass: 3,80e+16
Total Mass: 5.47e+04
Top 10 Particles by Mass:
  1. Mass: 4.04e+02 (0.74%) Dist: 2.29e+12 (m)
  2. Mass: 4.00e+02 (0.73%) Dist: 2.52e+11 (m)
  3. Mass: 3.55e+02 (0.65%) Dist: 6.77e+11 (m)
  4. Mass: 3.55e+02 (0.65%) Dist: 3.08e+12 (m)
  5. Mass: 3.07e+02 (0.56%) Dist: 2.12e+12 (m)
  6. Mass: 2.39e+02 (0.44%) Dist: 2.17e+12 (m)
  7. Mass: 2.35e+02 (0.43%) Dist: 2.44e+12 (m)
  8. Mass: 2.29e+02 (0.42%) Dist: 1.65e+12 (m)
  9. Mass: 2.25e+02 (0.41%) Dist: 2.04e+12 (m)
  10. Mass: 2.06e+02 (0.38%) Dist: 4.79e+12 (m)
Target FPS: 24
Actual FPS: 96.52
Step per frame: 6
Time Speed Up: 0.00x
Total Time Simulated: 2.20e+07s
```

图 3: 质量数据分布

从最后的统计数据可以看出,大量粒子逃逸自中心天体的引力,且并无明显聚合得到的小行星。

3.2 原点外一球体内的均匀分布(切向速度随机)

此初始分布考虑的是原点之外一小球体内的均匀分布,初始图如下:

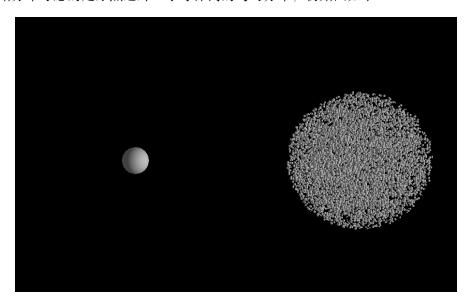


图 4: 初始图

演化时间 100 天左右时,质量最大的合并粒子环绕轨道为一个大椭圆轨道,其余质量粒子呈现逃逸状态,再演化若干时间后,发现最大粒子也呈现逃逸现象,逐渐远离中心星体。其模拟结果如下:

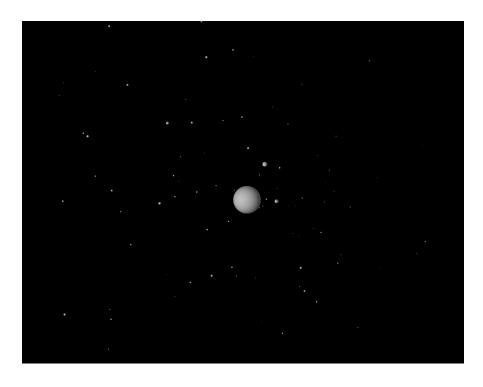


图 5: 视图 1

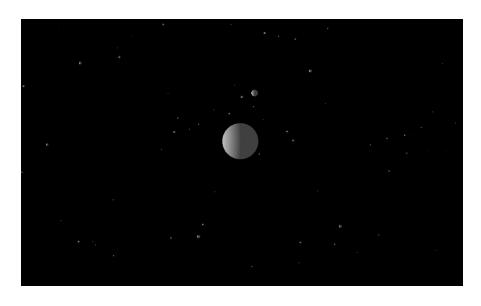


图 6: 视图 2

```
▼ Particle Statistics
Active Particles: 1019
Effective Particles: 1018
Dist-Active (<5.0 units): 101
Compact Particles Manually
Sun Mass: 3,80e+16
Total Mass: 4,94e+04
Top 10 Particles by Mass:
  1. Mass: 1.17e+03 (2.36%) Dist: 5.51e+11 (m)
  2. Mass: 8.92e+02 (1.80%) Dist: 3.24e+11 (m)
  3. Mass: 5.91e+02 (1.20%) Dist: 3.12e+11 (m)
  4. Mass: 4.68e+02 (0.95%) Dist: 1.22e+12 (m)
 5. Mass: 4.44e+02 (0.90%) Dist: 2.24e+12 (m)
  6. Mass: 3.85e+02 (0.78%) Dist: 1.07e+12 (m)
  7. Mass: 3.75e+02 (0.76%) Dist: 1.83e+12 (m)
 8. Mass: 3.42e+02 (0.69%) Dist: 1.38e+12 (m)
 9. Mass: 3.32e+02 (0.67%) Dist: 2.64e+11 (m)
  10. Mass: 2.88e+02 (0.58%) Dist: 1.83e+12 (m)
Target FPS: 10
Actual FPS: 63.86
Step per frame: 1
Time Speed Up: 0.00x
Total Time Simulated: 9.00e+06s
```

图 7: 质量分布数据

从最后的统计数据可以看出,大量粒子逃逸自中心天体的引力,且并无明显聚合得到的小行星。

3.3 球盖上的均匀分布

此初始分布考虑的球壳的一部分——球盖上的均匀分布(球壳以原点为圆心),初始速度方向随机,其初始图如下:

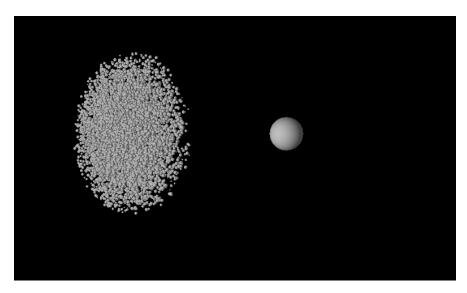


图 8: 初始图

模拟过程显示:大部分的粒子撞入中间星体,其余粒子以较快的速度逃逸,并未形成较大的合并粒子。

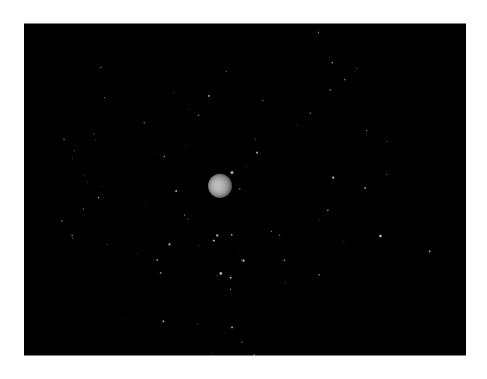


图 9: 视图 1

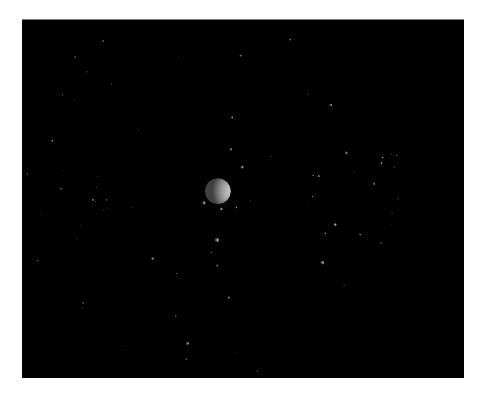


图 10: 视图 2

```
▼ Particle Statistics
Active Particles: 287
Effective Particles: 204
Dist-Active (<5.0 units): 83
Compact Particles Manually
Sun Mass: 3,80e+16
Total Mass: 1.69e+04
Top 10 Particles by Mass:
 1. Mass: 8.64e+02 (5.10%) Dist: 3.41e+11 (m)
  2. Mass: 8.57e+02 (5.06%) Dist: 3.35e+11 (m)
 3. Mass: 6.19e+02 (3.65%) Dist: 3.68e+11 (m)
 4. Mass: 5.19e+02 (3.06%) Dist: 5.93e+11 (m)
 5. Mass: 5.08e+02 (2.99%) Dist: 3.03e+10 (m)
 6. Mass: 4.85e+02 (2.86%) Dist: 6.60e+11 (m)
 7. Mass: 4.84e+02 (2.86%) Dist: 9.42e+11 (m)
 8. Mass: 4.08e+02 (2.41%) Dist: 1.12e+11 (m)
 9. Mass: 4.03e+02 (2.38%) Dist: 7.59e+10 (m)
 10. Mass: 3.92e+02 (2.31%) Dist: 2.41e+11 (m)
Target FPS: 30
Actual FPS: 39.04
Step per frame: 6
Time Speed Up: 14055.85x
Total Time Simulated: 5.04e+06s
```

图 11: 质量分布数据

从统计数据来看确实大部分小行星与中心星体融合,且并未出现被中心星体引力捕获的聚合 得到得小行星,但有聚合而得的小行星逃逸了中心星体的引力。

3.4 球盖上的均匀分布(切向速度平行与同一平面时)

保持上面的状态,但对切向速度略作修改,使其近乎平行于同一平面,而不是随机方向。此 时的模拟结果则大有不同。

发现了一个很有意思的中间态: 粒子很快合并为三个较大的粒子,且三个轨道保持一定角度,其中两个近乎垂直,此状态保持了一段时间,最终合并为两个粒子(两轨道夹角约 45 度),轨道半径差异也较大。

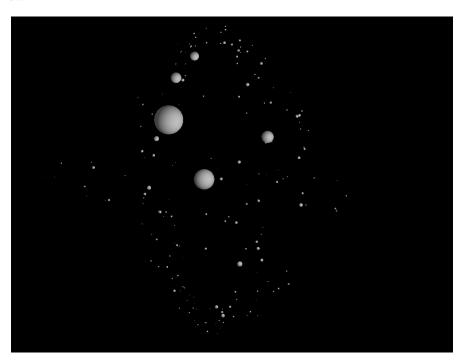


图 12: 中间态

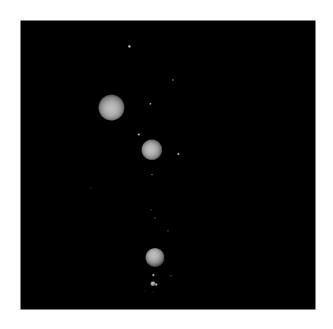


图 13: 稳定态

```
▼ Particle Statistics
Active Particles: 28
Effective Particles: 22
Dist-Active (<5.0 units): 22
Compact Particles Manually
Sun Mass: 3,80e+16
Total Mass: 1.01e+05
Top 10 Particles by Mass:
 1. Mass: 8.05e+04 (79.96%) Dist: 7.17e+07 (m)
 2. Mass: 1.92e+04 (19.03%) Dist: 1.05e+08 (m)
 3. Mass: 5.59e+02 (0.55%) Dist: 1.24e+08 (m)
 4. Mass: 1.09e+02 (0.11%) Dist: 1.38e+08 (m)
 5. Mass: 7.60e+01 (0.08%) Dist: 1.22e+08 (m)
 6. Mass: 7.57e+01 (0.08%) Dist: 1.27e+08 (m)
 7. Mass: 5.67e+01 (0.06%) Dist: 1.45e+08 (m)
 8. Mass: 5.43e+01 (0.05%) Dist: 1.24e+08 (m)
 9. Mass: 2.31e+01 (0.02%) Dist: 1.25e+08 (m)
 10. Mass: 1.89e+01 (0.02%) Dist: 1.33e+08 (m)
Target FPS: 30
Actual FPS: 30.73
Step per frame: 1
Time Speed Up: 1843.74x
Total Time Simulated: 7.90e+06s
```

图 14: 质量分布数据

3.5 单环面内的均匀分布

此初始分布考虑的是以原点为圆心的环形均匀分布,为增加随机性,赋予环的一个厚度以小量;速度上也略微调整,去除了径向速度。初始图如下:

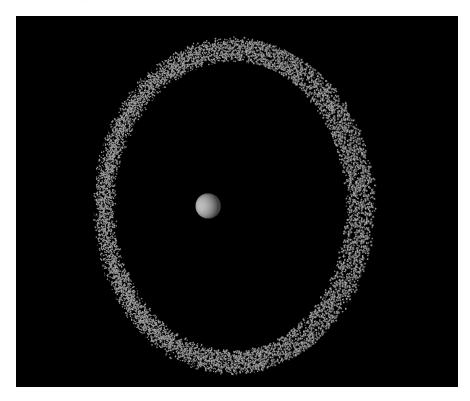


图 15: 初始图

此状态演化速度较快,100天时已经有明显合并趋势,最大质量已经占比98%,有稳定的近似圆周轨道,这也与我们一开始的直觉相同。

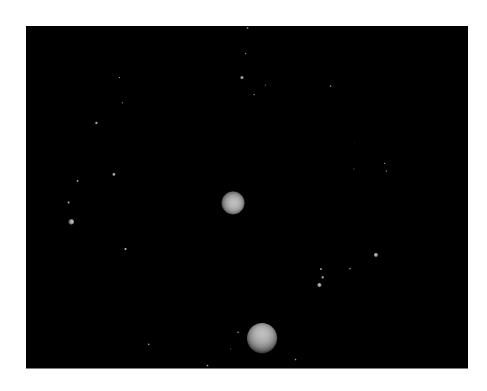


图 16: 视图 1

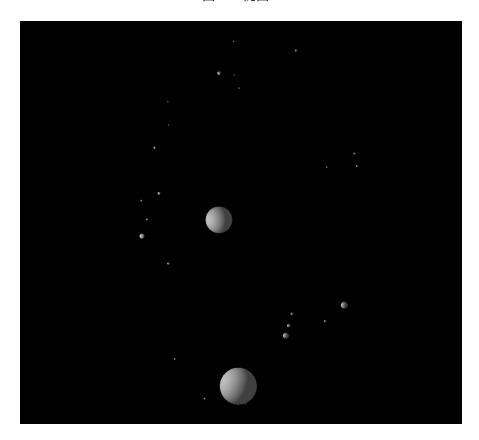


图 17: 视图 2