

MATH-4007 Calculus 2 class 14 , Homework 9 常見錯誤

B13902126 胡允升

For the writing style:

再再再再再再次提醒拜託各位寫題目的時候

- 如果是用電子檔寫題目可以「新開一頁」，把答案寫在下一頁
- 如果是用紙本，可以拿一張新的紙把題目標清楚
- 標示清楚計算過程

以減少助教眼壓。

For studying (關於課程網上的影片) :

教授上課不一定能夠 cover 到所有題目，助教們在 NTUCOOL 上都會放上「詳解」影片，**請務必要觀看**，在這次題目中，有不少題都是教授上課沒有 cover 到的講義內容變化題，明顯的很多人並沒有觀看助教們錄好的影片，希望大家能夠確實觀看，才能在期考拿下高分。

Problem 2-(b)

Description. Find the following the indefinite integral

$$\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

Correct Ans.

$$\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

Wrong Ans.

$$\frac{1}{2} \ln x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

Reason. See that the integrand can be rewritten as

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int \left(\frac{1}{2x} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{2x} dx + \int \sqrt{x} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

Note. 注意到 $\ln x$ 的定義域為 $(0, \infty)$ ，而題目中並沒有特別限制 x 的範圍，因此應該使用

$$\ln |x|$$

來涵蓋 $x < 0$ 的情況。

Problem 4-(a)-ii

Description. Find the answer by Fundamental Theorem of Calculus

$$f(x) = \int_{x^2}^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt$$

find $f'(x)$.

Correct Ans.

$$f'(x) = \sqrt{e^x} \sin(e^x) \cdot e^x - |x| \sin(x^2) \cdot (2x)$$

Wrong Ans.

$$f'(x) = \sqrt{e^x} \sin(e^x) \cdot e^x - \sin(x^2) \cdot (2x^2)$$

Reason. Since,

$$\int_{x^2}^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt = \int_0^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt - \int_0^{x^2} \sqrt{t} \sin(t) dt$$

我們可以簡化式子

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_{x^2}^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt \right)' \\ &= \left(\int_0^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt - \int_0^{x^2} \sqrt{t} \sin(t) dt \right)' \\ &= \left(\int_0^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt \right)' - \left(\int_0^{x^2} \sqrt{t} \sin(t) dt \right)' \end{aligned}$$

By Fundamental Theorem of Calculus

$$f'(x) = \underbrace{\sqrt{e^x} \sin(e^x) \cdot e^x}_{\int_0^{e^x} \sqrt{t} \sin(t) dt} - \underbrace{|x| \sin(x^2) \cdot (2x)}_{\int_0^{x^2} \sqrt{t} \sin(t) dt}$$

Note. 注意到

$$\left(\int_0^{x^2} \sqrt{t} \sin(t) dt \right)' = \begin{cases} x \sin(x^2) \cdot (2x) & x \geq 0 \\ -x \sin(x^2) \cdot (2x) & x < 0 \end{cases}$$

因此，若要寫成一個式子，需要加上絕對值符號：

$$|x| \sin(x^2) \cdot (2x)$$