MATH-4006 Calculus 1 class 14 , Homework 5 常見錯誤

B13902126 胡允升

For the writing style:

再再再再再再次提醒拜託各位寫題目的時候

- 如果是用電子檔寫題目可以「新開一頁」，把答案寫在下一頁
- 如果是用紙本，可以拿一張新的紙把題目標清楚
- 標示清楚計算過程

以減少助教眼壓。

For studying（關於課程網上的影片）:

教授上課不一定能夠 cover 到所有題目，助教們在 NTUCOOL 上都會放上「詳解」影片，**請務必要觀看**，在這次題目中，有不少題都是教授上課沒有 cover 到的講義內容變化題，明顯的很多人並沒有觀看助教們錄好的影片，希望大家能夠確實觀看，才能在期考拿下高分。

Problem 4-(b)

Description. For each of the following limits, firstly write down which kinds of indeterminate powers (1^∞ or 0^0 or ∞^0) it is. Then compute them by using the L'Hospital's Rule appropriately.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(x)\right)^x$$

Correct Ans.

$$e^{-\frac{2}{\pi}}$$

Reason. 這是一個「1^∞」型式。
令

$$y=\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)}{\frac{1}{x}}\\ &\overset{0/0}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2\tan^{-1}(x)}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{\tan^{-1}(x)(1+x^2)}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\tan^{-1}(x)}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}\\ &=\frac{1}{\pi/2}\cdot(-1)\\ &=-\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Problem 5

Description. Prove that the equation

$$2\tan^{-1}x + e^x = 0$$

has a unique solution in x.

Wrong Ans. 只用嚴格遞增 (Strictly Increasing) 說明

Correct Ans. 用 IVT (Intermediate Value Theorem) 中間值定理說明他有解，再用 MVT (Mean Value Theorem) 平均值定理說明解唯一 (或是 Strictly Increasing)

Reason. （英文版請見詳解，中文有點難懂）
要證明解唯一，我們必須證明兩個部分：

- **存在性**：因為 F 是連續函數，

  $$F(-1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{e} < 0, \qquad F(1) = \frac{\pi}{2} + e > 0$$

  根據中間值定理（IVT, Intermediate Value Theorem），在 $(-1, 1)$ 之間必定存在某個 c 使得 $F(c) = 0$。

- **唯一性**：假設 α 與 β 是 $F(x) = 0$ 的兩個不同解。根據洛爾定理（Rolle's Theorem），在 α 與 β 之間必定存在某個 d 使得 $F'(d) = 0$。

  然而，

  $$F'(x) = \frac{2}{1+x^2} + e^x \neq 0 \quad \text{對所有}x\text{皆成立}$$

  這導致矛盾，因此方程式至多只能有一個解。

因此，這個方程式在 $(-1, 1)$ 之間有唯一解。

> **Note.** 第二部分 **Uniqueness** 也可以用 Strictly Increasing 說明，但其實 Strictly Increasing 導致解唯一也只是 MVT 的一個推論而已。

請務對照講義 p47，以及（我錄的）影片