MATH-4006 Calculus 1 class 14 , Homework 3 常見錯誤

B13902126 胡允升

For the writing style:

再次提醒拜託各位寫題目的時候

- 如果是用電子檔寫題目可以「新開一頁」，把答案寫在下一頁
- 如果是用紙本，可以拿一張新的紙把題目標清楚

以減少助教眼壓

Problem 1-(b)

Description. Consider the fucntion

$$Q(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1+x+x^2+xe^x}{1-x+x^2-xe^x}$$

Evaluate $Q'(0)$.

(`Hint`: it's easier to compute this by the definition of derivative.)

Wrong Ans. 直接微分

Correct Ans. 用定義作答

Reason. 題目有請大家使用微分的定義作答，請不要直接把它微分

$$Q'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{Q(h)-Q(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h+h^2+he^h}{1-h+h^2-he^h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+2e^h}{1-h+h^2-he^h} = 4.$$

Problem 2-(a)

Description. Prove that

$$f(x) = \sin(x^{1/3})$$

is not differentiable at $x = 0$.

Wrong Ans (1).

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{Does Not Exists}$$

Wrong Ans (2).

$$\lim_{h\to 0} f'(h) \quad \text{Does Not Exists}$$

Correct Ans.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$$

, hence, $f(x)$ is not differentiable at $x = 0$.

Reason. As

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^{1/3}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^{1/3})}{h^{1/3}} \cdot \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

, hence $f(x)$ is not differentiable at $x = 0$.

> **Note.** Wrong (2) is incorrect. 因為這個陳述只證明了 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 是不連續的，並沒有證明他的 differentiability

Problem 5

Description. Consider the following function:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if } x \leq 2, \\ mx + b, & \text{if } x > 2. \end{cases}$$

It is known that f is differentiable everywhere. Find the values of m and b.

Correct Ans. $m = 4, b = -4$

Reason. 因為可微分性蘊含連續性，所以函數 f 在 $x = 2$ 處是連續的。這意味著依定義有

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2),$$

因此我們得到 $2m + b = 4$。

接著，f 在 $x = 2$ 可微分，這等價於極限

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

存在，這蘊含了

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

因此我們得到

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{mx + b - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{mx - 2m}{x - 2}.$$

最後一個等式來自於我們已知 $2m + b = 4$。因此 $m = 4$。將其代入 $2m + b = 4$，得到 $b = -4$。

Note. 將

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} f'(x)$$

這樣設定是不正確的——雖然你可能會得到相同的答案，但那只是因為「剛好」給定的 $f'(x)$ 是連續的；在一般情況下並不一定如此。