综合评价技术在数学建模竞赛中的应用

陈 磊

西安交通大学能源与动力工程学院

数据中心节能与低碳技术重点实验室

热流科学与工程教育部重点实验室

2025年12月12日

- 美国大学生数学建模竞赛（MCM/ICM）中，综合评价是一类高频且核心的赛题方向，同时也是其他类型赛题（如优化、预测）中常用的分析工具，其应用贯穿问题界定、指标构建、方案选优、结果验证等多个环节。
- 1）直接作为赛题核心任务
- 这类赛题通常要求参赛者对某一复杂系统、方案或对象进行多维度评估与排序，典型主题包括：
- 社会问题评估：如公共卫生资源分配合理性评价、城市可持续发展水平排名、灾害应急能力评估。
- 工程与技术方案选优：如新能源发电方案性价比评价、交通路线规划合理性评估、人工智能算法性能对比。
- 环境与生态评估：如生态保护区健康度评价、碳排放政策效果评估、水资源利用效率评价。
- 这类赛题的核心目标是构建科学的评价指标体系 + 选择适配的评价方法 + 给出明确的评价结论与决策建议。

⑩ 2）作为其他赛题的辅助分析工具

⑩ **即使赛题核心是优化、预测或机理分析，综合评价也会作为关键环节嵌入其中。**

- 优化问题中：用于对多个优化方案进行优劣排序，比如在物流路径优化中，对 “成本最低” “耗时最短” “碳排放最少” 的多个路径方案做综合评价，确定最优解。
- 预测问题中：用于验证预测模型的可靠性，比如通过多个误差指标对不同预测模型做综合评价，筛选最优模型。
- 机理分析问题中：用于量化不同因素对目标的影响程度，比如分析气候变化对农业产量的影响时，对温度、降水、土壤肥力等因素的重要性做综合评价。

- **2025 年**
  - **ICM F 题（网络强国？）**：核心是评估各国网络安全相关的政策有效性。需构建 “政策韧性指数”，结合法律严格性与执行效率进行综合评价；还需通过 NLP 提取法律文件关键词构建 “政策严格性评分”，并借助不同评分方法验证模型稳定性，本质是政策效果的综合评价问题。
  - **MCM B 题（可持续旅游管理）**：需为朱诺市设计可持续旅游业管理模型，要综合评价游客数量对经济收益、环境破坏、居民生活质量的影响。需构建包含经济收益、环境影响、居民满意度等维度的评价体系，通过评价不同游客规模下的综合效益，确定最优旅游管理策略。
- **2024 年**
  - **ICM E 题：聚焦极端天气下的建筑与社区韧性评估**。需确定房产和社区韧性的评价标准，涵盖耐灾设计、应急设施、公共服务设施等多个指标，常用层次分析法或模糊综合评价法对指标量化加权，最终评价建筑物或社区的韧性等级，为加固、改造优先级排序提供依据。
- **2023 年**
  - **ICM D 题（联合国可持续发展目标的优先顺序）**：这是典型的评价类题目。要求构建模型确定 17 项可持续发展指标的优先级，常用层次分析法（AHP）确定各指标权重，结合典型相关分析等评价指标间的关联，最终完成优先级排序，为政策制定提供参考。
  - **ICM E 题（光污染）**：需评估不同地区的光污染程度。光污染程度的界定具有模糊性，适合用模糊综合评价法处理；同时可通过地理加权回归分析光污染的空间异质性，结合多元回归评估各类因素对光污染的影响，形成多维度的光污染评价结果。
  - **ICM F 题（绿色 GDP）**：核心是计算绿色 GDP 并评价其对全球气候变化的影响。需构建包含经济活动与环境影响的评价体系，运用投入产出模型评价经济对环境的影响，再通过回归分析等评价绿色 GDP 与气候变化的关联，量化绿色经济发展的综合效应。

2022 年

MCM A 题（骑自行车者的能量分配）：虽偏决策优化，但需评价骑手在不同赛道位置的功率分配方案优劣。可构建包含能量消耗、速度、疲劳程度等指标的评价体系，通过 TOPSIS 法等对比不同功率分配策略的综合效果，辅助确定最优方案。

2021 年

ICM F 题（检查高等教育的脉搏和温度）：需开发模型评价各国高等教育系统的健康状况。需围绕成本、公平性、教育质量、研究水平等维度构建三级评价指标体系，常用层次分析、模糊综合评价等方法量化健康指数，还需用该评价模型检验政策实施后的效果，属于贯穿全题的核心方法。

2020 年

MCM C 题（海量数据）：聚焦电商产品评价分析。需综合评价消费者评论的价值，构建包含评分、评论内容情感倾向、功能反馈等指标的评价体系；通过 LDA 模型分析评论主题，结合时间序列模型评价产品口碑的长期趋势，为商家制定营销策略提供依据。

MCM B 题（无人机路径规划）：需对不同无人机巡检方案的成本、效率、安全性进行综合评价，通过构建多维度评价体系，运用适宜的评价方法筛选最优路径，是优化问题中嵌入综合评价的典型案例。

2019 年

ICM D 题（卢浮宫博物馆紧急疏散规划）：需评价不同疏散方案的有效性。可构建包含疏散时间、人员安全率、路线拥堵程度等指标的评价体系，通过模拟不同方案的实施效果，运用综合评价方法对比优劣，最终优化出最优疏散策略。

综合评价：对被评价对象所进行的客观、公正、合理的全面评价。

通常的综合评价问题都是有若干个同类的被评价对象(或系统)，每个被评价对象往往都涉及到多个属性（或指标）。

多指标综合评价技术是利用一定的统计指标体系， 采用特定的评价模型和方法， 对被评价对象多个方面的数量特征进行高度的抽象和综合， 转化为综合评价值， 进而确定现象的优劣、 类型或对现象进行排序的一种统计方法。

综合评价的应用：在政治、经济、社会及军事管理、工程技术及科学决策等领域都有重要的应用价值研究，解决这类问题在实际中是很有意义的。

【西安日报】汪应洛院士给三峡工程做"经济论证"

来源：西安日报　日期：2015-07-14 10:12　浏览量：2622

汪应洛院士

三峡工程决策：教学和科研实践完美结合

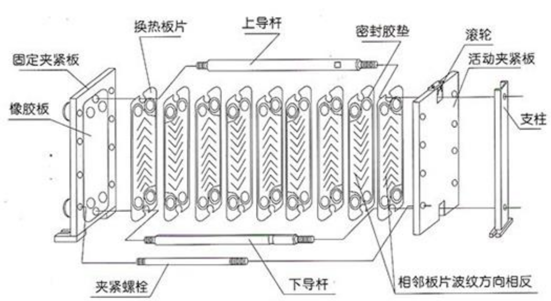
汪院士最注重科研与实践的结合，他接受的一大挑战就是三峡工程的决策，和他的学生做三峡工程的"经济论证"。他解释说："通俗地说就是论证'划不划算'，因为国家经济当时比较困难，很多专家认为国力还不允许建设三峡。当时明确要求我们给出定量分析的结论和方案。"

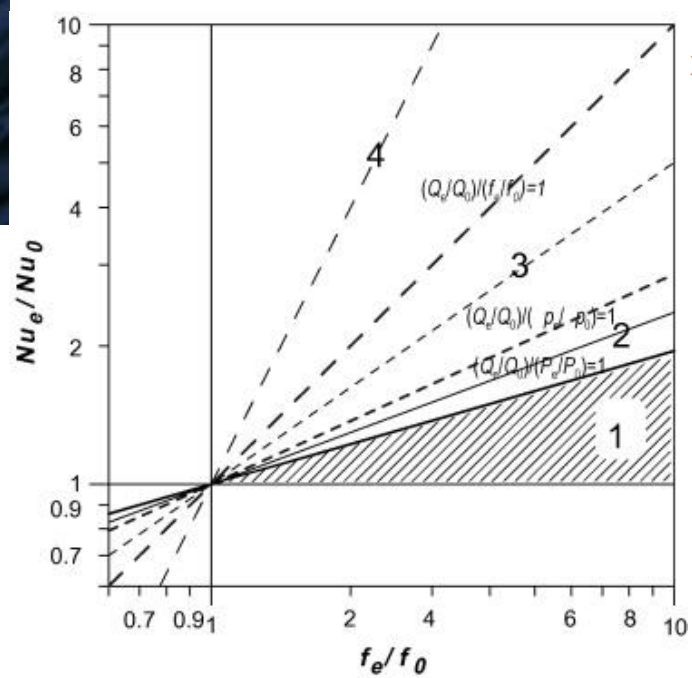
根据国家科委委托，汪应洛等人承担起了三峡工程决策分析和决策支持系统的研究，并参加其后的长江三峡工程重大科学技术研究专家组，主要研究三峡工程综合评价及决策分析，需要综合研究发电、移民、航运、防洪等因素，要拿出最优化的方案。

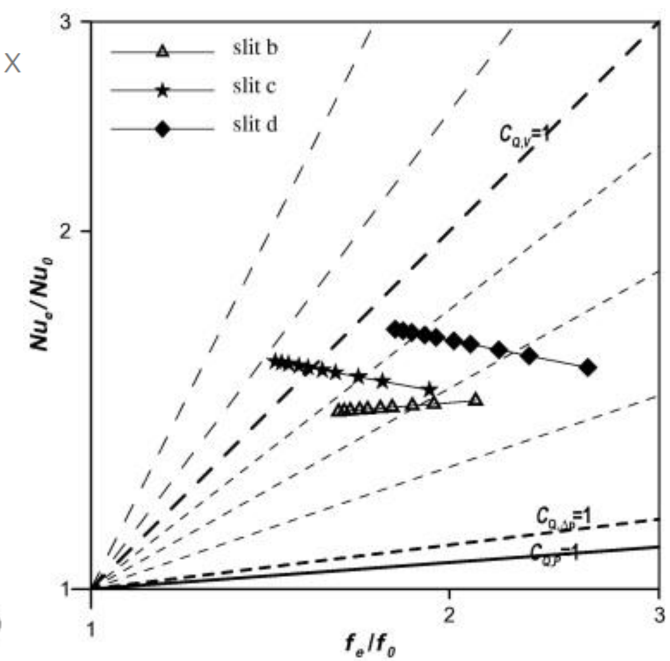
ELSEVIER
International Journal of Heat and Mass Transfer
Volume 52, Issues 1–2, 15 January 2009, Pages 33-44

A performance evaluation plot of enhanced heat transfer techniques oriented for energy-saving

J.F. Fan, W.K. Ding, J.F. Zhang, Y.L. He, W.Q. Tao







2021年度中国大学排名出炉

光明网 gmw.cn 2021-04-26 13:10

【2021年度中国大学排名出炉 】今日，“2021软科中国大学排名”正式发布。@清华大学 、@北京大学 、@浙江大学 占据前三，@上海交通大学 、@南京大学 位列全国前五。其他位列全国前十名的大学依次为@复旦大学 （第六）、@中国科学技术大学 （第七）、@华中科技大学 （第八）、@武汉大学 （第九）、@西安交通大学 （第十）。西安交通大学相较2020年排名上升1名，首次入围全国十强。


软科 中国大学排名 2021 主榜

排名	学校名称	省市	类型	总分
1	清华大学	北京	综合	969.2

办学层次	37.9	人才培养	343.0	重大项目与成果	129.1
学科水平	74.3	科学研究	88.0	国际竞争力	80.1
办学资源	39.4	服务社会	37.9		
师资规模与结构	48.7	学术人才	90.8		

艾瑞深校友会网发布了“2021中国大学排行榜”。榜单从各大高校的思政教育、教学质量、杰出校友、高层次人才、优势学科专业等12个一级指标进行综合评价，其中北京大学以100分满分成绩蝉联榜单榜首，这已经是北京大学连续第14年夺得榜首位置。

名次	学校名称	总分	星级排行	办学层次
1	北京大学	100	8★	世界一流大学
2	清华大学	98.82	8★	世界一流大学
3	上海交通大学	79.47	8★	世界一流大学
4	浙江大学	79.35	8★	世界一流大学
5	华中科技大学	79.32	7★	世界知名高水平大学
6	南京大学	78.31	8★	世界一流大学
7	西安交通大学	78.28	7★	世界知名高水平大学
7	复旦大学	78.28	8★	世界一流大学

武书连2021中国大学综合实力前100名

排名	校名	总得分	人才培养			科学研究		
			得分	研究生培养	本科生培养	得分	自然科学研究	社会科学研究
1	清华大学	136.37	68.37	48.97	19.40	68.01	50.91	17.09
2	北京大学	127.48	67.79	52.04	15.74	59.69	36.34	23.35
3	浙江大学	120.48	65.17	45.89	19.28	55.31	44.57	10.74
4	上海交通大学	103.21	57.26	41.28	15.97	45.95	37.88	8.07
5	武汉大学	96.93	51.19	33.18	18.01	45.75	26.49	19.26
6	南京大学	83.27	47.49	32.45	15.04	35.78	21.77	14.01
7	华中科技大学	83.17	45.00	28.74	16.26	38.16	30.77	7.39
8	复旦大学	82.39	47.89	34.31	13.58	34.50	23.92	10.58
9	四川大学	81.56	42.78	24.60	18.18	38.78	28.95	9.83
10	吉林大学	81.05	40.81	22.75	18.06	40.24	29.33	10.90
11	中山大学	77.19	41.64	25.82	15.83	35.55	24.70	10.85
12	山东大学	73.47	34.55	18.31	16.24	38.92	28.56	10.36
13	哈尔滨工业大学	73.04	39.18	24.50	14.68	33.86	31.74	2.12
14	西安交通大学	69.68	37.13	22.10	15.03	32.56	25.92	6.64
15	中南大学	69.32	36.41	21.75	14.66	32.91	28.13	4.78
16	中国科学技术大学	64.12	43.22	33.48	9.74	20.89	18.81	2.08
17	东南大学	64.00	34.55	20.05	14.50	29.44	23.92	5.52
18	中国人民大学	62.05	33.92	21.62	12.30	28.14	2.14	25.99
19	天津大学	60.38	33.11	21.31	11.80	27.27	23.45	3.82
20	华南理工大学	59.64	31.07	17.91	13.16	28.58	23.98	4.60
21	同济大学	59.46	34.09	21.68	12.42	25.36	21.12	4.24
22	苏州大学	56.92	21.39	10.52	10.87	35.53	29.52	6.01
23	北京师范大学	56.11	32.85	19.16	13.69	23.27	8.62	14.64
24	北京航空航天大学	54.04	31.58	19.43	12.16	22.46	19.34	3.12
25	湖南大学	52.34	29.53	18.31	11.22	22.81	17.35	5.46
26	南开大学	52.19	29.51	18.26	11.25	22.68	12.44	10.25
27	重庆大学	50.35	26.48	14.77	11.71	23.87	18.83	5.04
28	厦门大学	48.25	25.24	12.29	12.95	23.01	13.66	9.36
29	西北工业大学	48.18	27.30	14.86	12.44	20.88	19.56	1.31
30	大连理工大学	47.95	26.91	13.54	13.38	21.04	16.72	4.32
31	华东师范大学	43.24	23.94	12.39	11.55	19.30	7.98	11.32
32	北京理工大学	43.15	25.35	14.19	11.16	17.80	14.77	3.02

1.1 构成综合评价问题的五个要素

构成综合评价问题的五个要素分别为:被评价对象、评价指标、权重系数、综合评价模型和评价者。

（1）被评价对象

被评价对象就是综合评价问题中所研究的对象，或称为系统。通常情况下，在一个问题中被评价对象是属于同一类的，且个数要大于 1，不妨假设一个综合评价问题中有n 个被评价对象（或系统），分别记为$S_1, S_2, \cdots, S_n (n > 1)$。

（2）评价指标

评价指标是反映被评价对象(或系统)的运行(或发展)状况的基本要素。通常的问题都是有多项指标构成，每一项指标都是从不同的侧面刻画系统所具有某种特征大小的一个度量。

一个综合评价问题的评价指标一般可用一个向量表示，其中每一个分量就是从一个侧面反映系统的状态，即称为综合评价的指标体系。

评价指标体系应遵守的原则：系统性、科学性、可比性、可测性（即可观测性）和独立性。这里不妨设系统有 m 个评价指标（或属性），分别记为 $x_1, x_2, \cdots, x_m (m>1)$，即评价指标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$。

（3）权重系数

每一综合评价的问题都有相应的评价目的，针对某种评价目的，各评价指标之间的相对重要性是不同的，评价指标之间的这种相对重要性的大小可以用权重系数来刻画。如果用 w_j 来表示评价指标 $x_j (j=1,2,\cdots,m)$ 的权重系数，则应有 $w_j \geq 0 (j=1,2,\cdots,m)$，且 $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$。

（4）综合评价模型

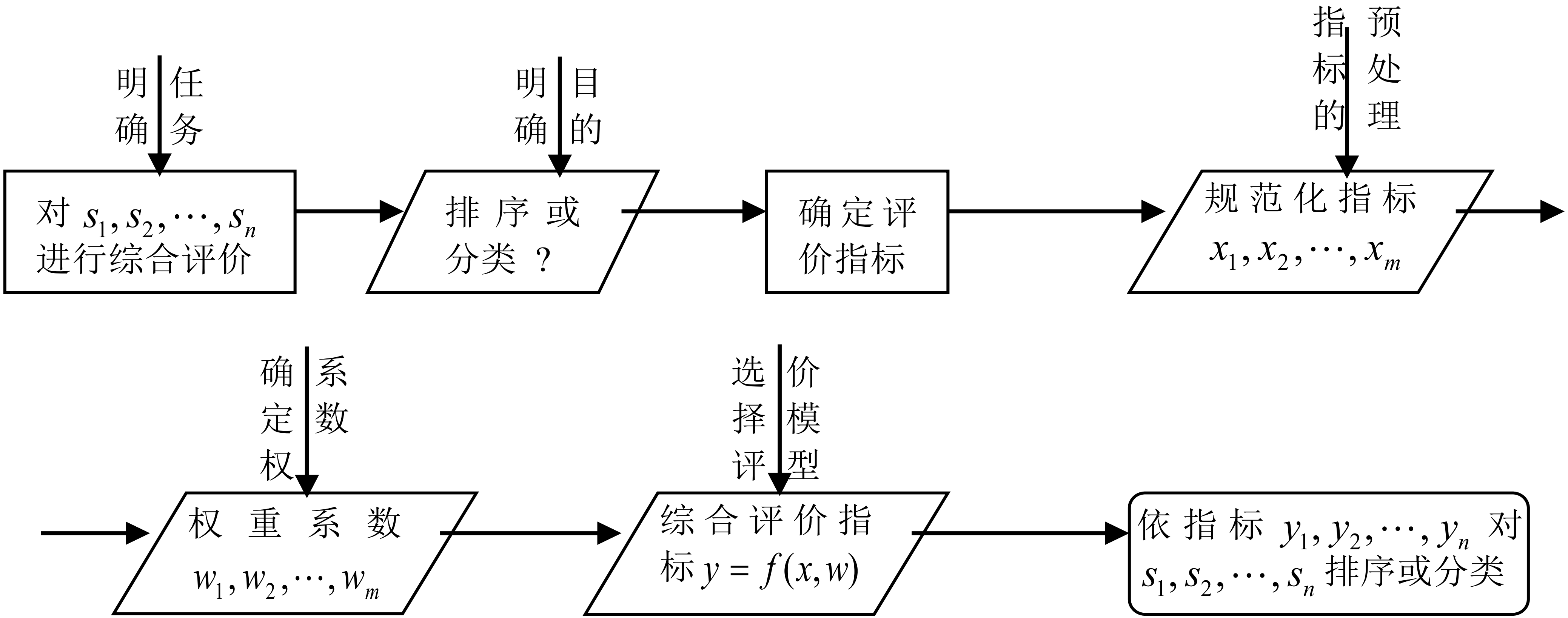
对于多指标（或多因素）的综合评价问题,就是要通过建立合适的综合评价数学模型将多个评价指标综合成为一个整体的综合评价指标，作为综合评价的依据，从而得到相应的评价结果。

不妨假设 n 个被评价对象的 m 个评价指标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$，指标权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^T$，由此构造综合评价函数为 $y=f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})$。

如果已知各评价指标的 n 个观测值为 $\{x_{ij}\}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，则可以计算出各系统的综合评价值 $y_i=f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}^{(i)})$，$\boldsymbol{x}^{(i)}=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})^T\ (i=1,2,\cdots,n)$。根据 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 值的大小将这 n 个系统进行排序或分类，即得到综合评价结果。

（5）评价者

评价者是直接参与评价的人，可以是某一个人，也可以是一个团体。对于评价目的选择、评价指标体系确定、评价模型的建立和权重系数的确定都与评价者有关。



1.2 评价指标的规范化处理

1）评价指标类型的一致化

一般说来，在评价指标 $x_1, x_2, \cdots, x_m (m > 1)$ 中可能包含有“极大型”指标、“极小型”指标、“中间型”指标和“区间型”指标。

极大型指标：总是期望指标的取值越大越好；

极小型指标：总是期望指标的取值越小越好；

中间型指标：总是期望指标的取值既不要太大，也不要太小为好，即取适当的中间值为最好；

区间型指标：总是期望指标的取值最好是落在某一个确定的区间内为最好。

（1）极小型指标：对于某个极小型指标x，则通过变换$x' = \frac{1}{x}(x > 0)$，或变换$x' = M - x$，其中M 为指标x 的可能取值的最大值，即可将指标x 极大化。

（2）中间型指标：对于某个中间型指标x，则通过变换

$$x' = \begin{cases} \frac{2(x-m)}{M-m}, & m \le x \le \frac{1}{2}(M+m) \\ \frac{2(M-x)}{M-m}, & \frac{1}{2}(M+m) \le x \le M \end{cases}$$

其中M 和m 分别为指标x 的可能取值的最大值和最小值，即可将中间型指标x 极大化。

（3）区间型指标

对于某个区间型指标 x，则通过变换

$$x' = \begin{cases} 1 - \dfrac{a - x}{c}, & x < a \\ 1, & a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{x - b}{c}, & x > b \end{cases}$$

其中 $[a,b]$ 为指标 x 的最佳稳定的区间，$c = \max\{a - m, M - b\}$，M 和 m 分别为指标 x 的可能取值的最大值和最小值。即可将区间型指标 x 极大化。

2）评价指标的无量纲化

在实际中的评价指标 $x_1, x_2, \cdots, x_m (m > 1)$ 之间，往往都存在着各自不同的单位和数量级，使得这些指标之间存在着不可公度性，这就为综合评价带来了困难，尤其是为综合评价指标建立和依据这个指标的大小排序产生不合理性。

如果不对这些指标作相应的无量纲处理，则在综合评价过程中就会出“大数吃小数”的错误结果，从而导致最后得到错误的评价结论。

无量纲化处理又称为指标数据的标准化,或规范化处理。

常用方法:标准差方法、极值差方法和功效系数方法等。

假设 m 个评价指标 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，在此不妨假设已进行了类型的一致化处理，并都有 n 组样本观测值 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，则将其作无量纲化处理。

（1）标准差方法：令 $x'_{ij} = \dfrac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，

其中 $\bar{x}_j = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, s_j = [\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2]^{1/2} (j=1,2,\cdots,m)$。

显然指标 $x'_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$ 的均值和均方差分别为 0 和 1，称之为 x_{ij} 的标准观测值。

（2）极值差方法：令 $x'_{ij} = \dfrac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，

其中 $M_j = \max\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}\}, m_j = \min\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}\} (j=1,2,\cdots,m)$。则 $x'_{ij} \in [0,1]$ 是无量纲的指标观测值。

（3）功效系数法：令 $x'_{ij} = c + \dfrac{x_{ij} - m_j}{M_j - m_j} \times d\ \ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，

其中 c, d 均为确定的常数。c 表示“平移量”，d 表示“旋转量”，即表示“放大”或“缩小”倍数，则 $x'_{ij} \in [c, c+d]$。

譬如若取 $c=60, d=40$，则 $x'_{ij} \in [60,100]$。

1.3 综合评价的数学模型

- 1、计分法
- 2、综合指数法
- 3、Topsis法
- 4、秩和比(RSR)法
- 5、层次分析(AHP)法
- 6、模糊评价方法
- 7、多元统计分析方法
- 8、灰色系统评价方法
- 9、线性加权综合评价
- 10、非线性加权综合评价
- 11、动态加权综合评价方法

- 12、主成分分析法
- 13、数据包络分析法
- 14、人工神经网络评价方法
- 15、专家评价法
- 16、熵权法
- 17、简单指标比对法
- 18、随机前沿分析法
- 19、可拓物元法
- 20、泰勒展开法
- 21、混合方法
- … …

模型一：线性加权综合模型

线性加权综合模型：用线性加权函数 $y=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j$ 作为综合评价模型，对 n 个系统进行综合评价。

模型二：非线性加权综合模型

非线性加权综合模型：用非线性函数 $y=\prod_{j=1}^{m} x_j^{w_j}$ 作为综合评价模型，对 n 个系统进行综合评价。其中 w_j 为权系数，且要求 $x_j \geq 1$。

非线性加权综合法适用于各指标间有较强关联的情况。

模型三：TOPSIS模型

TOPSIS（Techniquefor Order Preference by Similarity to Ideal Solution)方法全名逼近于理想解的排序模型，是一种适合多指标、多方案决策分析的综合评价方法。

步骤一： 设有m个评价对象、n个评价指标，原始数据可写为矩阵$X=(X_{ij})_{m\times n}$

$$X=\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ \\ M_m \end{array}\begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_n \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \vdots & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

步骤二： 对极大、极小指标分别进行同向化、归一化变换

$$V_{ij}=\frac{x_{ij}-\min(x_j)}{\max(x_j)-\min(x_j)} \qquad V_{ij}=\frac{\max(x_j)-x_{ij}}{\max(x_j)-\min(x_j)}$$

步骤三：归一化得到矩阵$V=(V_{ij})_{m\times n}$，其各行最大、最小值构成的最优、最劣向量分别记为

$$V^{+}=(V_{max1}\quad V_{max2}\quad \cdots \quad V_{maxn})$$

$$V^{-}=(V_{min1}\quad V_{min2}\quad \cdots \quad V_{minn})$$

权重？

步骤四：第i个评价对象与最优、最劣方案的距离分别为

$$D_i^{+}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(V_{\max j}-V_{ij})^2} \qquad D_i^{-}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(V_{\min j}-V_{ij})^2}$$

AHP法

熵权法

均方差法

步骤五：第i个评价对象与最优方案的接近程度η_i为

$$\eta_i=D_i^{-}/(D_i^{+}+D_i^{-})$$

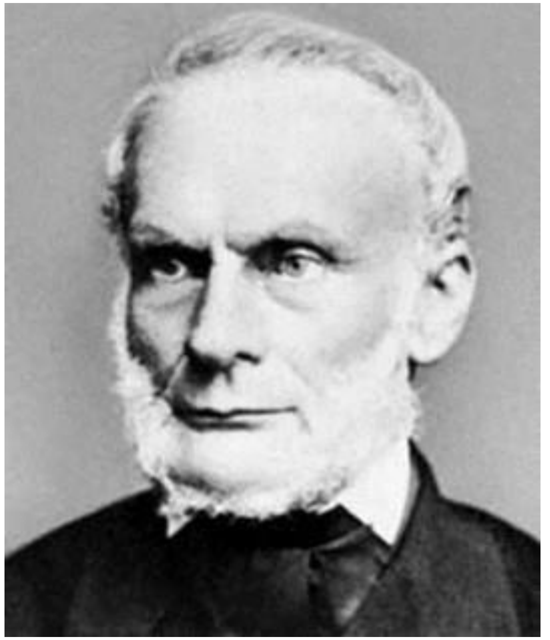
TOPSIS的MATLAB代码

```
%清空内存变量与工作空间，以防干扰
Clear;
Clc;

%从Excel文件中读取参与评价方案的原始数据
%把原始数据按照规定格式输入到data_TOPSIS.xls中
%将数据文件data_TOPSIS.xls存放到MATLAB的当前工作目录下

Disp(‘请在弹出的文件data_TOPSIS.xls中，选择评价指标的指示值 ‘)
%L 存放各指标的指示值
L=xlsread(‘data_TOPSIS.xls’,-1)

Disp(‘请在弹出的文件data_TOPSIS.xls中，选择各评价方案的指标值’ )
%X存放各评价方案的指标值
X=xlsread(‘data_TOPSIS.xls’,-1)

%计算参与评价的方案数和指标数
[m,n] = size(X);

%无量纲化决策矩阵
V = zeros (m,n);
for i = 1:m
   for j = 1:n
            %根据指标指示值判断是越大越优型指标还是越小越优型指标
              if L(j) == 1
               %越大越优型指标的无量纲化
V(i,j) = (X(i,j) - min(X(:,j)))/(max(X(:,j))) - min(X(:,j));
      else
             %越小越优型指标的无量纲化
V(i,j) = (max(X(:,j))) - X(i,j)/(max(X(:,j))) - min(X(:,j));
      end
   end
end

%构建加权决策矩阵
R=zeros(m,n);
for i = 1:m
   for j = 1:n
          R(i,j) = W(j) * V(i,j);
       end
end

%计算正理想解和负理想解
SP = zeros(1,n);
SM = zeros(1,n);

   for j = 1:n
          %根据指标指示值判断是越大越优型指标还是越小越优型指标
               if L(j) = =1
      %越大越优型指标的正理想解和负理想解
      SP (j) = max (R (:, j)); %正理想解
      SM (j) = min (R (:, j)); %负理想解
   else
      %越小越优型指标的正理想解和负理想解
      SP (j) = min(R (:, j)); %正理想解
      SM (j) = max(R (:, j)); %负理想解
   end
  end
```

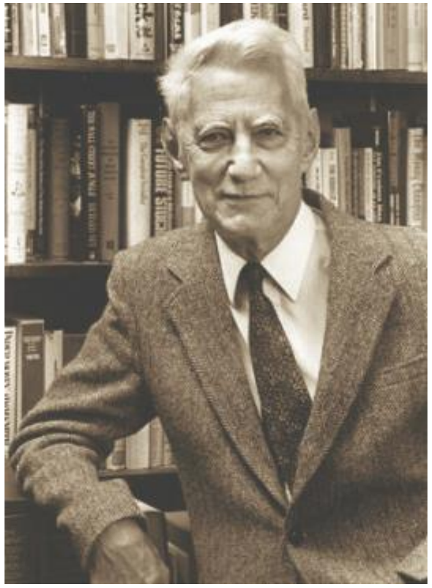
```
%计算各方案与正理想解的距离
SdP = zeros (1,m);
for i =1:m
s = 0;
for j =1: n
s = s + (SP(j)-R (i, j))^2 ;
end
SdP (i) = sqrt (s);
End

%计算各方案与负理想解的距离
SdM = zeros (1,m);
for i = 1; m
s =0;
for j =1: n
s = s+(SM (j)-R (I, j))^2;
end
SdM (i) = sqrt (s);
End

%计算贴近度
yita = zeros (1,m);
for i=1; m
  yita(i)=SdM(i)/（SdP (i)+ SdM (i)）；
end
```

模型四：熵权法模型

1850年发的表关于热的力学理论，其中首次明确指出热力学第二定律的基本概念。于1865年引进了熵的概念。



鲁道夫•克劳修斯



1948年，划时代的“通信的一个数学理论”分成两部分，在7月和10月的Bell System Technical Journal发表。香农同时提出了信息熵的概念，用于衡量消息的不确定性。

克劳德·艾尔伍德·香农

根据熵的定义与原理，当系统可能处于几种不同状态，每种状态出现的概率为 $p_i\ (i=1,2,\cdots,m)$，则该系统的熵就可定义

$$e=-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m}p_i\ln p_i\ .$$

熵权法是一种客观赋权方法。在具体使用过程中熵权法根据各指标的变异程度，利用信息熵计算出各指标的熵权，从而得出较为客观的指标权重。

熵权法的评价步骤

设有n个评价对象，m个评价指标变量，第i个评价对象关于第j个指标变量的取值为$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，构造数据矩阵$A=(a_{ij})_{n\times m}$。

基于熵权法的评价方法步骤如下：

（1）利用原始数据矩阵$A=(a_{ij})_{n\times m}$计算p_{ij}（$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$），即第i个评价对象关于第j个指标值的比重

$$p_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}},\quad i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,m.$$

（2）计算第 j 项指标的熵值

$$e_j = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ln p_{ij}, \quad j = 1,2,\cdots,m.$$

（3）计算第 j 项指标的变异系数

$$g_j = 1 - e_j, \quad j = 1,2,\cdots,m.$$

对于第 j 项指标，e_j 越大，指标值的变异程度就越小。

（4）计算第 j 项指标的权重

$$w_j = \frac{g_j}{\sum_{j=1}^{m} g_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

（5）计算第 i 个评价对象的综合评价值

$$s_i = \sum_{j=1}^{m} w_j p_{ij}.$$

评价值越大越好。

请根据下表给出的 10 个学生 8 门课的成绩，给出这 10 个学生评奖学金的评分排序。

学生成绩表

学生编号	语文	数学	物理	化学	英语	政治	生物	历史
1	93	66	86	88	77	71	90	94
2	97	99	61	61	75	87	70	70
3	65	99	94	71	91	86	80	93
4	97	79	98	61	92	66	88	69
5	85	92	87	63	67	64	96	98
6	63	65	91	93	80	80	99	74
7	71	77	90	88	78	99	82	68
8	82	97	76	73	86	73	65	70
9	99	92	86	98	89	83	66	85
10	99	99	67	61	90	69	70	79

解　指标变量$x_1,x_2,\cdots,x_8$分别表示学生的语文、数学、物理、化学、英语、政治、生物、历史成绩。用a_{ij}表示第i个学生关于指标变量x_j的取值，构造数据矩阵$A=(a_{ij})_{10\times 8}$。

计算的Matlab程序如下：

```
clc, clear
a=readmatrix('data.txt');
[n,m]=size(a);
p=a./sum(a);
e=-sum(p.*log(p))/log(n);
g=1-e; w=g/sum(g) %计算权重
s=w*p' %计算各个评价对象的综合评价值
[ss,ind1]=sort(s,'descend') %对评价值从大到小排序
%ind2(ind1)=1:n  %学生编号对应的排序位置
writematrix(w,'data1.xlsx')  %把数据写到Excel文件的表单1
%writematrix([1:n;s;ind2],'data1.xlsx','Sheet',2)  %把数据写到表单2
```

各指标的评价权重

指标	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
权重	0.1544	0.1363	0.1127	0.1972	0.0552	0.1064	0.1273	0.1104

学生的综合评价值及排名次序

学生编号	1	2	3	4	5
评价值s_i	0.1039	0.0950	0.1019	0.0978	0.1000
排名	2	10	3	7	6
学生编号	6	7	8	9	10
评价值s_i	0.1003	0.1012	0.0951	0.1091	0.0959
排名	5	4	9	1	8

MCM 2025 B题

1.1 赛题核心背景

朱诺市现状：2023 年接待 160 万邮轮游客，创收 3.75 亿美元，但伴随严重挑战

1）环境压力：门登霍尔冰川自 2007 年退缩 8 个足球场距离，碳排放增加

2）社会压力：居民住房短缺、生活成本上升、游客行为冲突

3）基础设施压力：饮用水供应、废物管理系统超载

核心矛盾：旅游经济发展与生态、社会可持续性的失衡

1.2 评价核心目标

1）构建科学的可持续旅游评价体系，量化不同游客规模的综合效益

2）识别“经济收益 - 环境保护 - 社会和谐”的最优平衡点

3）为朱诺市制定游客管理、资源分配政策提供决策依据

2.1 指标体系设计原则

系统性：覆盖经济、社会、环境三大可持续支柱；独立性：剔除冗余指标；可量化：基于赛题数据与公开统计数据

文献支撑：参考 UNWTO 可持续旅游标准、6As 旅游发展框架

数据可行性：优先选择赛题提供数据（游客量、收入）与公开环境监测数据

2.2 三级指标体系框架（参考可持续旅游评价理论）

目标层	准则层（权重）	指标层（具体量化指标）	指标属性
旅游可持续性综合指数	经济可持续性（0.35）	旅游人均收入、旅游就业贡献率、旅游收入增长率	正向指标
	社会可持续性（0.30）	居民满意度、社区参与度、基础设施承载率	正向 / 适度指标
	环境可持续性（0.35）	冰川退缩速率、碳排放强度、废弃物处理达标率、生物多样性保持率	正向 / 负向指标

3.1 指标预处理

正向化处理：对“冰川退缩速率”“碳排放强度”等负向指标取倒数转换

无量纲化处理：采用极值法标准化，消除量纲与数量级差异

3.2 组合赋权法（AHP - 熵权法）

权重类型	计算逻辑	准则层权重结果
主观权重（AHP）	构建判断矩阵→一致性检验（CR=0.08＜0.1）→权重计算	经济 0.30，社会 0.35，环境 0.35
客观权重（熵权法）	计算指标信息熵→熵权归一化（基于数据离散度）	经济 0.40，社会 0.25，环境 0.35
组合权重	加权融合（主观 0.5 + 客观 0.5，平衡经验与数据特性）	经济 0.35，社会 0.30，环境 0.35

4.1 模型选型依据

赛题特点：多指标、多方案（不同游客规模）排序，需量化相对优劣→适配 TOPSIS 法

方法优势：无需假设数据分布，几何意义直观，适配可持续旅游多准则评价场景

4.2 TOPSIS 模型核心步骤

1. 构建标准化决策矩阵（3 个准则层 ×8 个指标层 ×5 个游客规模方案）
2. 确定正理想解（各指标最大值）与负理想解（各指标最小值）
3. 计算欧氏距离：方案距正理想解、方案距负理想解
4. 计算可持续性得分：得分越高越可持续

5. 评价结果与可视化分析

5.1 评价结果分级标准

高可持续：$C_i \in [0.8,1.0]$；**中可持续**：$C_i \in [0.6,0.8)$；**低可持续**：$C_i \in [0,0.6)$

5.2 核心结果可视化

方案排序表：5 个游客规模（5 万/日、1 万/日、8 万/日、5 万/日、3 万/日）的得分与排名

三维雷达图：展示最优方案（8 千 / 日）在经济、社会、环境维度的均衡表现

关键指标贡献度：柱状图呈现环境可持续性（35%）与经济可持续性（35%）为核心驱动因素

5.3 关键发现

最优游客规模：每日 8 千人次（得分 0.82），兼顾经济收益与生态保护

临界阈值：单日游客超 1 万人次时，可持续性得分骤降至 0.58（低可持续水平）

敏感因素：冰川退缩速率与居民满意度对评价结果影响最显著

6. 稳健性检验与模型优化

6.1 稳健性检验方案

权重扰动：调整组合权重比例（主观 0.6 + 客观 0.4），重新计算得分

指标替换：用“旅游税收贡献率”替换“旅游就业贡献率”，验证结果稳定性

6.2 检验结果

两次检验的方案排序相关系数 > 0.93，表明模型稳定性良好

最优方案始终为“每日 8 千人次”，验证结论可靠性

6.3 模型优化方向

可引入耦合协调模型，进一步分析经济 - 社会 - 环境三大系统的协同程度

结合 GIS 空间分析，细化不同区域的旅游承载力评价

2003—A题　SARS的传播
案例：SARS疫情对某些经济指标影响

- 1 问题的提出：2003年的SARS疫情对中国部分行业的经济发展产生了一定的影响，特别是对部分疫情较严重的省市的相关行业所造成的影响是明显的，经济影响主要分为直接经济影响和间接影响．直接经济影响涉及到商品零售业、旅游业、综合服务等行业．很多方面难以进行定量地评估，现仅就SARS疫情较重的某市商品零售业、旅游业和综合服务业的影响进行定量的评估分析．
- 究竟SARS疫情对商品零售业、旅游业和综合服务业的影响有多大，已知该市从1997年1月到2003年10月的商品零售额、接待旅游人数和综合服务收入的统计数据如下表1、表2、表3．

表1 商品的零售额(单位：亿元)

年代	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
1997	83.0	79.8	78.1	85.1	86.6	88.2	90.3	86.7	93.3	92.5	90.9	96.9
1998	101.7	85.1	87.8	91.6	93.4	94.5	97.4	99.5	104.2	102.3	101.0	123.5
1999	92.2	114.0	93.3	101.0	103.5	105.2	109.5	109.2	109.6	111.2	121.7	131.3
2000	105.0	125.7	106.6	116.0	117.6	118.0	121.7	118.7	120.2	127.8	121.8	121.9
2001	139.3	129.5	122.5	124.5	135.7	130.8	138.7	133.7	136.8	138.9	129.6	133.7
2002	137.5	135.3	133.0	133.4	142.8	141.6	142.9	147.3	159.6	162.1	153.5	155.9
2003	163.2	159.7	158.4	145.2	124	144.1	157	162.6	171.8	180.7	173.5	176.5

⑩ 试根据这些历史数据建立预测评估模型，评估2003年SARS疫情给该市的商品零售业、旅游业和综合服务业所造成的影响.

按时态分，数据可分为历史数据和现实数据；按预测对象分，可分为内部数据和外部数据；就收集的手段分，可分为第一手数据和第二手数据。

第一手数据，包括以各种形式初次收集的数据。收集第一手数据的途径包括：抽样调查，连续调查，或全面调查。

第二手数据多为已经公布和发表的资料，易于获取，代价低，数据精度也有一定的保证。其缺点是数据可能不能直接适用于预测情况。因此，常常需要对已公布的数据进行修正和处理，使其适应于预测需要。

数据处理方法

（1）判别法

通过对历史数据的判断，选择其中可代表整个预测过程中很可能发生的模式的数据作为建模数据；

（2）剔除法

如果数据量比较大，且非必须具备连续的数据量，这时可剔除数据中受随机干扰的异常值；

（3）平均值法

在数据比较少或需要连续数据时，则可采取平均值法对数据进行处理。对于时间序列数据，可用异常值前后两期数据的算术平均值或几何平均值对异常值进行修正。

$$\overline{x_t} = \frac{x_{t-1} + x_{t+1}}{2} \quad \text{或}$$

$$\overline{\mathrm{X}_\mathrm{t}} = \sqrt{x_{t-1} \bullet x_{t+1}}$$

通常当历史数据的发展趋势呈线性时，取算求平均值，当发展趋势呈非线性时，取几何平均值。

（4）拉平法

由于条件发生变化，常常使一些历史数据不能反映现时的情况，例如，大型钢铁厂、化肥厂、或油气田的建成投产或开发，可以使产量猛增，这时历史数据将发生突变，出现一个转折，如用这类数据建模，则需要处理。这时拉平法是一种较好的方法。它的原理是对转折点前的数据加一个适当的量值，使其与折点后的数据走向一致。

1、时间序列预测模型

时间序列模型主要研究事物的自身发展规律，借以预测事物的未来趋势。主要方法有移动平均、指数平滑、分解预测、鲍克斯詹金斯模型、多变量模型以及类推法等。

特点和应用范围时间序列一般指一组按时间顺序排列的数据，展示了研究对象在一定时期的发生变化过程。时间序列模型，就是根据预测对象时间变化特征，研究事物自身的发展规律，探讨未来发展趋势，是一种重要的定量预测方法，包括多种模型，主要适用于经济预测、商业预测、需求预测、库存预测等，预测期限主要为中、短期，不适用于有拐点的长期预测。

2、微分方程预测模型

当我们描述实际对象的某些特性随时间（或空间）而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来性态、研究它的控制手段时，通常要建立对象的动态微分方程模型。微分方程大多是物理或几何方面的典型问题，假设条件已经给出，只需用数学符号将已知规律表示出来，即可列出方程，求解的结果就是问题的答案，答案是唯一的，但是有些问题是非物理领域的实际问题，要分析具体情况或进行类比才能给出假设条件。作出不同的假设，就得到不同的方程。比较典型的有：传染病的预测模型、经济增长预测模型、正规战与游击战的预测模型、药物在体内的分布与排除预测模型、人口的预测模型、烟雾的扩散与消失预测模型以及相应的同类型的预测模型。其基本规律随着时间的增长趋势是指数的形式，根据变量的个数建立初等微分模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$ （如传染病预测，经济增长预测，人口预测等）

或者微分方程组

$$\begin{cases} (\dot{x}(t)) = A(x(t)) \\ (\dot{x}(0)) = B \end{cases}$$ （如正规战与游击战、药物的分布与排除预测等）

其中$(\dot{x}(t))$，$(x(t))$均是列向量，A、B是矩阵。

而后由于实际问题的改变，会出现外在的干预等，例如传染病模型，只有健康人才可能被传染为病人，病人治愈后仍有可能成为病人或者治愈后有免疫力，政府卫生部门的干预等，都会使得所建立的初等模型失败。为此根据情况可以适当地一步步改进所建立的初等模型，从而达到我们所需要的微分方程预测模型。改进包括：

（1）常系数的改进 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} (\dot{x}(t)) = A(t)(x(t)) \\ (\dot{x}(0)) = B \end{cases}$

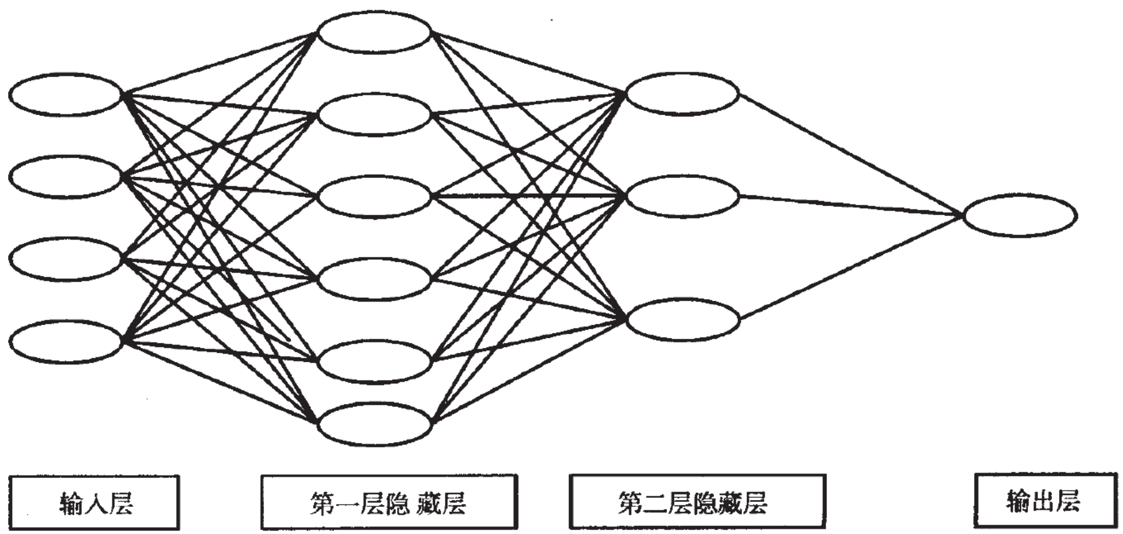
（2）增加一个控制函数 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} (\dot{x}(t)) = A(x(t)) + (f(t)) \\ (\dot{x}(0)) = B \end{cases}$

（3）综合 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r(t)x + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} (\dot{x}(t)) = A(t)(x(t)) + (f(t)) \\ (\dot{x}(0)) = B \end{cases}$

以及一些相应的根据情况而进行的改进模型。得到模型后可以用Matlab软件来求解画出散点图，并比较拟合度。

3、神经网络预测模型

BP神经网络模型是目前神经网络学习模型中最具代表性、应用最普遍的模型。BP神经网络架构是由数层互相连结的神经元组成，通常包含了输入层、输出层及若干隐藏层，各层包含了若干神经元。



适用于中长期的预测；优点是逼近效果好，计算速度快，不需要建立数学模型，精度高；具有强非线性拟合能力。缺点是无法表达和分析被预测系统的输入和输出间的关系，预测人员无法参与预测过程；收敛速度慢，难以处理海量数据，得到的网络容错能力差，算法不完备（易陷入局部极小）。

4、灰色预测模型

（1）灰色系统、白色系统和黑色系统

白色系统是指一个系统的内部特征是完全已知的，即系统的信息是完全充分的。

黑色系统是指一个系统的内部信息对外界　来说是一无所知的，只能通过它与外界的联系来加以观测研究。

灰色系统内的一部分信息是已知的，另一部分信息是未知的，系统内各因素间有不确定的关系。

(2) 灰色预测法

- 灰色预测法是一种对含有不确定因素的系统进行预测的方法。

- 灰色预测通过鉴别系统因素之间发展趋势的相异程度，即进行关联分析，并对 原始数据进行生成处理来寻找系统变动的规律，生成有较强规律性的数据序列，然后建立相应的微分方程模型，从而预测事物未来发展趋势的状况。

数据生成的常用方式有累加生成、累减生成和加权累加生成。

（1）累加生成

把数列各项（时刻）数据依次累加的过程称为累加生成过程（AGO ）。由累加生成过程所得的数列称为累加生成数列。设原始数列为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$

令

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),k=1,2,\cdots,n,$$

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

称所得到的新数列为数列$x^{(0)}$**的1次累加生成数列。类似地有**

$$x^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(r-1)}(i),k=1,2,\cdots,n,r\geq 1$$

称为 $x^{(0)}$ **的r次累加生成数列。**

（2）累减生成

对于原始数据列依次做前后相邻的两个数据相减的运算过程称为累减生成过程IAGO。如果原始数据列为 $x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$

令

$$x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1),k=2,3,\cdots,n,$$

$x^{(1)}$

称所得到的数列 $x^{(0)}$ 为 $x^{(1)}$ 的1次累减生成数列。

注：从这里的记号也可以看到，从原始数列 $x^{(0)}$ ，得到新数列 ，再通过累减生成可以还原出原始数列。实际运用中在数列 $x^{(1)}$ 的基础上预测出 $\hat{x}^{(1)}$ ，通过累减生成得到预测数列 $\hat{x}^{(0)}$ 。

（3）加权邻值生成

设原始数列为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$

称 $x^{(0)}(k-1),x^{(0)}(k)$ 为数列 $x^{(0)}$ 的邻值。

$x^{(0)}(k-1)$ 为后邻值，$x^{(0)}(k)$ 为前邻值，对于常

数 $\alpha\in[0,1]$，令 $z^{(0)}(k)=\alpha x^{(0)}(k)+(1-\alpha)x^{(0)}(k-1),k=2,3,\cdots,n,$

由此得到的数列 $x^{(0)}$ 称为数列 $z^{(0)}$ 在权 α 下的邻值生成数，权 α 也称为生成系数。

特别地，当生成系数 $\alpha=0.5$ 时，则称

$$z^{(0)}(k)=0.5x^{(0)}(k)+0.5x^{(0)}(k-1),k=2,3,\cdots,n,$$

为均值生成数，也称等权邻值生成数。

例：$x^{(0)}=(x^{(0)}(k) \mid k=1，2，3，4，5)$

$=x^{(0)}(1)，x^{(0)}(2)，x^{(0)}(3)，x^{(0)}(4)，x^{(0)}(5)$

$=(3.2，3.3，3.4，3.6，3.8)$

求 $x^{(1)}(k)$

解：

$$k=1, x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)=3.2$$

$$k=2, x^{(1)}(2)=\sum_{i=1}^{2} x^{(0)}(i)=x^{(0)}(1)+x^{(0)}(2)=3.2+3.3=6.5$$

$$k=3, x^{(1)}(3)=\sum_{i=1}^{3} x^{(0)}(i)=x^{(1)}(2)+x^{(0)}(3)=6.5+3.4=9.9$$

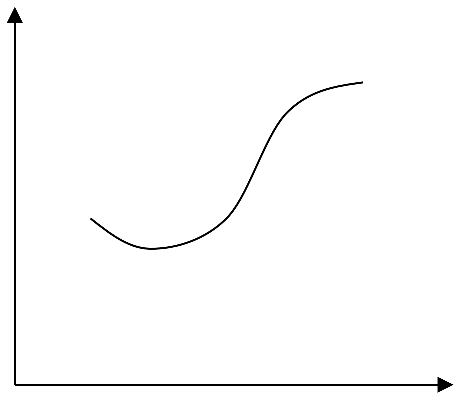
$$k=4, x^{(1)}(4)=\sum_{i=1}^{4} x^{(0)}(i)=x^{(1)}(3)+x^{(0)}(4)=9.9+3.6=13.5$$

$$k=5, x^{(1)}(5)=\sum_{i=1}^{5} x^{(0)}(i)=x^{(1)}(4)+x^{(0)}(5)=13.5+3.8=17.3$$

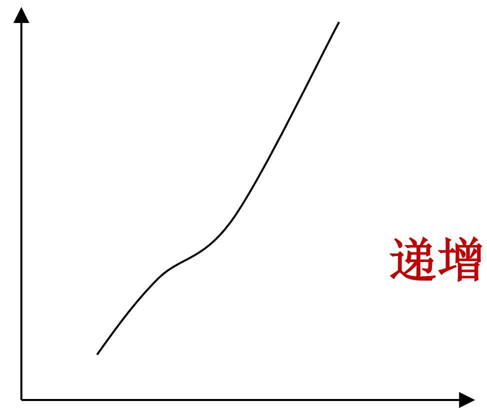
一般经济数列都是非负数列。累加生成能使任意非负数列、摆动的与非摆动的，转化为非减的、递增的。

原始数列作图

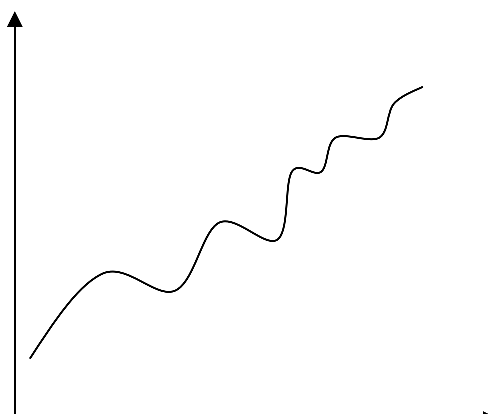
1—AGO作图



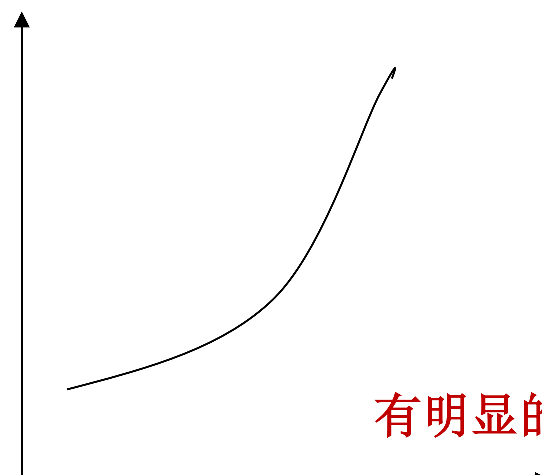
某市的汽车销售量



递增的规律



某地区作物产量



有明显的指数关系的规律

累减生成计算示例

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),x^{(1)}(3),x^{(1)}(4),x^{(1)}(5),x^{(1)}(6))=(5,9,14,24,35,46)$$

解： $x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)$

若$k=0, x^{(1)}(0)=0$

$$k=1, x^{(0)}(1)=x^{(1)}(1)-x^{(1)}(0)=x^{(1)}(1)=5$$

$$k=2, x^{(0)}(2)=x^{(1)}(2)-x^{(1)}(1)=4$$

$$k=3, x^{(0)}(3)=x^{(1)}(3)-x^{(1)}(2)=5$$

$$k=4, x^{(0)}(4)=x^{(1)}(4)-x^{(1)}(3)=10$$

$$k=5, x^{(0)}(5)=x^{(1)}(5)-x^{(1)}(4)=11$$

$$k=6, x^{(0)}(6)=x^{(1)}(6)-x^{(1)}(5)=11$$

从而有： IGAO（$x^{(0)}$）$=(5,4,5,10,11,11)$

不难看出， 累减生成具有求导性质， 这是因为

$$\frac{dx(k)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(k)-x(k-\Delta t)}{\Delta t}$$

而$\alpha^{(1)}(x(k))=x(k)-x(k-1)$,相当于$\Delta t=1$

灰色模型G M(1,1)

灰色系统理论是基于关联空间、光滑离散函数等概念定义灰导数与灰微分方程，进而用离散数据列建立微分方程形式的动态模型，即灰色模型是利用离散随机数经过生成变为随机性被显著削弱而且较有规律的生成数，建立起的微分方程形式的模型，这样便于对其变化过程进行研究和描述。

- **G表示grey（灰色），M表示model（模型）**

- 设 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始数列，其1次累加生成数列为

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

- 其中

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),k=1,2,\cdots,n,$$

- 定义$x^{(1)}$的灰导数为

$$d(k)=x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1).$$

令 $z^{(1)}$ 为数列 $x^{(1)}$的邻值生成数列，即

$$z^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k)+(1-\alpha)x^{(1)}(k-1),$$

于是定义GM（1，1）的灰微分方程模型为

$$d(k)+az^{(1)}(k)=b,$$

即或 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b,$ **(1)**

在式（1）中, $x^{(0)}(k)$ **称为灰导数，a称为发展系数,** $z^{(1)}(k)$ **称为白化背景值，b称为灰作用量。**

将时刻表 $k=2,3,\cdots,n$ **代入（1）式有**

$$\begin{cases} x^{(0)}(2)+az^{(1)}(2)=b, \\ x^{(0)}(3)+az^{(1)}(3)=b, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(0)}(n)+az^{(1)}(n)=b, \end{cases}$$

引入矩阵向量记号：

$$Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \qquad u=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

于是GM（1，1）模型可表示为 $Y=\mathbf{B}u.$

现在问题归结为求a,b在值。用一元线性回归，即最小二乘法求它们的估计值为

$$\hat{u}=\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{bmatrix}=(B^T B)^{-1}B^T Y.$$

注：实际上回归分析中求估计值是用软件计算的，有标准程序求解，如matlab等。

GM（1，1）的白化型

对于GM（1，1）的灰微分方程（1），如果将灰导数 $x^{(0)}(k)$ 的时刻 $k=2,3,\cdots,n$ 视为连续变量t，则 $x^{(1)}$ 视为时间t函数 $x^{(1)}(t)$,于是 $x^{(0)}(k)$ 对应于导数量级 $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}$ ，白化背景值 $z^{(1)}(k)$ 对应于导数 $x^{(1)}(t)$ 于是GM（1，1）的灰微分方程对应于的白微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=b, \qquad (2)$$

1.数据的检验与处理

为了保证GM（1，1）建模方法的可行性，需要对已知数据做必要的检验处理。

设原始数据列为了 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ ，计算数列的级比:

$$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},k=2,3,\cdots,n.$$

如果所有的级比都落在可容覆盖区间 $X=(e^{\frac{-2}{n+1}},e^{\frac{2}{n+1}})$ 内，则数据列 $x^{(0)}$ 可以建立GM（1，1）模型且可以进行灰色预测。否则，对数据做适当的变换处理，如平移变换：

取C使得数据列

$$y^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+c,k=1,2,\cdots,n,$$

的级比都落在可容覆盖内。

2. 建立GM（1，1）模型

不妨设 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 满足上面的要求，以它为数据列建立GM（1，1）模型

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b,$$

用回归分析求得a, b的估计值，于是相应的白化模型为

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=b,$$

解为 $$x^{(1)}(t)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}.$$

于是得到预测值

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a},k=1,2,\cdots,n-1,$$

从而相应地得到预测值：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k),k=1,2,\cdots,n-1,$$

3. 检验预测值

（1）残差检验：计算相对残差

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},k=1,2,\cdots,n,$$

如果对所有的 $|\varepsilon(k)|<0.1$，则认为达到较高的要求：否则，若对所有的$|\varepsilon(k)|<0.2$，则认为达到一般要求。

（2）级比偏差值检验：计算

$$\rho(k)=1-\frac{1-0.5a}{1+0.5a}\lambda(k),$$

如果对所有的 $|\rho(k)|<0.1$ ，则认为达到较高的要求；否则

若对所有的 $|\rho(k)|<0.2$，则认为达到一般要求。

灰色预测模型——2003A-SARS传播问题 模型的分析

- 根据所掌握的历史统计数据可以看出，在正常情况下，全年的平均值较好地反映了相关指标的变化规律，这样可以把预测评估分成两部分：
- (i)利用灰色理论建立灰微分方程模型，由1997~2002年的平均值预测2003年平均值；
- (ii)通过历史数据计算每个月的指标值与全年总值的关系，从而可预测出正常情况下2003年每个月的指标值，再与实际值比较可以估算出SARS疫情实际造成的影响.

模型假设

- 给出下面两条假设:
- (1)假设该市的统计数据都是可靠准确的;
- (2)假设该市在SARS疫情流行期间和结束之后，数据的变化只与SARS疫情的影响有关，不考虑其他随机因素的影响.

建立灰色预测模型GM(1,1)

- 由已知数据，对于1997~2002年某项指标记为矩阵 $A=(a_{ij})_{6\times 12}$ 计算每年的年平均值，记为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(6))$
- 并求级比 $\sigma(i)=x^{(0)}(i-1)/x^{(0)}(i)\in(0.7515,1.3307)(i=2,3,\cdots,6)$
- 对 $x^{(0)}$ 作一次累加，则
- $x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1),x^{(1)}(i)=\sum_{k=1}^{i}x^{(0)}(k)(i=2,3,\cdots,6),$
- $$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(6))$$
- 取 $x^{(1)}$ 的加权均值，则

$$z^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k)+(1-\alpha)x^{(1)}(k-1)(k=2,3,\cdots,6),\alpha$$

为确定参数 ,于是GM(1,1)的白化微分方程模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b,$$

其中a是发展灰度,b是内生控制灰度.

- 由于$x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)=x^{(0)}(k)$，取$x^{(0)}(k)$ 为灰导数， 为$z^{(1)}(k)$ 背景值，则建立灰微分方程为:
- $$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(k=2,3,\cdots,6)$$

或 $$x^{(0)}(k)=-az^{(1)}(k)+b(k=2,3,\cdots,6)$$

- 其矩阵形式为 $Y^{(0)}=B\cdot(a,b)^T$，
- 其中

$$Y^{(0)}=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(6))^T,B=\begin{pmatrix}-z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(6)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T$$

用最小二乘法求得参数的估计值为

$$(\hat{a},\hat{b})^T=(B^T\cdot B)^{-1}\cdot B^T\cdot Y^{(0)}.$$

则灰微分方程模型(4)的解为 $\hat{x}^{(1)}(t+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})\cdot e^{-at}+\frac{b}{a},$

则 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})\cdot(e^{-ak}-e^{-a(k-1)})$

由(7)式可以得到2003年的平均值为 $\overline{x}$ **，则预测2003年的总值为** $X=12\cdot\overline{x}.$ **根据历史数据，可以统计计算出2003年第i个月的指标值占全年总值的比例为** u_i **，即**

$$u_i=\sum_{j=1}^{6}a_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,12),$$

则 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_{12}),$ **于是可得2003年每一个月的指标值为Y=X ·u.**

模型的求解

(i)商品零售额

- 由数据表1，计算可得每年月平均值、一次累加值分别为

$x^{(0)}$=(87.6167，98.5000，108.4750，118.4167，132.8083，145.4083)，

$x^{(1)}$=(87.6167，186.1167，294.5917，413.0083，545.8167，691.2250)．

- 显然 $x^{(0)}$ 的所有级比都在可行域内．经检验，在这里取参数 $\alpha=0.4$ 比较合适， 则有 $z^{(1)}=$ (127.0167，229.5067，341.9583，466.1317，603.9800)．

（i）商品零售额

- 由最小二乘法求得a=-0.0993，b=85.5985．可得2003年的月平均值为

  $\overline{x}$ =162.8826亿元；年总值为 $X = 12 \cdot \overline{x}.$

=1954.6亿元． 由(8)式得每月的比例为

u=(0.0794，0.0807，0.0749，0.0786，0.0819， 0.0818，0.0845，0.0838，0.0872，0.0886， 0.0866，0.0920)

- 故2003年1—12月的预测值为
- Y=u•X =(155.2，157.8，146.4，153.6，160.1， 159.9，165.2，163.8，17o.5，173.2， 169.3，179.9)(亿元)

⑩ 将预测值与实际统计值进行比较如下表所示.

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
预测值	155.2	157.8	146.4	153.6	160.1	159.9	165.2	163.8	170.5	173.2	169.3	179.9
实际值	163.2	159.7	158.4	145.2	124.0	144.1	157.0	162.6	171.8	180.7	173.5	176.5

```
clc,clear
han1=[83.0 79.8 78.1 85.1 86.6 88.2 90.3 86.7 93.3 92.5 90.9 96.9
101.7 85.1 87.8 91.6 93.4 94.5 97.4 99.5 104.2 102.3 101.0 123.5
92.2 114.0 93.3 101.0 103.5 105.2 109.5 109.2 109.6 111.2 121.7 131.3
105.0 125.7 106.6 116.0 117.6 118.0 121.7 118.7 120.2 127.8 121.8 121.9
139.3 129.5 122.5 124.5 135.7 130.8 138.7 133.7 136.8 138.9 129.6 133.7
137.5 135.3 133.0 133.4 142.8 141.6 142.9 147.3 159.6 162.1 153.5 155.9
163.2 159.7 158.4 145.2 124.0 144.1 157.0 162.6 171.8 180.7 173.5 176.5];
han1(end,:)=[]; %2003年值赋空; m=size(han1,2); %han1列数
x0=mean(han1,2);%97-2002年平均值
x1=cumsum(x0);%累加生成数列
alpha=0.4;n=length(x0);
z1=alpha*x1(2:n)+(1-alpha)*x1(1:n-1)
Y=x0(2:n);B=[-z1,ones(n-1,1)];
ab=B\Y
k=6;
x7hat=(x0(1)-ab(2)/ab(1))*(exp(-ab(1)*k)-exp(-ab(1)*(k-1)))
z=m*x7hat
u=sum(han1)/sum(sum(han1))
v=z*u
```

模型的结果分析

- **根据该市的统计报告显示，2003年4、5、6三个月的实际商品零售额分别为145.2，124、144.1亿元．在这之前，根据统计部门的估计4、5、6三个月份SARS疫情对该市的商品零售业的影响最为严重，这三个月估计大约损失62亿元左右．从我们的模型预测结果来计算，4、5、6三个月的损失为60.3亿元，这个数据基本与专家的估算值相符，8月份基本恢复正常，这也说明了模型的正确性和可靠性．**
- **该模型虽是就某经济指标的发展规律进行评估预测而建立的，但类似的也适用于其他方面的一些数据规律的评估预测问题，即该模型具有很广泛的应用性．**

- **对于综合服务业中的部分行业影响较大，如航空交通运输、宾馆餐饮等，但有些行业影响不大，如电信、通讯等，总平均来看，影响还不算太大，5、6、7、8四个月大约损失70亿元.**
- **从预测结果可以看出，虽然下半年没有发生疫情，但人们一直担心SARS会卷土重来，所以，对这些行业还是有一定的影响，即SARS影响的延续性的作用.**

谢 谢！