Esercizi svolti di Progettazione di algoritmi
Facoltà di Ingegneria dell'informazione, informatica e statistica
Dipartimento di informatica
Anno Accademico 2022-2023

Esercitazione 5

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Es 1. Mostrare che un albero di copertura minimo rimane minimo se si incrementa il peso di tutti gli archi di una costante

Testo

Sia G = (V,E) un grafo non orientato connesso e con pesi sugli archi. Sia T un minimo albero di copertura per G.
Provare che T è ancora un minimo albero di copertura anche per il grafo che si ottiene da G incrementando di una stessa costante c il peso degli archi.

Es 1. Mostrare che un albero di copertura minimo rimane minimo se si incrementa il peso di tutti gli archi di una costante

Soluzione

Tutti gli alberi di copertura hanno esattamente n-1 archi. Una volta che considero una funzione peso $w'(e)=w(e)+c$, avrò che per ogni albero di copertura $w'(T) = w(T)+(n-1)c$. Da ciò discende subito che $w(T) < w(T'')$ implica che $w'(T')< w'(T'')$.
Questa situazione è abbastanza comune e spesso la cardinalità delle soluzioni ammissibili tutte uguali è una delle condizioni che rendono applicabili algoritmi greedy come quelli che trovano i minimi alberi di copertura.

Es. 2. Un arco di peso minimo appartiene sempre a un albero di copertura minimo

Testo

Sia G = (V,E) un grafo non orientato connesso e con pesi sugli archi. Sia T un minimo albero di copertura per G.

Provare che T deve contenere un arco di peso minimo.

Es. 2. Un arco di peso minimo appartiene sempre a un albero di copertura minimo

Soluzione

Supponiamo per assurdo esista un arco di peso minimo (u, v) in G, non scelto nell'albero minimo di copertura T di G.
Consideriamo un qualsiasi taglio $(S, V \setminus S)$ di G, con $u \in S$ e $v \notin S$. Siccome l'albero è connesso, c'è un arco (x, y) che attraversa il taglio e per ipotesi w(x, y) > w(u, v). Rimuovendo (x, y) da T e aggiungendo (u, v) ottengo un albero di supporto T', tale che w(T') < w(T).
Ovviamente si poteva applicare il Teorema dell'arco leggero.

Es. 3. Se G ha tutti i pesi distinti, allora l'albero minimo di copertura è unico

Testo

Sia G = (V,E) un grafo non orientato connesso e con pesi sugli archi. Sia T un minimo albero di copertura per G.
Provare che qualora i pesi di G siano tutti distinti, allora T è l’unico minimo albero di copertura. Mostrare che la condizione sul fatto che i pesi siano tutti distinti non è necessaria per l’unicità del minimo albero di copertura.

Es. 3. Se G ha tutti i pesi distinti, allora l'albero minimo di copertura è unico

Soluzione

Possiamo applicare il ragionamento precedente iterandolo su tutti gli archi (e quindi i tagli “attraversati”).
Supponiamo che T non sia l’unico albero di copertura e sia (u, v) un arco in T ma non in un altro albero T’. Consideriamo un taglio $(S, V\setminus S)$ di G, con $u \in S$ e $v \notin S$ e sia (u’, v’) l’arco in T’ che attraversa il taglio. Ma seguendo il ragionamento precedente w(u, v) è minimo tra tutti i pesi degli archi che attraversano il taglio $(S, V\setminus S)$ e non sono in T (attenzione!) altrimenti costruire un albero T’’ tale che w(T’’) < w(T)=w(T’).
Siccome gli archi hanno tutti pesi distinti, (u, v) è l’unico arco che realizza il minimo su ogni taglio che attraversa. Quindi tale arco deve necessariamente stare nell’albero di copertura minimo T. Essendo questo ragionamento vero per ogni arco, T è necessariamente l’unico albero di copertura di G.

Es. 4. L'albero di cammini minimi radicati in s non necessariamente è un albero minimo di copertura

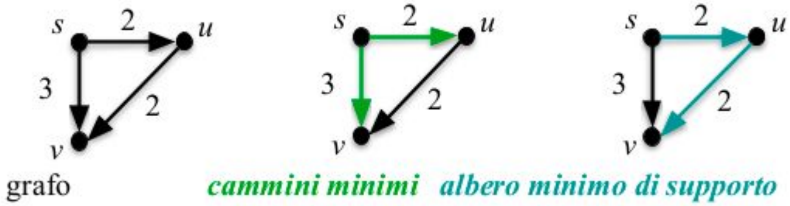
Testo

1. Sia G un grafo non diretto, connesso e pesato. Dimostrare o confutare che un albero dei cammini minimi di G `e anche un albero di copertura di peso minimo.
2. Sia G un grafo non diretto, connesso e pesato dove i pesi sono tutti diversi tra loro. Sia T un minimo albero di copertura di G, sia s un nodo e Ts l’albero dei cammini minimi da s verso tutti gli altri nodi di G. Dimostrare oppure fornire un controesempio che Ts e T condividono almeno un arco.

Es. 4. L'albero di cammini minimi radicati in s non necessariamente è un albero minimo di copertura

Soluzione

1. È facile vedere che questo non è vero. Ancora una volta basta un "triangolo" per trovare un controesempio.



2. Viceversa il DAG dei cammini minimi ha sempre un arco in comune con l'albero minimo di copertura: è sufficiente applicare il Teorema dell'arco leggero sul taglio ({s}, V∖{s}) [in entrambi i casi si sceglie l'arco di peso minimo]. Oppure applicare l'algoritmo di Prim partendo dalla sorgente s: sceglie lo stesso arco di Dijkstra [e concludere grazie all'unicità dell'albero minimo nel caso di pesi diversi].