

Esercizi svolti di Progettazione di algoritmi
Facoltà di Ingegneria dell'informazione, informatica e statistica
Dipartimento di informatica
Anno Accademico 2022-2023

Esercitazione 3



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Es. 1. Classe di grafi per cui la DFS e' uguale a BFS

Testo

Che caratteristiche deve avere un grafo connesso perche' le visite DFS e BFS del grafo producano alberi di visita uguali? Motivare la risposta.



Es. 1. Classe di grafi per cui la DFS e' uguale a BFS

Soluzione

Le visite DFS e BFS producono alberi di visita uguali se e solo se ogni componente connessa del grafo è un albero. In questo modo, prendendo un qualsiasi nodo come radice, l'albero di visita risultante sarà lo stesso sia se si sta effettuando una DFS che una BFS.



Es. 2. Dare un grafo e un albero di cammini minimi che non è il risultato di nessuna BFS

Testo

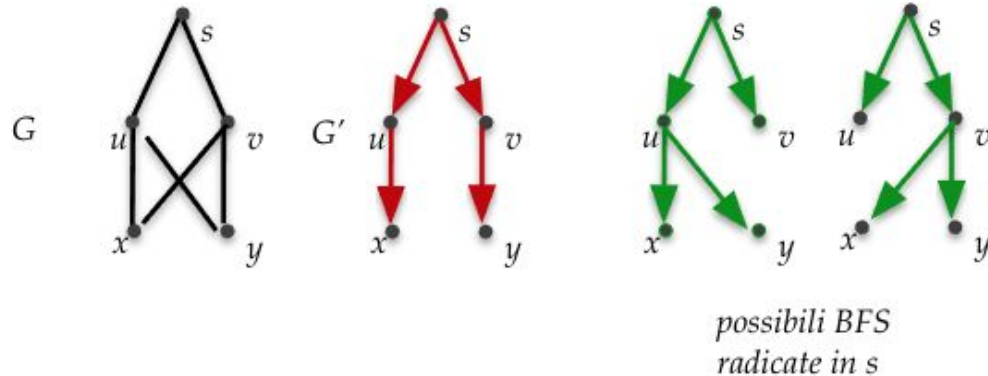
Dare un grafo e un albero di cammini minimi che non è il risultato di nessuna BFS.



Es. 2. Dare un grafo e un albero di cammini minimi che non è il risultato di nessuna BFS

Soluzione

Preso in esempio il grafo G , in verde sono disegnate le possibili BFS radicate in s , mentre in rosso (G') e' disegnato un albero di cammini minimi, radicato in s , non ottenibile da nessuna BFS radicata in s .





Es. 3. Trovare i nodi equidistanti tra due nodi dati

Testo

Descrivere un algoritmo che, dato un grafo G non diretto e connesso e due suoi nodi u e v , in tempo $O(n + m)$ trova i nodi che hanno la stessa distanza da u e v .



Es. 3. Trovare i nodi equidistanti tra due nodi dati

Idea

L'idea principale è di utilizzare due BFS, che partono rispettivamente, dal primo e dal secondo nodo dato, calcolando il vettore delle distanze dalla radice della visita. Infine i nodi equidistanti dai due nodi dati avranno la stessa distanza dalla radice in entrambi i vettori delle distanze.

Un'altra idea meno performante sarebbe quella di effettuare una BFS radicata su ogni possibile nodo ad esclusione (o meno) di u e v . E quindi per ogni BFS controllare se u e v hanno la stessa distanza rispetto al nodo radice della BFS. Se così fosse, la radice della BFS è un nodo equidistante da u e v . Costo $O(n(n+m))$.

Riportiamo la soluzione più efficiente.



Soluzione

```
def find_equidistant_nodes(graph, start_node_1, start_node_2):  
    dist_1 = bfs_dist(start_node_1, graph)  
    dist_2 = bfs_dist(start_node_2, graph)  
    equidistant_nodes = []  
    for node in graph:  
        if dist_1[node] == dist_2[node]:  
            equidistant_nodes.append(node)  
    return equidistant_nodes
```

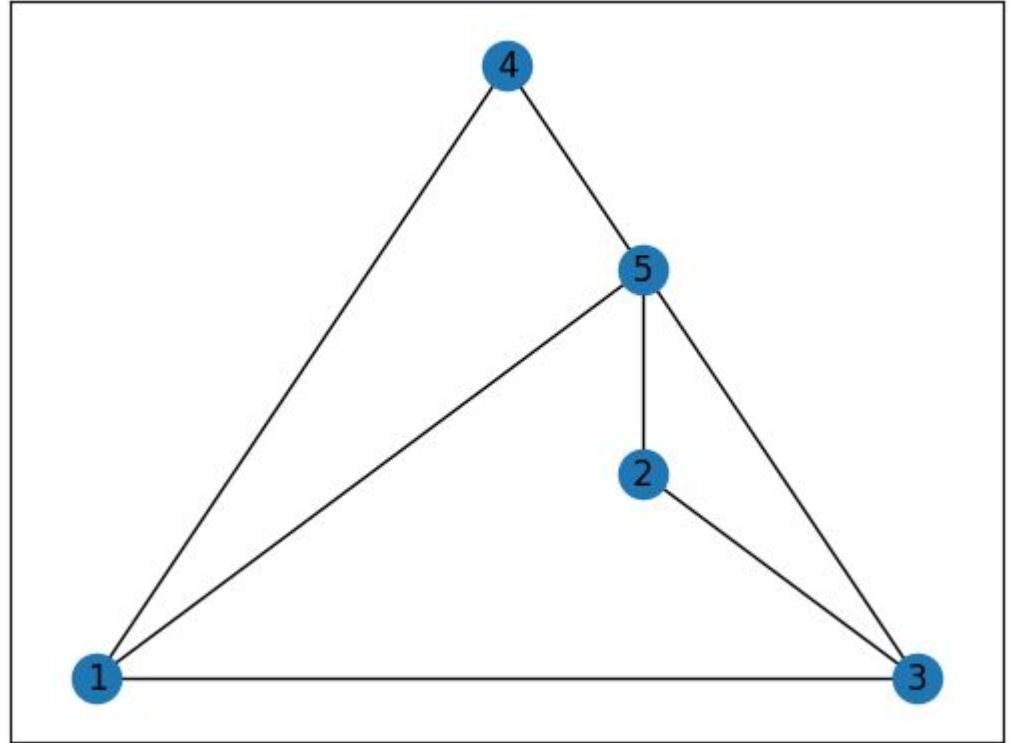
```
def bfs_dist(root, graph):  
    queue = [root]  
    dist = {root : 0}  
    while queue:  
        node = queue.pop(0)  
        for neighbor in graph[node]:  
            if neighbor not in dist:  
                queue.append(neighbor)  
                dist[neighbor] = dist[node] + 1  
    return dist
```




Es. 3. Trovare i nodi equidistanti tra due nodi dati

Esecuzione

```
graph = {  
  1 : [3, 4, 5],  
  2 : [3, 5],  
  3 : [1, 2, 5],  
  4 : [1, 5],  
  5 : [1, 2, 3, 4]  
}  
drawGraph(graph)  
find_equidistant_nodes(graph, 1, 4) -> [2, 5]
```





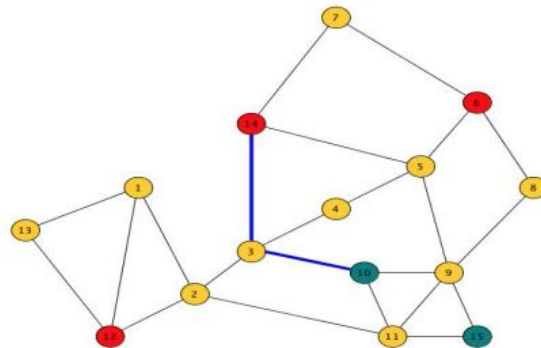
Es. 4. Distanza tra due insiemi di nodi

Testo

Dato un grafo G e due sottoinsiemi V_1 e V_2 dei suoi vertici si definisce distanza tra V_1 e V_2 la distanza minima per andare da un nodo in V_1 ad un nodo in V_2 . Nel caso V_1 e V_2 non sono disgiunti allora il valore 0.

Descrivere un algoritmo che, dato un grafo G e i due sottoinsiemi dei vertici V_1 e V_2 calcola la loro distanza. L'algoritmo deve avere complessità $O(n + m)$.

Ad esempio per il grafo G in figura, dove i nodi dell'insieme A sono in verde mentre i nodi dell'insieme B sono in rosso, la distanza tra i due insiemi è 2 come evidenziato dal cammino in blu.





Idea

E' possibile inserire nello stack, all'inizio della BFS, tutti i nodi di V_1 interpretando la loro distanza a 0. Così facendo, proseguendo con la BFS, avremo a distanza 1 tutti i nodi che distano 1 da un qualsiasi nodo in V_1 , e così via per tutte le altre distanze. Quindi nel nostro caso basta fermarci non appena troviamo un nodo di V_2 durante questa nostra BFS.



Soluzione

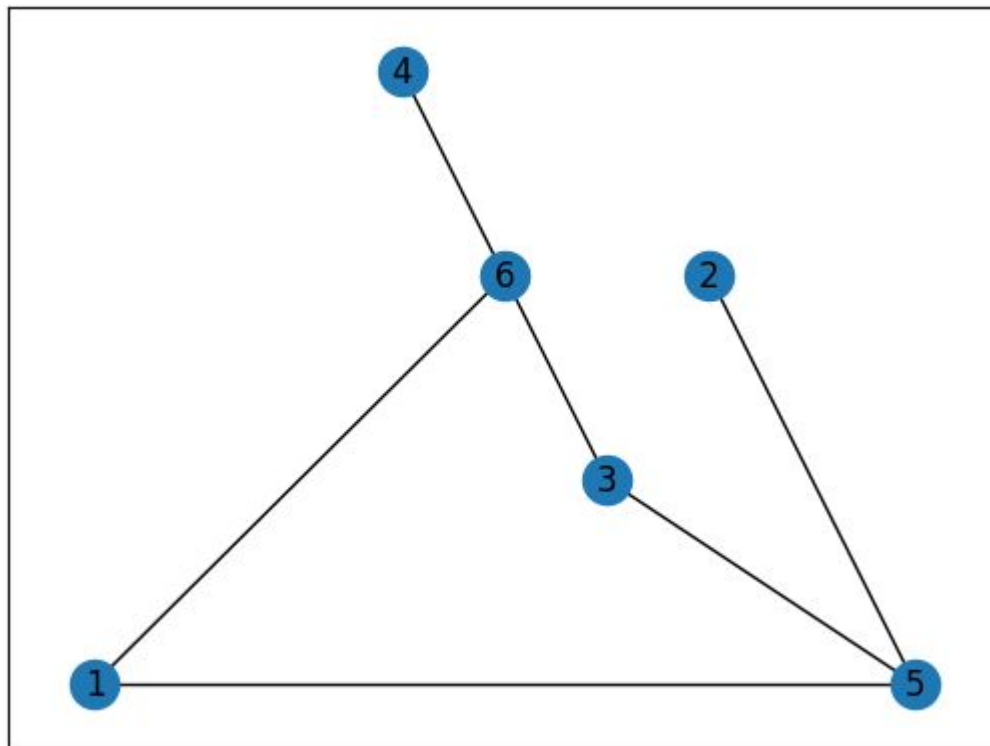
```
def distV1V2(graph, V1, V2):  
    D = {node : -1 for node in graph}  
    for i in range(len(V1)):  
        if i in V1:  
            D[i] = 0  
    Q = [node for node in graph if node in V1]  
    while Q != []:  
        u = Q.pop(0)  
        if u in V2: return D[u]  
        for v in graph[u]:  
            if D[v] == -1:  
                D[v] = D[u]+1  
                Q.append(v)  
    return 0
```



Es. 4. Distanza tra due insiemi di nodi

Esecuzione

```
graph = {  
  1 : [5, 6],  
  2 : [5],  
  3 : [5, 6],  
  4 : [6],  
  5 : [1, 2, 3],  
  6 : [1, 3, 4]  
}  
drawGraph(graph)  
V1 = {1, 2}  
V2 = {3, 4}  
distV1V2(graph, V1, V2) -> 2
```





Es. 5. Trovare le distanze tra tutti i nodi e la radice in un albero rappresentato come vettore dei padri

Testo

Dato un albero di n nodi rappresentato tramite il vettore dei padri P (per convenzione il padre del nodo radice è il nodo stesso), dare lo pseudocodice di un algoritmo che in tempo $O(n)$ calcola la distanza di ogni nodo dalla radice.



Es. 5. Trovare le distanze tra tutti i nodi e la radice in un albero rappresentato come vettore dei padri

Soluzione

```
def dist(P, nodo, Dist):  
    if Dist[nodo] == -1:  
        if P[nodo] == nodo:  
            Dist[nodo] = 0  
        else:  
            Dist[nodo] = dist(P, P[nodo], Dist) + 1  
    return Dist[nodo]
```

```
def distanze(P, G):  
    Dist = {nodo : -1 for nodo in G}  
    for nodo in G:  
        if Dist[nodo] == -1:  
            Dist[nodo] = dist(P, nodo, Dist)  
    return Dist
```

Si noti che la funzione dist evita di ricalcolare le distanze già calcolate (perché queste ultime sono immagazzinate in Dist) e quindi tutti gli archi dell'albero si percorrono una sola volta, cosa che giustifica il fatto che questo algoritmo sia lineare

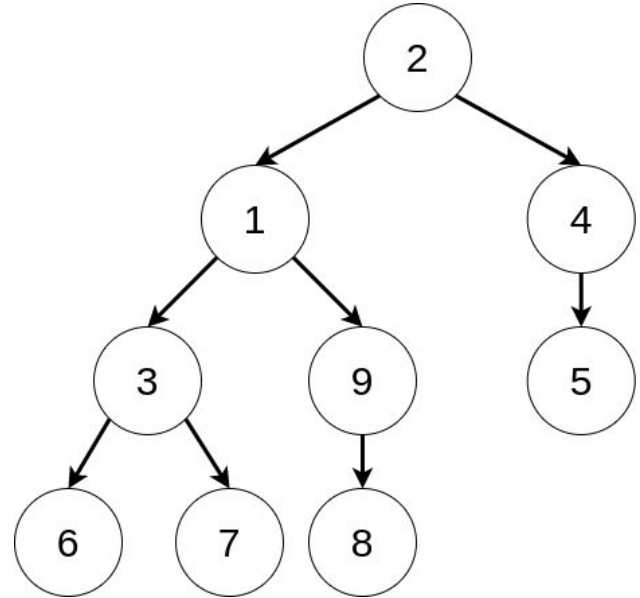


Es. 5. Trovare le distanze tra tutti i nodi e la radice in un albero rappresentato come vettore dei padri

Esecuzione

$P = [2, 2, 1, 2, 4, 3, 3, 9, 1]$

$\text{distanze}(P) \rightarrow \{1: 1, 2: 0, 3: 2, 4: 1, 5: 2, 6: 3, 7: 3, 8: 3, 9: 2\}$





Es. 6. Trasformare un albero da vettore dei padri in liste di adiacenza

Testo

Scrivere un algoritmo che, dato un grafo in forma di il vettore dei padri, ritorna la rappresentazione dello stesso grafo in forma di liste di adiacenza.



Es. 6. Trasformare un albero da vettore dei padri in liste di adiacenza

Soluzione

```
def to_adj_list(P):  
    G = {nodo : [] for nodo in range(len(P))}  
    for nodo in range(len(P)):  
        if P[nodo] != nodo:  
            G[P[nodo]].append(nodo)  
    return G
```



Es. 6. Trasformare un albero da vettore dei padri in liste di adiacenza

Esecuzione

$P = [2, 2, 1, 2, 4, 3, 3, 9, 1]$

$\text{to_adj_list}(P) \rightarrow \{$

- 1: [3, 9],
- 2: [1, 4],
- 3: [6, 7],
- 4: [5],
- 5: [],
- 6: [],
- 7: [],
- 8: [],
- 9: [8]

$\}$

