Esercitazione5

June 11, 2023

1 Esercitazione 5

1.1 Es 1. Mostrare che un albero di copertura minimo rimane minimo se si incrementa il peso di tutti gli archi di una costante

Testo

Sia G = (V,E) un grafo non orientato connesso e con pesi sugli archi. Sia T un minimo albero di copertura per G.
Provare che T è ancora un minimo albero di copertura anche per il grafo che si ottiene da G incrementando di una stessa costante c il peso degli archi.

Soluzione

Tutti gli alberi di copertura hanno esattamente n-1 archi. Una volta che considero una funzione peso w'(e)=w(e)+c, avrò che per ogni albero di copertura w'(T) = w(T)+(n-1)c. Da ciò discende subito che w(T) < w(T") implica che w'(T')< w'(T").
Questa situazione è abbastanza comune e spesso la cardinalità delle soluzioni ammissibili tutte uguali è una delle condizioni che rendono applicabili algoritmi greedy come quelli che trovano i minimi alberi di copertura.

2 Es 2. Un arco di peso minimo appartiene sempre a un albero di copertura minimo

Testo

Sia G = (V,E) un grafo non orientato connesso e con pesi sugli archi. Sia T un minimo albero di copertura per G.
Provare che T deve contenere un arco di peso minimo.

Soluzione

Supponiamo per assurdo esista un arco di peso minimo (u, v) in G, non scelto nell'albero minimo di copertura T di G.
Consideriamo un qualsiasi taglio (S, V S) di G, con u   S e v   S. Siccome l'albero è connesso, c'è un arco (x, y) che attraversa il taglio e per ipotesi w(x, y) > w(u, v). Rimuovendo (x, y) da T e aggiungendo (u, v) ottengo un albero di supporto T', tale che w(T') < w(T).
Ovviamente si poteva applicare il Teorema dell'arco leggero.

3 Es 3. Se G ha tutti i pesi distinti, allora l'albero minimo di copertura è unico

Testo

Sia G = (V,E) un grafo non orientato connesso e con pesi sugli archi. Sia T un minimo albero di copertura per G.
Provare che qualora i pesi di G siano tutti distinti, allora T è l'unico minimo albero di copertura.
Mostrare che la condizione sul fatto che i pesi siano tutti distinti non è necessaria per l'unicità del minimo albero di copertura.

Soluzione

Possiamo applicare il ragionamento precedente iterandolo su tutti gli archi (e quindi i tagli "attraversati").
Supponiamo T non sia l'unico albero di copertura e sia (u, v) un arco in T ma non in un altro albero T'. Consideriamo un taglio (S, V S) di G, con u S e v S e sia (u', v') l'arco in T' che attraversa il taglio. Ma seguendo il ragionamento precedente w(u, v) è minimo tra tutti i pesi degli archi che attraversano il taglio (S, V S) e non sono in T (attenzione!) altrimenti costruirei un albero T' ' tale che w(T' ') < w(T)=w(T').
Siccome gli archi hanno tutti pesi distinti, (u, v) è l'unico arco che realizza il minimo su ogni taglio che attraversa. Quindi tale arco deve necessariamente stare nell'albero di copertura minimo T.
Essendo questo ragionamento vero per ogni arco, T è necessariamente l'unico albero di copertura di G.

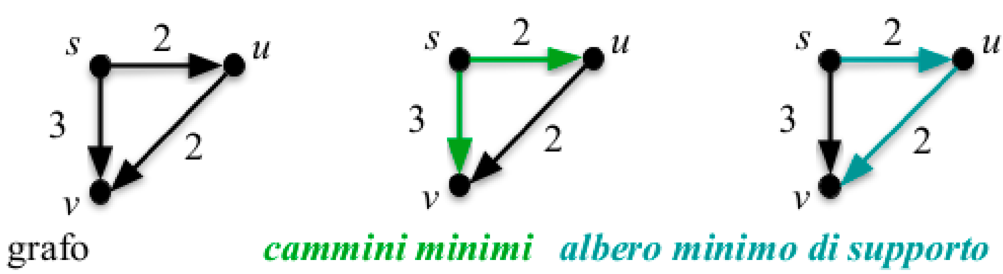
4 Es 4. L'albero di cammini minimi radicati in s non necessariamente è un albero minimo di copertura

Testo

1. Sia G un grafo non diretto, connesso e pesato. Dimostrare o confutare che un albero dei cammini minimi di G 'e anche un albero di copertura di peso minimo.
2. Sia G un grafo non diretto, connesso e pesato dove i pesi sono tutti diversi tra loro. Sia T un minimo albero di copertura di G, sia s un nodo e Ts l'albero dei cammini minimi da s verso tutti gli altri nodi di G. Dimostrare oppure fornire un controesempio che Ts e T condividono almeno un arco.

Soluzione

1. È facile vedere che questo non è vero. Ancora una volta basta un "triangolo" per trovare un controesempio.



2. Viceversa il DAG dei cammini minimi ha sempre un arco in comune con l'albero minimo di copertura: è sufficiente applicare il Teorema dell'arco leggero sul taglio ({s}, V {s}) [in entrambi i casi si sceglie l'arco di peso minimo]. Oppure applicare l'algoritmo di Prim partendo dalla sorgente s: sceglie lo stesso arco di Dijkstra [e concludere grazie all'unicità dell'albero minimo nel caso di pesi diversi].