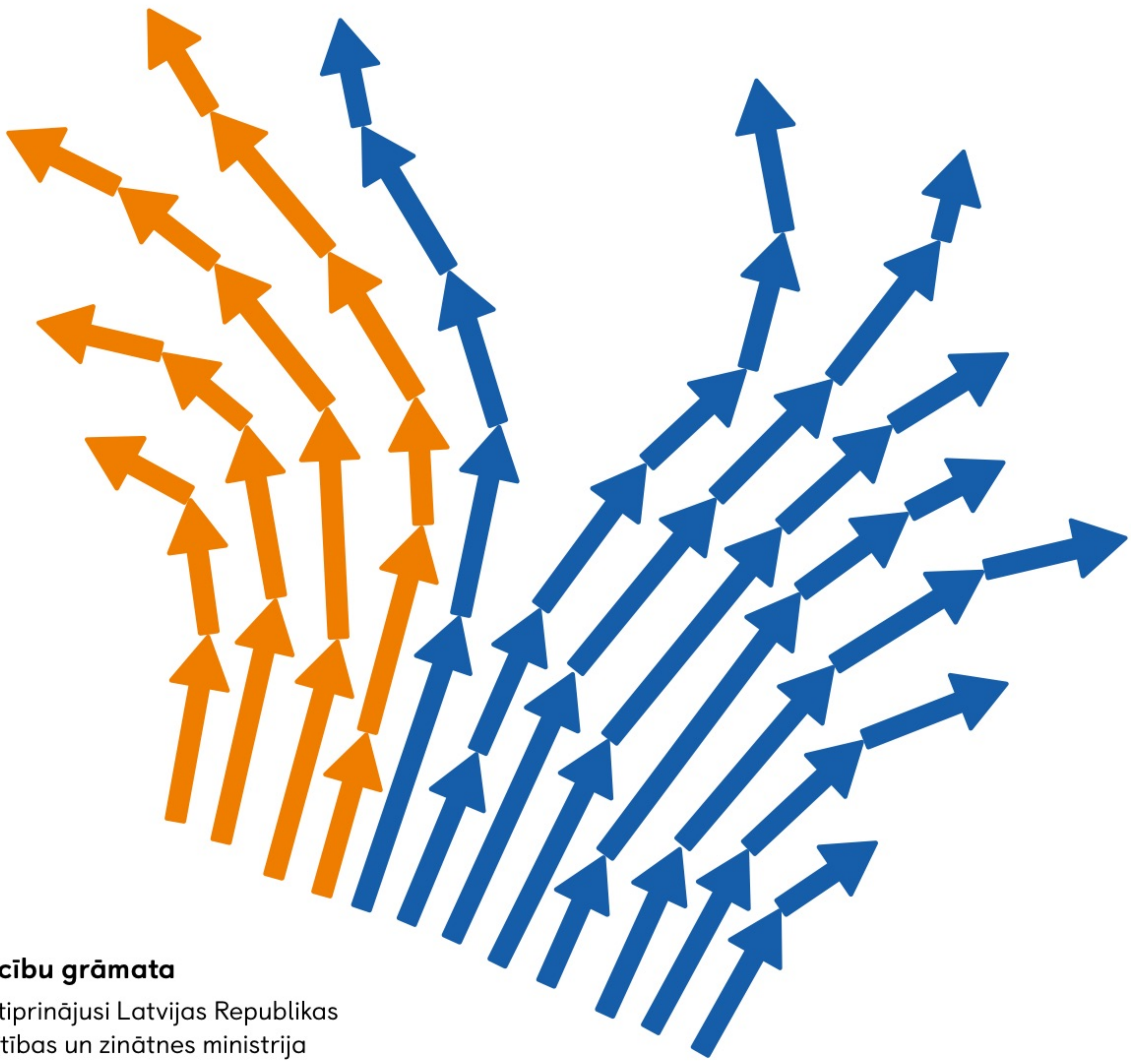
Matemātika vidusskolai

Vektori



Mācību grāmata

Apstiprinājusi Latvijas Republikas
Izglītības un zinātnes ministrija
2023. gadā

Mācību grāmatas autori
Ilze France, Evija Slokenberga, Evija Jaunzeme

Lielvārds

Saturs

No vektoru vēstures

Vektora jēdziens radās, veicot novērojumus, ka dabā ir sastopami tādi lielumi, kuriem ir virziens.
No latīņu valodas: *vector* — tas, kurš nes, ved, pārvadā.

- Pazīstamais holandiešu fiziķis Simons Stevins (1548—1620) ap 1600. g. attēloja fizikālus lielumus ar nogriežņiem, kuriem ir virziens, un atklāja spēku saskaitīšanas paralelograma principu.
- Īru matemātiķis Viljams Rovans Hamiltons (1805—1865) ieviesa vektora jēdzienu.
- Klasiskajā Eiklīda ģeometrijā, kas tiek apgūta skolas kursā, vektorus ieviesa 19. gadsimtā.

Vektori dažādās jomās

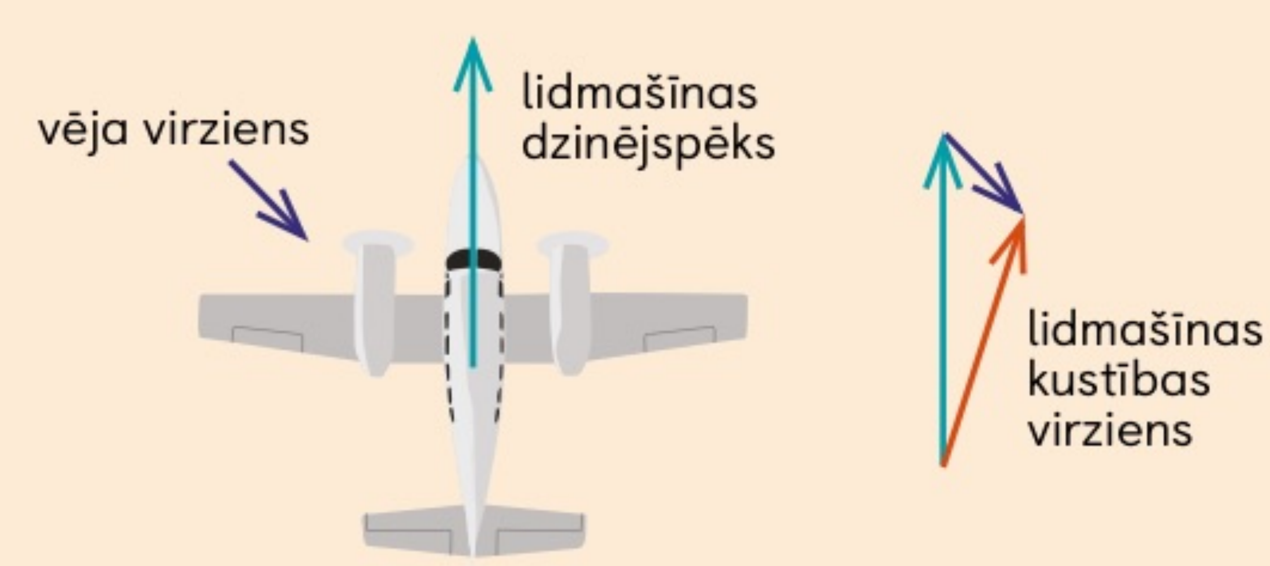
vektors vīriešu dzimtes 1. deklinācijas lietvārds (*tezaurs.lv*)

1. joma: fizika, matemātika — Ģeometrisks lielums, kam piemīt skaitliska vērtība un virziens un ko attēlo ar nogriezni, kuram ir noteikts virziens.

2. joma: bioloģija — Struktūra (vīrusi, fāgi, plazmīdas), ko izmanto gēnu inženierijā svešas izcelsmes gēnu ievadīšanai recipienta šūnā vai genomā.

3. joma: informātika — Virzīts līnijas segments datorgrafikā.

Vektorus fizikā izmanto, lai attēlotu jebkuru lielumu, kuram ir skaitliska vērtība un virziens, un kas atbilst vektoru pievienošanas noteikumiem.



Datorgrafikas veidi

Datorgrafikā pastāv divi failu tipi: rastrgrafika un vektorgrafika.

Rastrgrafikas faili ir veidoti no pikseļiem — maziem krāsu kvadrātiņiem, kuru liels daudzums var veidot ļoti detalizētus attēlus, piemēram, fotogrāfijas. Jo vairāk pikseļu ir attēlā, jo augstāka ir attēla kvalitāte, un pretēji.

Vektorgrafikas failos attēla veidošanai tiek izmantoti matemātiski vienādojumi, līnijas un līknes ar režģī fiksētiem punktiem. Vektorgrafikas faila matemātiskajās formulās ir ietverta forma, robežas un aizpildīšanas krāsa, lai izveidotu attēlu. Formula pielāgojas jebkuram lielumam, tādēļ vektorgrafiku var palielināt vai samazināt, neietekmējot attēla kvalitāti.


rastrgrafika


vektorgrafika

skalārs lielums
vektoriāls lielums
vektors
vektora modulis
vektora garums
nulles vektors
vienādi vektori
pretēji vektori
vienādi vērsti vektori
pretēji vērsti vektori
kolineāri vektori
vektoru summa
vektoru saskaitīšanas trijstūra likums
vektoru saskaitīšanas paralelograma likums
vairāku vektoru summa
vektoru atņemšana
vektora reizināšana ar skaitli
vektora izteikšana ar dotajiem vektoriem
vektora projekcija uz koordinātu ass
vektora projekcijas aprēķināšana
attālums starp diviem punktiem
nogriežņa viduspunkta koordinātas
vienības vektori
vektora koordinātas
vektora modulis koordinātu formā
vektors telpā
vektora koordinātas telpā
vektora garums telpā
darbības ar vektoriem telpā

Sasniedzamie rezultāti

Es pratīšu ...

... skaidrot un aprēķināt attālumu starp diviem punktiem koordinātu plaknē un lietot sakarības starp nogriežņa galapunktu un viduspunkta koordinātām; 1

... skaidrot, kas ir vektors, noteikt vienādus vai pretēji vērstus vektorus, vienādus vektorus, pretējus vektorus un kolineārus vektorus, ja tie doti ģeometriskā vai koordinātu formā; 2

... izteikt vienu vektoru ar citiem vektoriem; 3

... skaidrot, kas ir vektora projekcijas uz abscisu un ordinātu ass; 4

... skaidrot un noteikt vektora koordinātas plaknē un telpā, atlikt vektorus koordinātu plaknē un telpā; 5

... veikt darbības ar vektoriem ģeometriskā un koordinātu formā, skaidrot tās, un aprēķināt vektora garumu (moduli); 6

... lietot ar vektoriem saistītos jēdzienus un simbolus informācijas un rezultātu nolasīšanai, pierakstīšanai un komentēšanai; 7

... analizēt reālas situācijas, tostarp analizēt kustību; 8

... noteikt figūru veidu, nezināmos lielumus un pamatot figūru īpašības, lietojot vektorus ģeometriskā vai koordinātu formā, izvēloties situācijai atbilstošu attēlošanas veidu; 9

... skaidrot, kā pāriet no viena vektoru attēlošanas veida uz citu, izvērtēt un pamatot attēlojumu atbilstību, izmantojot konkrētus piemērus. 10

Kādā virzienā un cik tālu?

Aplūko karti!

> Raksturo kartē redzamās taisnes tā, lai cits tās varētu pēc tava apraksta uzzīmēt! Ko (garumu, virzienu, savstarpējo novietojumu) tu izmantoji taišņu raksturošanai?

> Kuru debespuses virzienu kartē norāda novilktās taisnes?

> Vai un kā atšķiras tavas atbildes uz uzdotajiem jautājumiem no klasesbiedru atbildēm?

Krists un Dārta dzīvo Aizputē. Viņi filmēšanai izmantoja dronu, kura maksimālais signāla raidīšanas attālums ir 10 km. Drons pacēlās Aizputē un devās 5 km garā lidojumā Kazdangas virzienā. Pēc tam tas pa to pašu lidojuma ceļu atgriezās atpakaļ.

> Kā tu kartē iezīmētu drona pārvietošanos, ja būtisks ir arī tā pārvietošanās virziens?

Vektors un vektora modulis

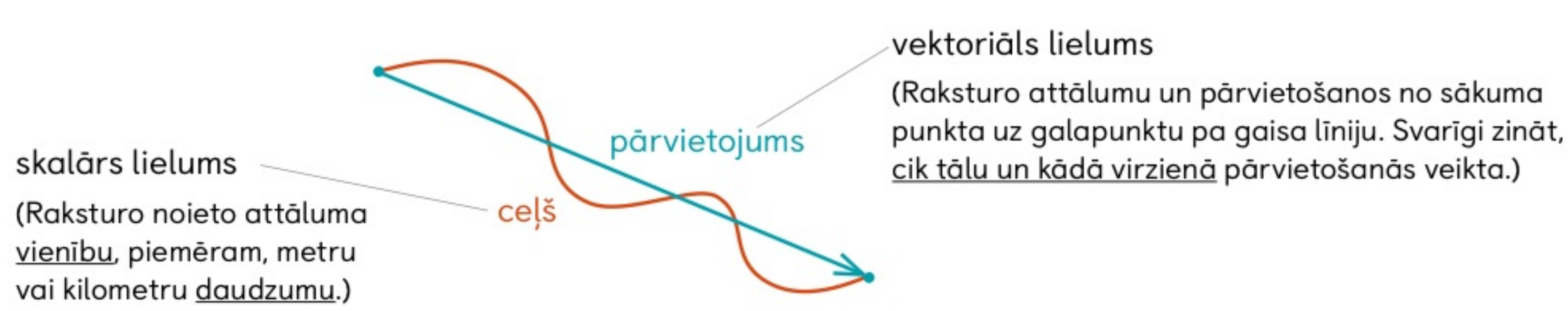
Lai matemātiski raksturotu lielumu, kuram ir ne tikai skaitliskā vērtība, bet arī virziens (piemēram, pārvietojums, spēks) izmanto vektoru.

skalārs lielums | vektoriāls lielums | vektors | vektora modulis | vektora garums | nulles vektors | vienādi vektori | pretēji vektori | vienādi vērsti vektori | pretēji vērsti vektori | kolineāri vektori

Skalāri un vektoriāli lielumi

> Lielumus, kurus nosaka tikai to skaitliskā vērtība, sauc par **skalāriem lielumiem**.

> Lielumus, kurus nosaka gan skaitliskā vērtība, gan vērsums, sauc par **vektoriāliem lielumiem**.



1. PIEMĒRS

Kurā situācijā tiek aplūkots skalārs lielums, kurā — vektoriāls lielums? Paskaidro savu atbildi!

A Evelīna teica, ka suns noskrēja 80 m.

B Armands norādīja, ka suns 80 m skrēja no parka soliņa līdz kokam.

Risinājums

A Evelīnas apgalvojumā norādīts tikai, cik lielu attālumu veica suns, t. i., 80 metrus, bet nav zināms, kur viņš skrēja.

Šo situāciju raksturo tikai skaitlis, tāpēc tiek aplūkots skalārs lielums.

B Armanda apgalvojumā norādīts ne tikai tas, cik lielu attālumu — 80 m — veica suns, bet ir zināms arī suņa skriešanas virziens — no soliņa līdz kokam.

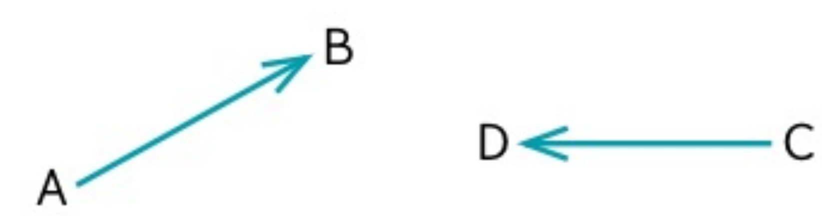
Šo situāciju raksturo gan skaitlis, gan virziens, tāpēc tiek aplūkots vektoriāls lielums.

Vektors

Vektors ir orientēts nogrieznis, kuru raksturo noteikts garums un vērsums.

Vektorus var apzīmēt:

- ar diviem lielajiem burtiem, liekot virs tiem bultiņu, ievērojot, ka pirmais burts atbilst vektora sākumpunktam, bet otrs — tā galapunktam, piemēram, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$;



Lasa: *vektors AB, vektors CD.*

- ar vienu lielo vai mazo burtu, liekot virs tā bultiņu, piemēram, $\vec{F}$, $\vec{a}$.

Lasa: *vektors a, vektors F.*

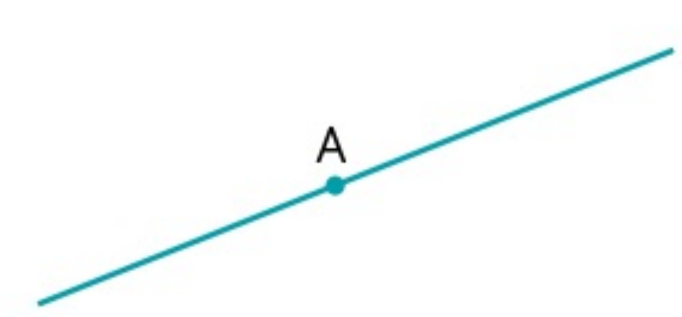
Matemātikā vektorus visbiežāk apzīmē ar vienu mazo burtu vai ar diviem lielajiem burtiem. Dažreiz vektoru pieraksta ar vienu lielo burtu, piemēram, fizikā spēka vektoru apzīmē ar $\vec{F}$. Lai atšķirtu dažādus spēkus, izmanto indeksus, piemēram $\vec{F}_1$.

Vektoru, kura sākumpunkts sakrīt ar galapunktu, sauc par **nulles vektoru** (jeb nullvektoru).

Lasa: *nulles vektors jeb nullvektors.*

Piemēram, punkts A var būt nulles vektors, jo gan sākumpunkts, gan galapunkts ir A. To var pierakstīt arī $\overrightarrow{AA}$.

Zīmējumā nulles vektoram virzienu nenorāda.

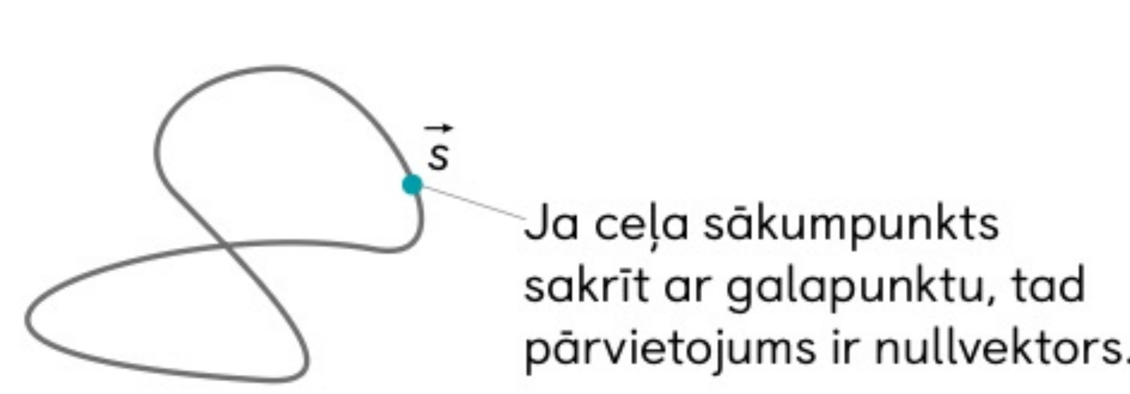


Vektora modulis jeb vektora garums

Vektoram $\vec{a}$ atbilstošā nogriežņa garumu sauc par **vektora moduli** jeb **vektora garumu** un apzīmē ar $|\vec{a}|$.

Piemēram, ja $|\vec{a}| = 5$ cm, tad vektors $\vec{a}$ ir 5 cm garš, ja $|\overrightarrow{AB}| = 10$, tad vektora $\overrightarrow{AB}$ garums ir 10 vienības.

Nulles vektora garums ir vienāds ar 0, piemēram, $|\vec{s}| = 0$.

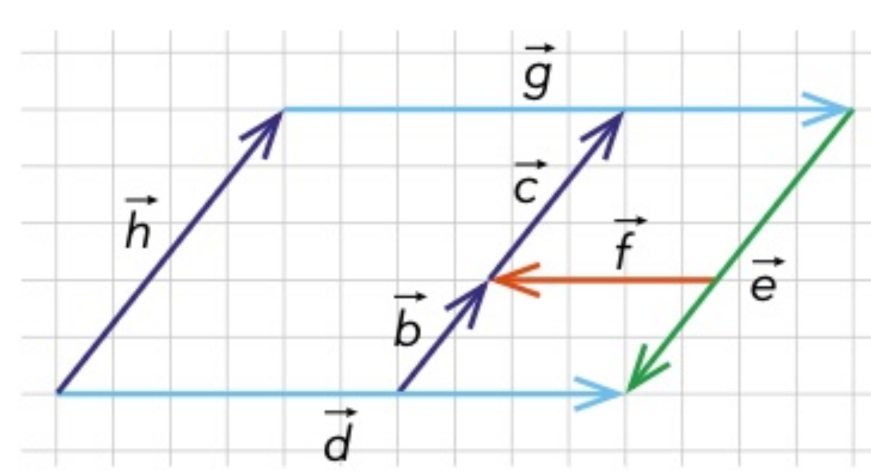


Vienādi vērsti vektori. Pretēji vērsti vektori

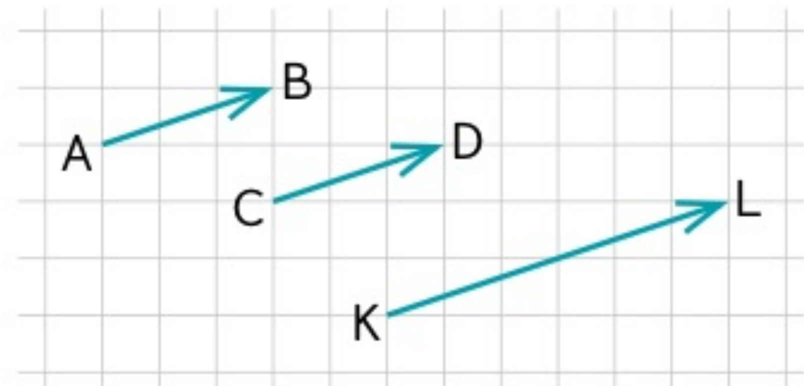
Ja vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ atrodas uz vienas vai uz paralēlām taisnēm un ja stari AB un CD ir vienādi vērsti, tad vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ sauc par **vienādi vērstiem vektoriem**.

Ja stari AB un CD ir pretēji vērsti, tad vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ sauc par **pretēji vērstiem vektoriem**.

Piemēram, paralelogramā attēloti vektori.
Vienādi vērsti vektori ir $\vec{d}$ un $\vec{g}$; $\vec{b}$, $\vec{c}$ un $\vec{h}$.
Pretēji vērsti vektori ir, piemēram, $\vec{c}$ un $\vec{e}$; $\vec{f}$ un $\vec{g}$; $\vec{d}$ un $\vec{f}$.
Savukārt $\vec{b}$ un $\vec{g}$ vai $\vec{c}$ un $\vec{d}$ nav ne vienādi, ne pretēji vērsti vektori.



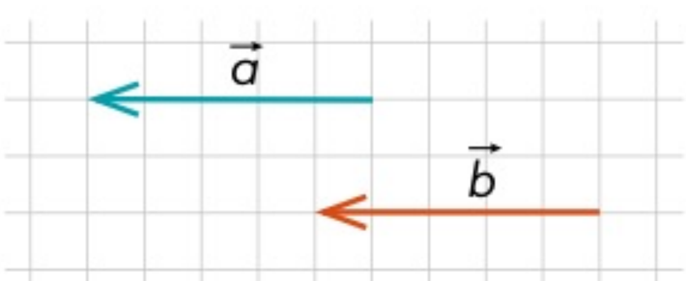
Vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori var būt gan vienāda, gan dažāda garuma.



Piemēram,
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{KL}$ ir vienādi vērsti vektori,
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$,
$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{KL}|$ un $|\overrightarrow{CD}| \neq |\overrightarrow{KL}|$.

Vienādi vektori. Pretēji vektori

Vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kuru garumi un vērsumi ir vienādi, sauc par **vienādiem vektoriem** un pieraksta $\vec{a} = \vec{b}$.



$\vec{a} = \vec{b}$

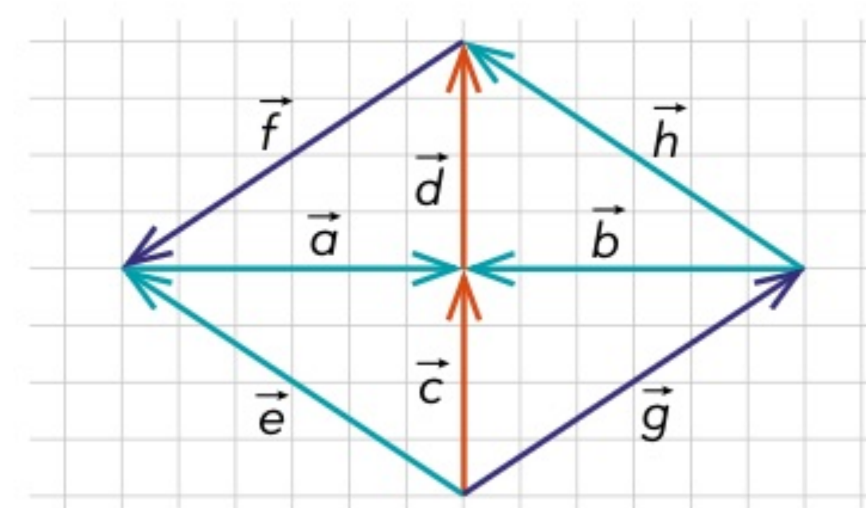
Vektorus $\vec{c}$ un $\vec{d}$, kuru garumi ir vienādi, bet vērsumi pretēji, sauc par **pretējiem vektoriem** un pieraksta $\vec{c} = -\vec{d}$.

$\vec{c} = -\vec{d}$

Vai pieraksts $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ nozīmē, ka vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir vienādi?

Piemēram, rombā attēloti vektori.

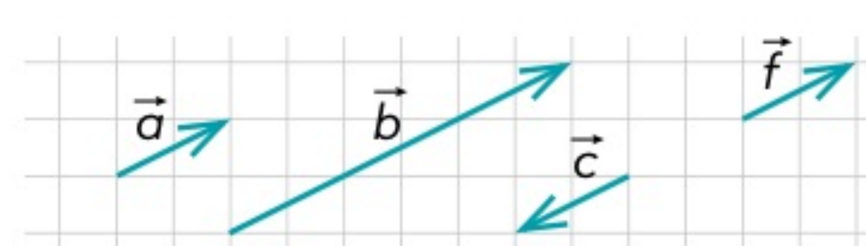
Piemēram, rombā attēloti vektori.
$\vec{c}$ un $\vec{d}$ ir vienādi vektori ($\vec{c} = \vec{d}$), jo to vērsumi ir vienādi, un vienādi ir arī to garumi (kā puse no romba diagonāles).
$\vec{f}$ un $\vec{g}$ ir pretēji vektori ($\vec{f} = -\vec{g}$), jo to garumi ir vienādi, bet vērsumi ir pretēji.



Kā tu noteiksi, kuri vēl vektori rombā ir vienādi, kuri — pretēji?

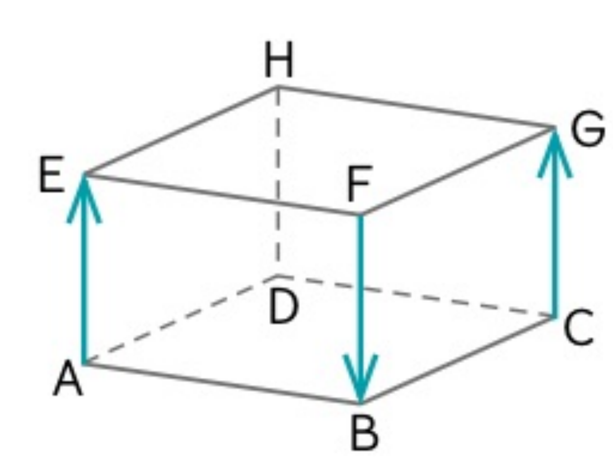
Kolineāri vektori

Divus no nulles atšķirīgus vektorus, kas atrodas uz vienas vai uz paralēlām taisnēm, sauc par **kolineāriem vektoriem**.



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{f}$ — kolineāri vektori

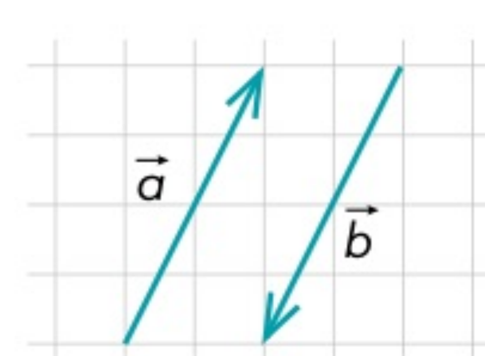
Piemēram, taisnā paralēlskaldnī attēloti vektori.
Kolineāri savā starpā ir $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FB}$ un $\overrightarrow{CG}$.



Vienādi vērsti un pretēji vērsti, kā arī vienādi un pretēji vektori ir kolineāri vektori.

2. PIEMĒRS

Aplūko zīmējumu!
Izvērtē Gusta un Artūra apgalvojumus!



Gusts: $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir vienādi vektori, jo vienādi ir to garumi.

Artūrs: $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri vektori, jo atrodas uz paralēlām taisnēm. Šie vektori ir pretēji vektori, jo tie ir pretēji vērsti vektori un to garumi ir vienādi.

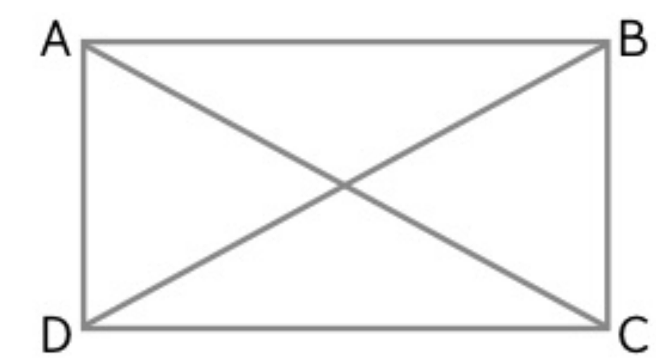
Risinājums

Gusta spriedums būtu patiess nogriežņu gadījumā. Viņš savā spriedumā nav ņēmis vērā vienādu vektoru definīciju, ka vektoriem ir jābūt, pirmkārt, vienāda garuma un, otrkārt, vienādi vērstiem.

Artūra apgalvojumi, pamatojoties uz definīcijām, ir patiesi un pamatoti.

3. PIEMĒRS

Dota shēma, kas, izmantojot vektorus, attēlo pārgājiena pārvietojumus starp dotajiem punktiem.

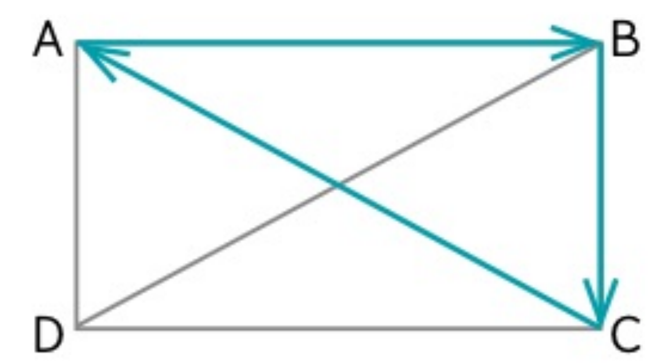


1) Uzzīmē un pieraksti divus pārvietojuma variantus, ja pārgājienu sāk punktā A un atgriežas punktā A!
2) Izvēlies vienu no pārgājiena maršrutiem un raksturo vektoru savstarpējo novietojumu, lietojot jēdzienus *vienādi/pretēji vektori*; *vienādi vērsti/pretēji vērsti vektori*; *kolineāri vektori*!

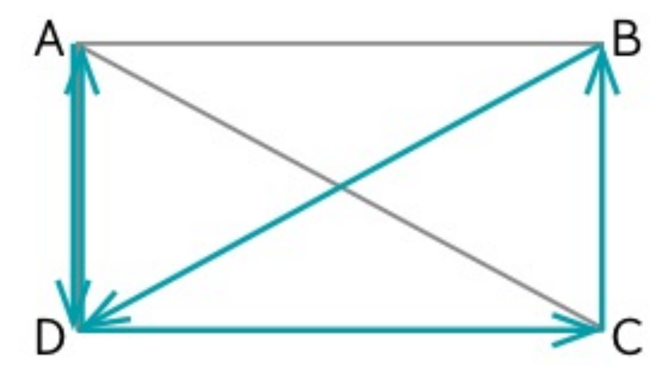
Risinājums

1) Tā kā pārvietojums raksturo attālumu un pārvietošanos no sākuma punkta līdz galapunktam pa gaisa līniju, tad to attēlo ar vektoru palīdzību.
Piemēram, aplūko divus no vairākiem iespējamiem pārgājiena maršrutiem.

1. variants. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$



2. variants. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$



2) Izvēlas 2. variantu.
$\overrightarrow{CB}$ un $\overrightarrow{DA}$ ir vienādi vektori, jo to garumi un virzieni ir vienādi.
$\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{CB}$ ir pretēji vektori, jo to garumi ir vienādi, bet vērsumi pretēji.
$\overrightarrow{BD}$ un $\overrightarrow{DC}$ nav kolineāri vektori, jo neatrodas uz vienas vai uz paralēlām taisnēm.
$\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ un $\overrightarrow{BD}$ garumi ir dažādi, tāpēc tie nevar būt ne vienādi, ne pretēji vektori.

Uzdevumi

Vektors

1. Raksturo skalārus un vektoriālus lielumus, izmantojot savus piemērus!

2. Uzzīmē trijstūri un apzīmē tā virsotnes! Cik dažādus vektorus nosaka visi iespējamie punktu pāri, ko veido trijstūra malas? Uzraksti šos vektorus!

3. Dots kvadrāts ABCD. Vektora sākumpunkts un galapunkts var būt tikai kāda no kvadrāta virsotnēm. Cik ir tādu vektoru? Uzraksti tos!

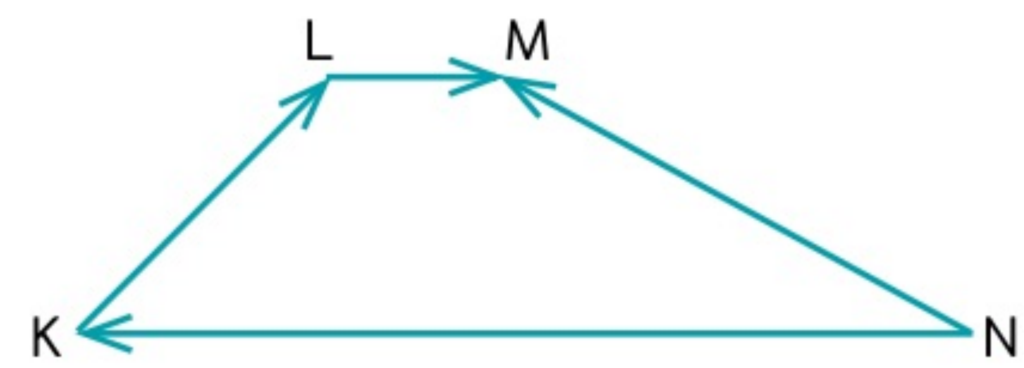
4. Uzraksti, kāda atšķirība ir starp

a) nogriezni un vektoru, b) staru un vektoru, c) taisni un vektoru!

Vektora modulis jeb vektora garums

Vektora modulis jeb vektora garums

5. Pieraksti zīmējumā redzamos vektorus!
Izmēri un pieraksti to garumus!



6. Uzraksti dotos apgalvojumus, izmantojot matemātikas simbolus!

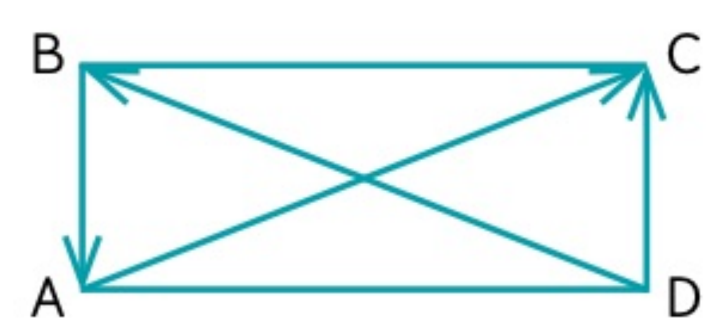
a) Vektora a garums ir 3,5 metri.

b) Vektora XY garums ir 8 milimetri.

c) Vektoru AD un MN garumi ir vienādi.

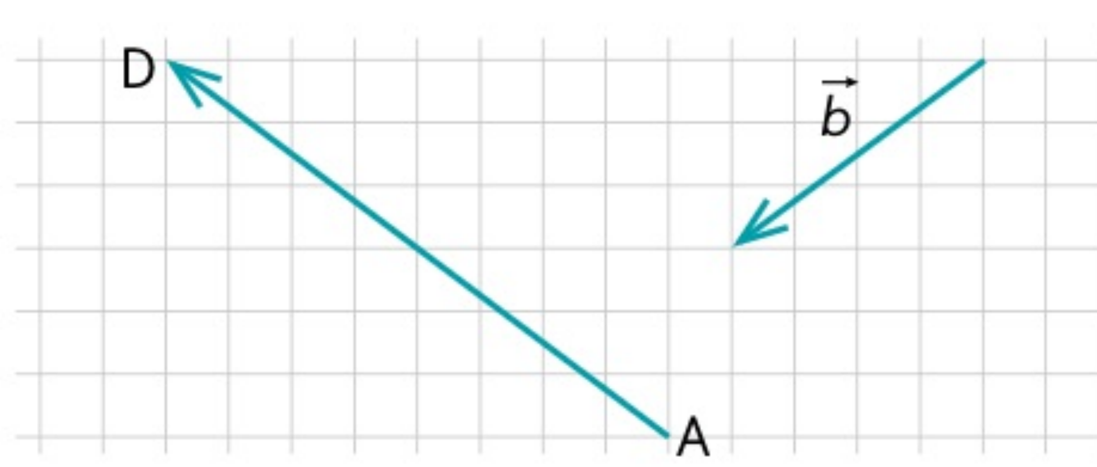
d) Vektoru u un v garumi ir dažādi.

7. Taisnstūra ABCD mala AB = 3 un AD = 4.
Aprēķini vektoru $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ un $\overrightarrow{AC}$ garumu!



Atceries! Vektora garuma aprēķināšanai var izmantot Pitagora teorēmu.

8. Uzzīmēti vektori $\vec{b}$ un $\overrightarrow{AD}$ (skat. zīm.).
Vienas rūtiņas malas garums ir 1 vienība.
Aprēķini $|\vec{b}|$ un $|\overrightarrow{AD}|$!



9. Uzzīmē vektorus!

a) $|\overrightarrow{KL}| = 3{,}5$ cm

b) $|\vec{c}| = \frac{3}{5}$ dm

c) $|\vec{t}| = 0$

d) $|\overrightarrow{AB}| = 2$ un $|\overrightarrow{AC}| = 3$

10. Uzzīmē trīs vektorus, izmantojot programmu *GeoGebra* (vai citu IT rīku)! Nosaki to garumu!

11. Uzzīmēts kvadrāts BCDE. Vektora $\overrightarrow{CE}$ garums ir 12 cm. Aprēķini $\overrightarrow{BD}$ un $\overrightarrow{BE}$ garumu!

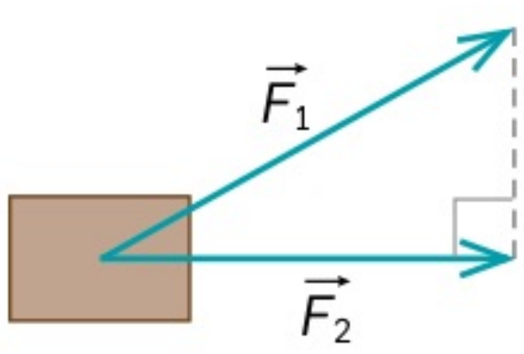
12. Romba KLMN diagonāles ir 24 cm un 10 cm garas, tās krustojas punktā E. Aprēķini $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{EL}$ un $\overrightarrow{LM}$ garumu!

13. Taisnstūra PRST malas ir 4 cm un 15 cm. Punkts Z sadala garāko taisnstūra malu PR attiecībās 4 : 1, skaitot no virsotnes P. Aprēķini $\overrightarrow{PZ}$, $\overrightarrow{ZS}$ un $\overrightarrow{TZ}$ garumu!

14. Uz ķermeni darbojas divi spēki $\vec{F_1}$ un $\vec{F_2}$ (skat. zīm.). Nosaki $\vec{F_2}$ garumu, ja

a) $|\vec{F_1}| = 3$ N un starp $\vec{F_1}$ un $\vec{F_2}$ ir 30° liels leņķis,

b) $|\vec{F_1}| = 9$ N un starp $\vec{F_1}$ un $\vec{F_2}$ ir 45° liels leņķis!



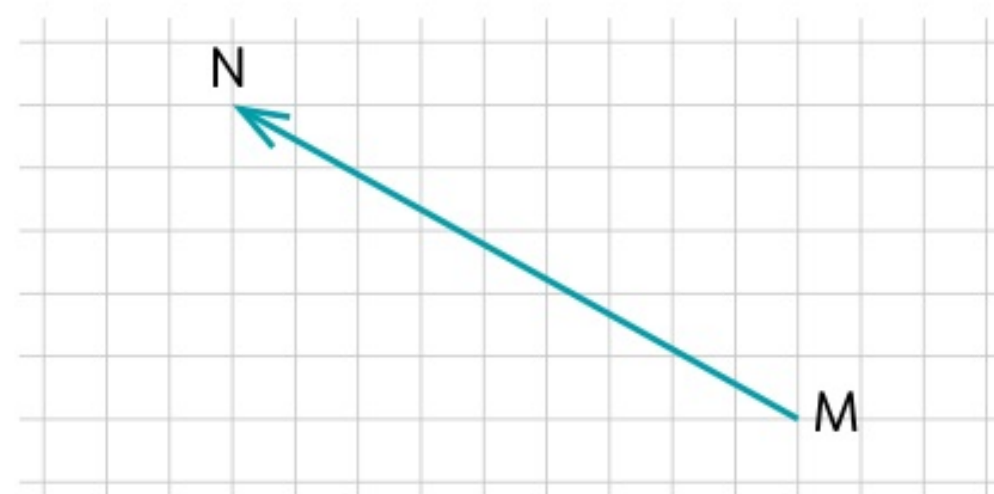
N (ņūtons) — spēka vienība.
Ja ķermeņa masa ir 1 kg, tad 1 N liels spēks tam piešķir paātrinājumu $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ un $1\text{ N} = \frac{1\text{ kg} \cdot 1\text{ m}}{1\text{ s}^2}$.

15. Izveido atgādni par vektoriem, iekļaujot visus aplūkotos jēdzienus, uzraksti piemērus un pretpiemērus!

Vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori. Vienādi un pretēji vektori. Kolineāri vektori

16. Rūtiņu tīklā uzzīmē vektoram $\overrightarrow{MN}$

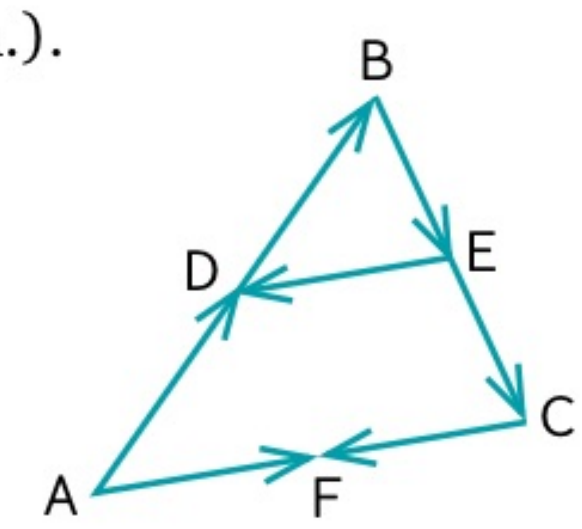
1) kolineāru vektoru,
2) pretēju vektoru,
3) vienādi vērstu vektoru,
4) pretēji vērstu vektoru!



Cik ir mazākais vektoru skaits, ko tu varētu uzzīmēt, lai izpildītu visus četrus nosacījumus?

17. Punkti D, E un F ir trijstūra ABC malu viduspunkti (skat. zīm.).
Aplūko zīmējumu un uzraksti:

a) kuri vektori ir vienādi,
b) kuri vektori ir pretēji,
c) kuri vektori ir vienādi vērsti ar vektoru $\overrightarrow{AB}$!



18. Vienādsānu trapecē ABCD (AB = CD) novilktas diagonāles, kas krustojas punktā O.
Uzzīmē zīmējumu un atzīmē vektorus $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$! Izraksti tos vektorus, kas ir

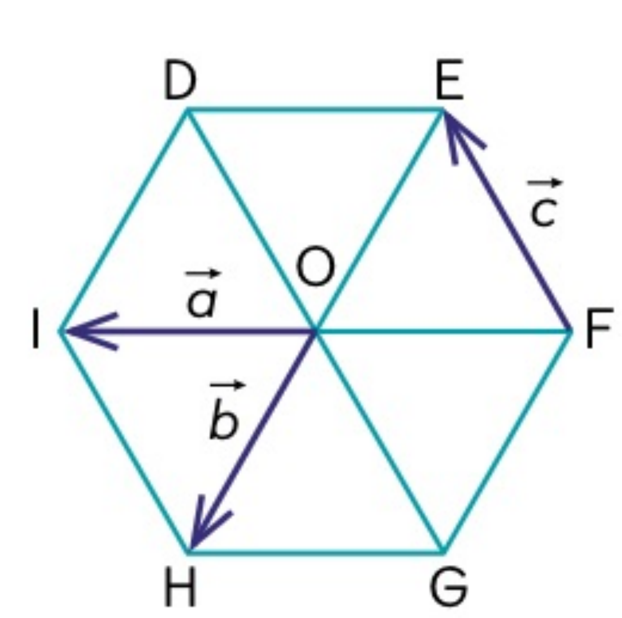
a) vienādi vērsti vektori,
b) pretēji vērsti vektori,
c) pretēji vektori,
d) vienāda garuma vektori,
e) nav ne vienādi vērsti, ne pretēji vērsti vektori!

19. Kvadrāta EFGH diagonāles krustojas punktā O. Vektoru sākumpunkts un galapunkts var būt tikai kādā no kvadrāta virsotnēm un diagonāļu krustpunktā O. Uzzīmē zīmējumu, nosauc un uzraksti:

a) divus dažādus vektorus, kuru moduļi ir vienādi,
b) divus kolineārus vektorus,
c) divus pretējus vektorus,
d) divus vienādi vērstus vektorus, kuru moduļi ir dažādi,
e) divus pretēji vērstus vektorus, kuri nav pretēji vektori,
f) divus ne vienādi vērstus, ne pretēji vērstus vektorus!

20. Dots regulārs sešstūris DEFGHI un vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ un $\vec{c}$ (skat. zīm.).
Uzraksti norādītos vektorus, izmantojot vektorus $\vec{a}$, $\vec{b}$ vai $\vec{c}$!

a) $\overrightarrow{EO}$
b) $\overrightarrow{OF}$
c) $\overrightarrow{FG}$
d) $\overrightarrow{IH}$
e) $\overrightarrow{ID}$
f) $\overrightarrow{HG}$



Regulāra sešstūra diagonāles sadala seštūri sešos vienādos vienādmalu trijstūros.

21. Aplūko zīmējumus un atbildi uz jautājumiem!

a)

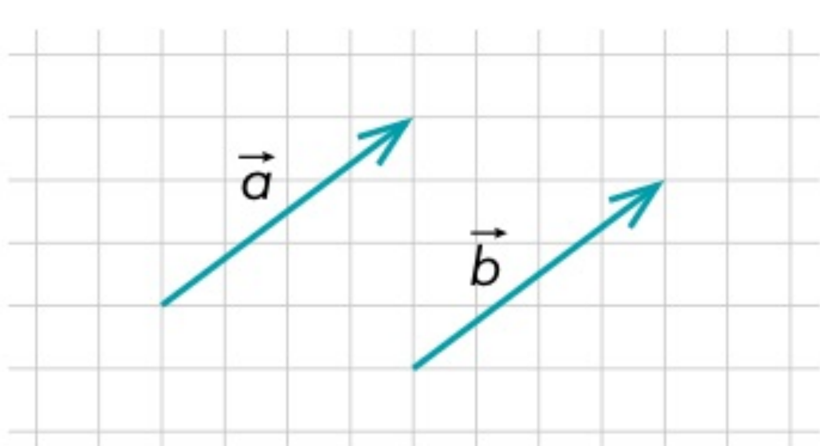
$\vec{F}_r$ ir ragaviņu rezultējošais spēks.
Kā darbojas berzes spēks $\vec{F}_b$?
Kāda veida vektori ir ragaviņu rezultējošais un berzes spēks?

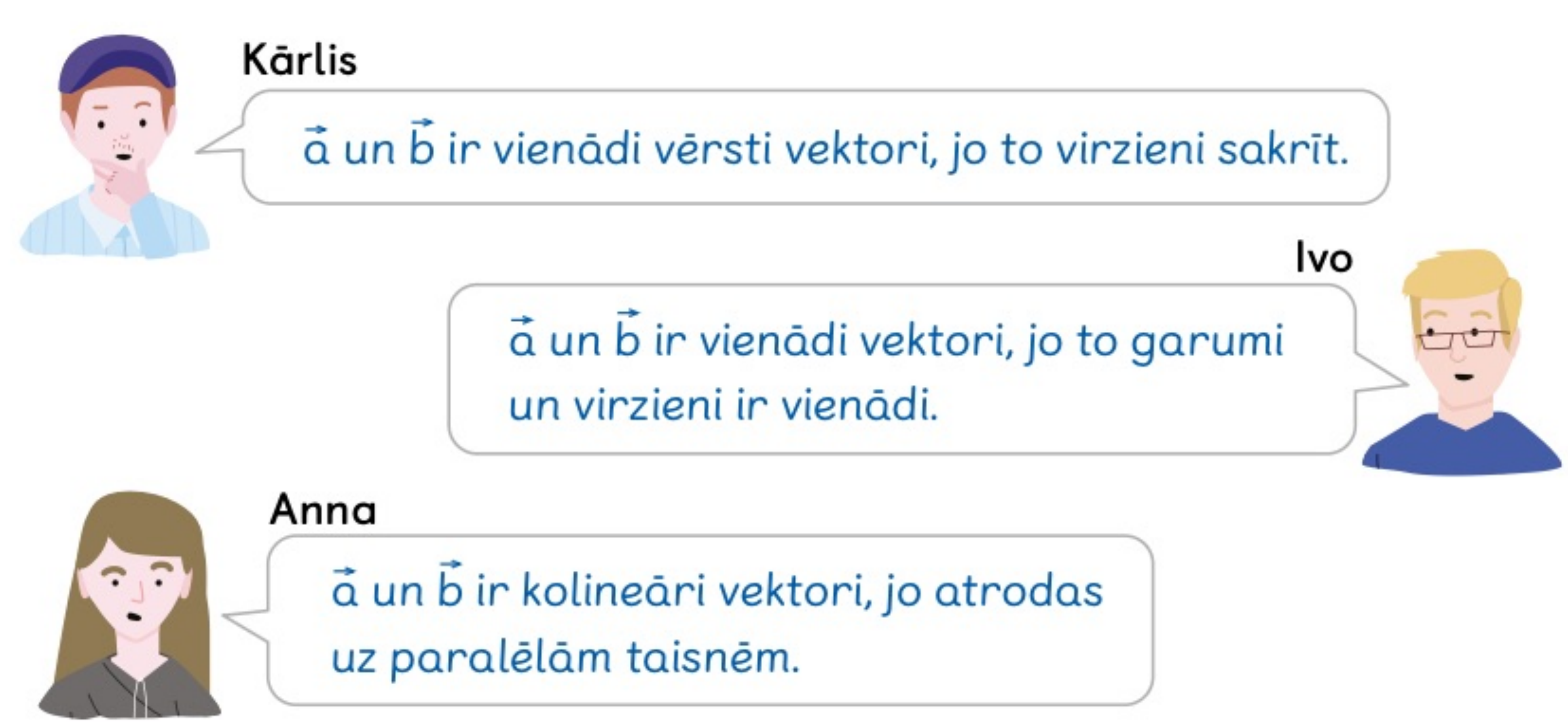
b)

$\vec{F}_1$ ir laivai pieliktais spēks.
Kā darbojas laivai pieliktais spēks $\vec{F}_1$ un straumes spēks $\vec{F}_{st}$, ja laiva brauc pa straumi?
Kā darbojas laivai pieliktais spēks $\vec{F}_1$ un straumes spēks $\vec{F}_{st}$, ja laiva brauc pret straumi?
Vai spēki $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_{st}$ var būt modelēti kā pretēji vektori? Kas notiek ar ķermeni šādā gadījumā?

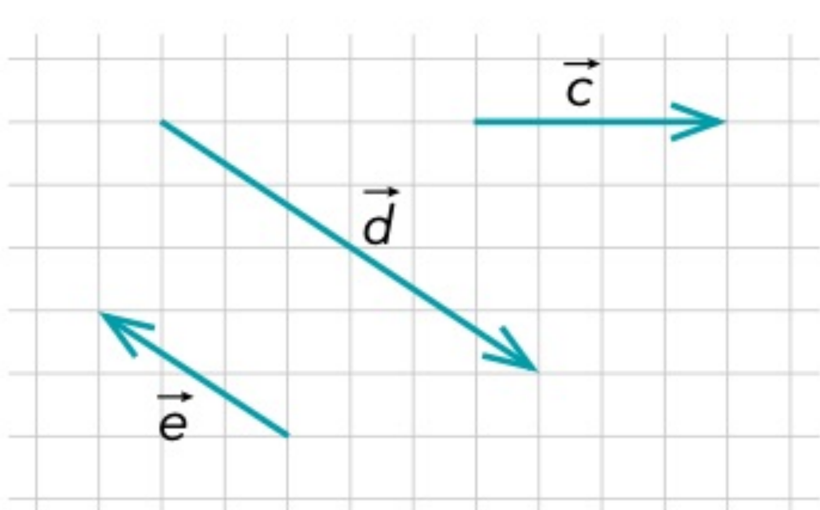
22. Izvērtē Kārļa, Ivo un Annas apgalvojumus! Ja nepieciešams, uzraksti savus ieteikumus!

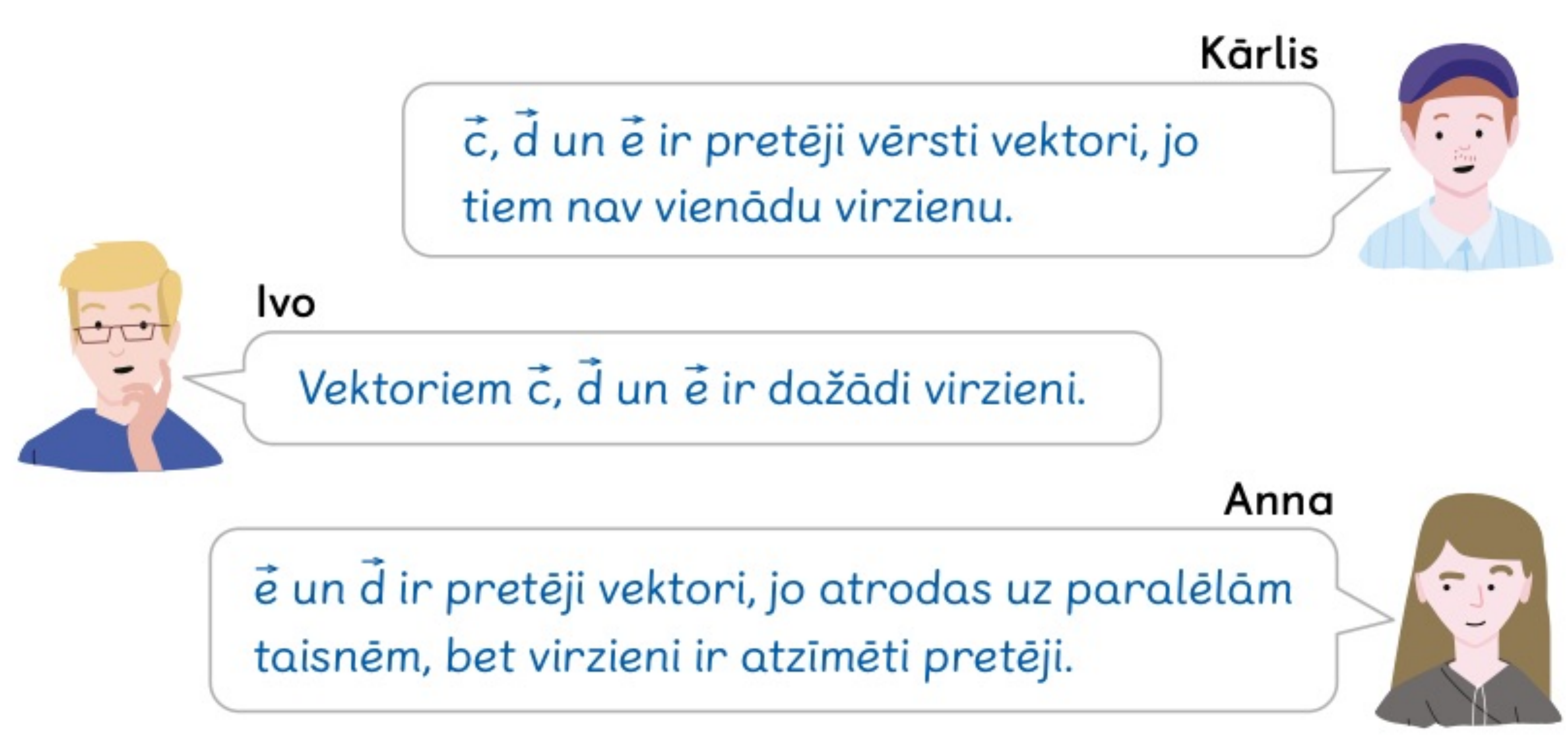
a)





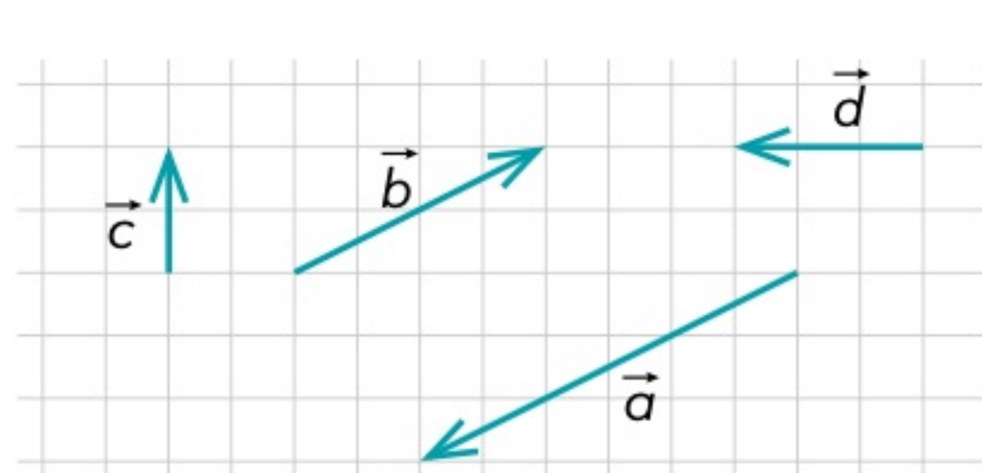
b)



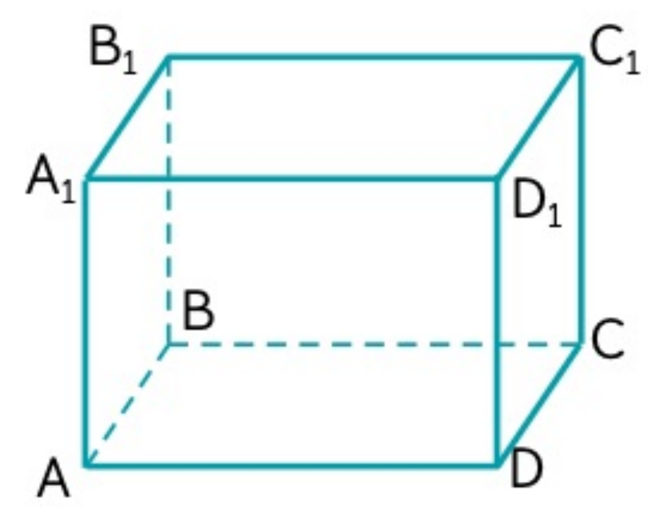


23. Izmantojot zīmējumā attēlotos vektorus un, lietojot ar vektoriem saistītos jēdzienus, uzraksti piecus patiesus apgalvojumus!

Samainies apgalvojumiem ar klasesbiedru! Izvērtējiet un pārrunājiet, kas jāievēro, rakstot patiesus apgalvojumus!



24. Dots taisns paralēlskaldnis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (skat. zīm.).



Raksturo norādītos vektoru pārus!

a) $\overrightarrow{AA_1}$ un $\overrightarrow{CC_1}$ b) $\overrightarrow{B_1D_1}$ un $\overrightarrow{DB_1}$ c) $\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{C_1B_1}$

Vai, izmantojot paralēlskaldņa virsotņu nosaukumus, var pierakstīt vienādi vērstus vektorus, kuru garumi atšķiras? Paskaidro savu atbildi!

25. Izmantojot programmu *GeoGebra* (vai citu IT rīku), uzzīmē dažādus vektorus! Uzraksti zīmējumam atbilstošu aprakstu, izmantojot jēdzienus *vienādi, dažādi, vienādi vērsti, vienāda garuma, kolineāri vektori*!

Iedod savu aprakstu klasesbiedram, lai viņš uzzīmē atbilstošu zīmējumu! Salīdziniet un izvērtējiet zīmējumus un to, kā uzdevumu veicāt izvēlētajā datorprogrammā!

26. Turpini veidot pārskatāmu shēmu par kolineāriem vektoriem, izmantojot ar vektoriem saistītos jēdzienus *vienādi, pretēji, dažādi, vienādi vērsti, pretēji vērsti, vienāda garuma*!

27. Izvērtē apgalvojumu patiesumu!

A Vienādi vektori var nebūt vienāda garuma.

B Kolineāri vektori atrodas uz paralēlām taisnēm.

C Vienam vektoram ir tieši viens ar to vienāds vektors.

D Ja vektoru virzieni sakrīt un tie abi ir apzīmēti ar vienu mazo burtu, tad tie ir vienādi vektori.

E Vektori, kas nav kolineāri, nevar būt vienāda garuma.

F Vektori, kas nav kolineāri, nevar būt vienādi vektori.

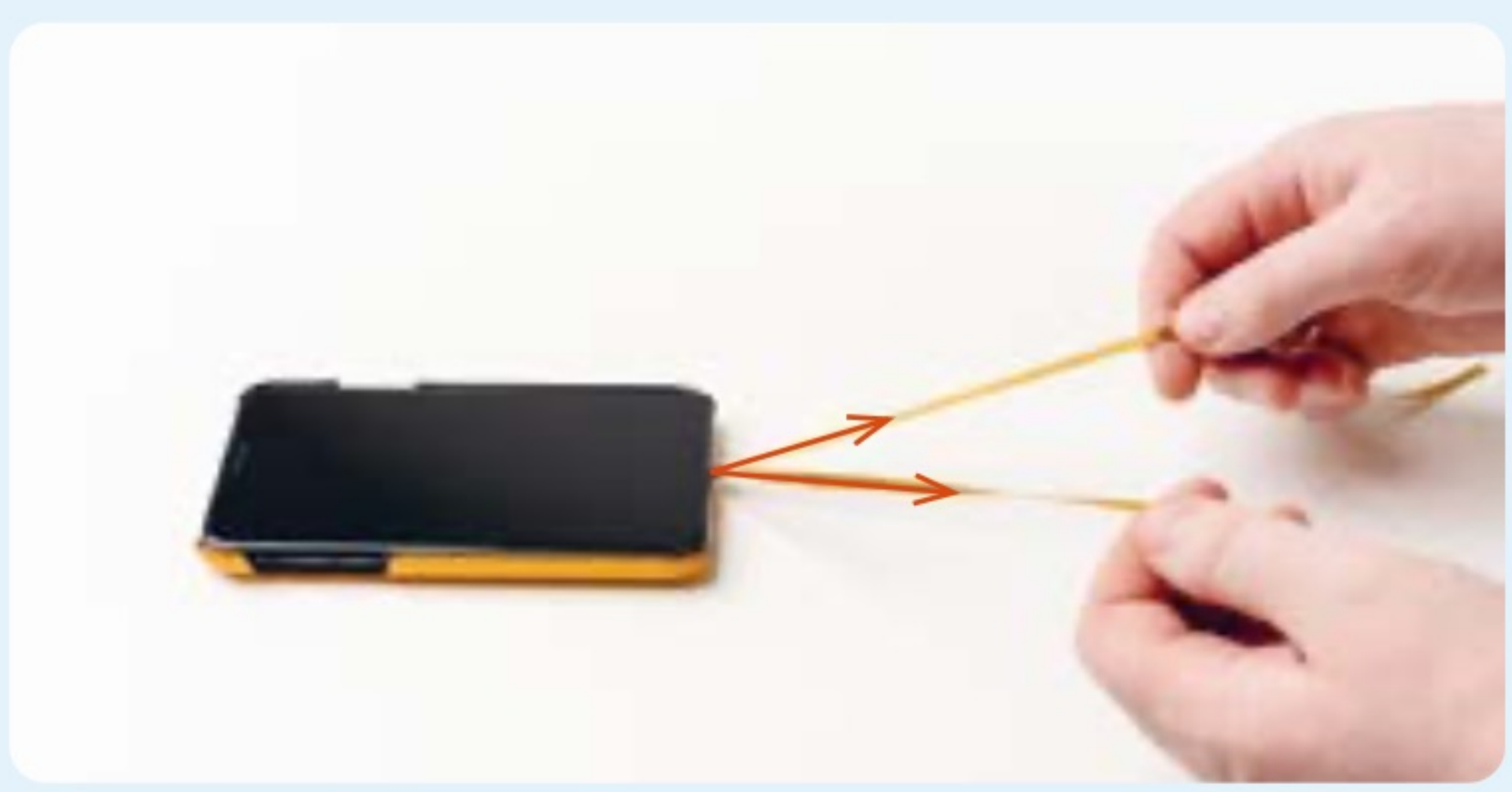
28. Uzraksti vienu patiesu un vienu aplamu apgalvojumu, iekļaujot jēdzienus *vienādi/pretēji vektori, vienādi vērsti/pretēji vērsti vektori* vai *kolineāri vektori*!

Iedod uzrakstītos apgalvojumus klasesbiedram, lai viņš nosaka to patiesumu un pamato savu atbildi!

Kā noskaidrot, kur pārvietosies ķermenis?

Nepieciešamie materiāli:
mobilais telefons, mobilā telefona aizsargvāciņš, divas auklinas.

Strādājot pārī, izveidojiet modeli no mobilā telefona, tā aizsargvāciņa un auklinām!
Telefonu nolieciet uz galda un lēnām velciet aiz auklinām!
Vērojiet un mēģiniet uzzīmēt, kādā virzienā pārvietojas telefons!



- Izvirziet hipotēzes:
  - par ķermeņa pārvietošanās virzienu,
  - no kā atkarīgs ķermeņa pārvietošanās virziens!
- Salīdziniet savus spriedumus ar citu klasesbiedru spriedumiem!
- Kā matemātiski varētu attēlot un precīzi noteikt telefona pārvietojumu, izmantojot auklinas, ja būtu zināmi spēki, kas šo telefonu pārvieto?
- Vai šie ir vienīgie spēki, kas ietekmē telefona pārvietošanos?
- Izveidojiet matemātisko modeli (skici), kas attēlo telefonam pieliktos spēkus!
- Kas būtu jāzina, lai noteiktu telefonam pielikto rezultējošo spēku?

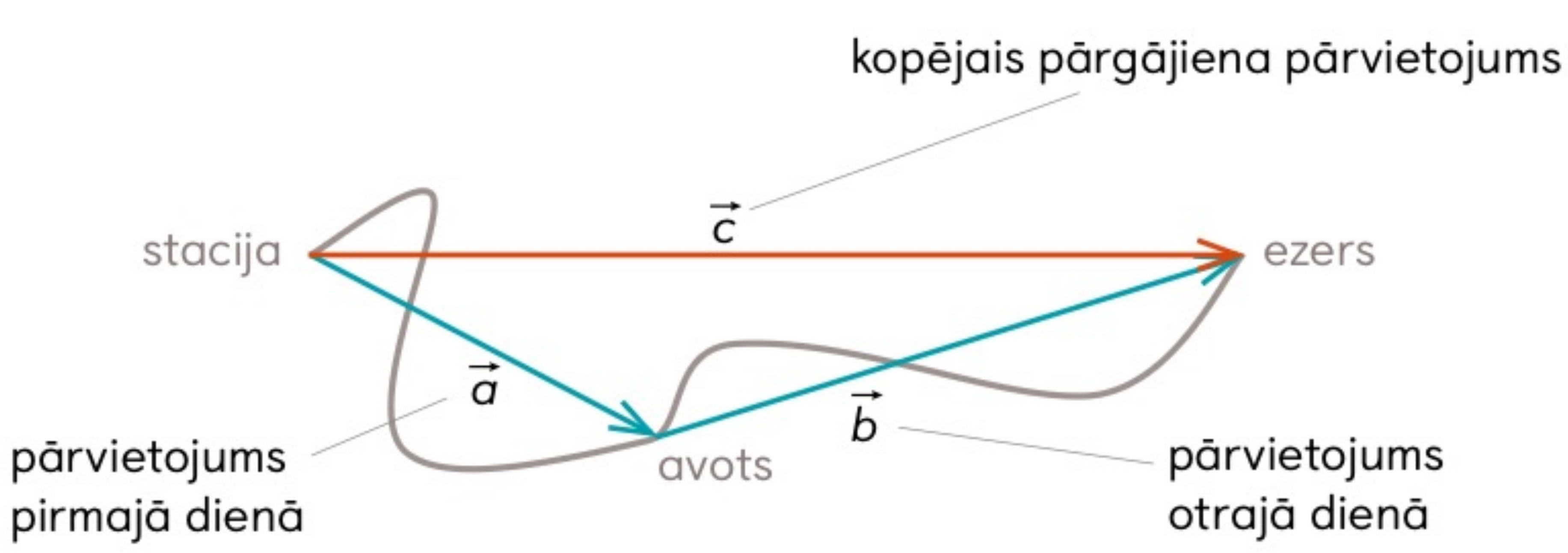
Vektoru saskaitīšana un atņemšana

Lai reālās situācijās iegūtu rezultējošo spēku vai pārvietojumu, to palīdz saprast un raksturot vektoru saskaitīšana vai atņemšana.

vektoru summa | vektoru saskaitīšanas trijstūra likums | vektoru saskaitīšanas paralelograma likums | vairāku vektoru summa | vektoru atņemšana

Vektoru saskaitīšana

Tūristi pirmajā dienā nogāja ceļu no stacijas līdz avotam, bet otrajā dienā veica ceļu no avota līdz ezeram.

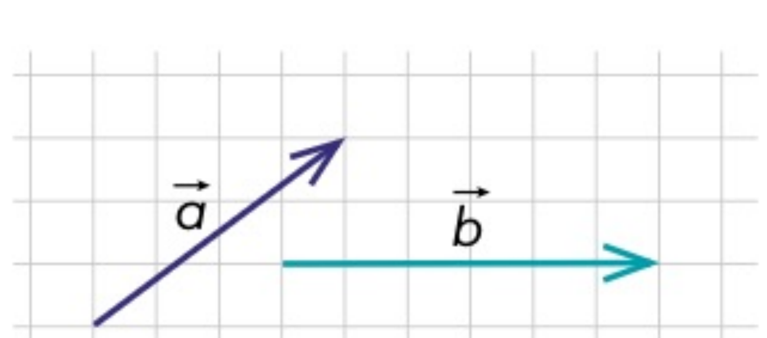


Pārgājiena pārvietojumus var attēlot ar vektoriem.

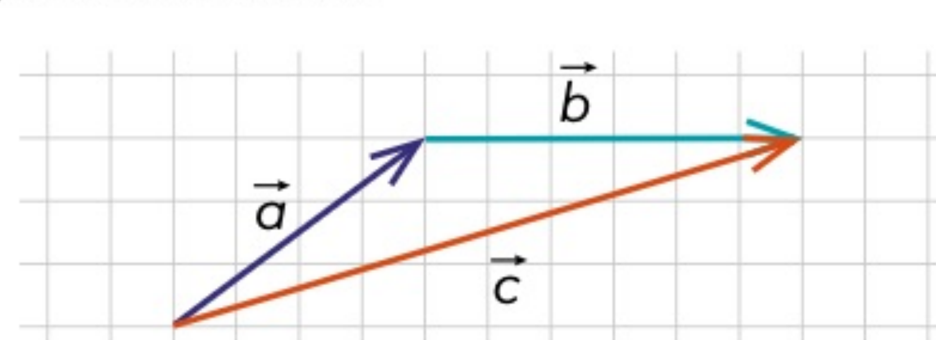
Vektoru $\vec{c}$ sauc par **vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ summu**.

> **Vektoru saskaitīšanas trijstūra likums**
> Ja **vektorus** $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **atliek secīgi vienu otram galā**, tad summas vektors $\vec{c}$ savieno pirmā vektora sākumpunktu ar otrā vektora galapunktu.

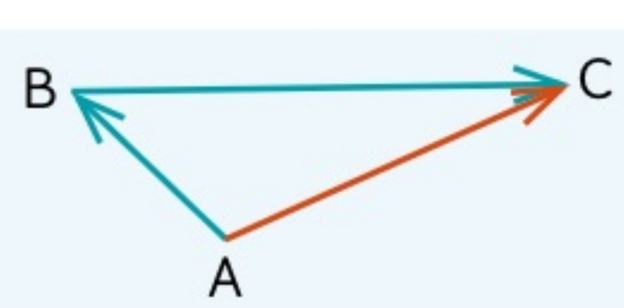
Piemēram, doti vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$.



Tos saskaita, izmantojot vektoru saskaitīšanas trijstūra likumu.



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

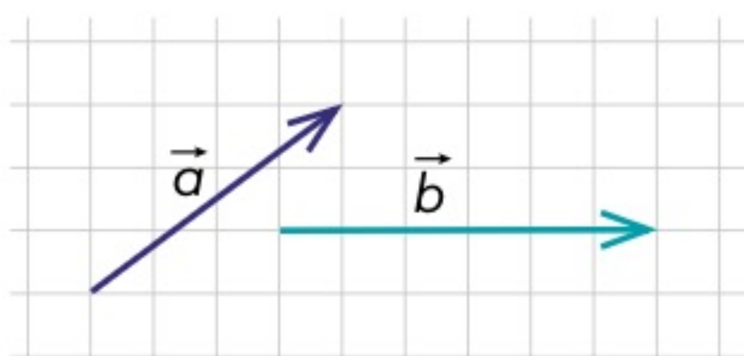


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

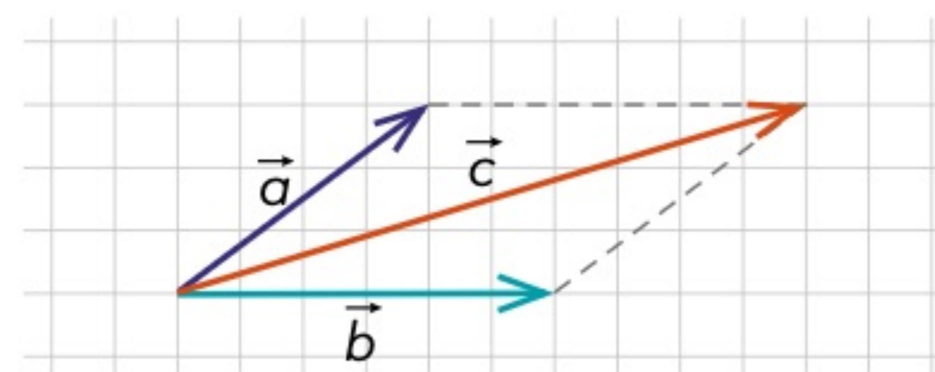
Vektoru saskaitīšanas paralelograma likums

Ja **vektorus** $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **atliek no kopīga sākumpunkta**, tad summas vektors $\vec{c}$ iziet no vektoru kopīgā sākumpunkta un ir tāda paralelograma diagonāle, kura malas ir vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

Piemēram, doti vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

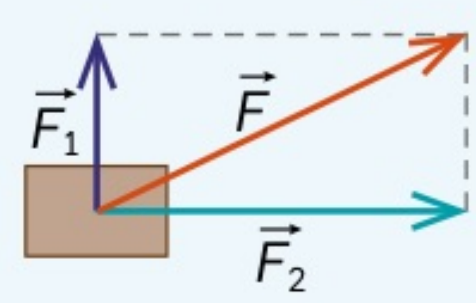


Tos saskaita, izmantojot vektoru saskaitīšanas paralelograma likumu.



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Ja uz ķermeni darbojas vairāki spēki (piem., $\vec{F_1}$ un $\vec{F_2}$), tad kopspēks jeb rezultējošais spēks atbilst atsevišķo spēku vektoru summai ($\vec{F}$).



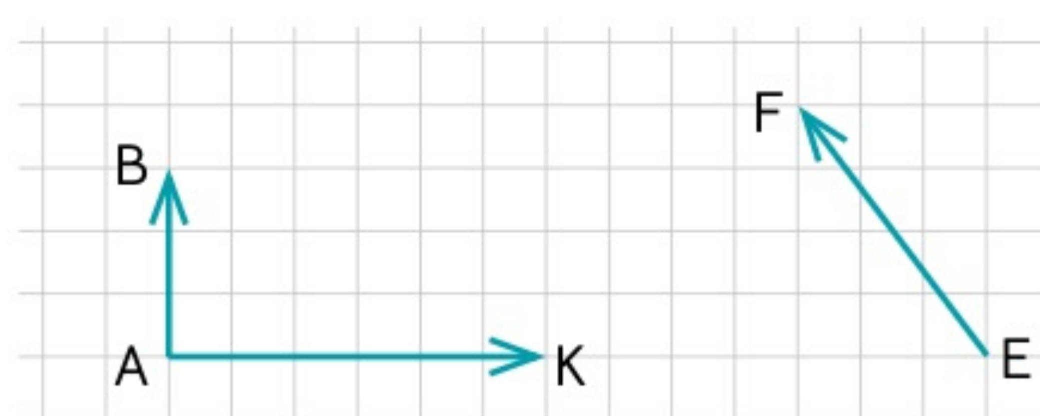
Ar piemēriem paskaidro, vai vektoru saskaitīšanā, izmantojot trijstūra likumu un paralelograma likumu, iegūst vienu un to pašu rezultātu! Kurš no saskaitīšanas paņēmieniem tev liekas ērtāks un saprotamāks?

1. PIEMĒRS

Aplūko zīmējumu! Konstruē un pieraksti norādīto vektoru summas vektoru!

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}$

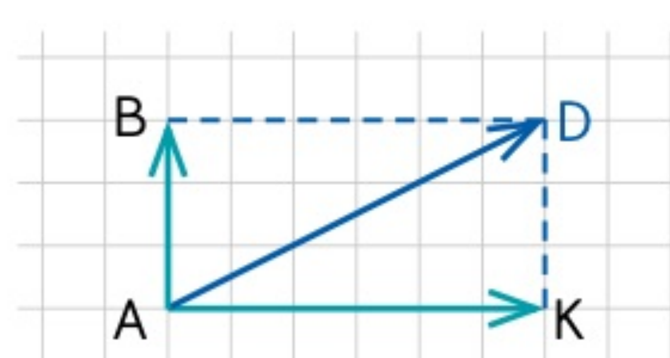
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF}$



Risinājums

a) Vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AK}$ summas vektoru uzzīmē, izmantojot vektoru saskaitīšanas paralelograma likumu, jo vektoriem ir kopīgs sākumpunkts. Iegūst vektoru $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD}$

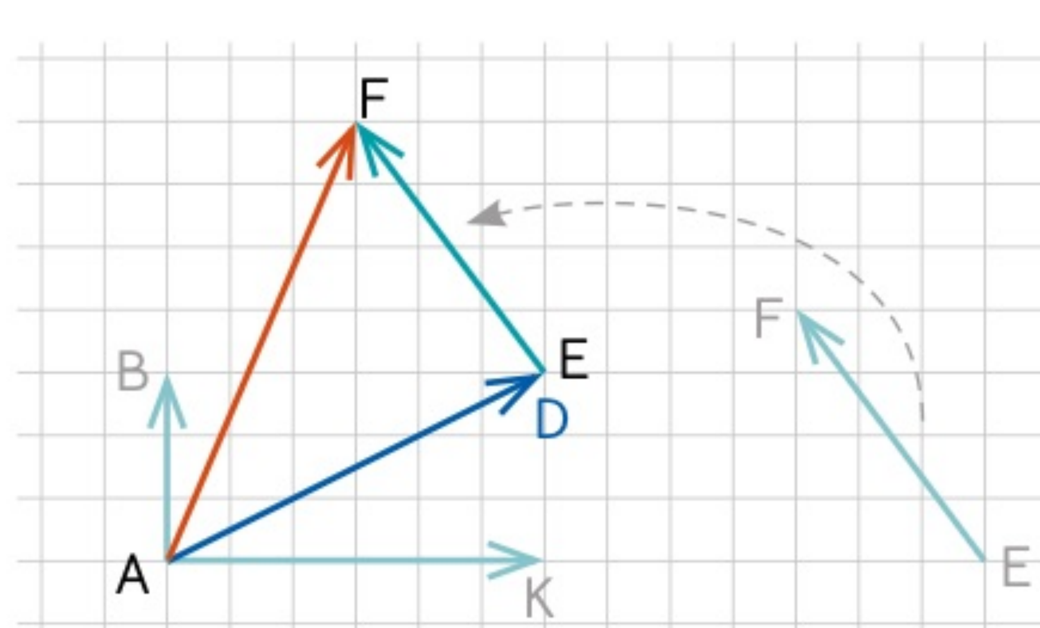


b) Iepriekš noteica, ka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD}$.

$\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}}_{\overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{EF}$, tātad jānosaka $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$.

Vektoru $\overrightarrow{EF}$ pārvieto, lai tā sākumpunkts sakrīt ar vektora $\overrightarrow{AD}$ galapunktu.

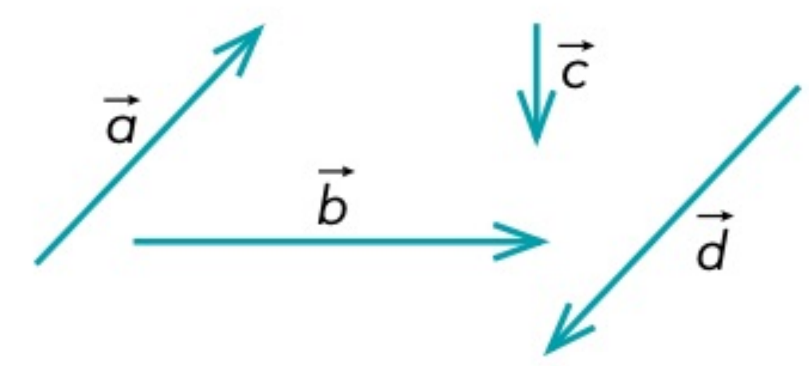
Vektorus $\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{EF}$ saskaita, izmantojot vektoru saskaitīšanas trijstūra likumu.



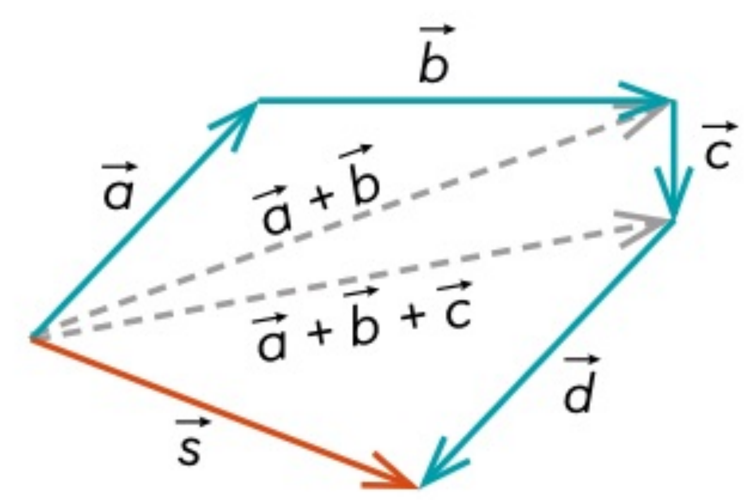
Tātad $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$ jeb $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$.

Vairāku vektoru summa

Doti vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ un $\vec{d}$.

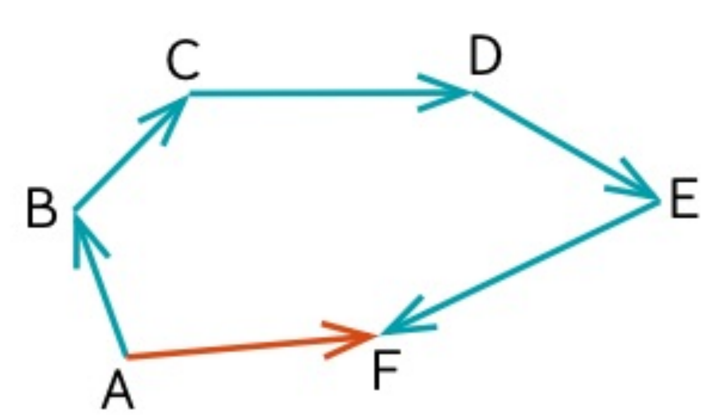


Pakāpeniski saskaita visus attēlotos vektorus, vairākas reizes izmantojot vektoru saskaitīšanas trijstūra likumu.



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{s}$

Veicot vairāku vektoru saskaitīšanu, tos secīgi atliek vienu otram galā, nemeklējot starpsummas vektorus. Summas vektoru iegūst, savienojot pirmā vektora sākumpunktu un pēdējā vektora galapunktu.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$

2. PIEMĒRS

Zināms, ka skaitļiem un algebriskām izteiksmēm piemīt norādītās īpašības.

Saskaitīšanas pārvietojamības īpašība $a+b=b+a$	**Saskaitīšanas savienojamības īpašība** $(a+b)+c=a+(b+c)$
$7+5=5+7$	$(7+4)+6=7+(4+6)$
$2x+y=y+2x$	$3x+(5x+10x)=(3x+5x)+10x$

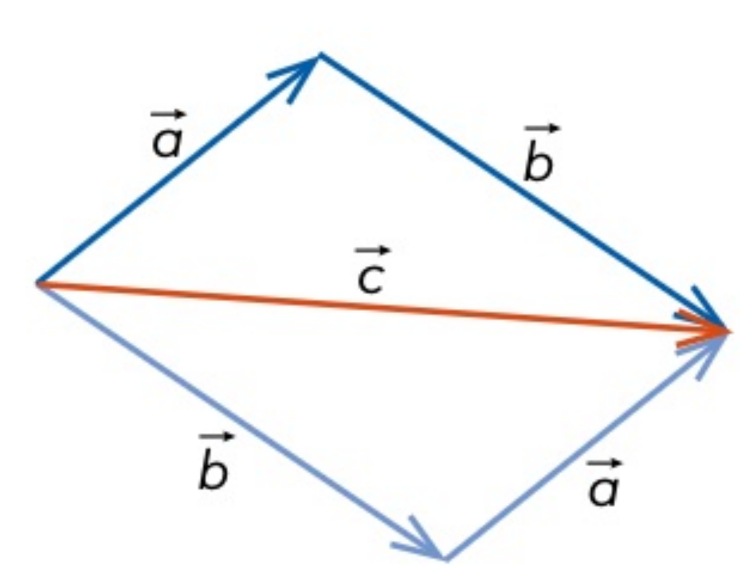
Vai vektoru saskaitīšanā ir spēkā šīs īpašības? Ja ir, tad kā tās var pamatot?

Risinājums

Saskaitīšanas pārvietojamības īpašība

Izvēlas patvaļīgus vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$ un zīmējumā attēlo to summas vektora $\vec{c}$ iegūšanas veidus.

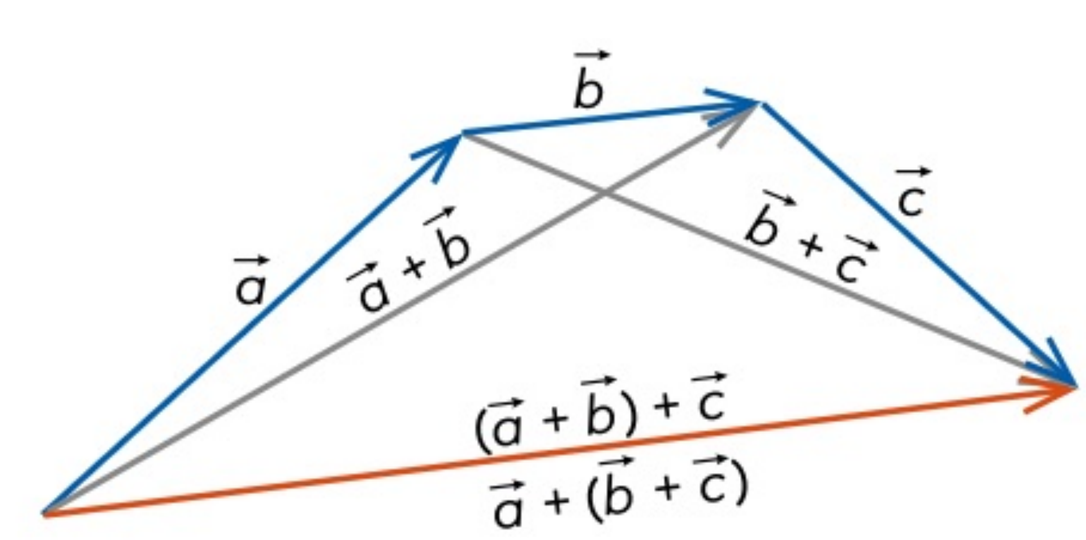
Redzams, ka vektoru saskaitīšanai piemīt pārvietojamības īpašība.



Saskaitīšanas savienojamības īpašība

Līdzīgi izvēlas patvaļīgus vektorus $\vec{a}, \vec{b}$ un $\vec{c}$ un attēlo to summu, ievērojot darbību secību.

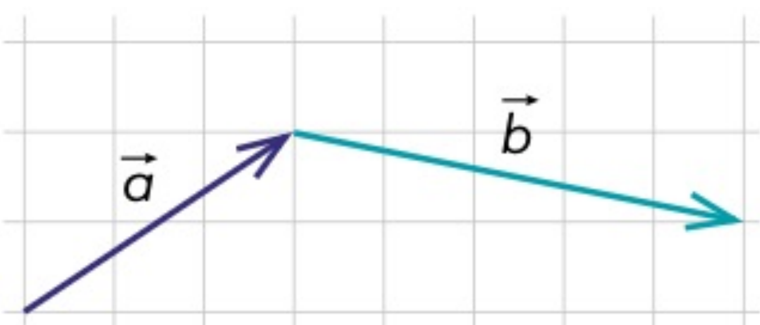
Redzams, ka vektoru saskaitīšanai piemīt arī saskaitīšanas savienojamības īpašība.



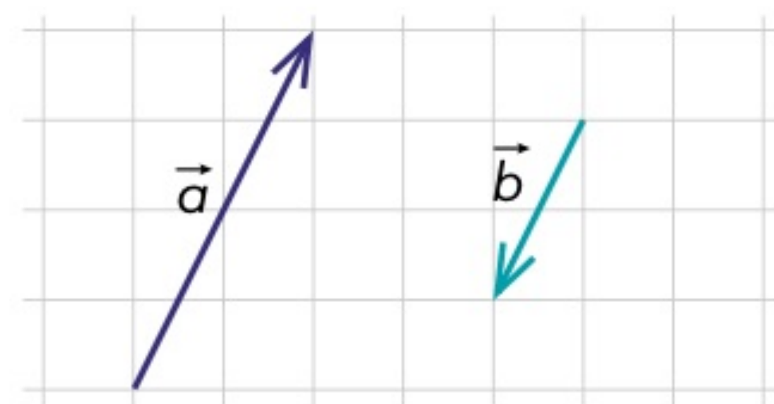
Uzdevumi

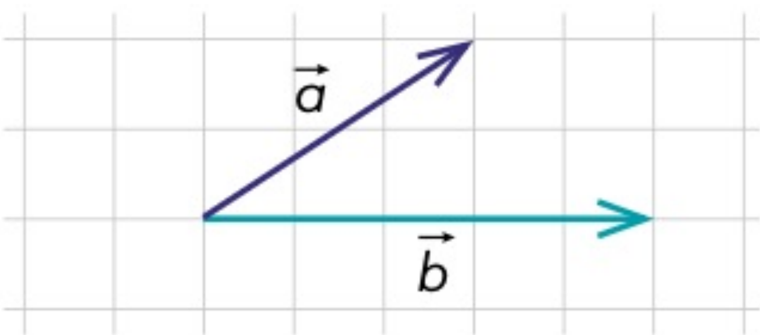
Vektoru saskaitīšana

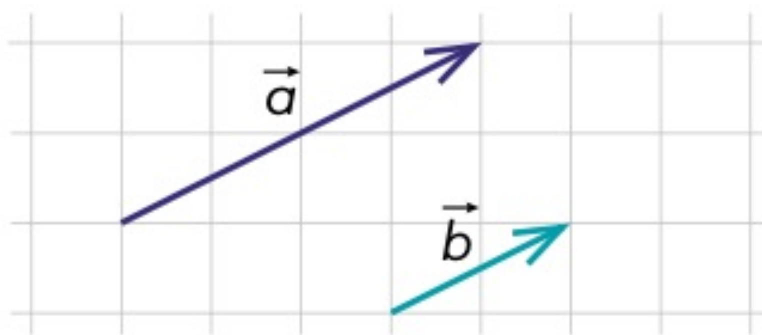
29. Uzzīmē divu attēloto vektoru summas vektoru!

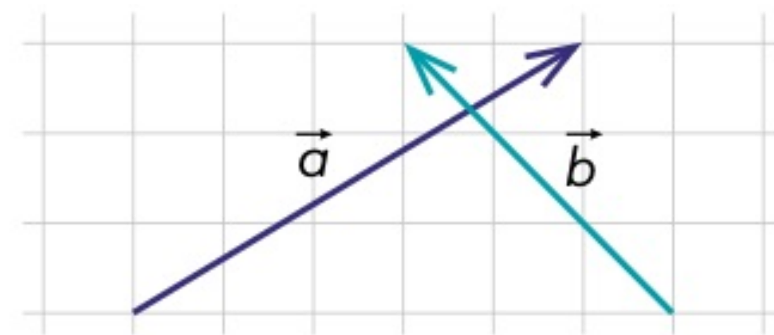
a) 

c) 

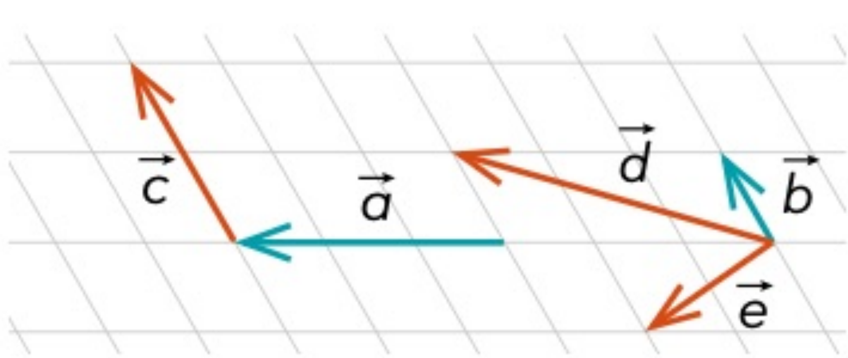
e) 

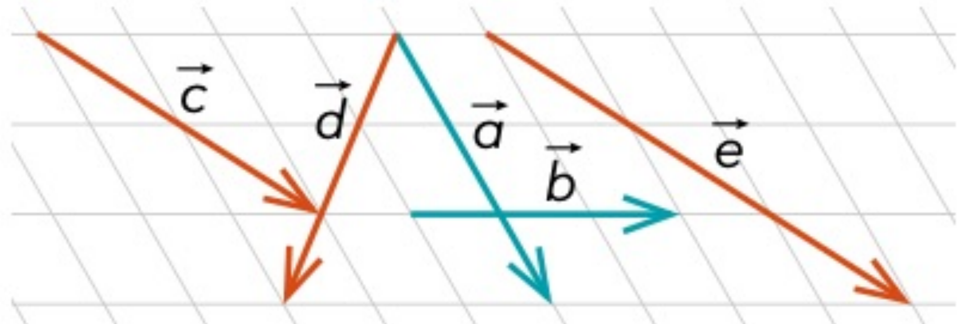
b) 

d) 

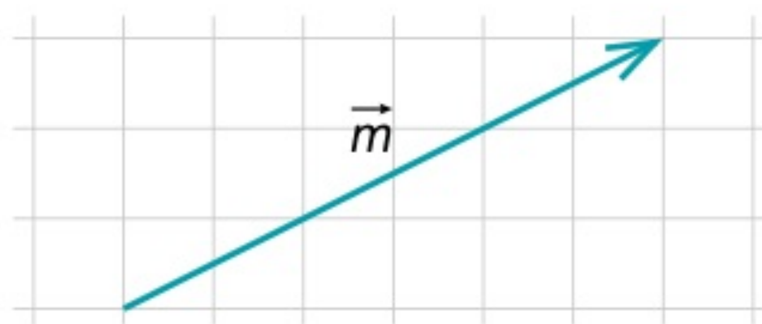
f) 

30. Kurš no vektoriem $\vec{c}$, $\vec{d}$ vai $\vec{e}$ ir vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ summas vektors?

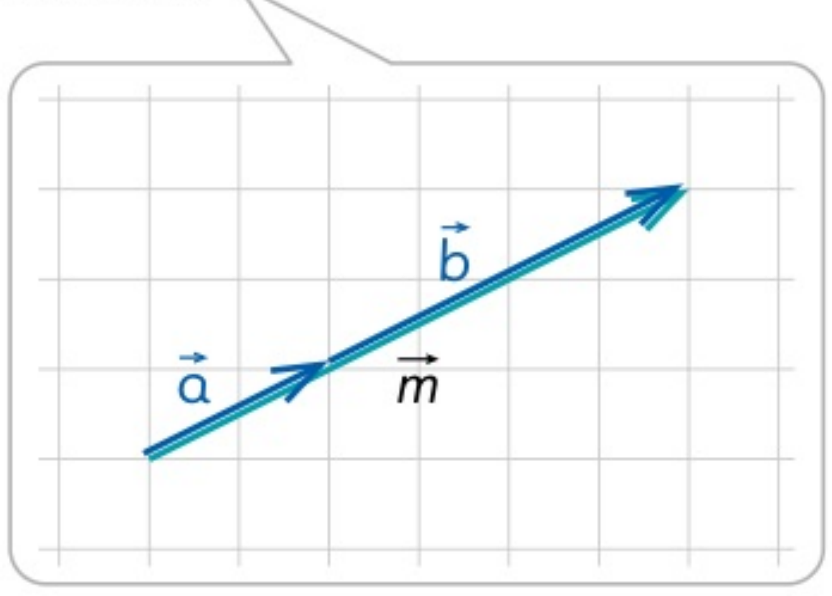
a) 

b) 

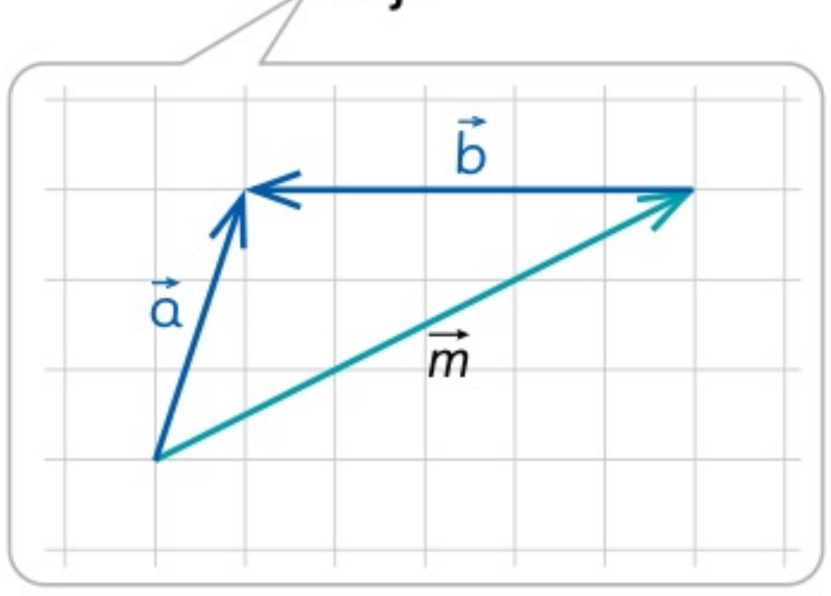
31. Dots vektors $\vec{m}$ (skat. zīm.). Madara, Aija un Nauris papildināja zīmējumu ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ tā, lai izpildītos vienādība $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$. Izvērtē viņu zīmējumu patiesumu!



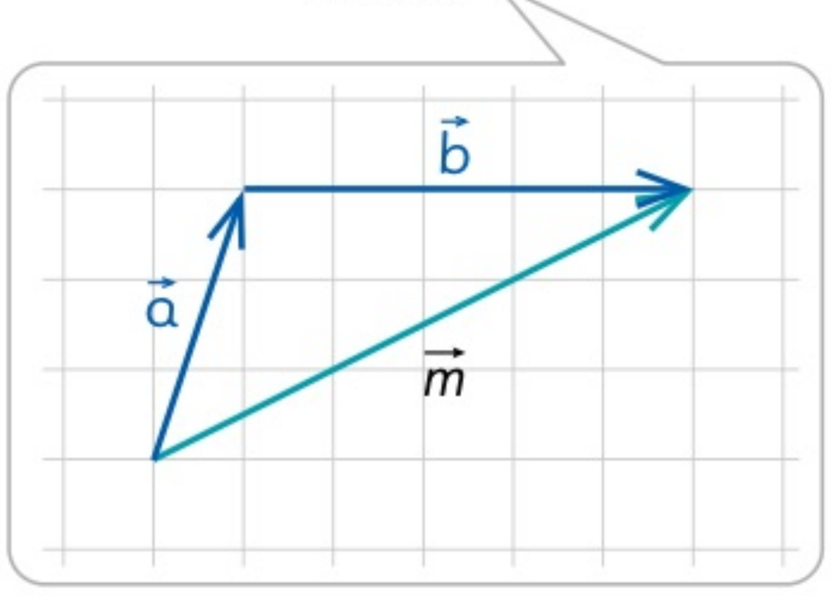
Madara



Aija



Nauris



32. Uzraksti doto vektoru summas vektoru!

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
e) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$
f) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

33. Uzzīmē trijstūri DEF! Uzzīmē doto vektoru summas vektoru!

a) $\overrightarrow{DF}$ un $\overrightarrow{FE}$
b) $\overrightarrow{DE}$ un $\overrightarrow{FE}$
c) $\overrightarrow{DF}$ un $\overrightarrow{DE}$
d) $\overrightarrow{FD}$ un $\overrightarrow{FE}$

34. Uzzīmē paralelogramu KLMN! Uzzīmē doto vektoru summas vektoru!

a) $\overrightarrow{KL}$ un $\overrightarrow{LM}$
b) $\overrightarrow{NM}$ un $\overrightarrow{KN}$
c) $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MN}$ un $\overrightarrow{NK}$
d) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NL}$ un $\overrightarrow{LK}$

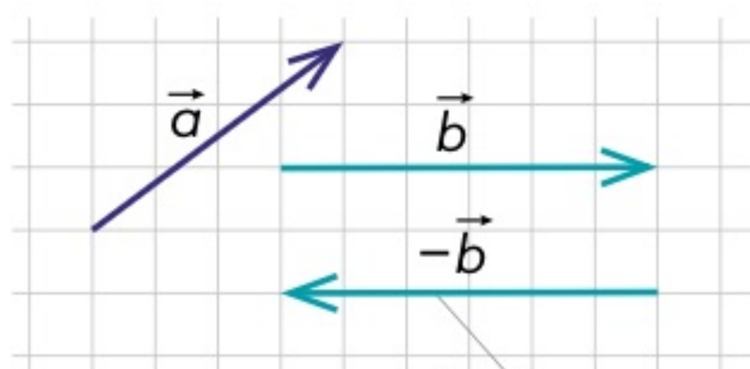
Vektoru atņemšana

Vektoru atņemšanu ērti aizstāt ar pretēja vektora pieskaitīšanu. Proti, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Atceries!

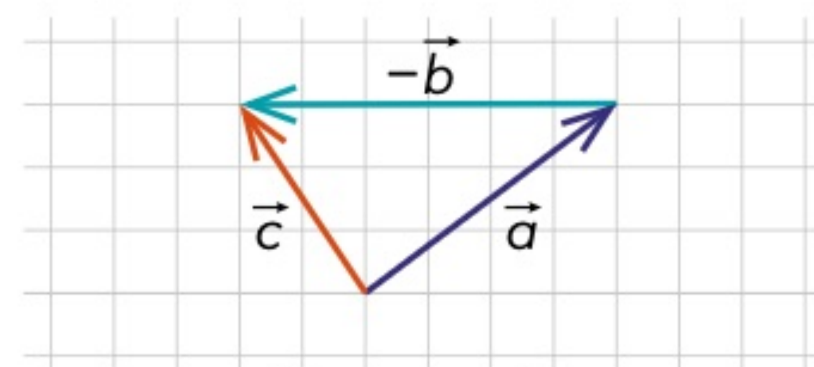
Atceries, kā pieskaita negatīvu skaitli! Piemēram: $5 + (-2) = 5 - 2$.

Piemēram, doti vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$.



vektora $\vec{b}$ pretējais vektors

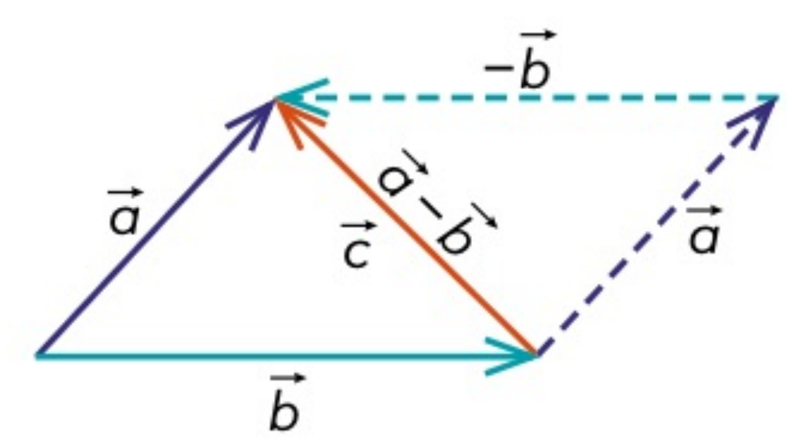
Nosaka vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ starpību, izmantojot vektoru saskaitīšanu.

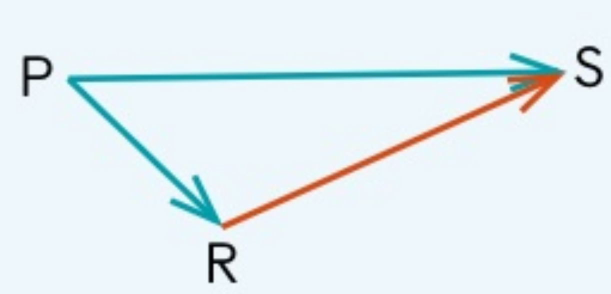


$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$

Par divu **vektoru** $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **starpību** sauc tādu vektoru $\vec{c}$, pie kura pieskaitot vektoru $\vec{b}$, iegūst vektoru $\vec{a}$, tātad

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \text{ ja } \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}.$$



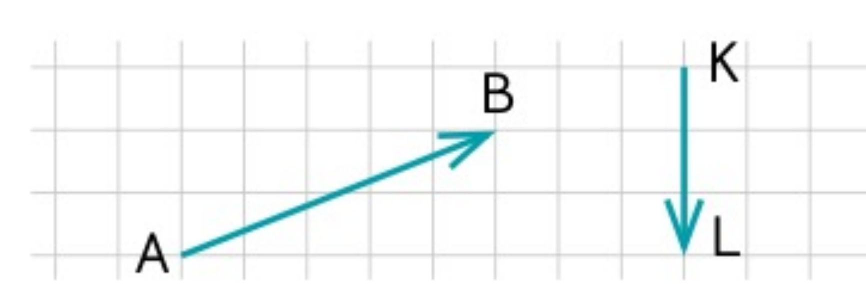


$\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RS}$

Izmantojot doto zīmējumu, paskaidro vektoru atņemšanas definīciju!
Kā rīkoties, ja vektoriem nav kopēja sākumpunkta?

3. PIEMĒRS

Aplūko zīmējumu!
Uzzīmē un pieraksti starpības $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{KL}$ vektoru!

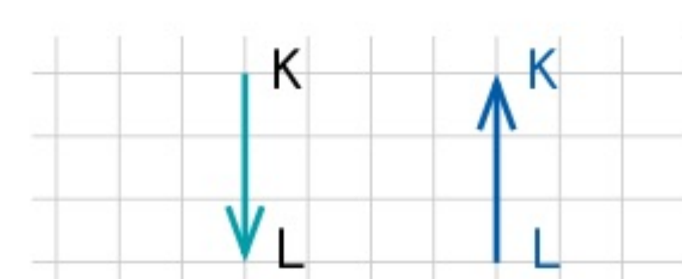


Risinājums

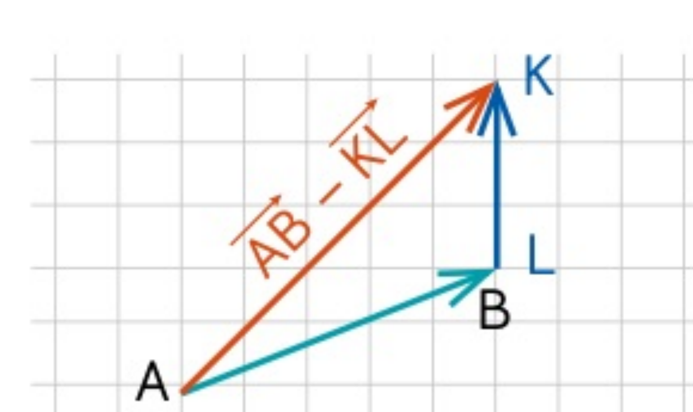
Atņemšanā izmanto pretējā vektora pieskaitīšanu.

$\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{LK}$

$-\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LK}$



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{KL}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AK}$

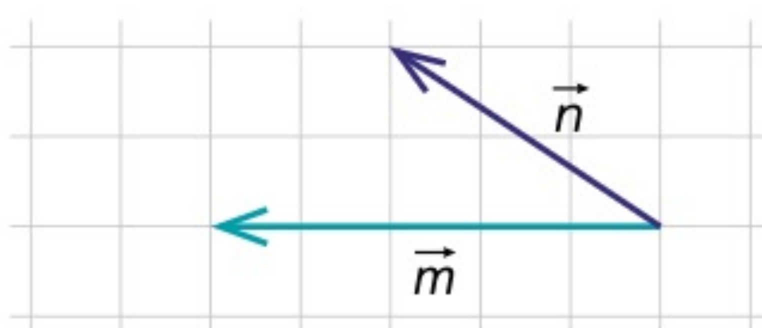


Padomā un uzzīmē kādu citu veidu, kā varētu atņemt šos divus vektorus! Kurš no veidiem tev liekas ērtāks?

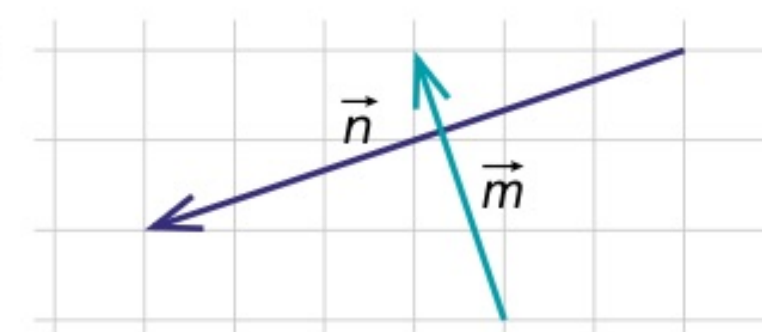
Uzdevumi

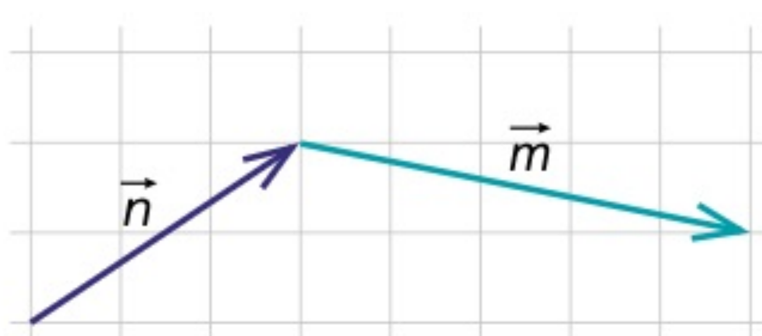
Vektoru atņemšana

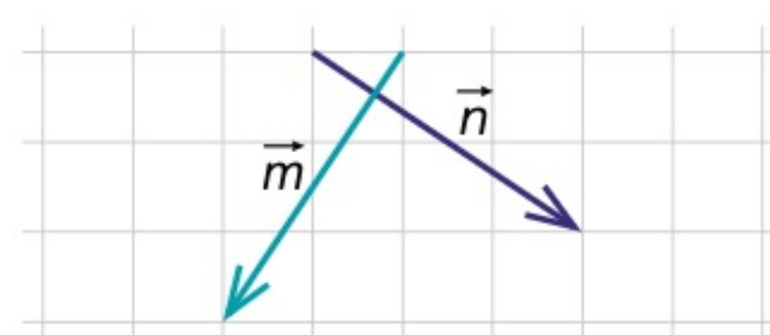
35. Uzzīmē vektoru $\vec{m}$ un $\vec{n}$ starpības vektoru $\vec{m} - \vec{n}$!

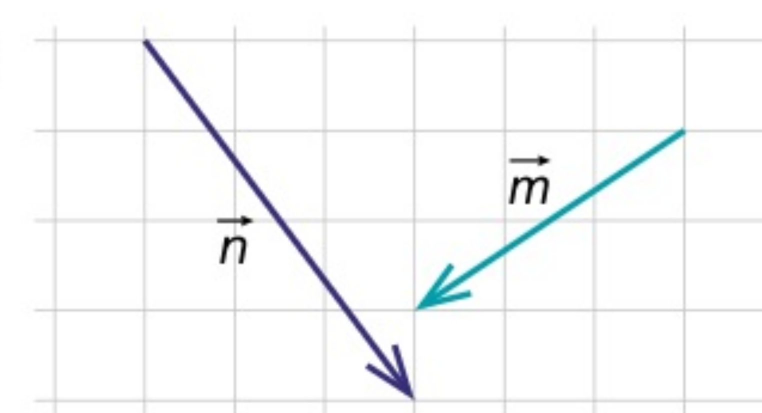
a) 

c) 

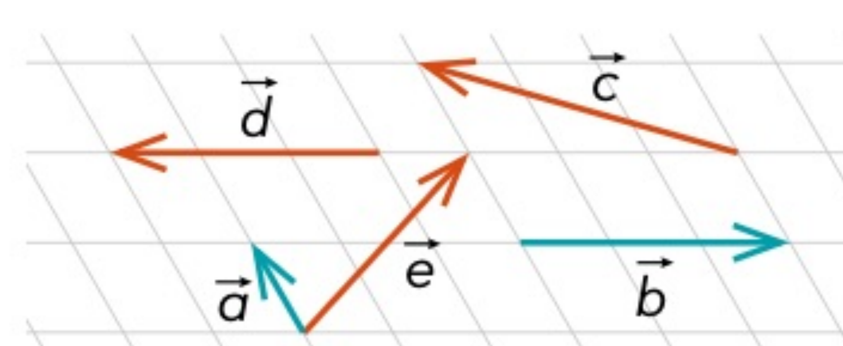
e) 

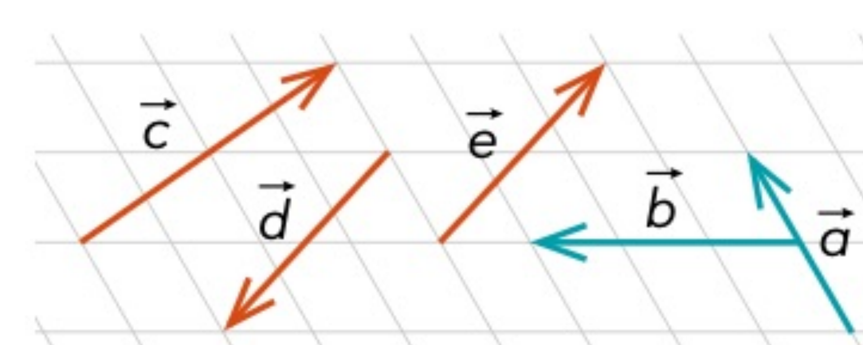
b) 

d) 

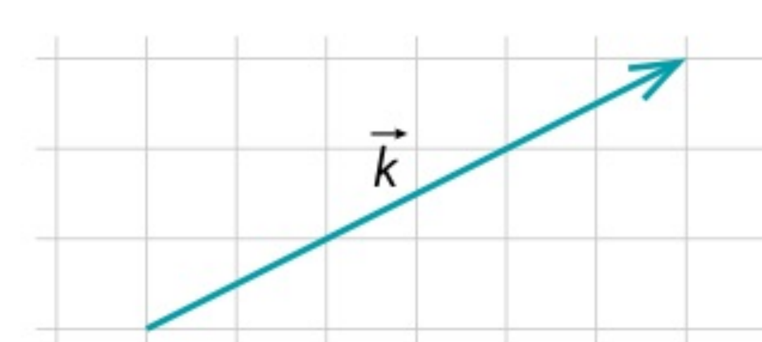
f) 

36. Kurš no vektoriem $\vec{c}$, $\vec{d}$ vai $\vec{e}$ ir starpības $\vec{a} - \vec{b}$ vektors?

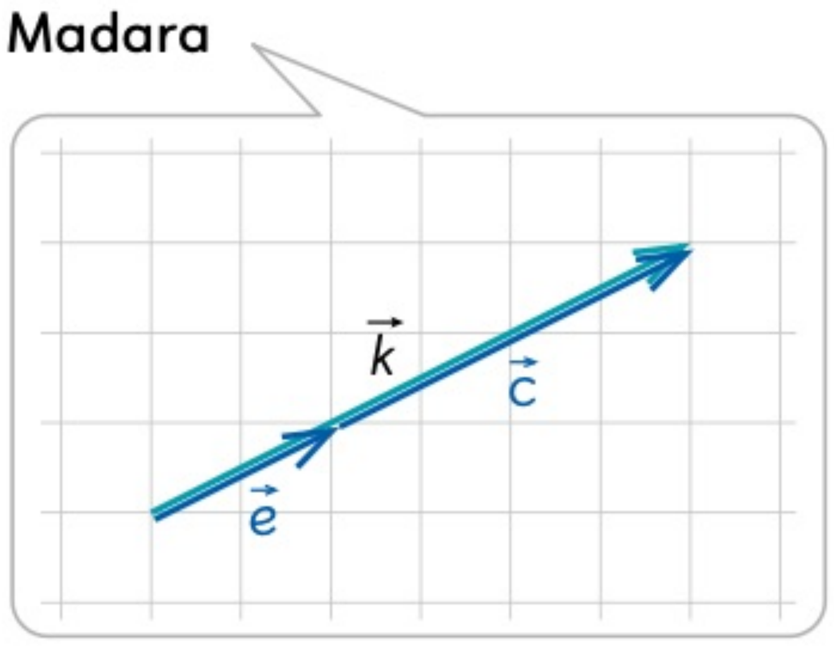
a) 

b) 

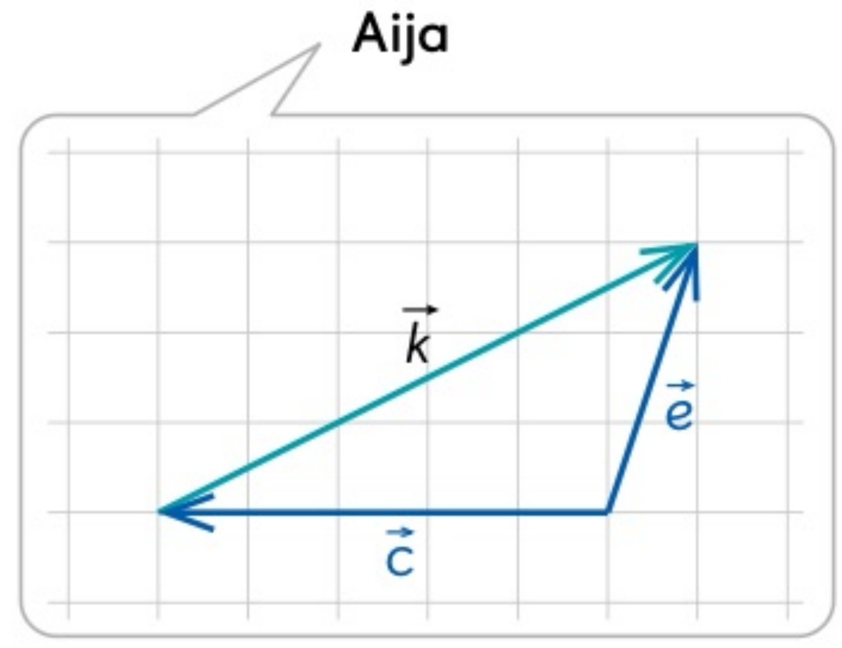
37. Dots vektors $\vec{k}$ (skat. zīm.). Madara, Aija un Nauris papildināja zīmējumu ar vektoriem $\vec{c}$ un $\vec{e}$ tā, lai izpildītos vienādība $\vec{k} = \vec{c} - \vec{e}$. Izvērtē viņu zīmējumu patiesumu!



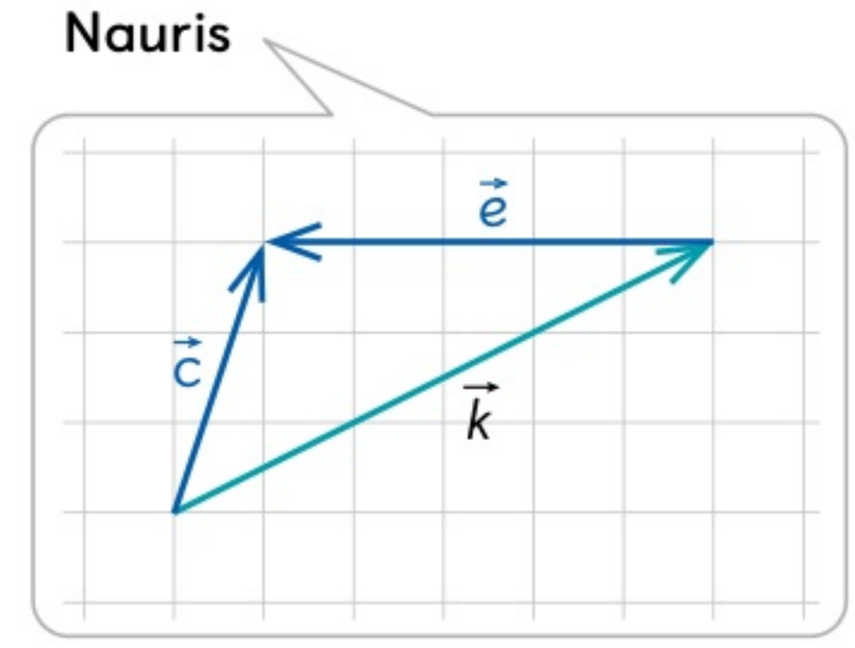
Madara



Aija



Nauris



38. Uzraksti doto vektoru starpības vektoru!

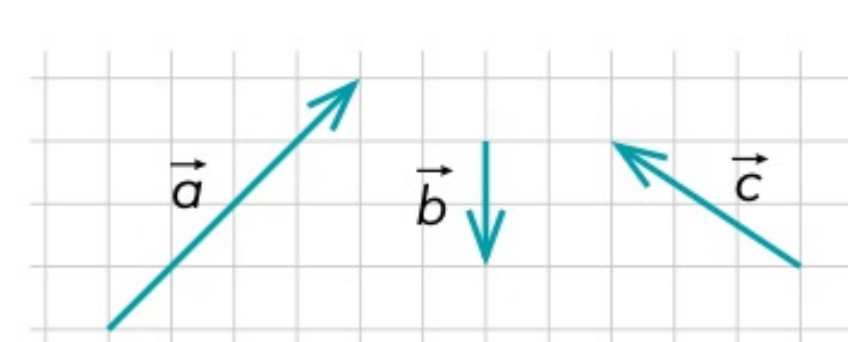
a) $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}$
c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$
e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC}$
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$
f) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

39. Uzzīmē paralelogramu CDEF! Uzzīmē doto vektoru starpības vektoru!

a) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CF}$
b) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DE}$
c) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{CF}$
d) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{DF}$

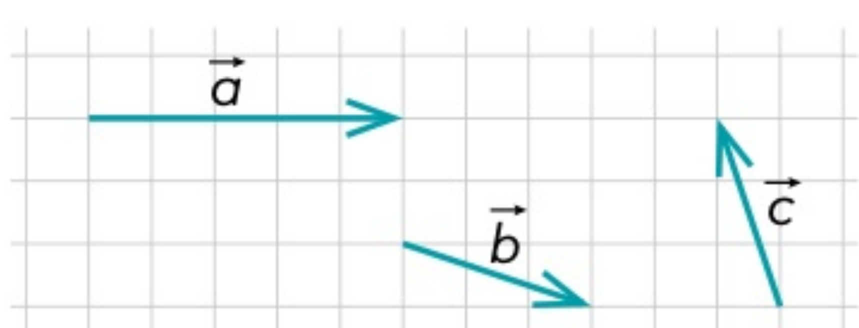
40. Uzzīmē vektoru $\vec{a}$, $\vec{b}$ un $\vec{c}$ (skat. zīm.) darbību rezultējošo vektoru!

a) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
b) $\vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$



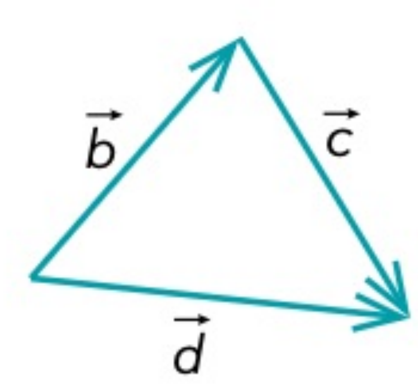
Vektoru saskaitīšana un atņemšana

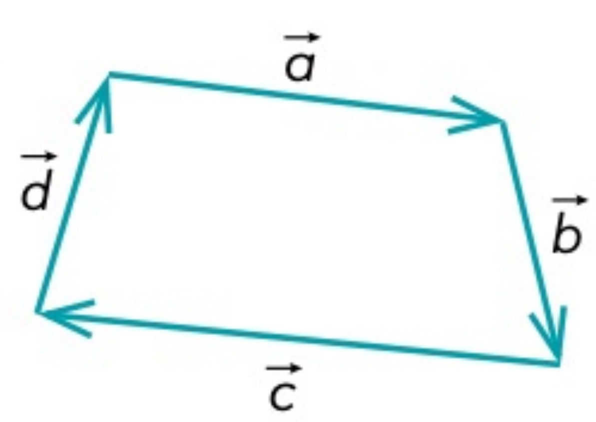
41. Uzzīmē doto vektoru saskaitīšanas vai atņemšanas rezultātā iegūto vektoru!

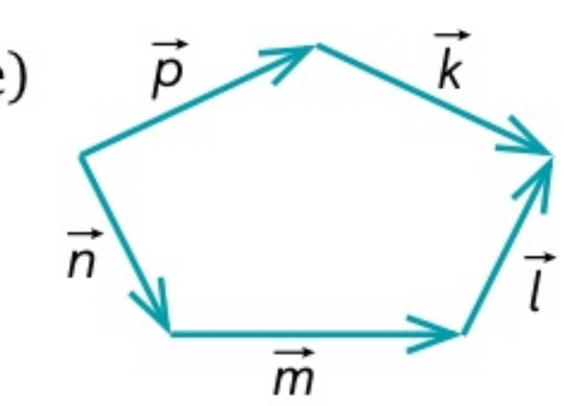


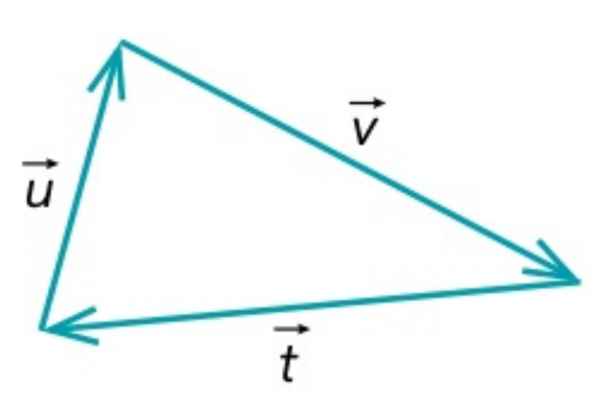
a) $\vec{a}+\vec{b}$
b) $\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}$
c) $\vec{a}-\vec{c}$
d) $\vec{c}-\vec{b}$
e) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$
f) $\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}$

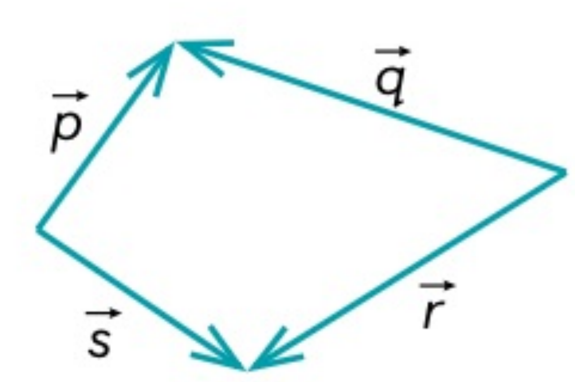
42. Uzraksti zīmējumam atbilstošu patiesu vienādību!

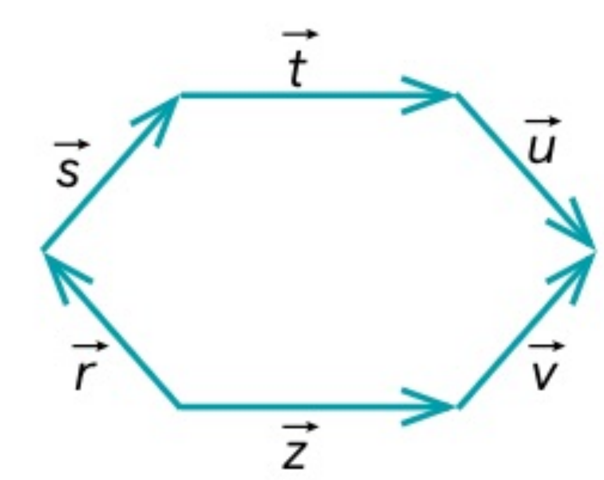
a)


c)


e)


b)


d)


f)


4. PIEMĒRS

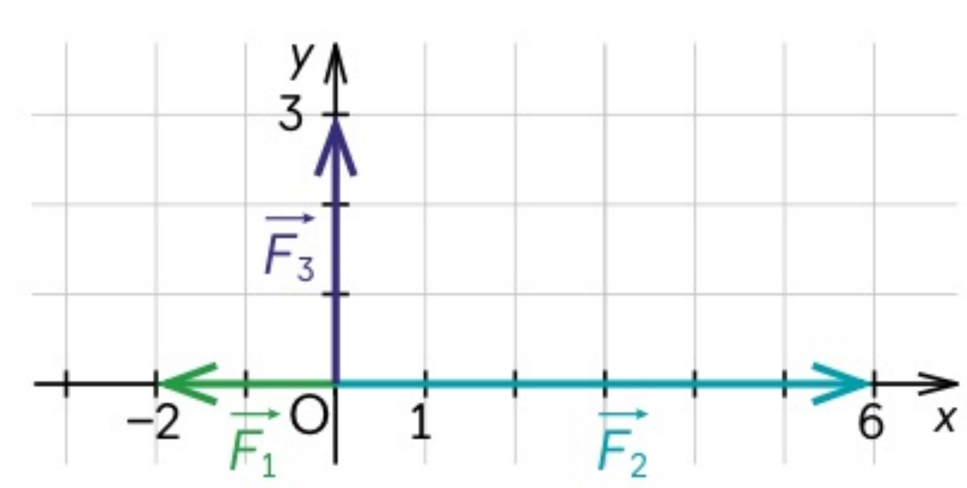
Materiāls punkts O atrodas koordinātu ass sākumpunktā. Uz to darbojas 3 spēki — $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ un $\vec{F}_3$. Vektora $\vec{F}_1$ garums ir 2 vienības, un tas darbojas *x* ass negatīvajā virzienā. Vektora $\vec{F}_2$ garums ir 6 vienības, un tas darbojas *x* ass pozitīvajā virzienā. Vektora $\vec{F}_3$ garums ir 3 vienības, un tas darbojas *y* ass pozitīvajā virzienā.
Zīmējumā attēlo rezultējošo spēku, kas darbojas uz materiālo punktu O!

Risinājums

Risināšanas plāns

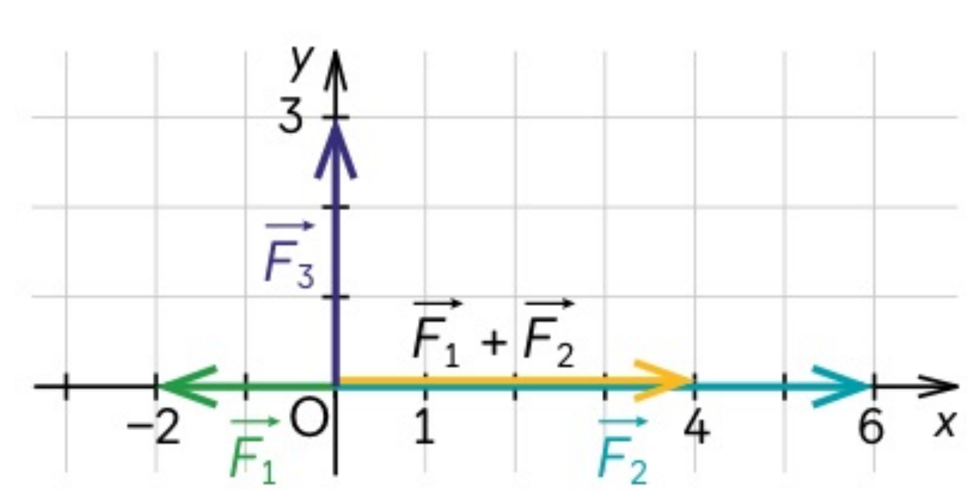
Atliek vektorus.

Vektorus atliek atbilstoši aprakstam, izvēloties vienības lielumu.



Nosaka $\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

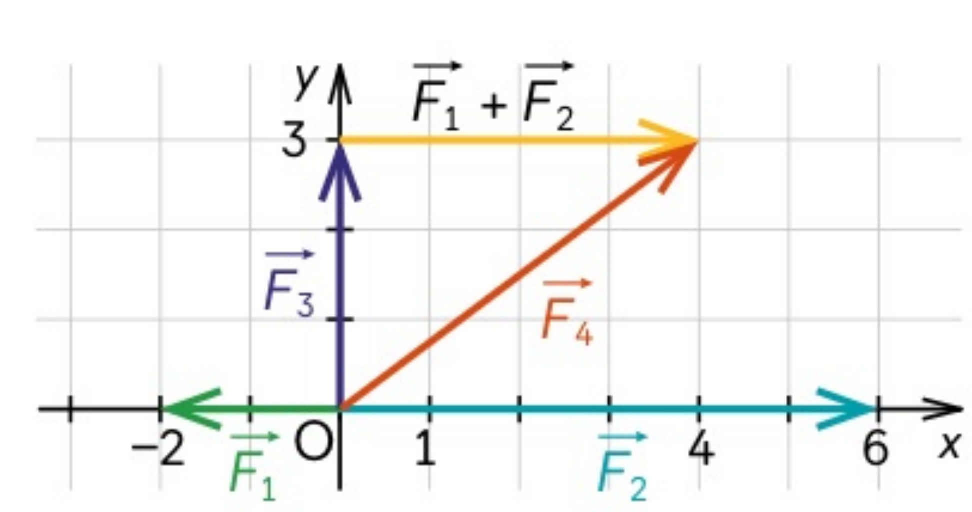
Saskaita vektorus un iegūst summas vektoru $\vec{F}_1+\vec{F}_2$.
Ievēro, ka vektors $\vec{F}_1$ ir pretēji vērsts vektoram $\vec{F}_2$!



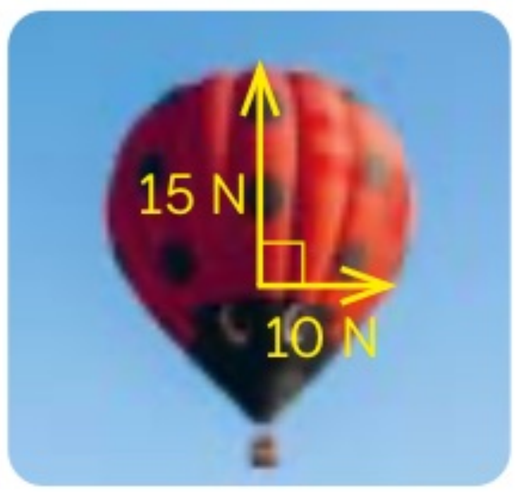
Nosaka $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$.

Pieskaita iegūto summas vektoru $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ vektoram $\vec{F}_3$ un iegūst rezultējošo spēku

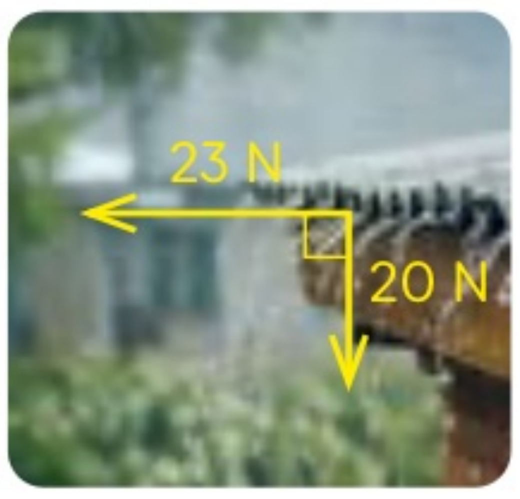
$$\vec{F}_4=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3.$$



43. Piemēros attēlots, kā uz dažādiem objektiem darbojas daži spēki. Nosaki katram objektam pieliktā kopspēka virzienu un lielumu!

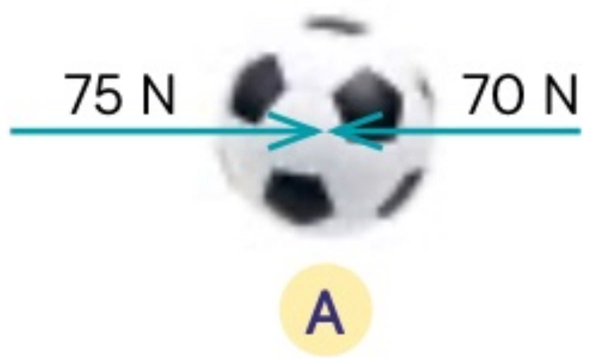
a) 

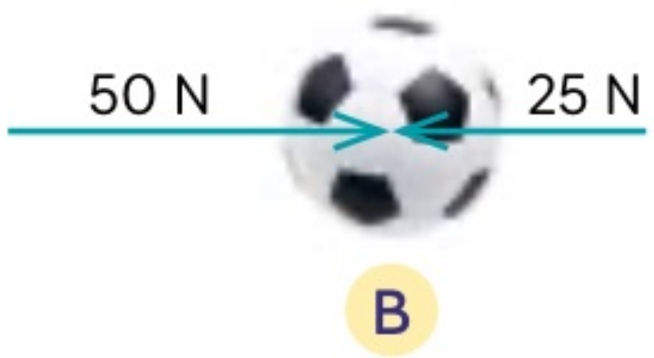
b) 

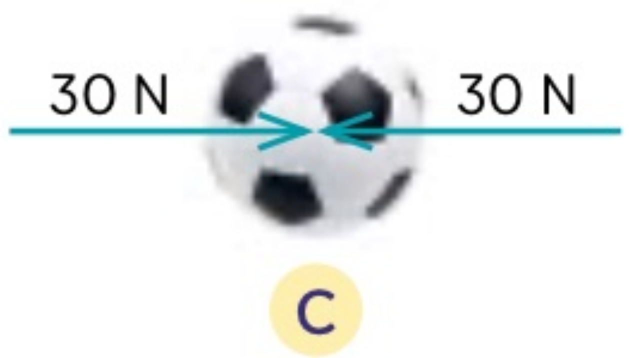
c) 

d) 

44. Futbola spēles laikā bumbu vienlaicīgi sper divi spēlētāji, kuri atrodas bumbas pretējās pusēs.







Kurā no gadījumiem (A vai B, vai C) bumbai tiks pielikts lielākais kopspēks? Pamato atbildi!
Uz kuru pusi katrā no gadījumiem kustēsies bumba? Ar cik lielu spēku?

Ja uz ķermeni vienlaikus darbojas vairāki spēki, tad ķermeņa stāvokli vai tā kustību nosaka visu spēku kopspēks.

45. Nosaki, kurš teikums atbilst katrai izteiksmei!

1 Vektoru $\vec{c}$ un $\vec{d}$ summas vektora garums.
2 Vektoru $\vec{c}$ un $\vec{d}$ starpības vektora garums.
3 Vektoru $\vec{c}$ un $\vec{d}$ garumu summa.
4 Vektoru $\vec{c}$ un $\vec{d}$ garumu starpība.

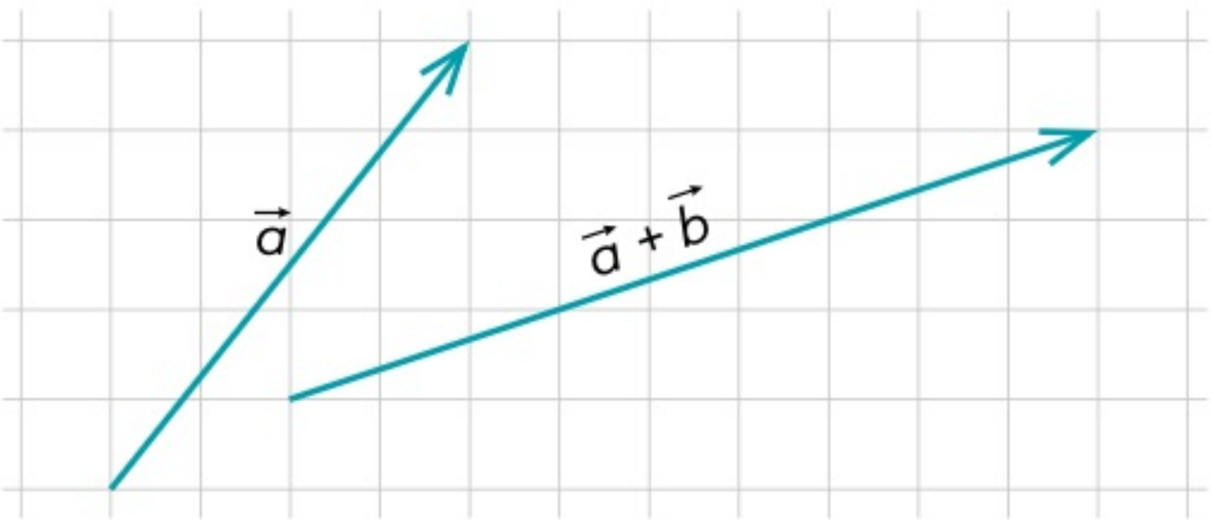
A $|\vec{c}| - |\vec{d}|$
B $|\vec{c} + \vec{d}|$
C $|\vec{c} - \vec{d}|$
D $|\vec{c}| + |\vec{d}|$

46. Trijstūrī ABC malas AB = 5 un BC = 12, $\sphericalangle B = 90°$. Izstāsti vai apraksti, kā tu veiksi norādītās darbības! Aprēķini!

a) $|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BA}|$
b) $|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{BA}|$
c) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$
d) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$
e) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$
f) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$
g) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$
h) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$

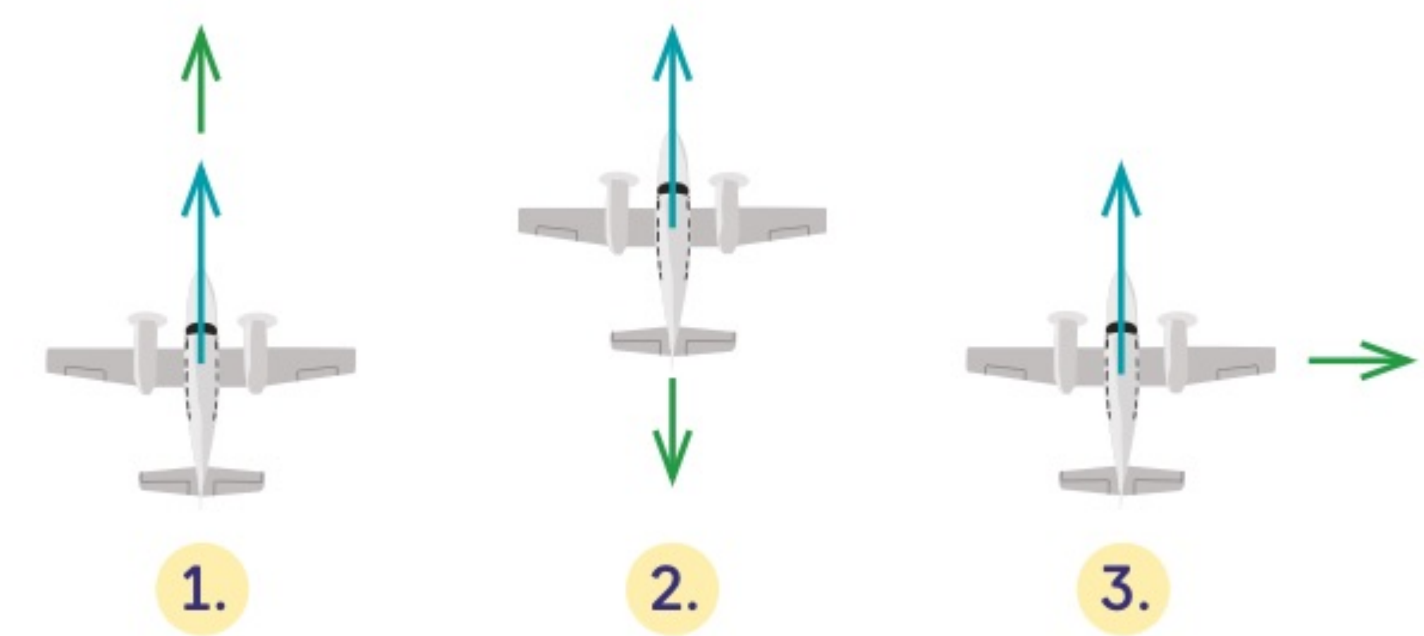
Atceries! $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

47. Uzzīmē vektoru $\vec{b}$, lai iegūtu norādīto summas vektoru $\vec{a} + \vec{b}$ (skat. zīmējumā dotos vektorus)!



48. Ar nemainīgu ātrumu lido trīs vienādas lidmašīnas. Pirmā lido ar ceļavēju, otrā lido pret vēju, bet uz trešo lidmašīnu pūš sānvējš (skat. att.). Vēja stiprums un lidmašīnas ātrums visos gadījumos ir vienāds.

Uzskicē aptuvenu katras lidmašīnas lidojuma trajektoriju un nosaki, kura no lidmašīnām galamērķi sasniegs pirmā!



Trajektorija — līnija, pa kuru pārvietojas ķermenis.

49. Peldētājs 100 metrus baseinā nopeld 1 min 20 s. Cik ilgi peldētājs 100 m peldēs pa upi, kuras straumes ātrums ir 1,2 $\frac{m}{s}$, ja viņš peld ar nemainīgu ātrumu

a) pa straumi,

b) pret straumi?

50. Lidmašīnas ātrums ir 480 $\frac{km}{h}$, un tas ir nemainīgs. Cik ilgi lidmašīna lidos 940 km, ja pūš 10 $\frac{km}{h}$ liels pretvējš?

51. Izdomā un apraksti situāciju, kurā nepieciešamas zināšanas par vektoru saskaitīšanu!

5. PIEMĒRS

Motorlaiva pārvietojas ar nemainīgu ātrumu 5 $\frac{m}{s}$ austrumu virzienā. Straume tek ar vidējo ātrumu 2,5 $\frac{m}{s}$ dienvidu virzienā.

a) Cik liels ir motorlaivas rezultējošais ātrums, un kādu leņķi ātruma vektors veido ar ziemeļu virzienu?

b) Cik ilgā laikā motorlaiva šķērsos upi, ja upes platums ir 80 m?

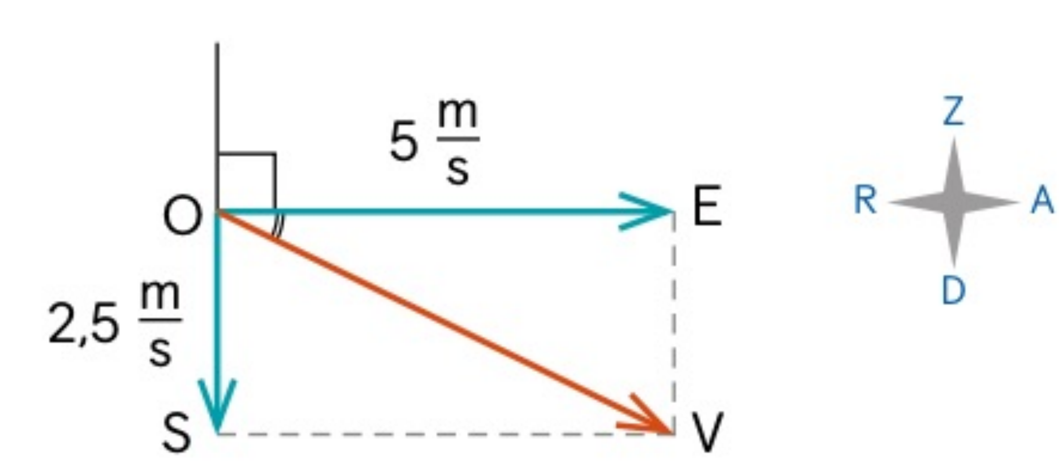
c) Par cik metriem lejup pa straumi attiecībā pret izbraukšanas punktu būs pārvietojusies motorlaiva?

Risinājums

a) Uzzīmē skici.

Motorlaivas kurss ir $\overrightarrow{OE}$ virzienā, bet straumes virziens ir $\overrightarrow{OS}$ virzienā.

Rezultējošā ātruma vektoru $\overrightarrow{OV}$ atrod, izmantojot paralelograma likumu, un tas atbilst vektora $\overrightarrow{OV}$ garumam.



Atceries!

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{pretkatetes garums}}{\text{piekatetes garums}}$$

Trijstūris EVO ir taisnleņķa trijstūris, tādēļ $\mathrm{tg}\sphericalangle EOV = \frac{EV}{OE} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$.

Izmantojot kalkulatoru, aprēķina leņķa EOV lielumu. $\sphericalangle EOV \approx 26{,}6°$

Tātad laiva pārvietojas $90° + 26{,}6° \approx 116{,}6°$ leņķī, salīdzinot ar ziemeļu virzienu.

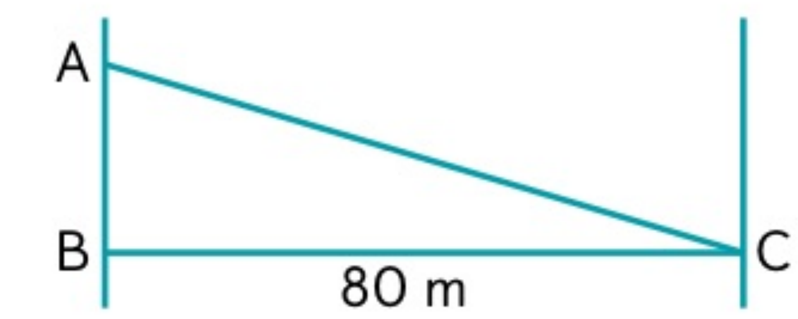
Izmantojot Pitagora teorēmu, aprēķina rezultējošā ātruma vektora garumu:

$|\overrightarrow{OV}| = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25} \approx 5{,}6\left(\frac{m}{s}\right)$.

Kurss — virziens, kādā pārvietojas laiva, ja nav straumes.

b) Lai aprēķinātu laiku, kas nepieciešams upes šķērsošanai, izmanto trijstūru līdzību.

Tā kā rezultējošā ātruma vektors nosaka, pa kādu trajektoriju laiva šķērsos upi, tad △OVS (skat. a) piem. zīm.), kura malas ir ātruma vektoru garumi, ir līdzīgs △ACB (skat. zīm.), kura mala AC atbilst laivas pārvietojumam no viena upes krasta uz otru, bet mala BC atbilst upes platumam.



Pēc taisnleņķa trijstūru līdzības pazīmes *ll* △ABC ~ △OVS.

Tā kā $t = \frac{s}{v}$ (no ātruma aprēķināšanas formulas $v = \frac{s}{t}$), tad laiku t var aprēķināt, izdalot veikto ceļu AC ar rezultējošo ātrumu OV, t. i., $\frac{AC}{OV}$.

Tā kā △ACB ~ △OVS, tad šo trijstūru līdzības koeficients atbilst laikam t:

$$\frac{AC}{OV} = \frac{BC}{SV} = \frac{80\ \text{m}}{5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 16\ \text{s}$$

c) $AB = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 16\ \text{s} = 40\ \text{m}$

52. Motorlaiva brauc ar nemainīgu vidējo ātrumu $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uz rietumiem, straumes vidējais ātrums ir $3{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uz ziemeļiem.

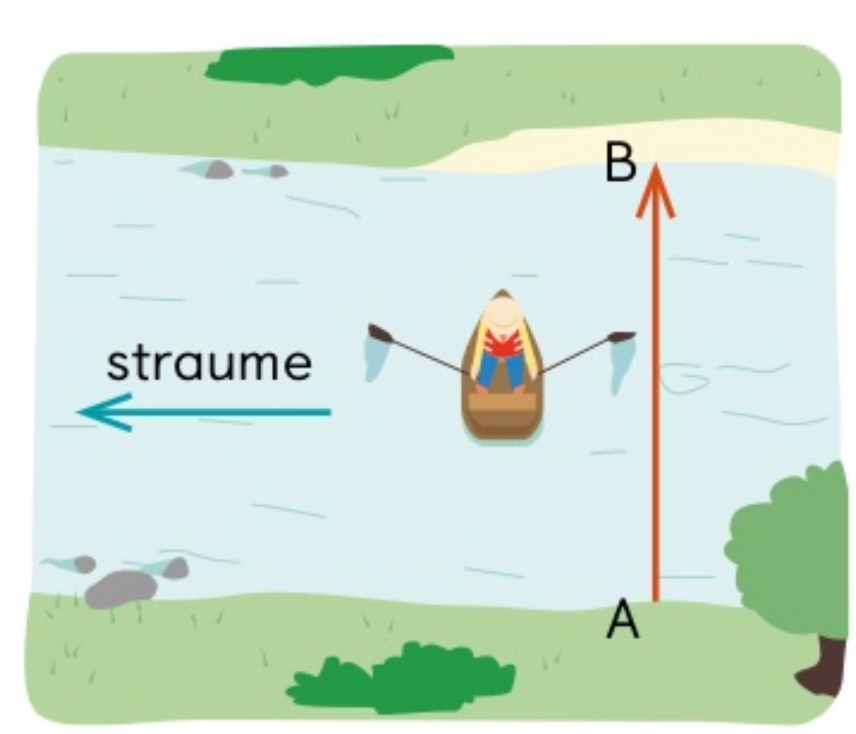
a) Nosaki motorlaivas rezultējošo ātrumu!

b) Cik ilgi motorlaiva brauks no viena krasta līdz otram, ja upes platums ir 120 m?

c) Par cik metriem lejup pa straumi attiecībā pret izbraukšanas punktu būs pārvietojusies motorlaiva?

Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām!

53. Airētājs stāvošā ūdenī airē ar nemainīgu vidējo ātrumu $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Upe ir 200 m plata, un straumes vidējais ātrums ir $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (skat. zīm.).



a) Cik tālu straume aiznestu laivu, ja airētu perpendikulāri krastam?

b) Kādā virzienā jāairē laiva (jānosaka kurss), lai pretējā krastā tā nonāktu punktā B — tieši pretī izbraukšanas punktam A? Cik liels būs rezultējošais ātrums, un cik ilgā laikā airētājs sasniegs pretējo krastu?

c) Kādā virzienā jāairē laiva (laivas kurss), lai visātrāk nonāktu pretējā krastā?

Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām!

54. Uzskicē atbilstošu zīmējumu un aprēķini leņķi starp kursu un trajektoriju!

a) Kuteris brauc ar vidējo ātrumu 10 mezgli, tā kurss ir 30° attiecībā pret ziemeļu virzienu. Straumes virziens ir 120° attiecībā pret ziemeļu virzienu, bet kutera rezultējošais ātrums ir 20 mezgli.

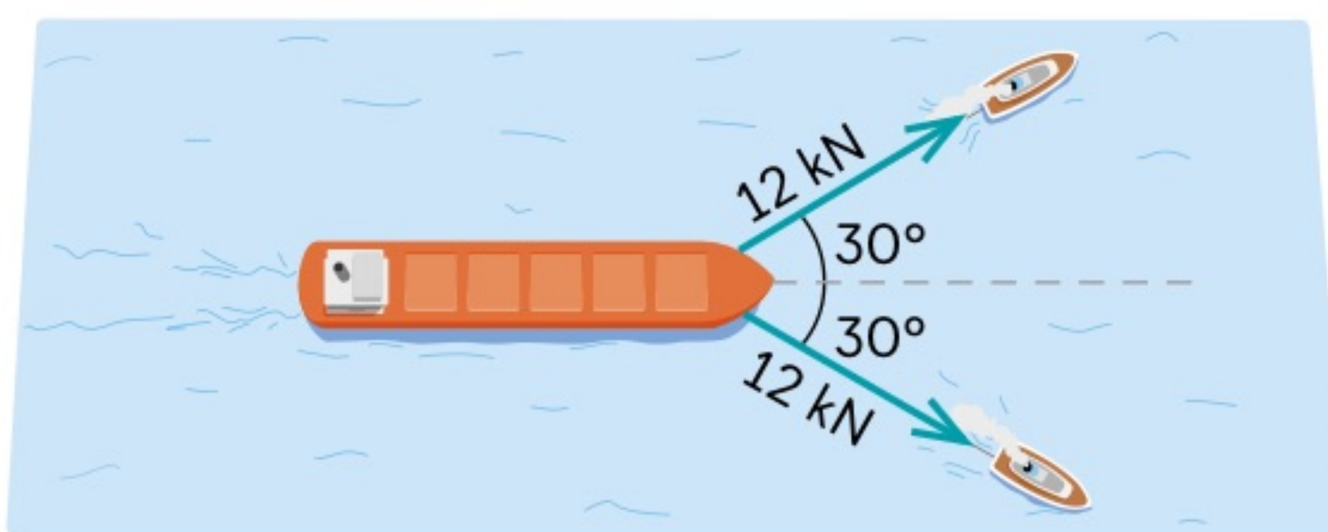
b) Laivas trajektorija ar ziemeļu virzienu veido 70° leņķi, tās rezultējošais ātrums ir 8 mezgli, straumes virziens ar ziemeļu virzienu veido 160°, un tās ātrums 8 mezgli.

Mezgls — ātruma mērvienība jūrniecībā. | 1 mezgls = $\frac{1\ \text{jūras jūdze}}{1\ \text{stunda}} \approx 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ | 1 jūras jūdze = 1,852 km

55. Vējš pūš dienvidrietumu virzienā. Lidmašīnai jālido uz ziemeļiem, lai no pilsētas A aizlidotu uz pilsētu B. Uzskicē pilsētas B iespējamo atrašanās vietu!

Atpakaļceļā vēja ātrums un virziens nemainās, kā arī lidmašīnas ātrums ir tāds pats. Uzskicē, kāds kurss jāuzstāda, lai lidmašīna sasniegtu pilsētu A!

56. Divi velkoņi velk kuģi tā, kā parādīts attēlā.

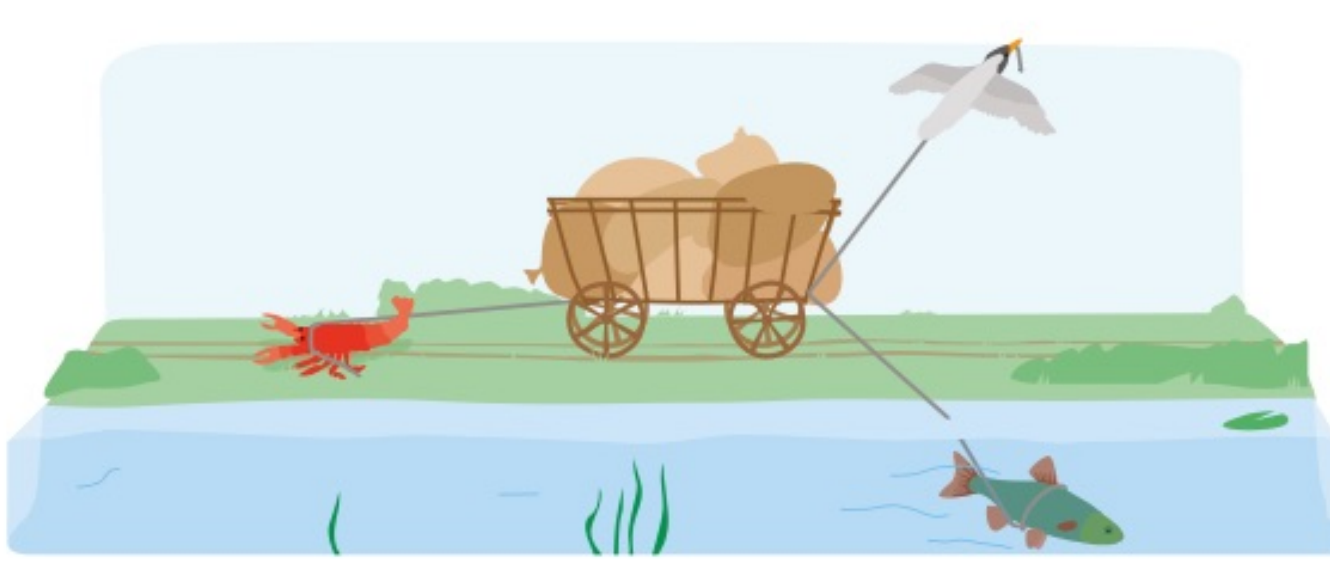


Aprēķini velkoņu kopējo rezultējošo spēku!
Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām!

57. Sameklē pasakas un paskaidro attēlotās situācijas, izmantojot vektorus!

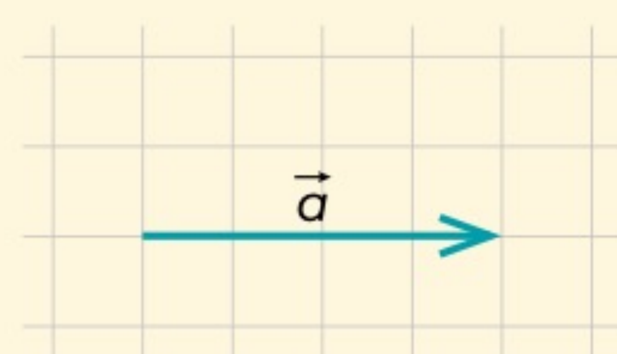
a) “Pasaka par rāceni”.

b) “Gulbis, līdaka un vēzis”.



Vai, zinot vektoru saskaitīšanu, var izskaidrot vektora reizināšanu ar skaitli?

Dots vektors $\vec{a}$ (skat. zīm.).



> Uzzīmē vektoru summu!

a) $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$

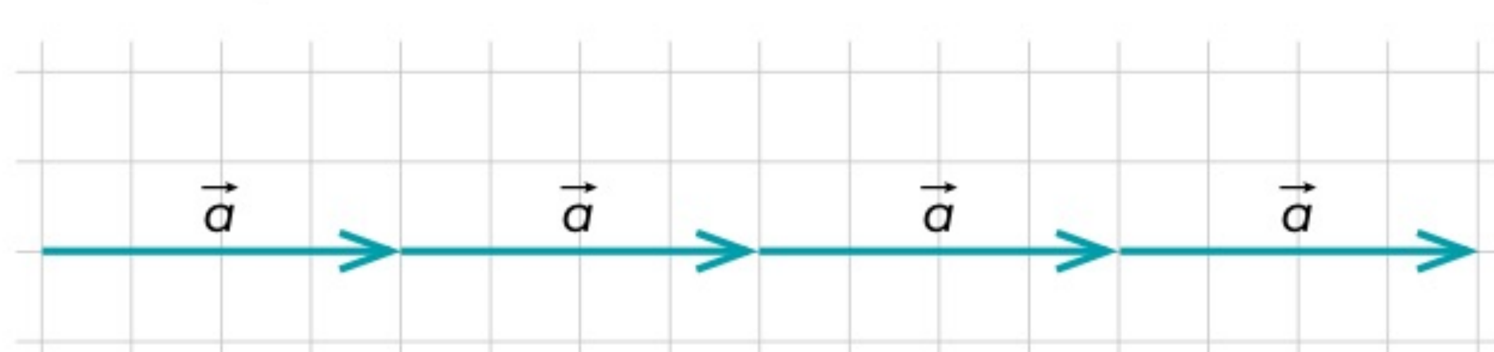
b) $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$

c) $-\vec{a}+(-\vec{a})$

Salīdzini savus zīmējumus ar klasesbiedru zīmējumiem!

Apspriediet, kā var pierakstīt katras uzzīmētās vektoru summas rezultātu!

> Kā citādi pierakstīsi vektoru summu $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$?



Vai summas noteikšanai vienmēr jāzīmē zīmējums?

> Apraksti vai izstāsti, kā var attēlot $\frac{1}{2}\vec{a}$!

> Uzraksti, kā tu paskaidrotu vektora reizinājumu ar naturālu skaitli, veselu negatīvu skaitli un daļskaitli!

Salīdzini savu skaidrojumu ar klasesbiedru skaidrojumu vai ar atbilstošiem aprakstiem dažādos uzziņas avotos!

Vektora reizināšana ar skaitli. Vektora izteikšana ar dotajiem vektoriem

Lai iegūtu vektoru, kas ir vairākas reizes garāks vai īsāks par doto vektoru, izmanto vektora reizināšanu ar skaitli. Dažkārt, lai veidotu uzdevuma pamatojumu vai iegūtu vienkāršāku risinājumu, vektoru var izteikt ar citiem vektoriem.

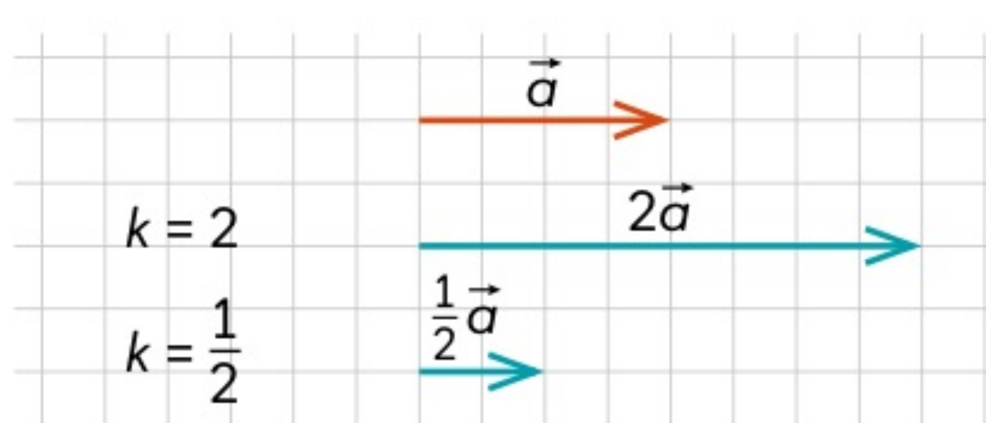
vektora reizināšana ar skaitli | vektora izteikšana ar dotajiem vektoriem

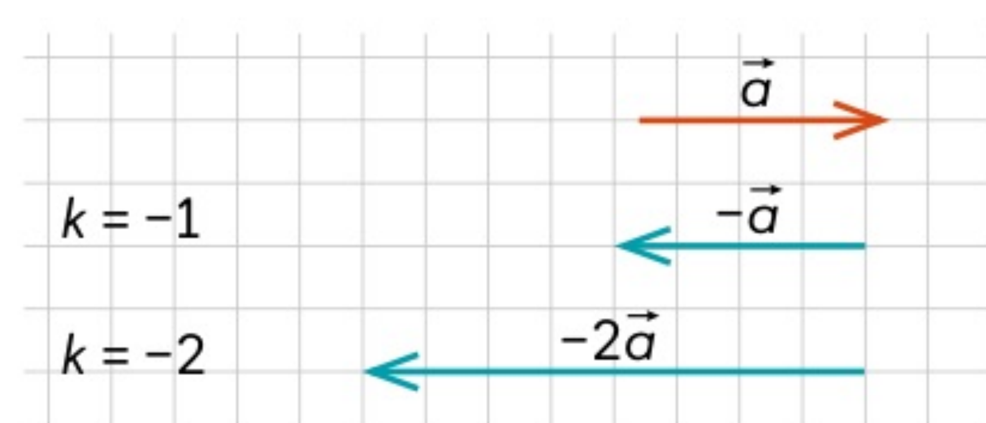
Vektora reizināšana ar skaitli

Par **vektora $\vec{a}$ reizinājumu ar skaitli k** ($k \neq 0$) sauc vektoru $\vec{b}$, kura garums $|\vec{b}|$ vienāds ar $k \cdot |\vec{a}|$, turklāt
1) vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir **vienādi vērsti**, ja $k > 0$,
2) vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir **pretēji vērsti**, ja $k < 0$.

Vektora reizinājumu ar skaitli apzīmē: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Piemēram, dots vektors $\vec{a}$.

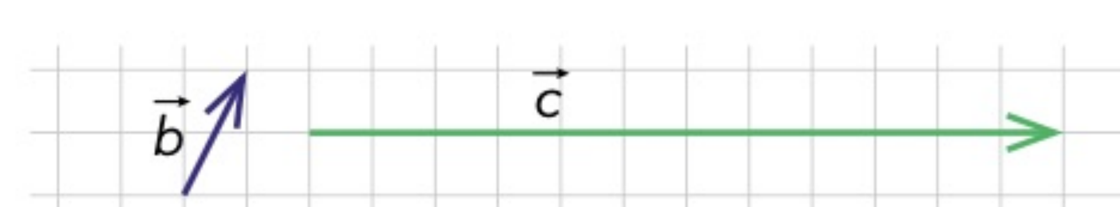




Kādu vektoru iegūst, ja to reizina ar 0?
Kādu vektoru iegūst, ja nulles vektoru reizina ar skaitli?

1. PIEMĒRS

Doti vektori $\vec{b}$ un $\vec{c}$ (skat. zīm.).
Uzzīmē $\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b}$!

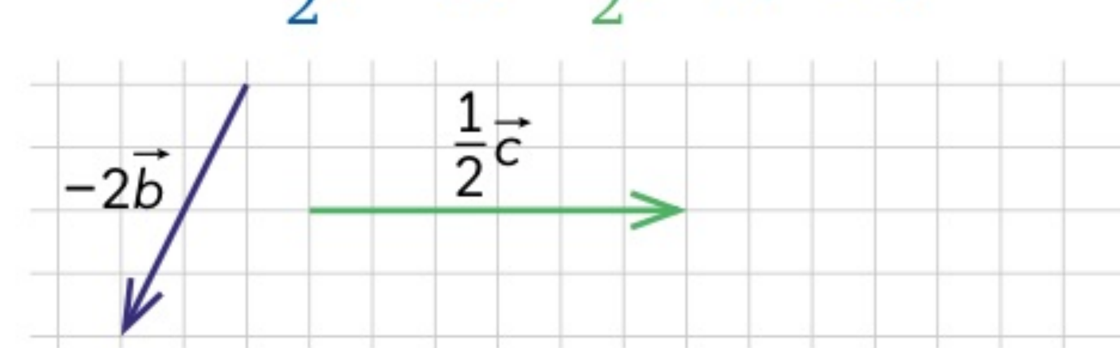


Risinājums

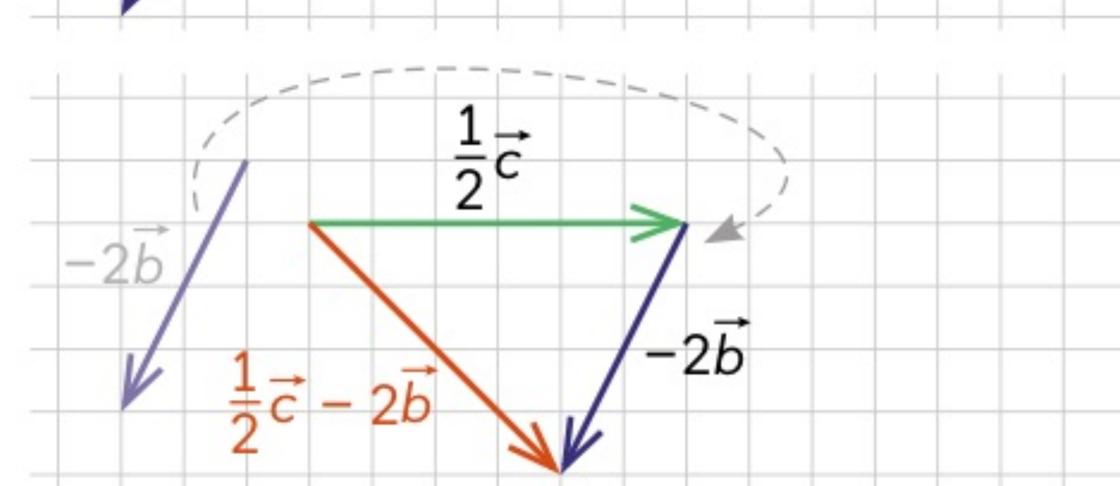
Starpību uzraksta kā divu vektoru summu.

$$\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} + (-2\vec{b})$$

Uzzīmē vektorus $\frac{1}{2}\vec{c}$ un $-2\vec{b}$.



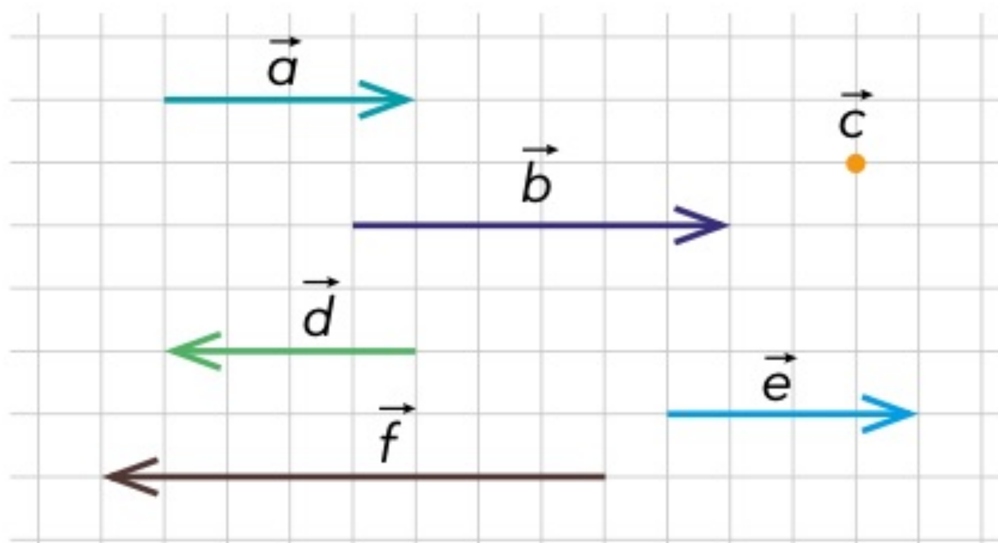
Uzzīmē vektoru $\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b}$.

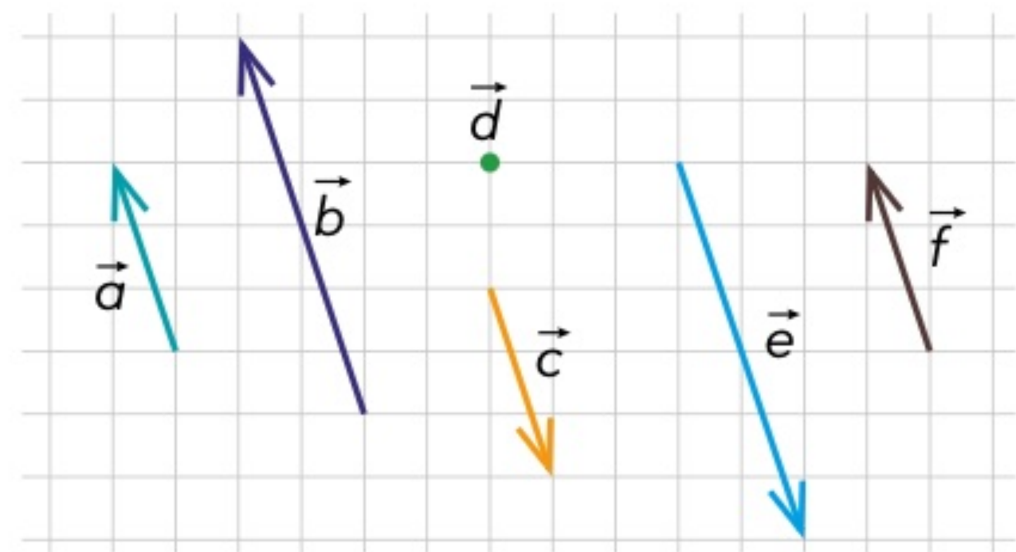


Uzdevumi

Vektora reizināšana ar skaitli

58. Dots vektors $\vec{a}$. Vektori $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ tiek iegūti, vektoru $\vec{a}$ reizinot ar skaitli k. Nosaki skaitli k!

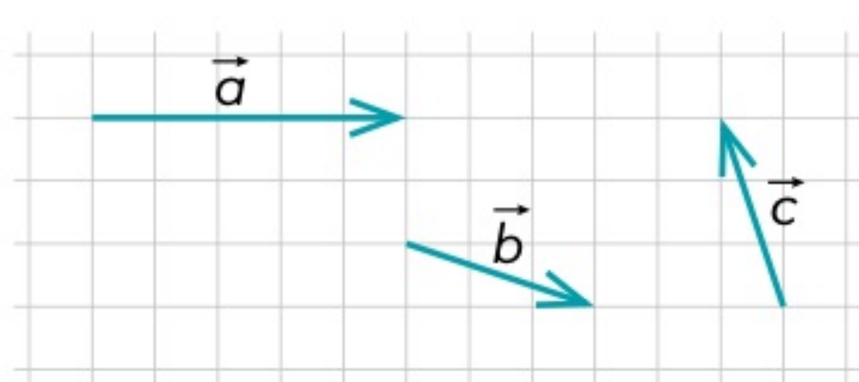
a)


b)


59. Dots vektors $\vec{a}$. Paskaidro, kāds ir vektora virziens un garums, ja to salīdzina ar vektoru $\vec{a}$!

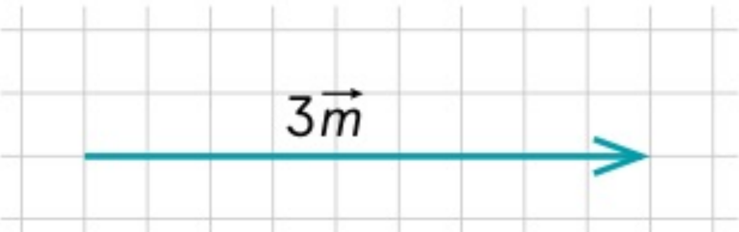
a) $2\vec{a}$ b) $6{,}08\vec{a}$ c) $-1 \cdot \vec{a}$ d) $-0{,}45\vec{a}$ e) $0{,}7\vec{a}$

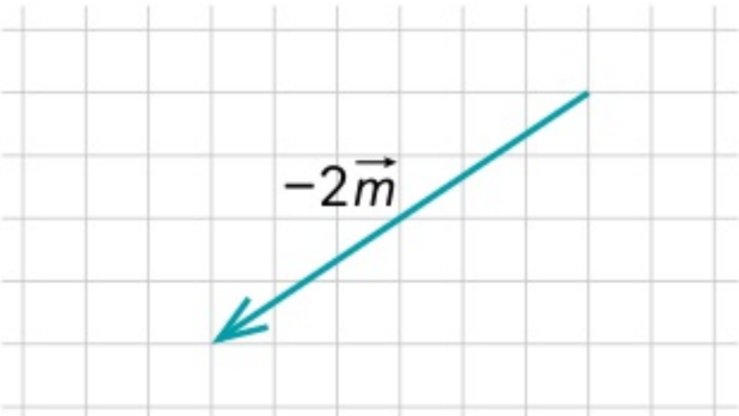
60. Uzzīmē zīmējumā doto vektoru reizināšanas ar skaitli, saskaitīšanas vai atņemšanas rezultātā iegūto vektoru!

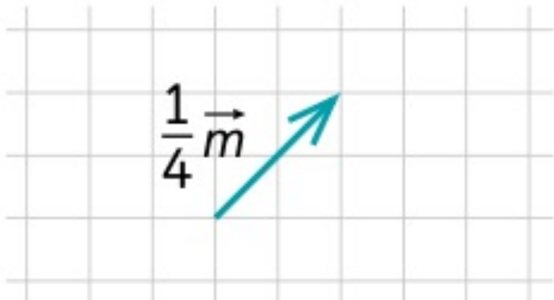


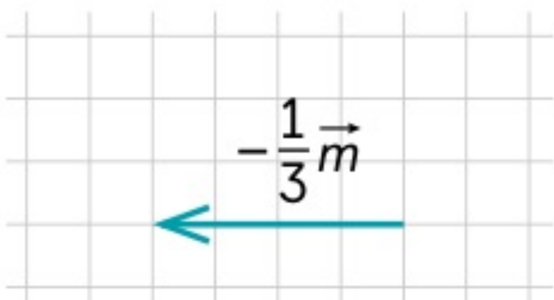
a) $4\vec{b}$
b) $2\vec{a} + \vec{b}$
c) $0 \cdot \vec{c}$
d) $-1{,}5\vec{a}$
e) $\frac{1}{2}\vec{c}$
f) $-3\vec{b}$
g) $2\vec{a} - \vec{c}$
h) $\frac{3}{5}\vec{a} + 2\vec{c}$
i) $\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b}$

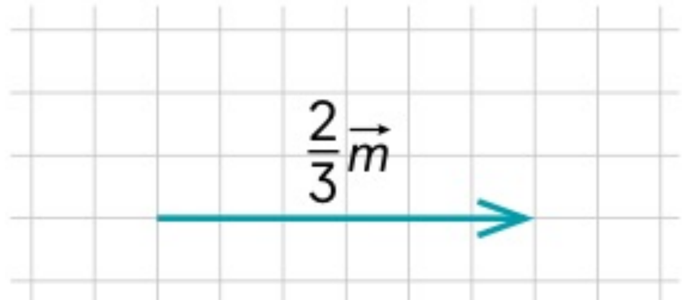
61. Uzzīmē vektoru $\vec{m}$, ja dots vektors $k\vec{m}$ $(k \neq 0)$!

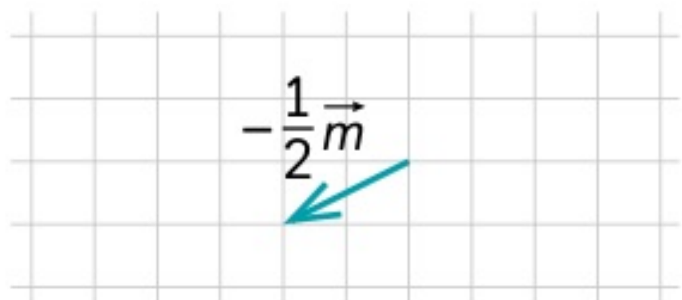
a)


b)


c)


d)


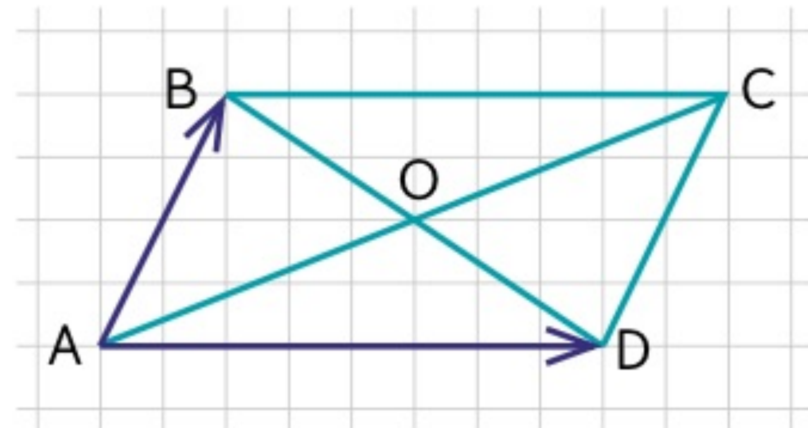
e)


f)


Izdomā trīs līdzīgus piemērus par doto vektoru un tā reizinājumu ar skaitli! Samainies piemēriem ar klasesbiedru! Izpildiet viens otra piemērus un salīdziniet risinājumus!

62. ABCD — paralelograms. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (skat. zīm.).

a) Atliec vektoru $\frac{1}{2}\vec{b}$ no punkta O!
b) Atliec vektoru $-\frac{1}{2}\vec{a}$ no punkta O!
c) Konstruē vektoru $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$!



63. Uzzīmē divus vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Uzzīmē vektorus $\vec{a} + \vec{b}$, $2(\vec{a} + \vec{b})$, $2\vec{a} + 2\vec{b}$! Ko vari secināt? Veido zīmējumus, izmantojot programmu *GeoGebra* (vai citu IT rīku)!

64. Uzzīmē divus vektorus! Konstruē vektoru $\vec{b}$, ja:

a) viens no uzzīmētajiem vektoriem ir $\vec{a}$, bet otrs ir $\vec{a}+\vec{b}$,

b) viens no uzzīmētajiem vektoriem ir $2\vec{a}$, bet otrs ir $\vec{a}+\vec{b}$,

c) viens no uzzīmētajiem vektoriem ir $-3\vec{a}$, bet otrs ir $\vec{a}+\vec{b}$,

d) viens no uzzīmētajiem vektoriem ir $2\vec{a}$, bet otrs ir $\vec{a}-\vec{b}$,

e) viens no uzzīmētajiem vektoriem ir $-3\vec{a}$, bet otrs ir $\vec{b}-\vec{a}$!

65. Uzzīmē ātruma vektoru $\vec{v}$! Zināms, ka vektora $\vec{v}$ modulis ir 10 km/h.

a) Uzskicē vektoru $2\vec{v}$. Ko raksturo šis vektors?

b) Uzskicē vektoru $-\vec{v}$. Ko raksturo šis vektors?

66. Doti punkti A un B. Apraksti punkta P atrašanās vietu, ja $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ $(k \neq 0)$! Ieteicams apskatīt visus četrus gadījumus!

1) $k < 0$ 2) $0 < k < 1$ 3) $k = 1$ 4) $k > 1$

Uzzīmē katram gadījumam vienu piemēru!

67. Nosaki vektoru $\vec{x} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$, ja $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ un $\vec{v} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$!
Risini uzdevumu divējādi — veido atbilstošu zīmējumu un veic darbības ar vektoriem!

Kā tu pārliecinies, vai tavs risinājums ir pareizs un tu neesi kļūdījies?

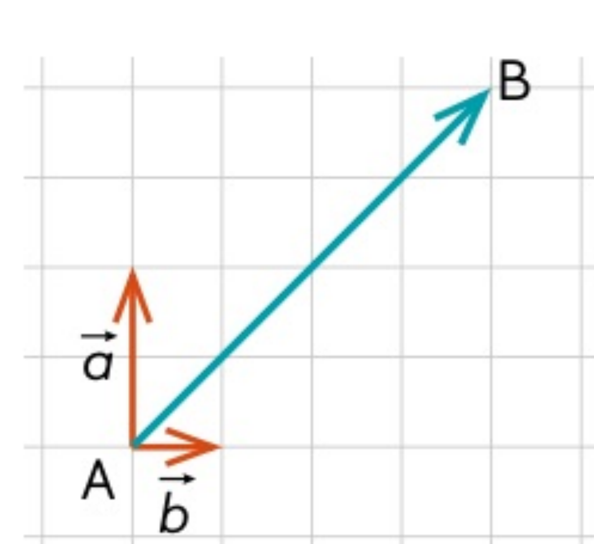
Vektora izteikšana ar dotajiem vektoriem

Ja plaknē doti divi vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kas neatrodas uz paralēlām taisnēm, tad katru citu šīs plaknes vektoru $\vec{c}$ var izteikt ar dotajiem vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$, t. i., vektoru $\vec{c}$ iespējams uzrakstīt formā

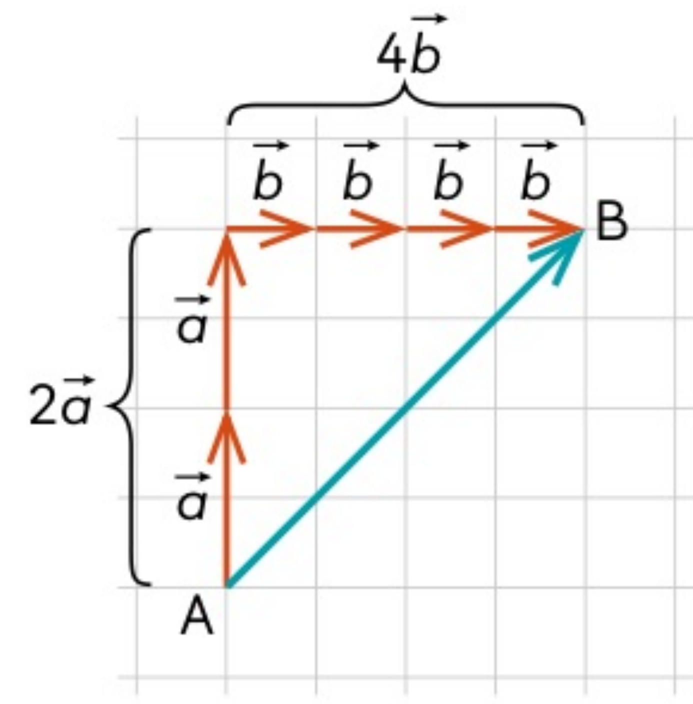
$$\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}, \text{ kur } m, n \in \mathrm{R}.$$

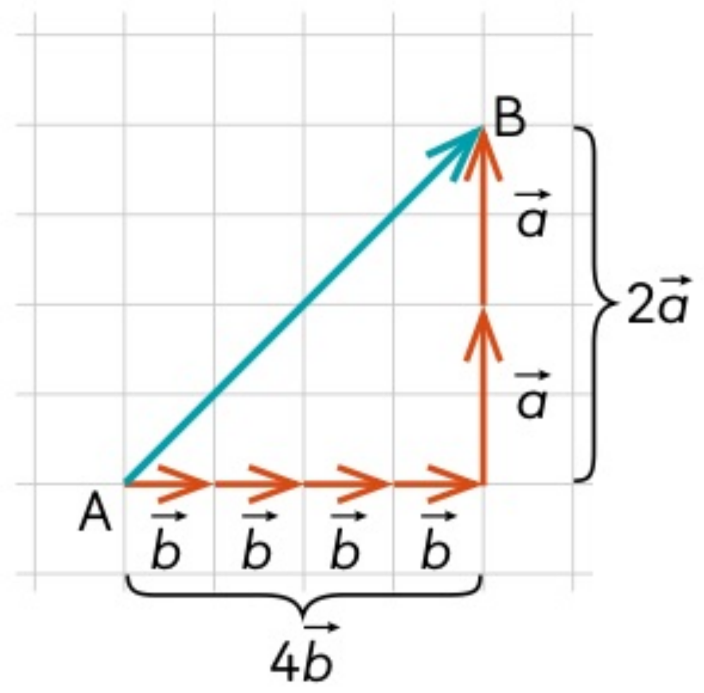
Kāpēc definīcijā minēts, ka vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ neatrodas uz paralēlām taisnēm?

Izsaka vektoru $\overrightarrow{AB}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.



To var attēlot vairākos veidos, aplūko divus no tiem!





Vektoru $\overrightarrow{AB}$ aizstāj ar iegūtajām izteiksmēm:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + 4\vec{b}.$$

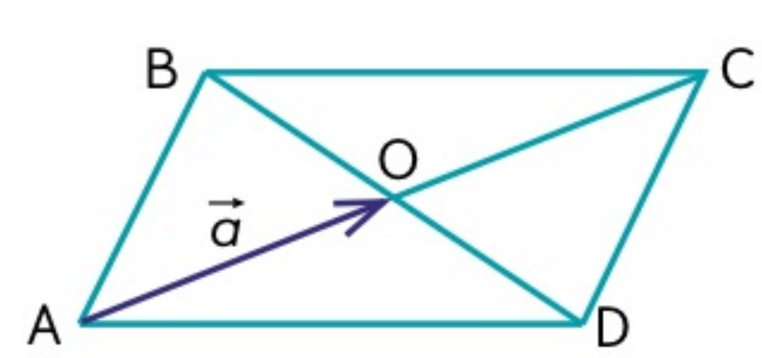
Atceries!	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Lai izteiktu vektoru $\overrightarrow{AB}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$, jāpievērš uzmanība tam,

- vai vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ vērsumi jāsaglabā vai jāmaina,
- cik vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ nepieciešams, lai izteiktu vektoru $\overrightarrow{AB}$, vai otrādi — cik liela daļa no vektora $\overrightarrow{AB}$ ir vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$,
- vai vektoru $\overrightarrow{AB}$ izsaka kā doto vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ summu vai starpību.

Vektoru izteikšanu izmanto arī situācijās ar ģeometrisku saturu.

Piemēram, dots paralelograms ABCD un $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ (skat. zīm.).
Vektors $\overrightarrow{AC}$ jāpieraksta, izmantojot vektoru $\vec{a}$.
Tā kā punkts O ir diagonāļu krustpunkts, tad $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$.



Uzdevumi

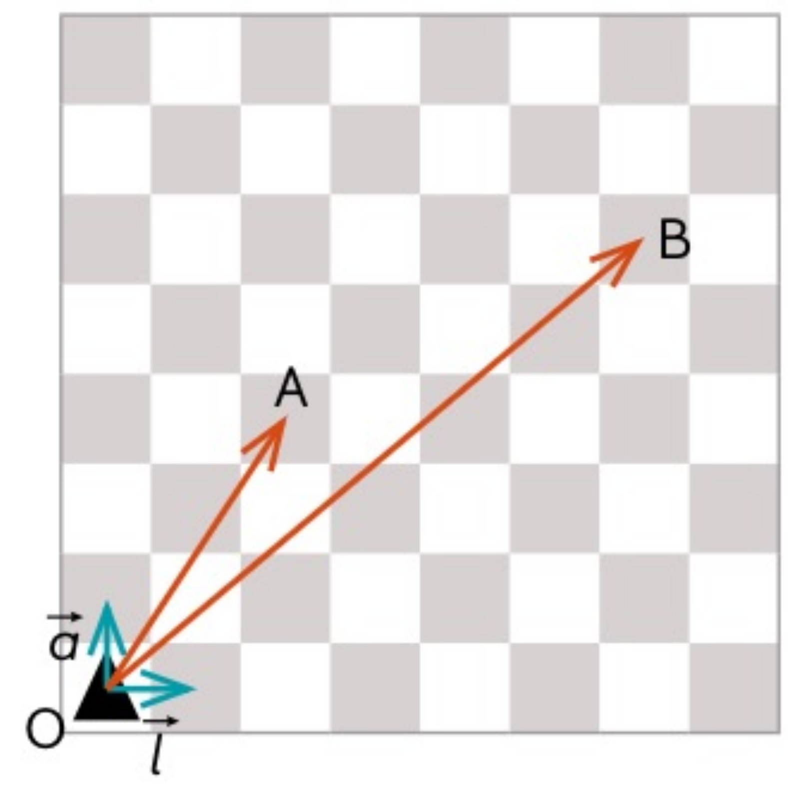
Vektora izteikšana ar dotajiem vektoriem

68. Uz šaha galdiņa novietotā figūra vienā gājienā var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu (vektors $\vec{a}$) vai vienu rūtiņu pa labi (vektors $\vec{l}$) (skat. zīm.). Izmantojot vektorus $\vec{a}$ un $\vec{l}$, uzraksti divus veidus, kā figūra var pārvietoties, lai no lauciņa O nonāktu

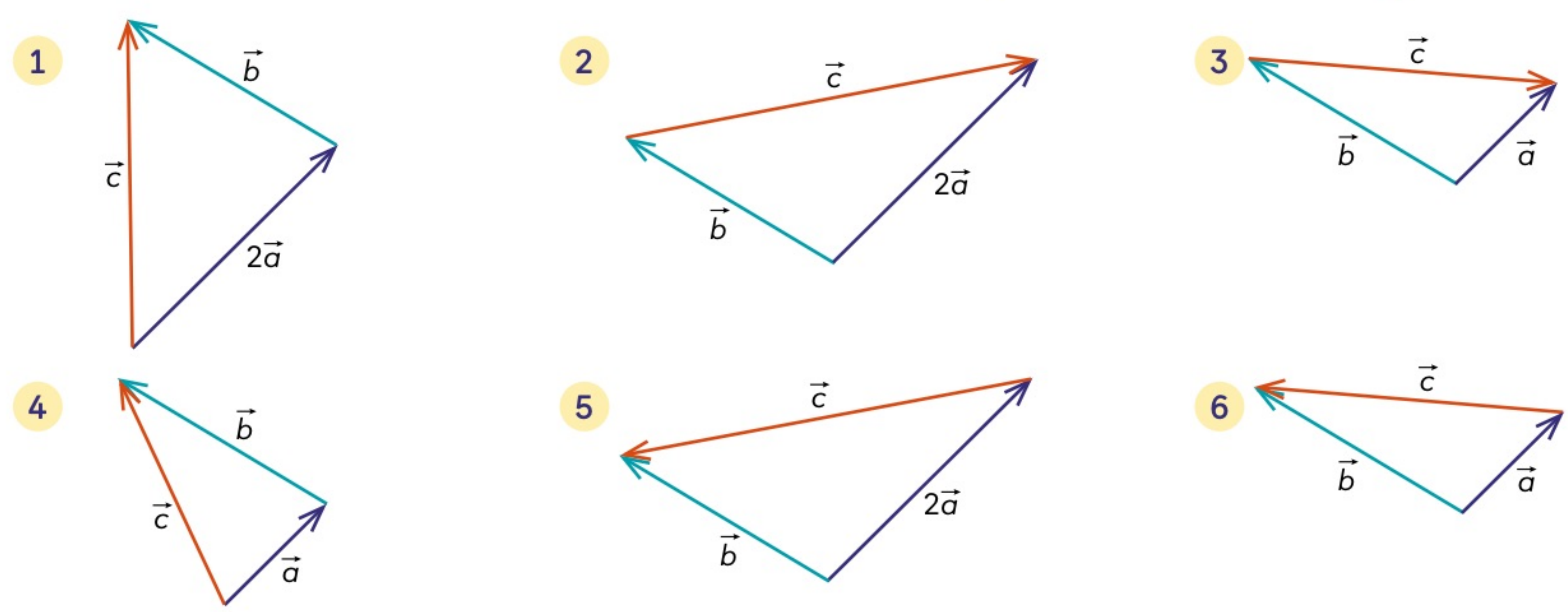
a) lauciņā A, b) lauciņā B!

Pieraksti figūras kopējo pārvietojumu!

Izmantojot šo situāciju, paskaidro klasesbiedram, kā jārīkojas, lai kādu vektoru izteiktu ar dotajiem vektoriem!



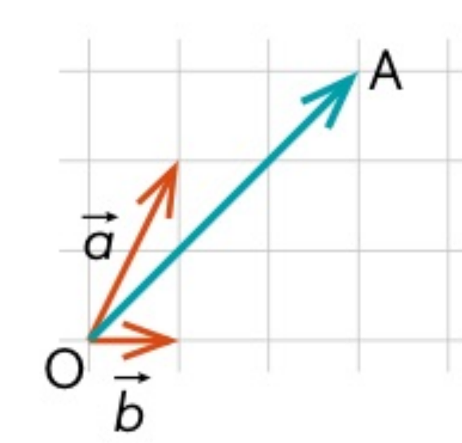
69. Doti vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Izsaki vektoru $\vec{c}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$! Kuram zīmējumam atbilst katra izteiksme?



A $\vec{a}+\vec{b}$ **B** $\vec{a}-\vec{b}$ **C** $\vec{b}-\vec{a}$ **D** $2\vec{a}+\vec{b}$ **E** $\vec{b}-2\vec{a}$ **F** $2\vec{a}-\vec{b}$

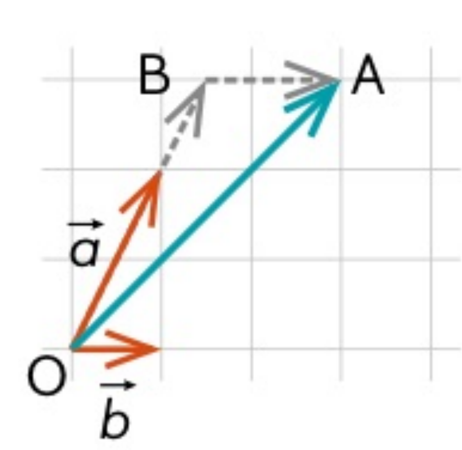
2. PIEMĒRS

Aplūko zīmējumu! Izsaki vektoru $\overrightarrow{OA}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$!



Risinājums

1) Apraksta ceļu no O uz A.



$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$

2) Salīdzina katru no summas vektoriem $\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{BA}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

$\overrightarrow{OB}$ vērsums sakrīt ar $\vec{a}$ vērsumu, un $\overrightarrow{OB}$ ir 1,5 reizes garāks par $\vec{a}$, tāpēc $\overrightarrow{OB}=1{,}5\cdot\vec{a}$.

$\overrightarrow{BA}$ vērsums sakrīt ar $\vec{b}$ vērsumu. $\overrightarrow{BA}$ ir 1,5 reizes garāks par $\vec{b}$, tāpēc $\overrightarrow{BA}=1{,}5\cdot\vec{b}$.

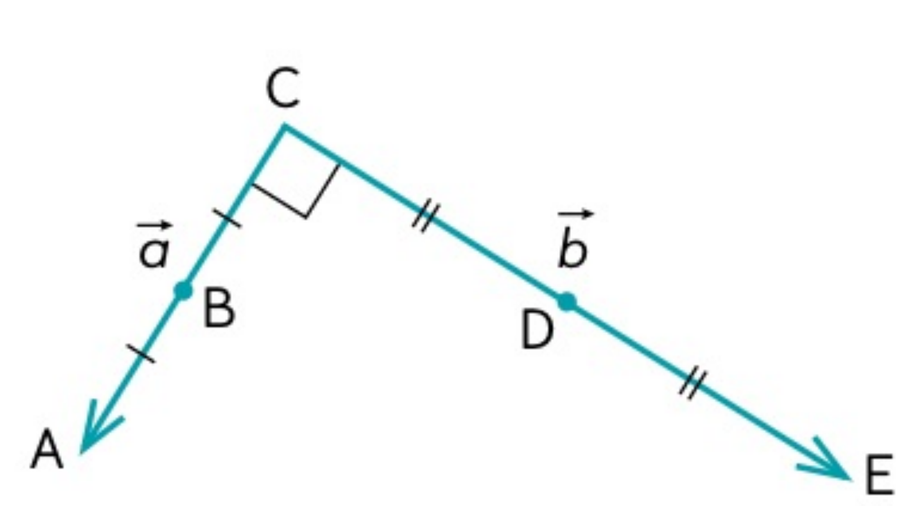
3) Vektorus $\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{BA}$ aizstāj ar iegūtajām izteiksmēm.

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=1{,}5\vec{a}+1{,}5\vec{b}$

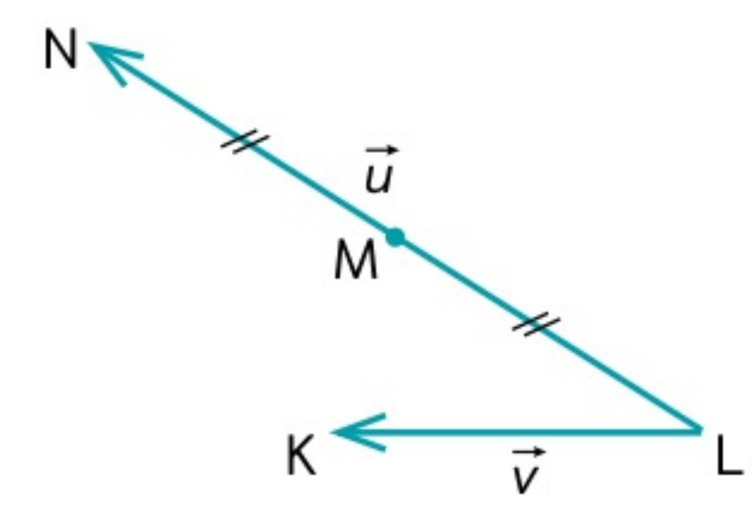
70. Doti vektori $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ un $\overrightarrow{CE}=\vec{b}$. Punkti B un D ir attiecīgi nogriežņu CA un CE viduspunkti (skat. zīm.).
Izsaki ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ vektorus:

a) $\overrightarrow{AE}$, c) $\overrightarrow{CD}$,

b) $\overrightarrow{CB}$, d) $\overrightarrow{BD}$!

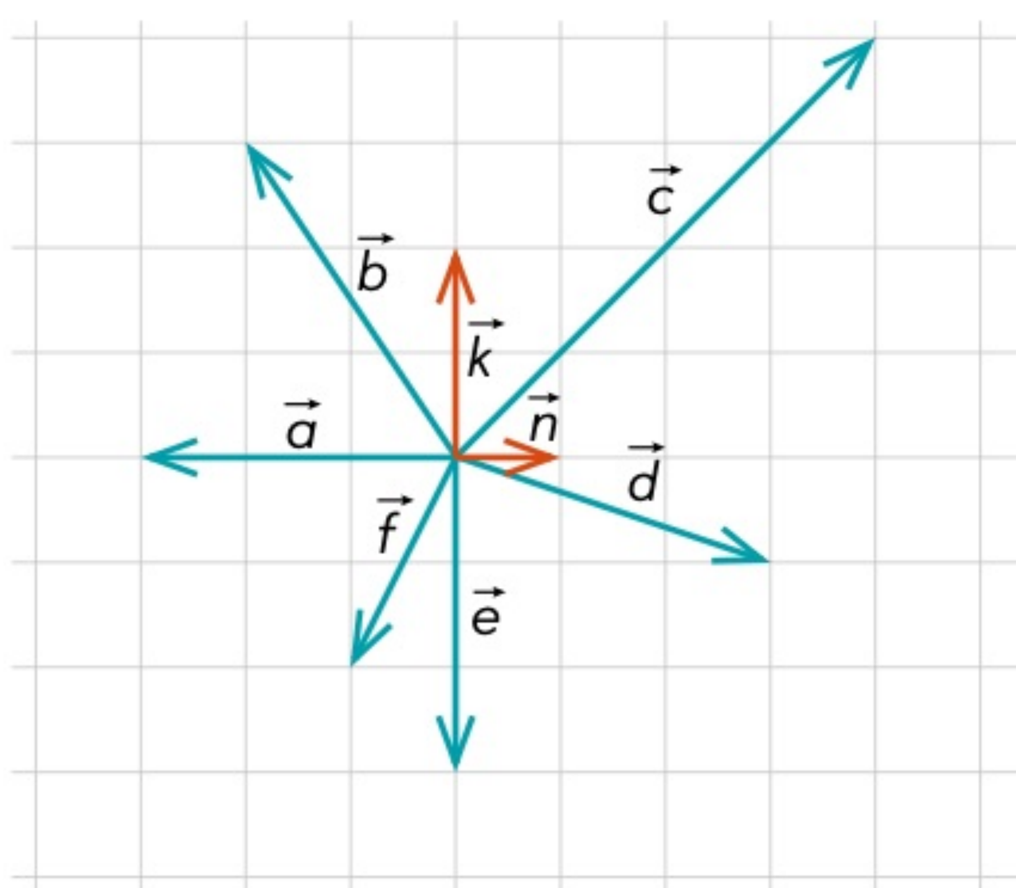


71. Doti vektori $\overrightarrow{LN} = \vec{u}$ un $\overrightarrow{LK} = \vec{v}$, un zināms, ka MN = ML (skat. zīm.). Izsaki vektoru $\overrightarrow{KM}$ ar vektoriem $\vec{u}$ un $\vec{v}$!

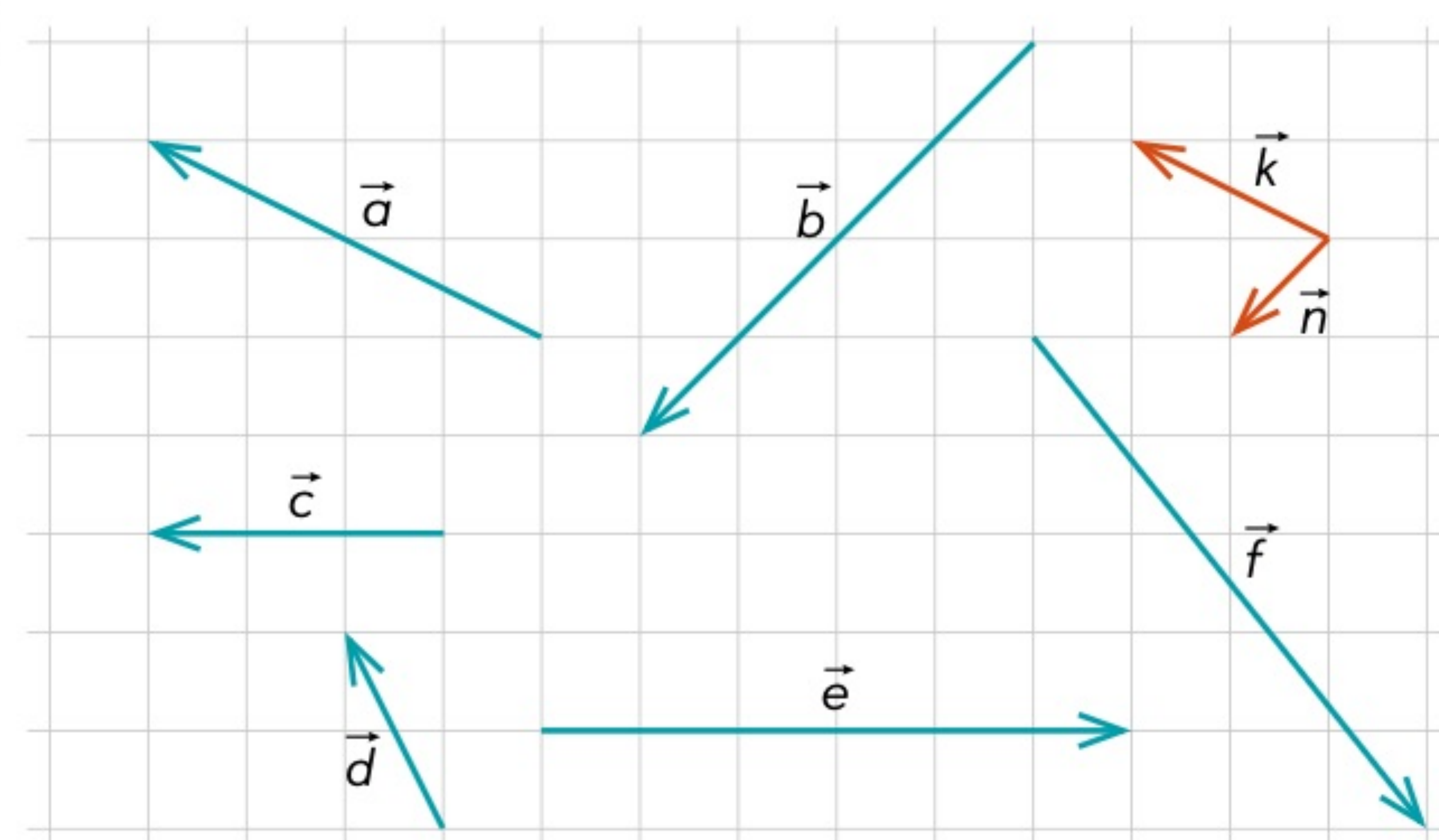


72. Doti vektori $\vec{k}$ un $\vec{n}$. Izsaki vektorus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ un $\vec{f}$ ar vektoriem $\vec{k}$ un $\vec{n}$!

a)



b)



73. No punkta O atlikti vektori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

a) Izsaki vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ ar vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ un $\vec{d}$!

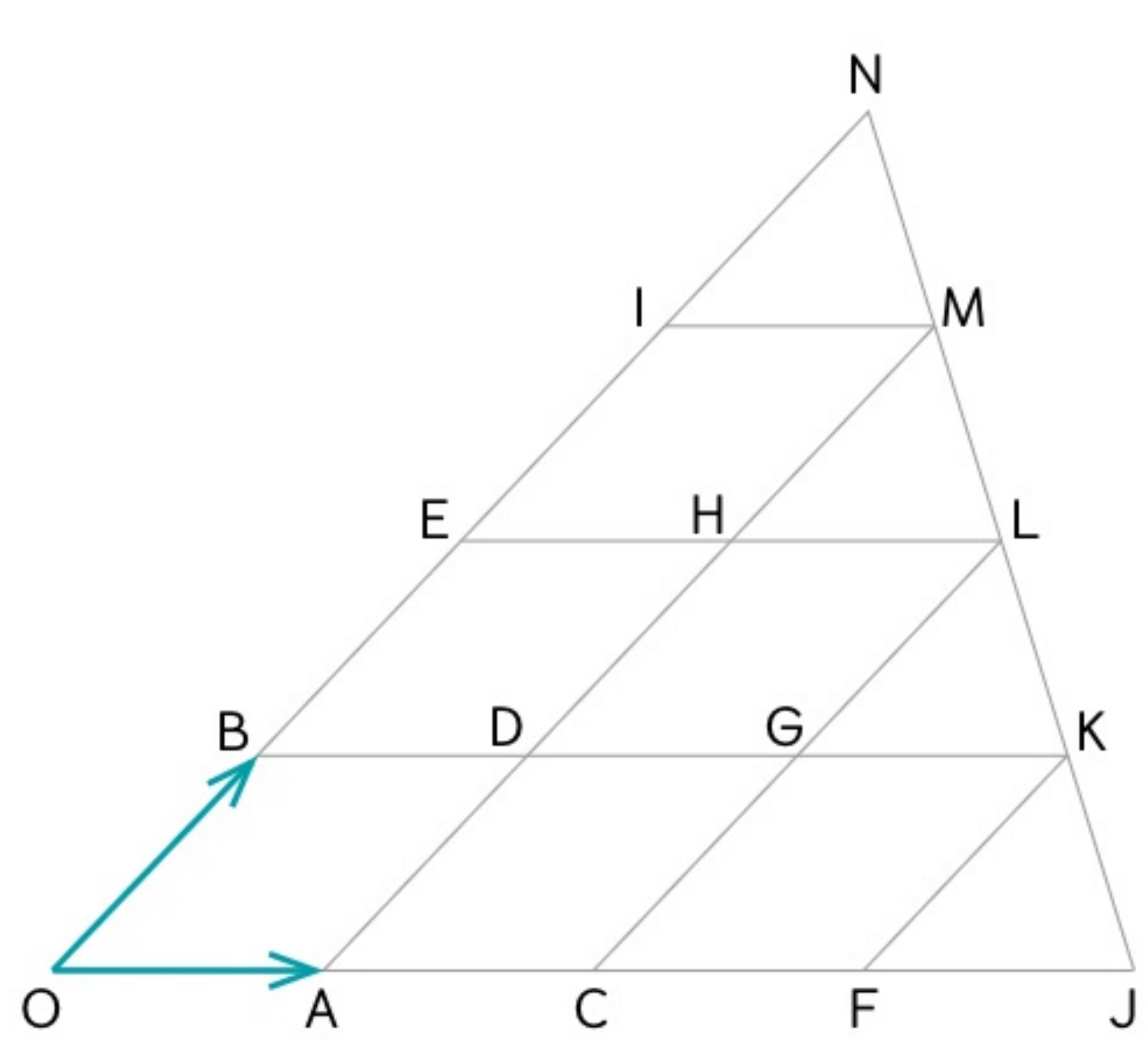
b) Vienkāršo izteiksmi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$!

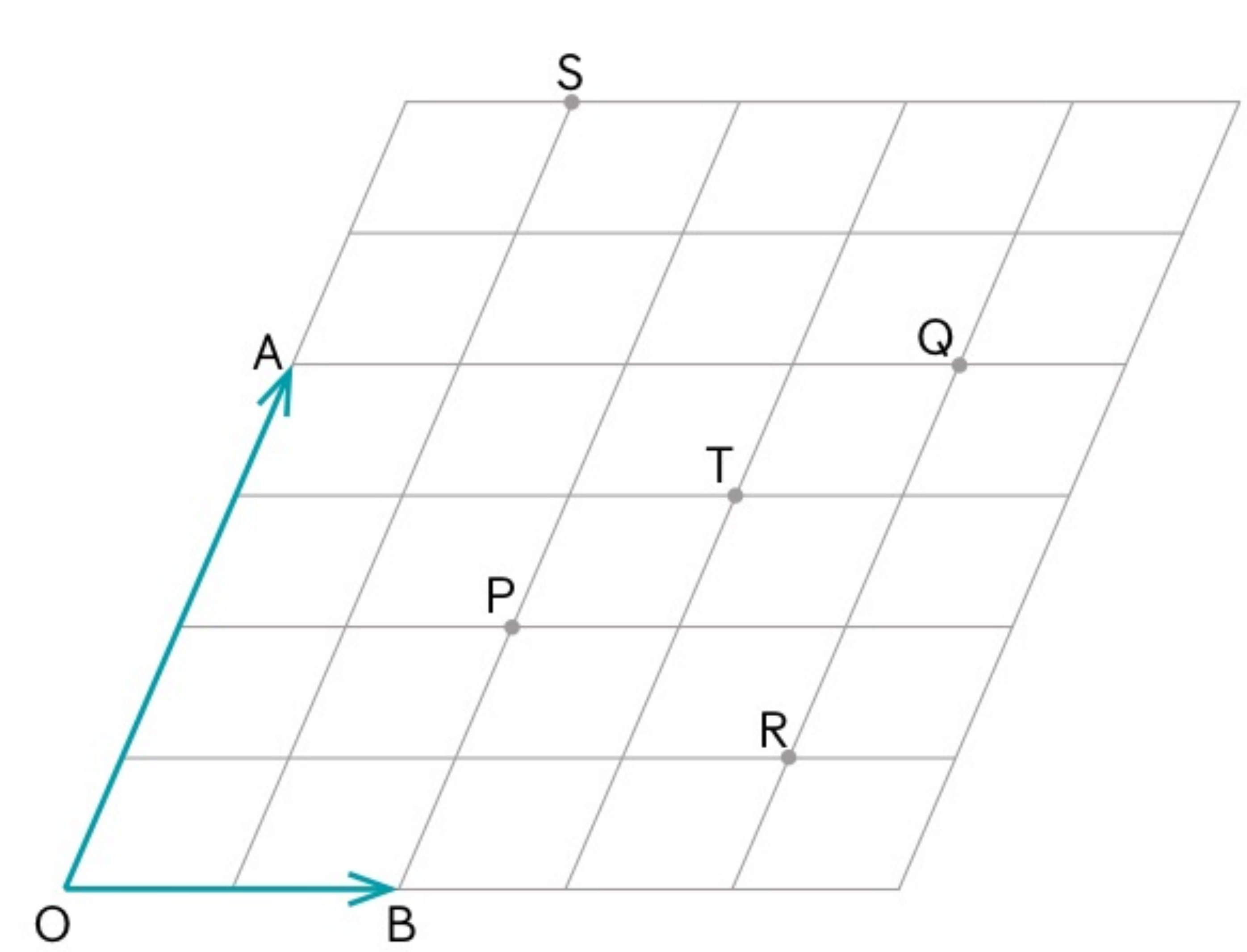
c) Punkts E ir nogriežņa BC viduspunkts. Izsaki vektorus $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{OE}$ ar vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ un $\vec{d}$!

74. Zīmējumā atlikti vektori $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$.

a) Izsaki vektorus $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{LB}$ ar vektoriem $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$!

b) Izsaki vektorus $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{OQ}$ ar vektoriem $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$!





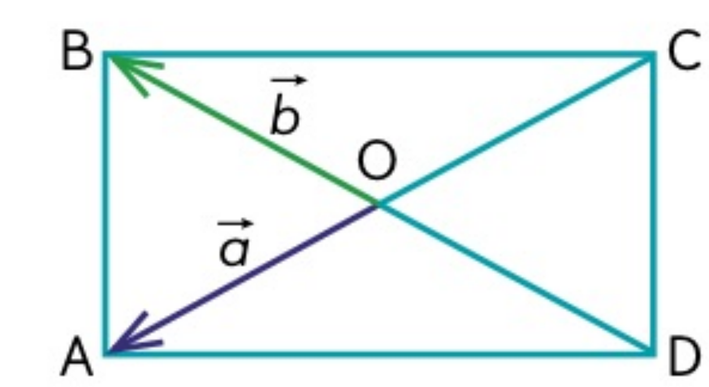
3. PIEMĒRS

Risinājums

Dots taisnstūris ABCD, kurā novilktas diagonāles, kas krustojas punktā O, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (skat. zīm.). Izsaki prasītos vektorus ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$!

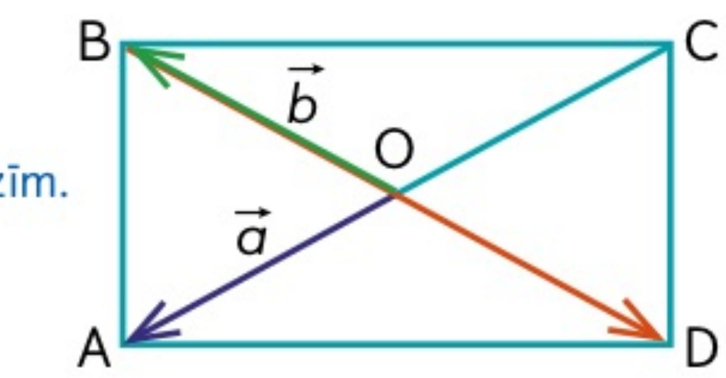
a) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{CE}$, kur $E \in AD$ un sadala to attiecībā $AE : ED = 3 : 2$.



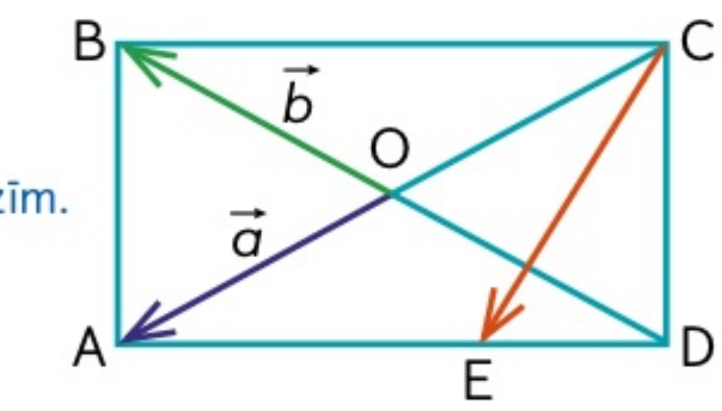
a) Izsaka $\overrightarrow{BD}$ (skat. 1. zīm.).
Pēc taisnstūra īpašībām $DB = 2OB$.
Tā kā vektoriem $\overrightarrow{BD}$ un $\overrightarrow{OB}$ vērsumi ir pretēji,
iegūst $\overrightarrow{BD} = -2\vec{b}$.

1. zīm.

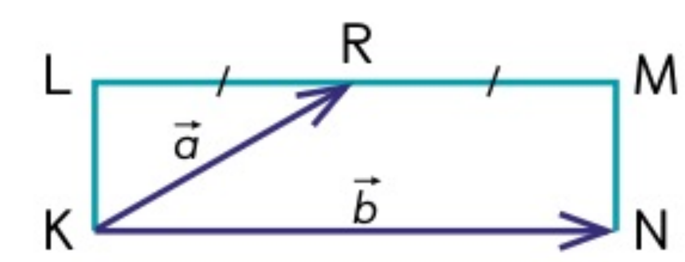


b) Izsaka CE (skat. 2. zīm.).
Ceļu no C uz E var aprakstīt vairākos veidos.
Viens no veidiem: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{CA} = 2\vec{a}$ (līdzīgi kā **a)** piemērā).
Ja $AE : ED = 3 : 2$, tad $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.
Izsaka $\overrightarrow{AD}$.
Ja $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -\vec{a} - \vec{b}$, tad $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}(-\vec{a} - \vec{b})$.
Tātad $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = 2\vec{a} + \frac{3}{5}(-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} = 1\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.

2. zīm.



75. Dots taisnstūris KLMN, R — LM viduspunkts, $\overrightarrow{KR} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{KN} = \vec{b}$.
Izsaki vektorus $\overrightarrow{KM}$ un $\overrightarrow{NL}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$!



76. Dots paralelograms ABCD, O — tā diagonāļu krustpunkts. Pārbaudi, vai dotie apgalvojumi ir patiesi!

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$
d) $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$
e) $|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BD}|$
f) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$
g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
h) $\overrightarrow{AO} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AC}$
i) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

77. MN ir △ABC viduslīnija ($M \in AB$, $N \in BC$), $\overrightarrow{MA} = \vec{m}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$. Izsaki vektorus $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MC}$ ar vektoriem $\vec{m}$ un $\vec{n}$!

78. Dots regulārs sešstūris ABCDEF, O — sešstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs. Novilktas visas sešstūra diagonāles, kas iet caur punktu O.
Vai iespējams, izmantojot vektorus $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ un $\overrightarrow{AF} = \vec{p}$, izteikt jebkuru vektoru, kas atbilst kādam no sešstūrī redzamajiem nogriežņiem? Skaidro savu atbildi, grupējot vektorus un ievērojot to virzienu!

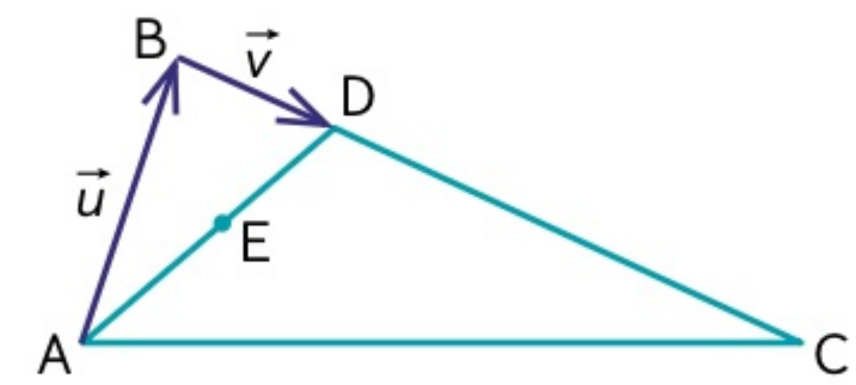
79. Punkts C sadala nogriezni EF attiecībā 2 : 1, un $\overrightarrow{EF} = \vec{k}$. Izsaki vektorus $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CF}$ un $\overrightarrow{FC}$ ar vektoru $\vec{k}$!

80. Dots △ABC, $AB = \vec{a}$ un $AC = \vec{b}$, $D \in BC$, un $BD : DC = 1 : 2$. Izsaki vektorus $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$!

81. Uz paralelograma ABCD malas BC izvēlēts punkts K tā, ka $BK = KC$. $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.
Izsaki vektorus $\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{AB}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$!

82. Trijstūrī ABC punkts D atrodas uz malas AB, un $DB = 2AD$. Punkts E atrodas uz trijstūra malas AC, un $EC = 2AE$. $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$ un $\overrightarrow{AE} = \vec{y}$. Izsaki vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DE}$ un $\overrightarrow{BC}$ ar vektoriem $\vec{x}$ un $\vec{y}$!

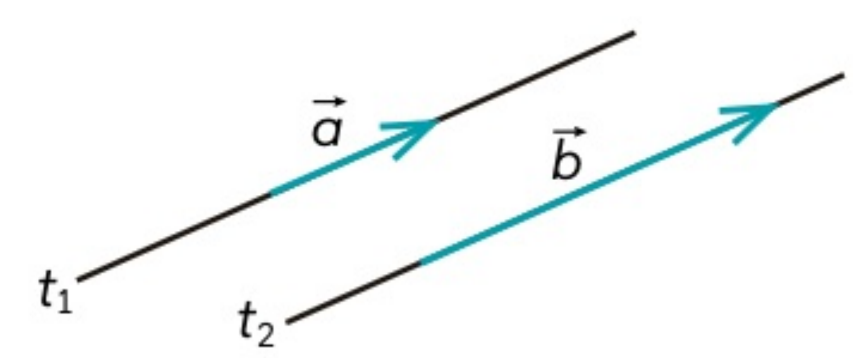
83. Uz trijstūra ABC malas BC atlikts punkts D tā, ka BD : DC = 1 : 3. Nogriežņa AD viduspunkts ir E. Dots, ka $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ un $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$ (skat. zīm.). Izsaki vektorus $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$ un $\overrightarrow{CE}$ formā $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, kur r un s ir reāli skaitļi!



Vektora izteikšana pierādījuma uzdevumos

Ja uz divām dažādām taisnēm var atrast pa nenulles vektoram, kas savā starpā ir kolineāri, tad šīs **taisnes ir paralēlas**.

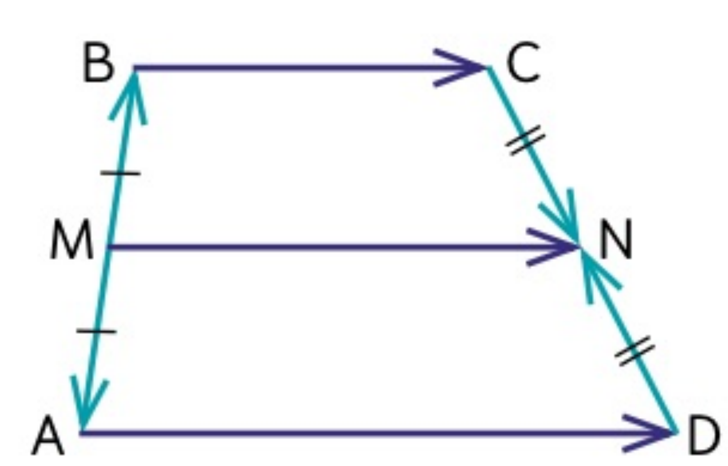
Taisnes t_1 un t_2 ir paralēlas (skat. zīm.), ja pierāda, ka $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, kur $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir nenulles vektori uz šīm taisnēm, bet k — patvaļīgs skaitlis.



4. PIEMĒRS Pierādi, ka trapeces viduslīnija ir paralēla pamatiem!

Risinājums

Uzzīmē trapeci ABCD, MN — trapeces viduslīnija.



Vispirms pamato, ka $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Bigg| +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \underline{\overrightarrow{MA}} + \overrightarrow{AD} + \underline{\overrightarrow{DN}} + \underline{\overrightarrow{MB}} + \overrightarrow{BC} + \underline{\overrightarrow{CN}}$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

Paralelitāti pierāda, izmantojot to, ka BC || AD.

Apzīmē $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, tad $\overrightarrow{BC} = k \cdot \vec{a}$, $k \neq 0$.

Tā kā $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$, tad

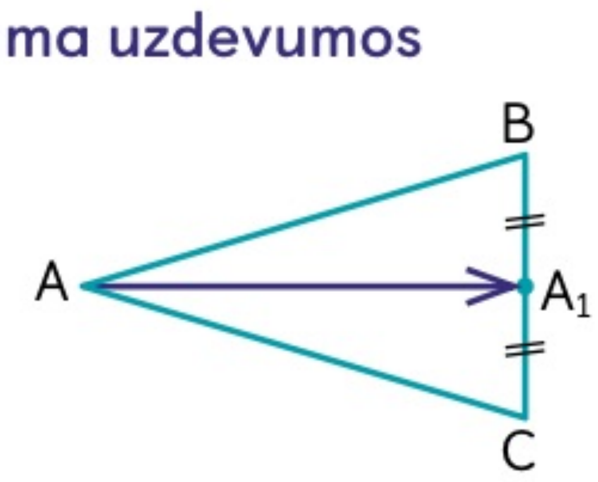
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + k \cdot \vec{a}) = \frac{1+k}{2} \cdot \vec{a} = \frac{1+k}{2} \cdot \overrightarrow{AD}, \text{ kur } \frac{1+k}{2} \text{ ir reāls skaitlis.}$$

Tātad taisnes MN un AD ir paralēlas.

Uzdevumi

Vektora izteikšana un vektora reizināšana ar skaitli pierādījuma uzdevumos

84. Dots trijstūris ABC, AA_1 ir trijstūra mediāna (skat. zīm.). Pamato, ka $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$!



85. Pierādi: ja četrstūra viduslīnija paralēla vienai no tā malām, tad četrstūris ir paralelograms vai trapece!

86. Piecstūra ABCDE malu AB, BC, CD, DE viduspunkti ir atbilstoši M, N, K, L. Četrstūris MNKL ir paralelograms. Pierādi, ka ML || AE!

Vektora projekcijas uz koordinātu asīm

Lai modelētu reālas situācijas, piemēram, vairāku spēku darbību, spēkus jeb vektorus attēlo koordinātu plaknē, un tad apskata šo vektoru projekcijas uz asīm.

vektora projekcija uz koordinātu ass | vektora projekcijas aprēķināšana

Vektora projekciju uz koordinātu ass iegūst:

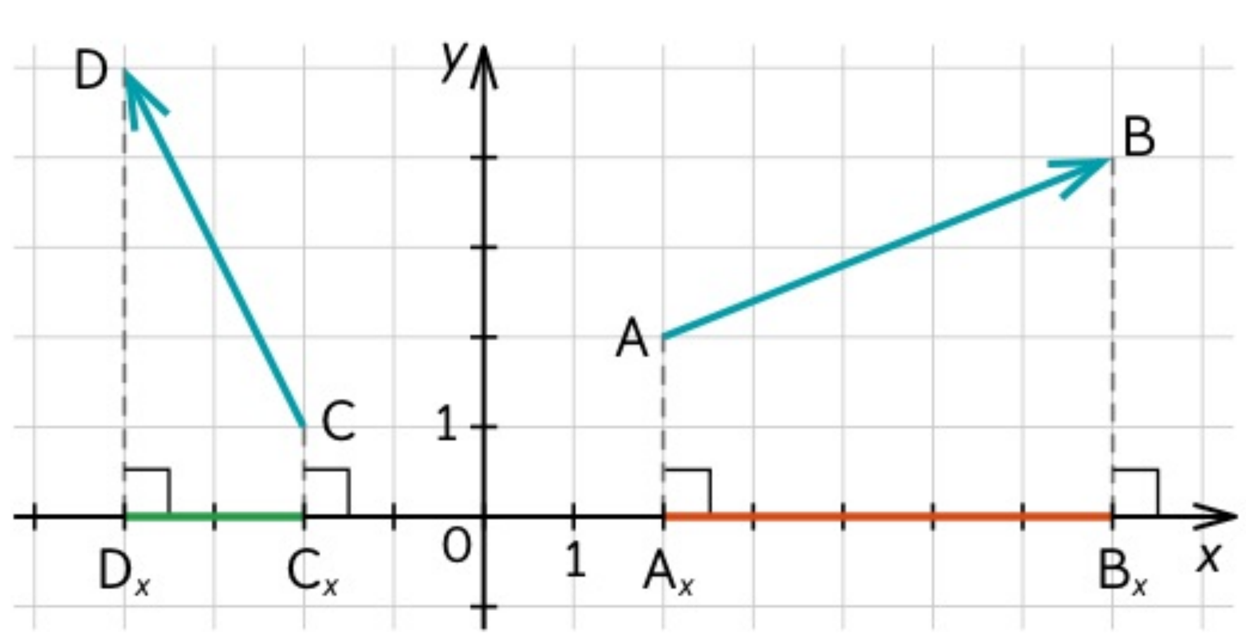
1) no vektora galapunktiem novelk perpendikulus pret Ox (vai Oy) asi un iegūst projekcijas nogriezni;
2) nosaka vektora projekcijas zīmi.

Aplūko piemēru, kā noteikt vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ projekcijas uz Ox un Oy asīm!

Vektora projekcija uz *x* ass

Tiks iegūta vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ **projekcija uz *x* ass**.

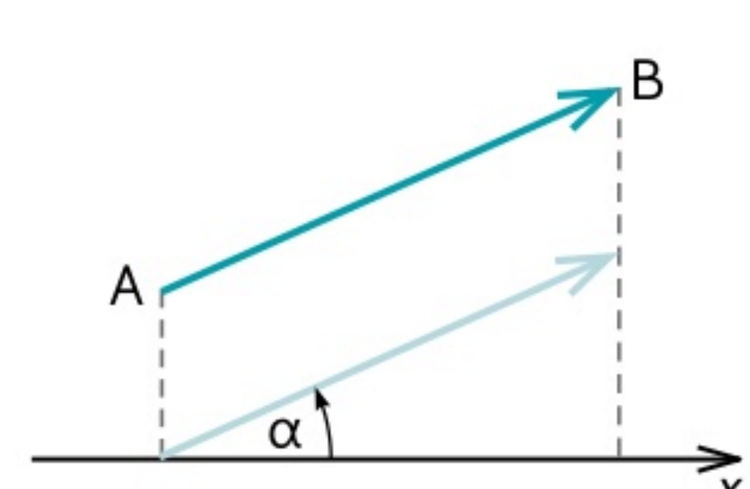
- No vektora galapunktiem novelk perpendikulus pret Ox asi, iegūstot nogriežņus A_xB_x un C_xD_x.



$\overrightarrow{AB}$ projekciju uz x ass apzīmē $pr_x\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{CD}$ projekciju uz x ass apzīmē $pr_x\overrightarrow{CD}$.

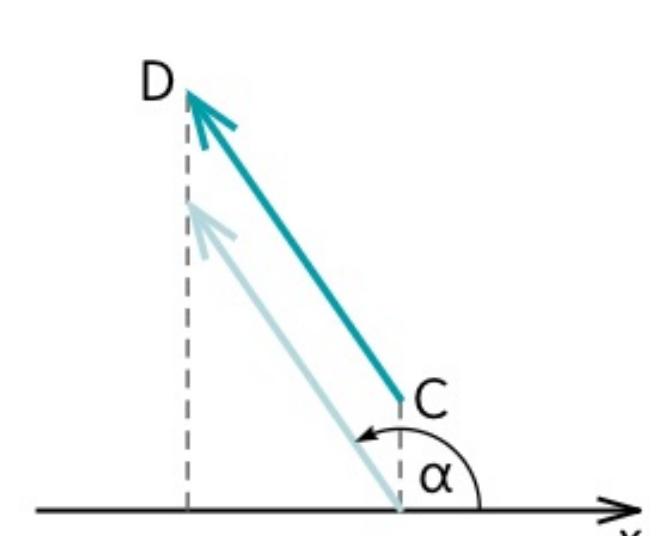
- $pr_x\overrightarrow{AB}$ ir **skaitlis, kas vienāds ar nogriežņa A_xB_x garumu**, ja vektors $\overrightarrow{AB}$ ar Ox asi (pozitīvo virzienu) veido <u>šauru leņķi</u>.

  $pr_x\overrightarrow{AB} = |A_xB_x| = 5$



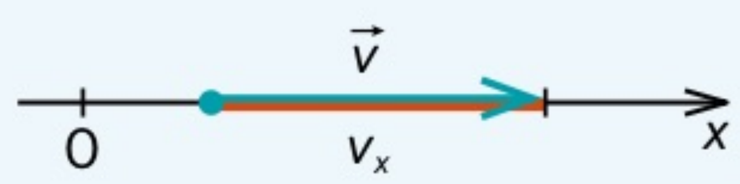
- $pr_x\overrightarrow{CD}$ ir **skaitlis, kas vienāds ar nogriežņa C_xD_x garumam pretēju skaitli**, ja vektors $\overrightarrow{CD}$ ar Ox asi (pozitīvo virzienu) veido <u>platu leņķi</u>.

  $pr_x\overrightarrow{CD} = -|C_xD_x| = -2$

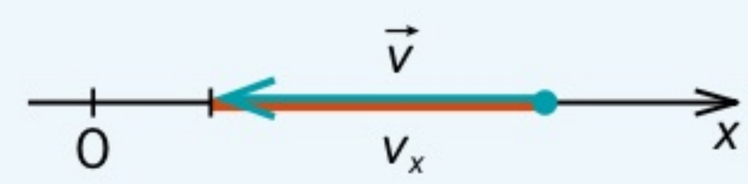


Ķermeņa ātrums kustības laikā parasti ir mainīgs. Momentānā ātruma vektors nosaka, ar cik lielu ātrumu un kādā virzienā ķermenis kustas katrā laika momentā.

Lai varētu matemātiski modelēt vienmērīgu taisnvirziena kustību, aplūko ātruma vektora projekciju uz *x* ass.



$v_x > 0$,
ja ātruma virziens
sakrīt ar *x* ass virzienu.

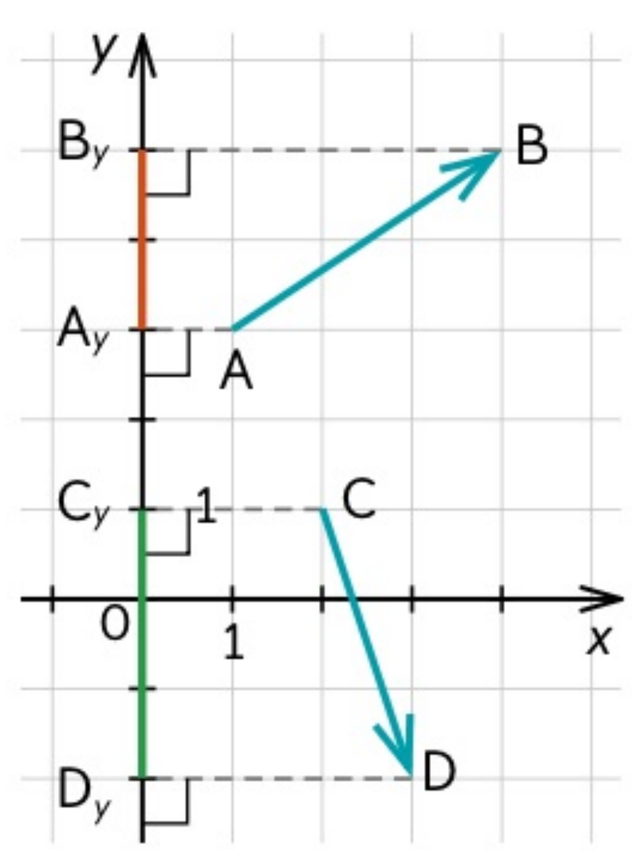


$v_x < 0$,
ja ātruma virziens
ir pretējs *x* ass virzienam.

Vektora projekcija uz *y* ass

Tiks iegūta vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ **projekcija uz *y* ass**.

- No vektora galapunktiem novelk perpendikulus pret O*y* asi, iegūstot nogriežņus A_yB_y un C_yD_y.



$\overrightarrow{AB}$ projekciju uz *y* ass apzīmē $\text{pr}_y\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{CD}$ projekciju uz *y* ass apzīmē $\text{pr}_y\overrightarrow{CD}$.

- $\text{pr}_y\overrightarrow{AB}$ ir **skaitlis, kas vienāds ar nogriežņa A_yB_y garumu**, ja vektors $\overrightarrow{AB}$ ar O*y* asi (pozitīvo virzienu) veido <u>šauru leņķi</u>.

  $\text{pr}_y\overrightarrow{AB} = |A_yB_y| = \mathbf{2}$

- $\text{pr}_y\overrightarrow{CD}$ ir **skaitlis, kas vienāds ar nogriežņa C_yD_y garumam pretēju skaitli**, ja vektors $\overrightarrow{CD}$ ar O*y* asi (pozitīvo virzienu) veido <u>platu leņķi</u>.

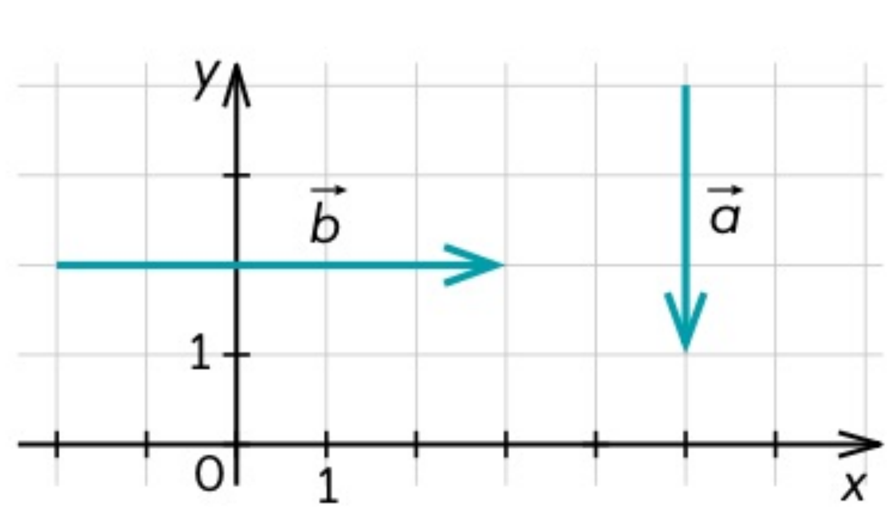
  $\text{pr}_y\overrightarrow{CD} = -|C_yD_y| = \mathbf{-3}$

Ja vektora projekcija uz ass ir 0, tad vektors ir perpendikulārs pret šo asi.
Ja vektora projekcija sakrīt ar vektora garumu, tad vektors šai asij ir paralēls.

Piemēram,

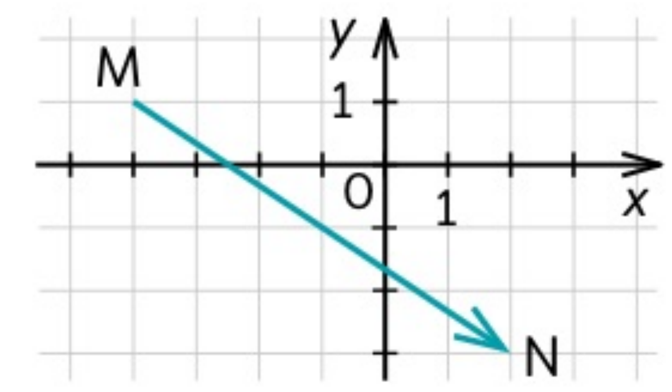
vektors $\vec{a}$ ir: perpendikulārs O*x* asij, $\text{pr}_x\vec{a} = 0$ un paralēls O*y* asij, $\text{pr}_y\vec{a} = -|\vec{a}|$,

vektors $\vec{b}$ ir: perpendikulārs O*y* asij, $\text{pr}_y\vec{b} = 0$ un paralēls O*x* asij, $\text{pr}_x\vec{b} = |\vec{b}|$.



1. PIEMĒRS

Nosaki vektora $\overrightarrow{MN}$ (skat. zīm.) projekciju uz
a) Ox ass,
b) Oy ass!



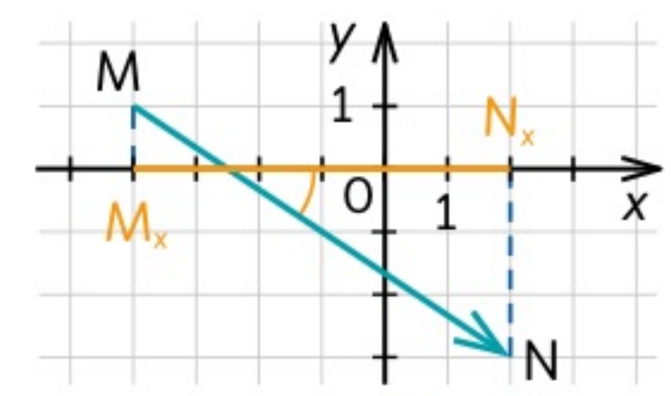
Risinājums

a) No vektora $\overrightarrow{MN}$ galapunktiem novelk perpendikulus pret Ox asi. Krustpunktus ar x asi apzīmē attiecīgi ar M_x un N_x (skat. 1. zīm.).

Nogrieznis M_xN_x ir 6 vienības garš un tas ir vektora $\overrightarrow{MN}$ projekcija uz x ass.

Vektors $\overrightarrow{MN}$ ar Ox ass pozitīvo virzienu veido <u>šauru leņķi</u>, tāpēc

$$\text{pr}_x\overrightarrow{MN} = 6.$$



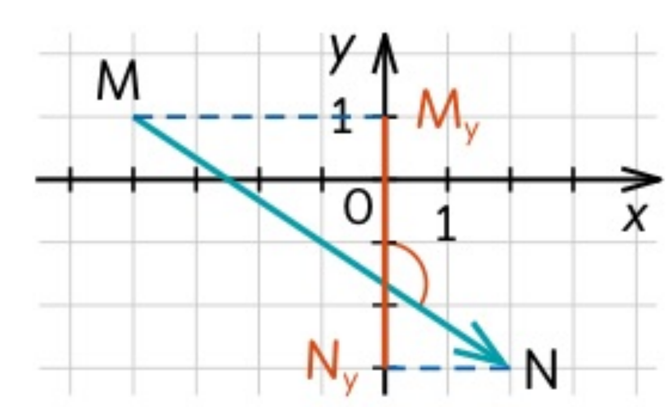
1. zīm.

b) No vektora $\overrightarrow{MN}$ galapunktiem novelk perpendikulus pret Oy asi. Krustpunktus ar y asi apzīmē attiecīgi ar M_y un N_y (skat. 2. zīm.).

Nogrieznis M_yN_y ir 4 vienības garš un tas ir vektora $\overrightarrow{MN}$ projekcija uz y ass.

Vektors $\overrightarrow{MN}$ ar Oy ass pozitīvo virzienu veido <u>platu leņķi</u>, tāpēc

$$\text{pr}_y\overrightarrow{MN} = -4.$$

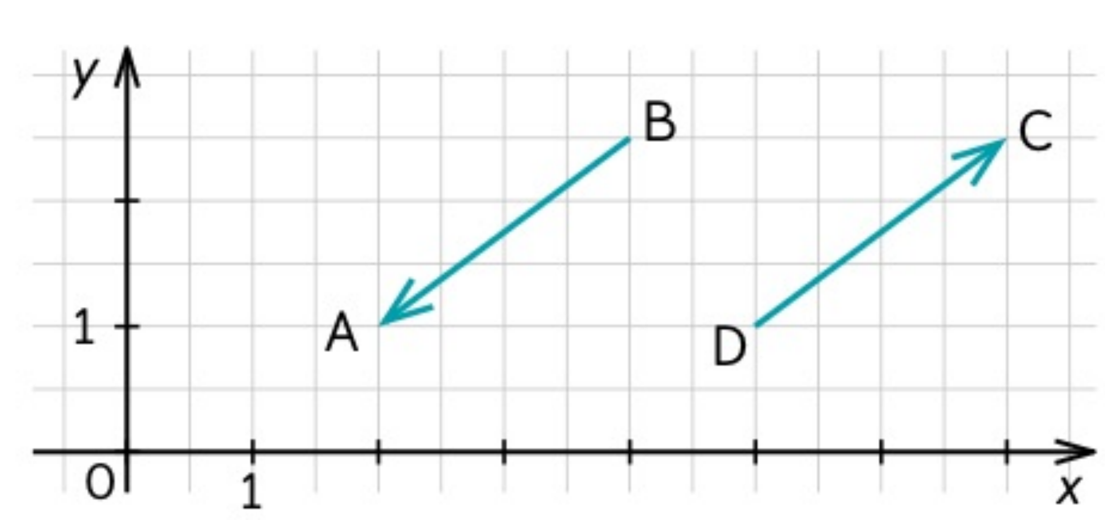


2. zīm.

Uzdevumi

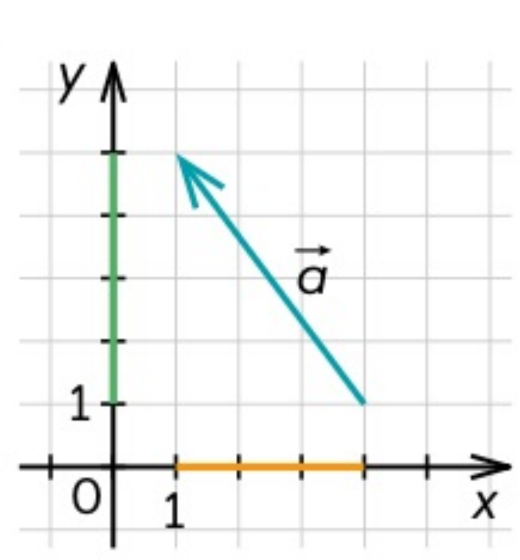
Vektora projekcijas uz koordinātu asīm

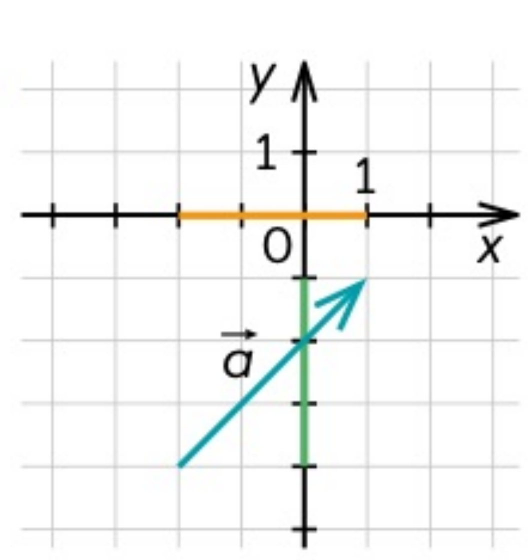
87. Izmantojot zīmējumu un pēc vajadzības to papildinot, formulē secinājumu par pretējo vektoru projekcijām uz asīm!

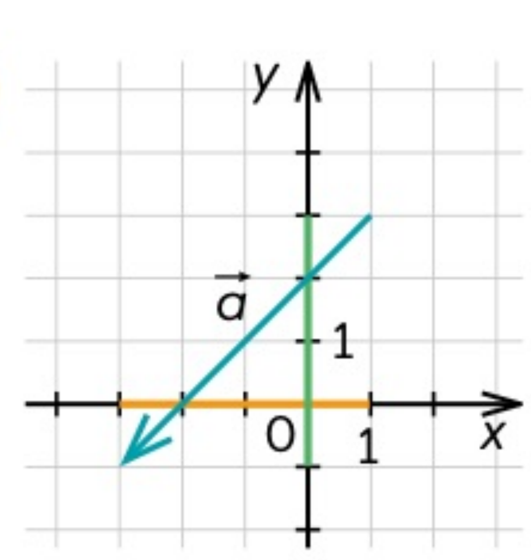


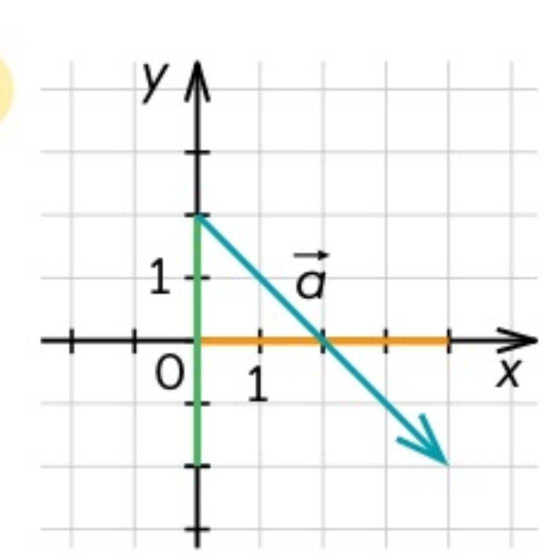
88. Nosaki, kuras vektora $\vec{a}$ projekcijas **1** — **8** atbilst katram no zīmējumiem!

1 $\text{pr}_x\vec{a} = 3$	**3** $\text{pr}_x\vec{a} = 4$	**5** $\text{pr}_y\vec{a} = 3$	**7** $\text{pr}_y\vec{a} = -3$
2 $\text{pr}_x\vec{a} = -3$	**4** $\text{pr}_x\vec{a} = -4$	**6** $\text{pr}_y\vec{a} = 4$	**8** $\text{pr}_y\vec{a} = -4$

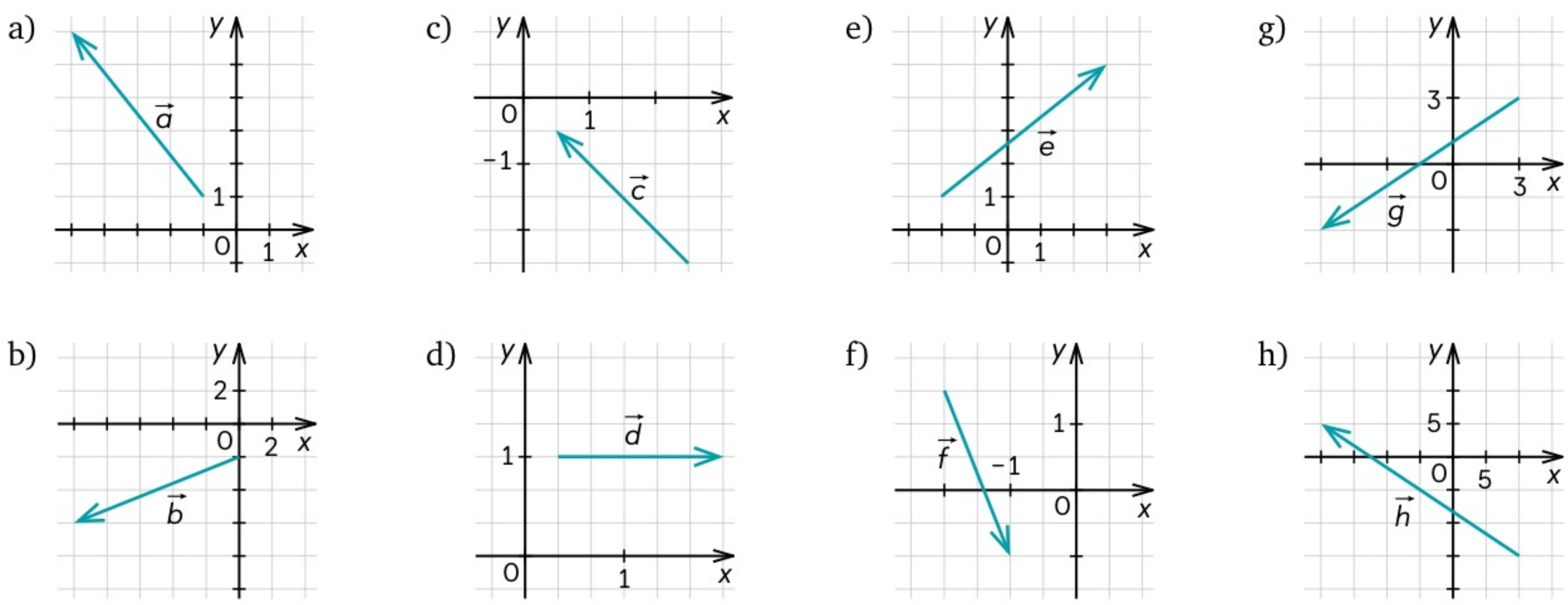
A


B


C


D


89. Uzzīmē vektoru projekciju nogriežņus uz O*x* un O*y* asīm!



Nosaki un pieraksti visu uzzīmēto vektoru projekcijas uz O*x* un O*y* asīm!

90. Uzzīmē vektoru, ja zināmas tā projekcijas!

a) Vektora sākumpunkta koordinātas ir (0; 2), un tā projekcija uz abscisu ass ir -4, bet uz ordinātu ass ir 2.

b) Vektora sākumpunkta koordinātas ir (4; -4), un tā projekcija uz abscisu ass ir 0, bet uz ordinātu ass ir 5.

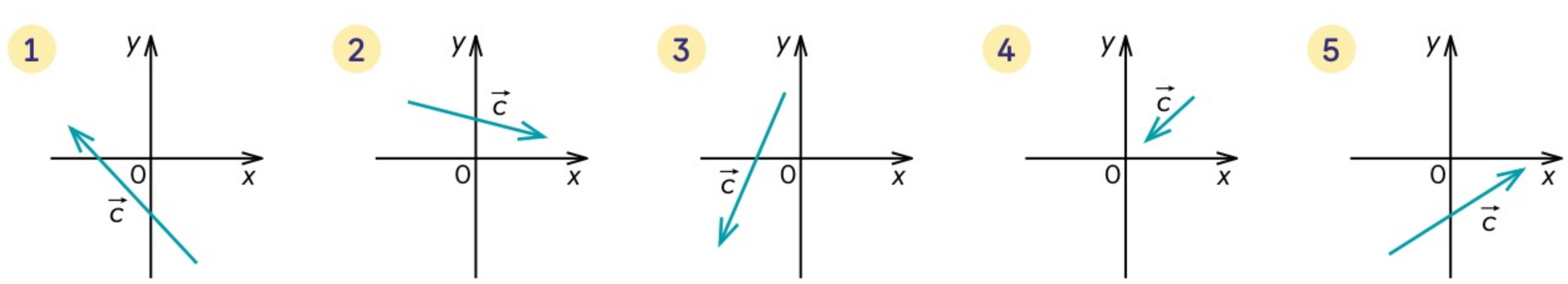
c) Vektora projekcija uz abscisu ass ir -4, bet uz ordinātu ass ir 2.

d) Vektora projekcija uz abscisu ass ir 0, bet uz ordinātu ass ir 5.

Kas **a)** un **b)** gadījumiem ir kopīgs un kā tie atšķiras no **c)** un **d)** gadījumiem?

91. Nosaki, kuram zīmējumam vai zīmējumiem atbilst katrs apraksts!

A $\text{pr}_x\vec{c} > 0, \text{pr}_y\vec{c} > 0$ **B** $\text{pr}_x\vec{c} > 0, \text{pr}_y\vec{c} < 0$ **C** $\text{pr}_x\vec{c} < 0, \text{pr}_y\vec{c} > 0$ **D** $\text{pr}_x\vec{c} < 0, \text{pr}_y\vec{c} < 0$



92. Dažādās koordinātu plaknēs uzzīmē vektorus $\overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{EF}$ tā, lai vektora $\overrightarrow{CD}$ projekcija uz abscisu ass ir 3, un tas ar šo projekciju veido 45° lielu leņķi, bet vektora $\overrightarrow{EF}$ projekcija uz ordinātu ass ir 5, un tas ar šo projekciju veido 60° lielu leņķi!

93. Uzzīmē vektoru, kura projekciju vērtības uz koordinātu asīm ir:

a) vienādas, b) pretējas, c) dažādas!

Vai divi vektori būs vienādi, ja vienādas ir to projekcijas? Paskaidro savu atbildi!

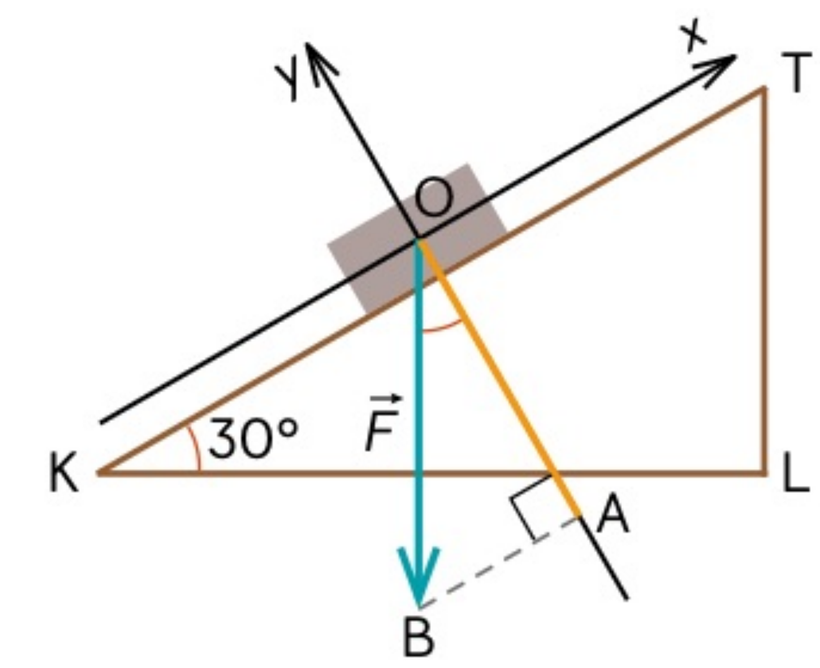
2. PIEMĒRS

Ķermeņa smaguma spēks $\vec{F}$, kas darbojas uz slīpo plakni, ir 20 N. Virsmas slīpuma leņķis ir 30°. Aprēķini smaguma spēka projekciju uz y ass!

Risinājums

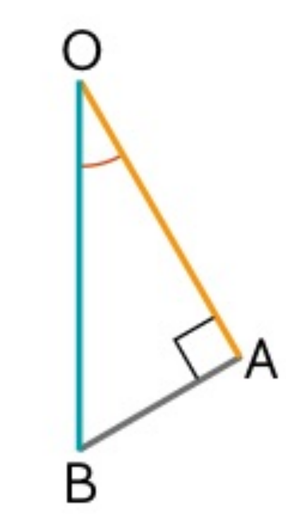
Uzzīmē slīpo plakni, smaguma spēku $\vec{F}$, kas darbojas uz ķermeni, un koordinātu asis, kur Ox ass orientēta paralēli slīpajai virsmai, bet Oy ass — perpendikulāri Ox asij.

Uzzīmē vektora $\vec{F}$ projekciju uz y ass. Iegūst nogriezni OA.



Lai noteiktu projekcijas $pr_y\vec{F}$ vērtību, jāaprēķina nogriežņa OA garums.

Aplūko taisnleņķa trijstūrus $\triangle OAB$ un $\triangle KLT$. Lai aprēķinātu OA garumu, nepieciešams zināt $\measuredangle BOA$ lielumu.



$\measuredangle AOB = \measuredangle TKL = 30°$, kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām.

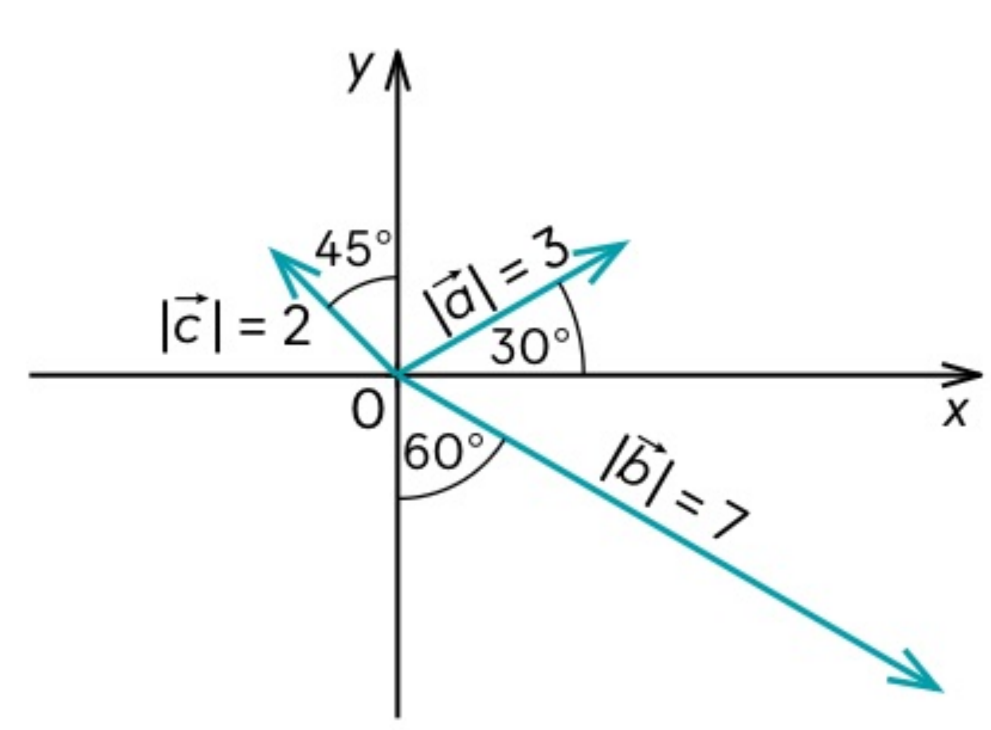
Trijstūrī OAB $\measuredangle AOB = 30°$ un $\cos 30° = \dfrac{OA}{OB}$.

$OA = OB \cdot \cos 30° = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17$

Tā kā vektora $\vec{F}$ projekcija uz y ass ir $-|OA|$, jo spēks darbojas pretēji y ass virzienam, tad smaguma spēka projekcija uz y ass ir aptuveni $\mathbf{-17}$.

94. Rotaļu automašīna tiek vilkta ar 20 N lielu spēku. Automašīnas aukliņa ar zemi veido 45° lielu leņķi. Aprēķini rotaļlietas vilcējspēka horizontālo projekciju!

95. Aprēķini zīmējumā attēloto vektoru projekcijas uz x un y asīm!



96. Lidmašīnas ātrums ir 700 km/h, un tās nospraustais kurss ir 60° attiecībā pret ziemeļu virzienu. Aprēķini lidmašīnas ātruma vektora projekcijas uz x un y asīm (y ass virziens sakrīt ar ziemeļu virzienu)!

97. Ragaviņas, kurās sēž bērns, velk aiz auklas, kas veido 60° lielu leņķi ar zemi.

a) Aprēķini vilcējspēka horizontālo un vertikālo projekciju, ja ragaviņas tiek vilktas ar 40 N lielu spēku!

b) Ja vilcējspēku pieliktu 30° leņķī attiecībā pret horizontu, ragaviņas vilkt būtu vieglāk. Pamato to!

98. Automašīna, kuras masa ir 800 kg, novietota uz ielas, kas ar horizontāli veido 12° lielu leņķi. Aprēķini miera stāvokļa berzes spēku, kas nepieciešams, lai automašīna neripotu pa ielu uz leju!