Kā noteikt attālumu?

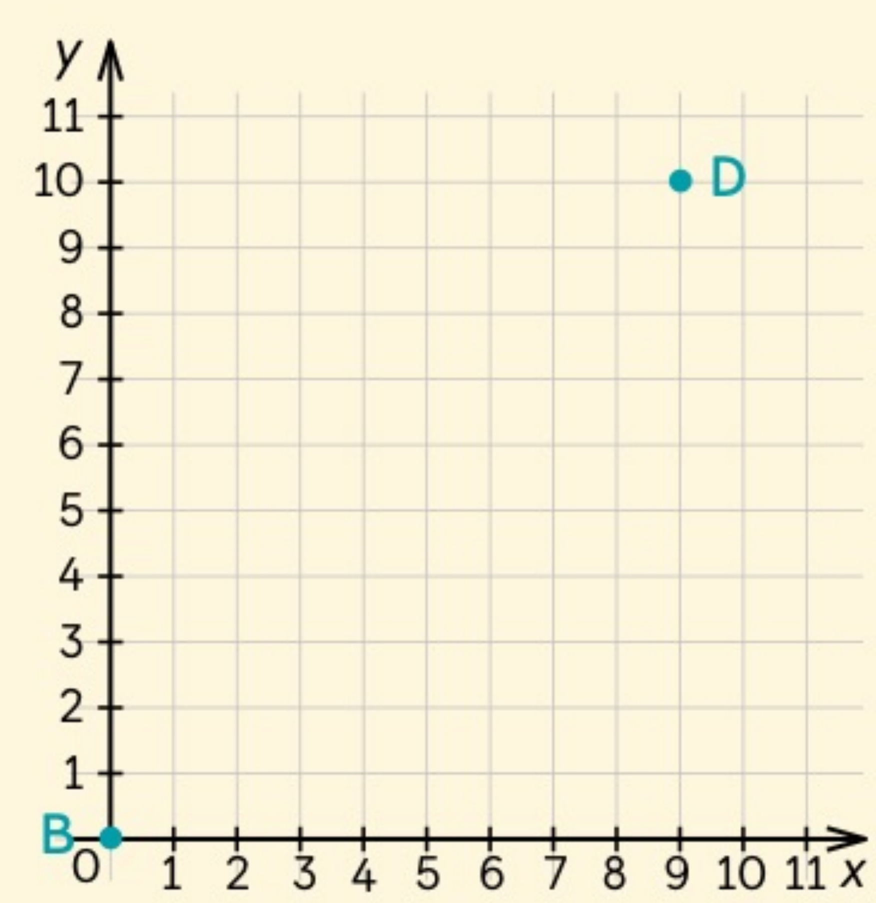
Aplūko situāciju, kad jānosaka,

1) cik liels attālums ir no Brīvības pieminekļa līdz Dailes teātrim Rīgā,
2) kur atrodas vieta, kas ir vienādā attālumā gan no Brīvības pieminekļa, gan Dailes teātra.

Dita apgalvo, ka uzdevuma nosacījumam atbilst trīs vietas (punkti koordinātu plaknē), kas atrodas vienādā attālumā gan no Brīvības pieminekļa, gan no Dailes teātra.

> Vai tu piekrīti Ditas apgalvojumam? Pamato!
Apspried savas idejas ar pārējiem klasesbiedriem! Ja spriedumi atšķiras, uzdodiet cits citam jautājumus un noskaidrojiet, kāpēc atšķiras!

Koordinātu plaknē atliek punktus B(0; 0), kas ir Brīvības pieminekļa atrašanās vieta, un D(9; 8) — Dailes teātra atrašanās vieta.



Apspriediet pārī vai grupā!

1. Kā aprēķināt attālumu starp Brīvības pieminekli un Dailes teātri, ja zināmas to atrašanās vietu koordinātas?
2. Kā koordinātu plaknē atlikt punktu, kas atrodas vienādā attālumā no minētajām vietām, ja pārvietojas pa noteiktu maršrutu, un kā noteikt tā koordinātas?
3. Mēģiniet vispārināt konkrēto piemēru un uzrakstiet prasīto!
   - Kā aprēķina attālumu starp diviem punktiem, ja zināmas to koordinātas?
   - Kā nosaka nogriežņa viduspunkta koordinātas, ja zināmas tā galapunktu koordinātas?

   Uzrakstiet šo vispārinājumu!

Apziniet savus spriešanas veidus! Vai izmantojāt zīmējumu, citas skices, algebriskas izteiksmes u. tml.? Izstāstiet, kā spriedāt un kāpēc izvēlējāties šādu risināšanas veidu!

Analītiskā ģeometrija pēta ģeometrisko figūru īpašības un novietojumu, ja punkti, līnijas un leņķi doti koordinātu plaknē. Ģeometriskās figūras definē, izmantojot koordinātu plakni un algebras principus. Mēdz uzskatīt, ka analītiskā ģeometrija ir modernās matemātikās sākums.

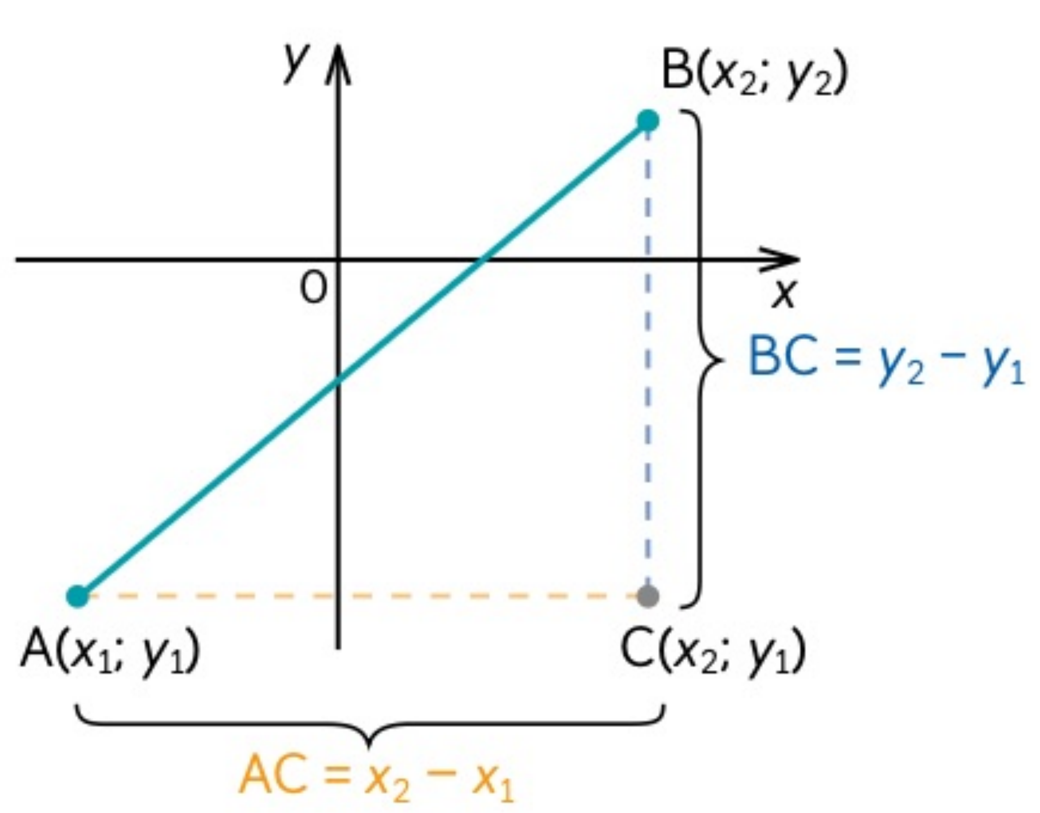
Attālums starp diviem punktiem jeb nogriežņa garums

Lai spriestu par ģeometriskām figūrām, tās var attēlot koordinātu plaknē un spriedumu veidošanai izmantot nogriežņu galapunktu vai citu raksturīgu punktu koordinātas.

attālums starp diviem punktiem | nogriežņa viduspunkta koordinātas

Attālums starp diviem punktiem

Lai noteiktu **attālumu starp diviem punktiem** $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$, koordinātu plaknē izveido taisnlenķa trjstūri ABC, un **nogriežņa** AB **garumu** aprēķina, izmantojot Pitagora teorēmu.



Pēc Pitagora teorēmas:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$$

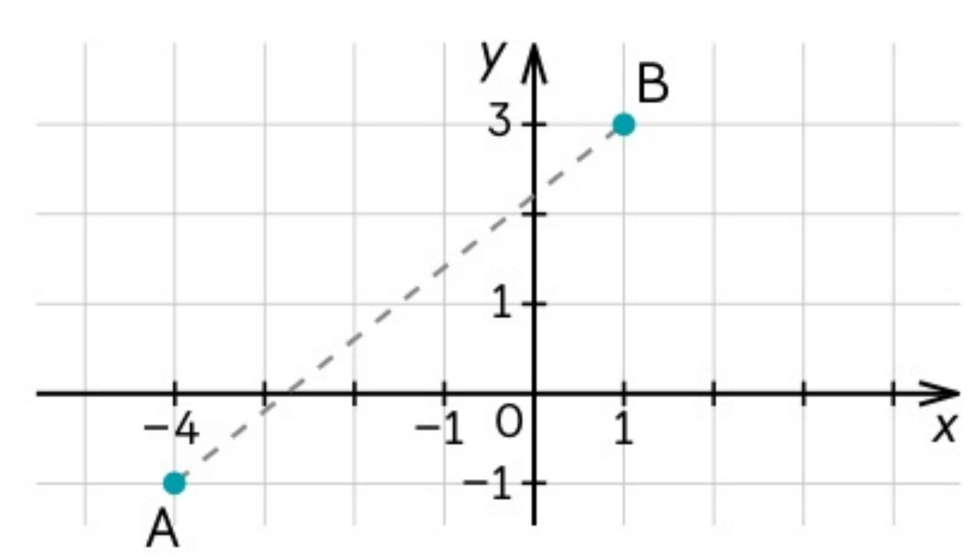
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Atceries!

$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$

1. PIEMĒRS

Nosaki attālumu starp punktiem A un B (skat. zīm.)!



Risinājums

Risināšanas plāns

Izmanto attāluma noteikšanas formulu. $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, kur $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$.

Nosaka punktu koordinātas. $A(-4; -1)$, $B(1; 3)$

Pieraksta punktu koordinātu vērtības. $x_1 = -4, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 3$

Ievieto formulā punktu koordinātas.

$$AB = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (3 - (-1))^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \approx 6{,}4 \text{ (vien.)}$$

Uzraksta atbildi. Atbilde. Attālums starp punktiem A un B ir aptuveni 6,4 vienības.

Vai tu zīmētu zīmējumu, ja dotas divu punktu koordinātas un ir jāaprēķina attālums starp šiem punktiem?

Uzdevumi

Attālums starp diviem punktiem

99. Nosaki attālumu starp dotajiem punktiem!

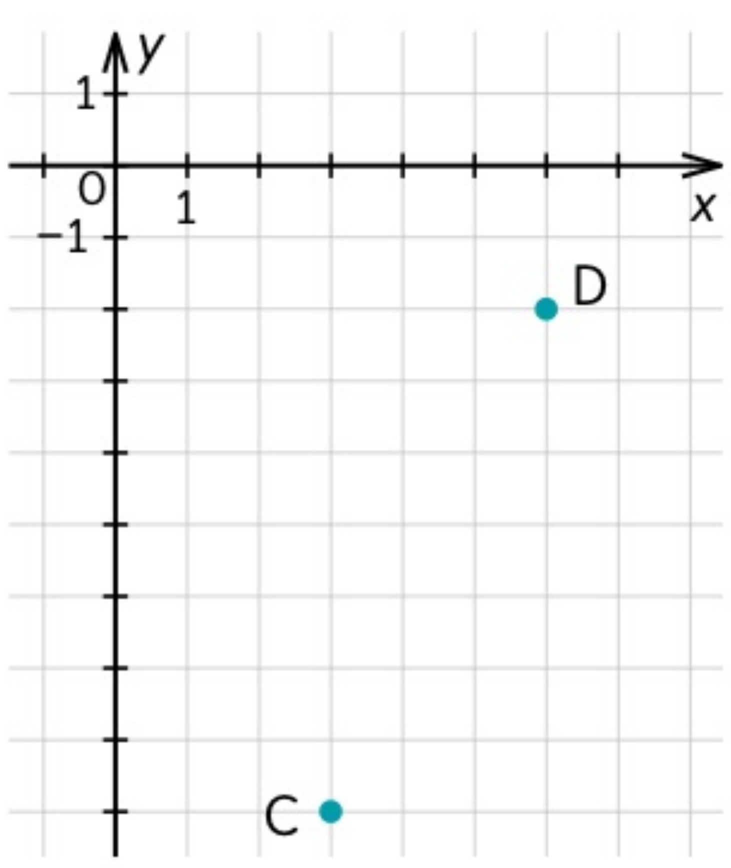
a) D(11; 10) un F(14; −14)
b) E(14; 14) un C(11; 10)
c) B(−6; 0) un T(0; 8)
d) A(1; 1) un B(−10; −10)
e) C(2; −5) un E(2; −5)
f) K(3; −7) un T(6; 2)
g) U(−6; −4) un T(−2; −1)
h) A(1; 5) un D(−5; −7)
i) K(−9; 11) un T(−11; 13)

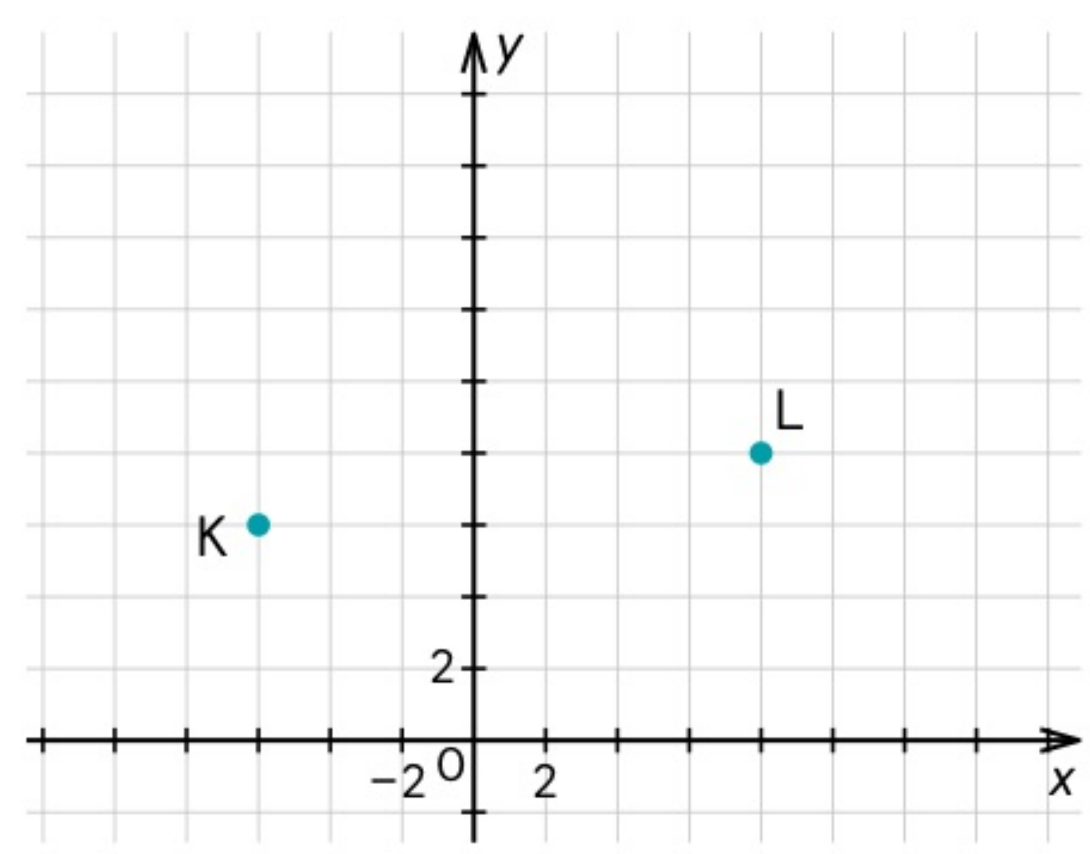
100. Aprēķini nogriežņa garumu, ja ir zināmas tā galapunktu koordinātas!

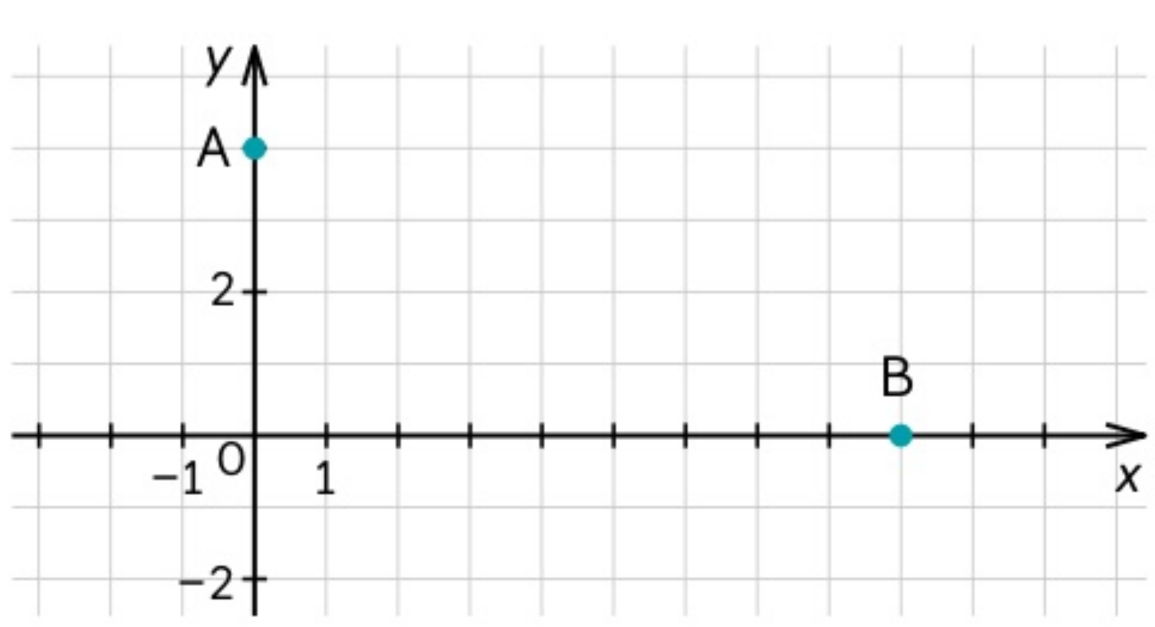
a) $M(0; \sqrt{7})$ un $N(0; \sqrt{7})$
b) $M(2\sqrt{2}; -10)$ un $N(0; -8)$
c) $M(-5\sqrt{5}; -3)$ un $N(-7\sqrt{5}; 1)$

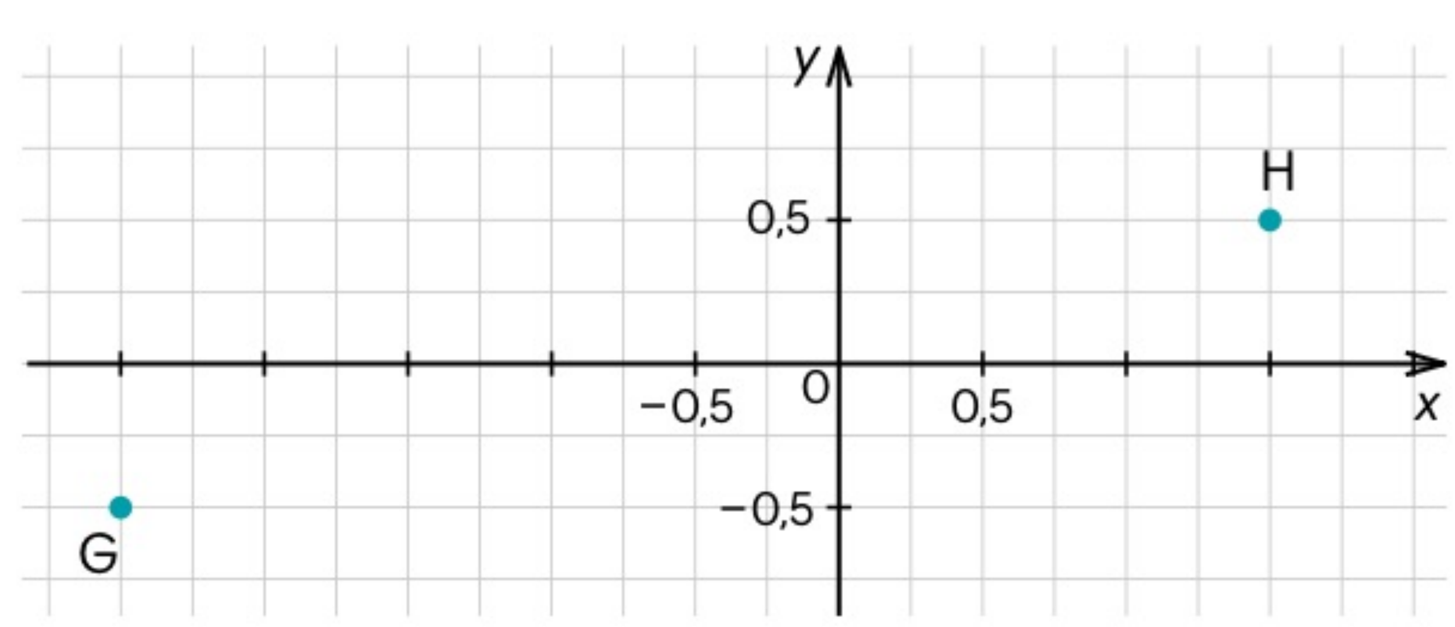
Kā tu izvēlējies, kurš punkts ir nogriežņa sākumpunkts, kurš — galapunkts?

101. Aprēķini attālumu starp diviem atzīmētajiem punktiem!

a)


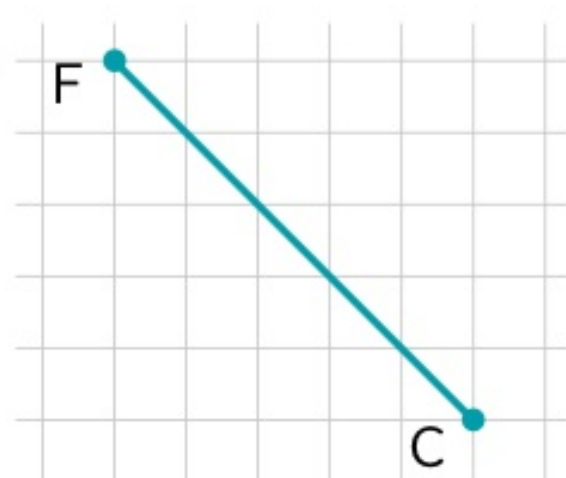
c)


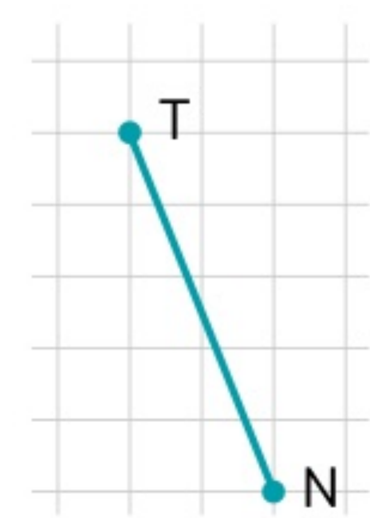
b)


d)


102. Izveido koordinātu plakni un nosaki nogriežņa galapunktu koordinātas!

a)


b)


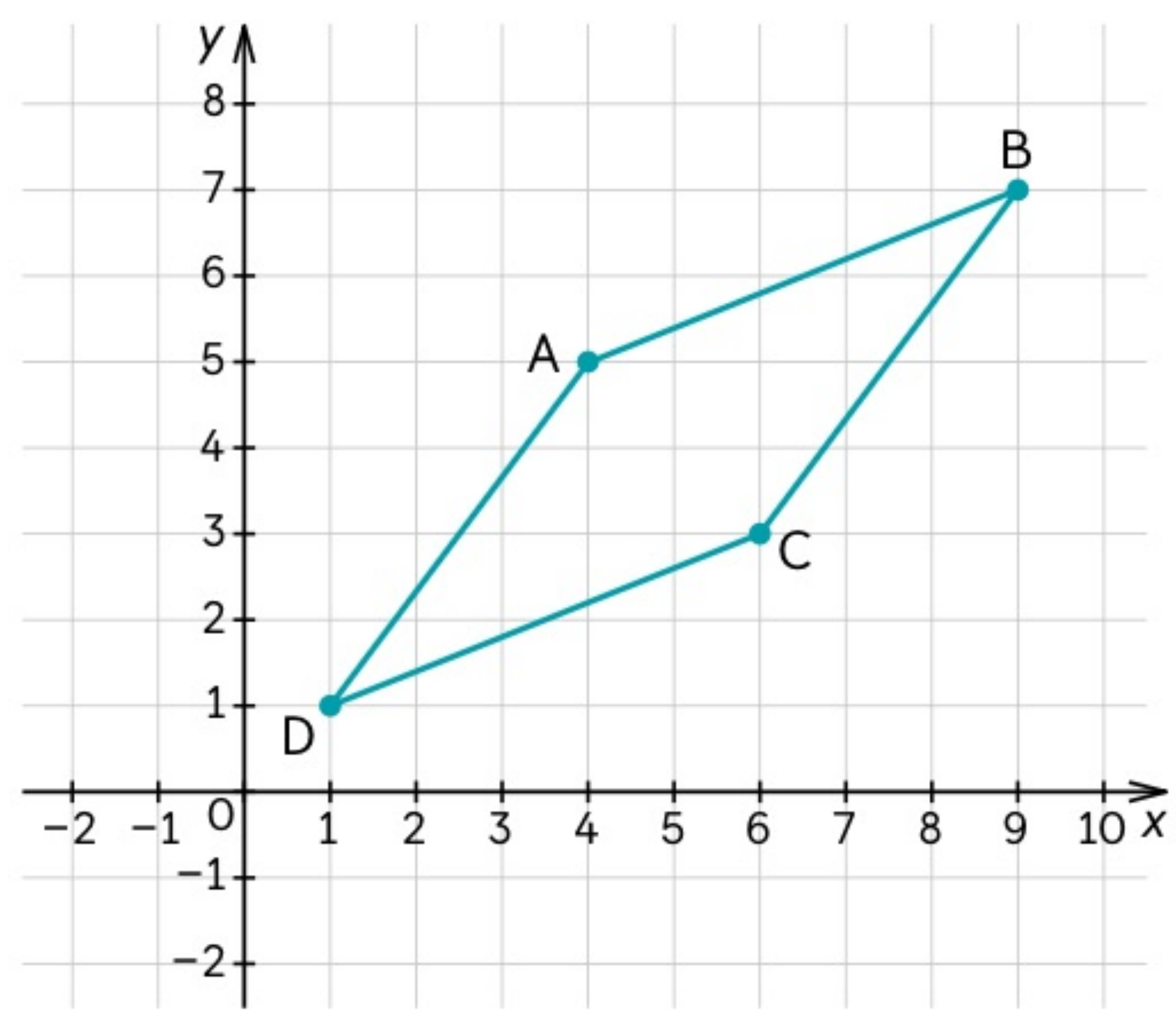
c)


d)

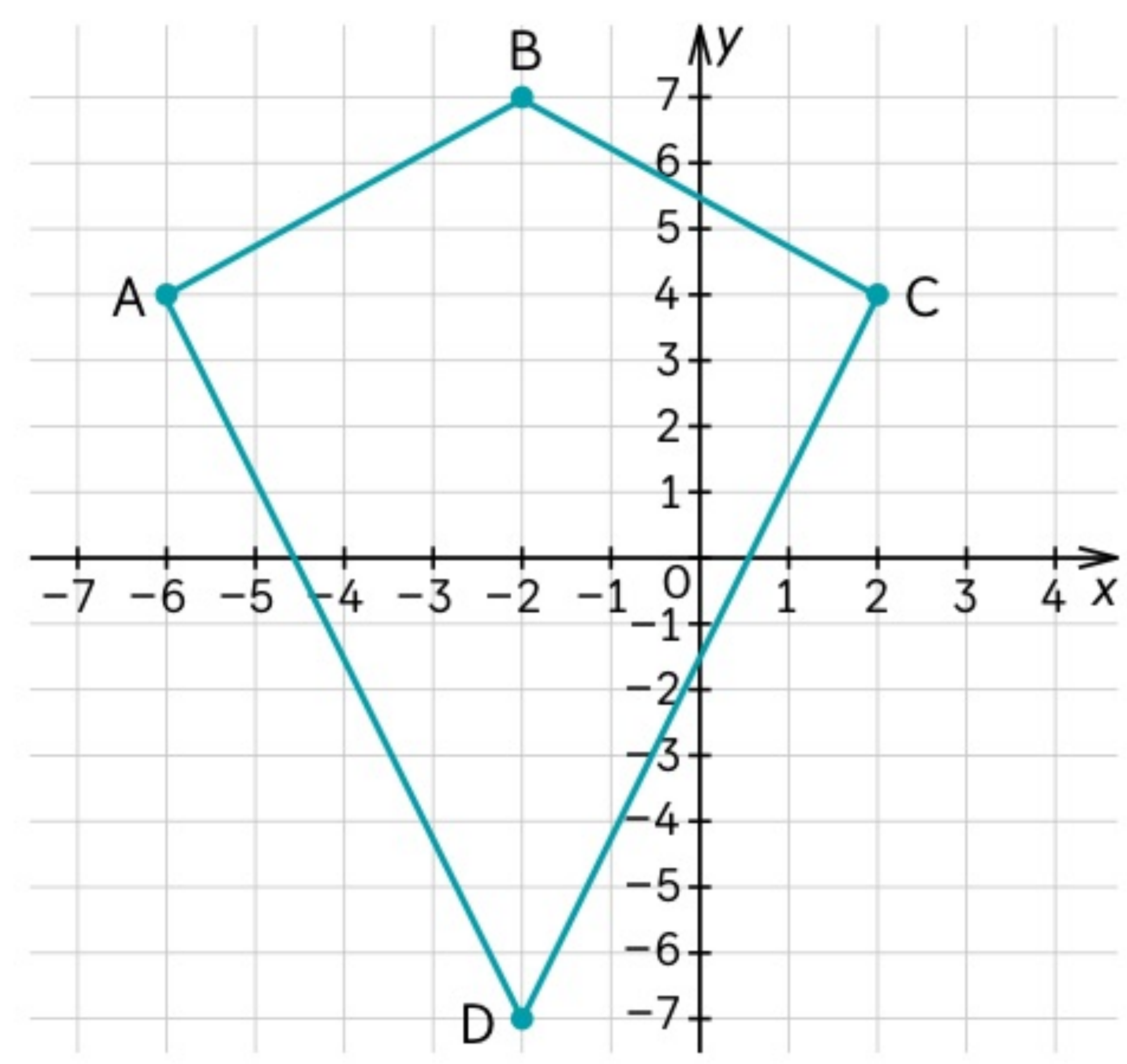

Salīdzini savu zīmējumu un atbildi ar klasesbiedru zīmējumiem un atbildēm! Kas jūsu risinājumos ir atšķirīgs, kas — kopīgs?

103. Aprēķini čerstūra perimetru!

a) ABCD ir paralelograms.



b) ABCD ir deltoīds.



104. Aprēķini riņķa rādiusu, ja dotas riņķa diametra galapunktu koordinātas!

a) A(3; 2) un B(18; 10)

b) L(−2; 4) un N(12; 10)

105. Taisnleņķa trijstūra virsotņu koordinātas ir C(−2; 1), D(1; 1) un E(1; 2). Aprēķini hipotenūzas garumu!

106. Dotā taisne krusto y asi punktā A un x asi punktā B. Aprēķini attālumu AB!

a) $y = 3x - 12$

b) $y = -\frac{3}{4}x + 6$

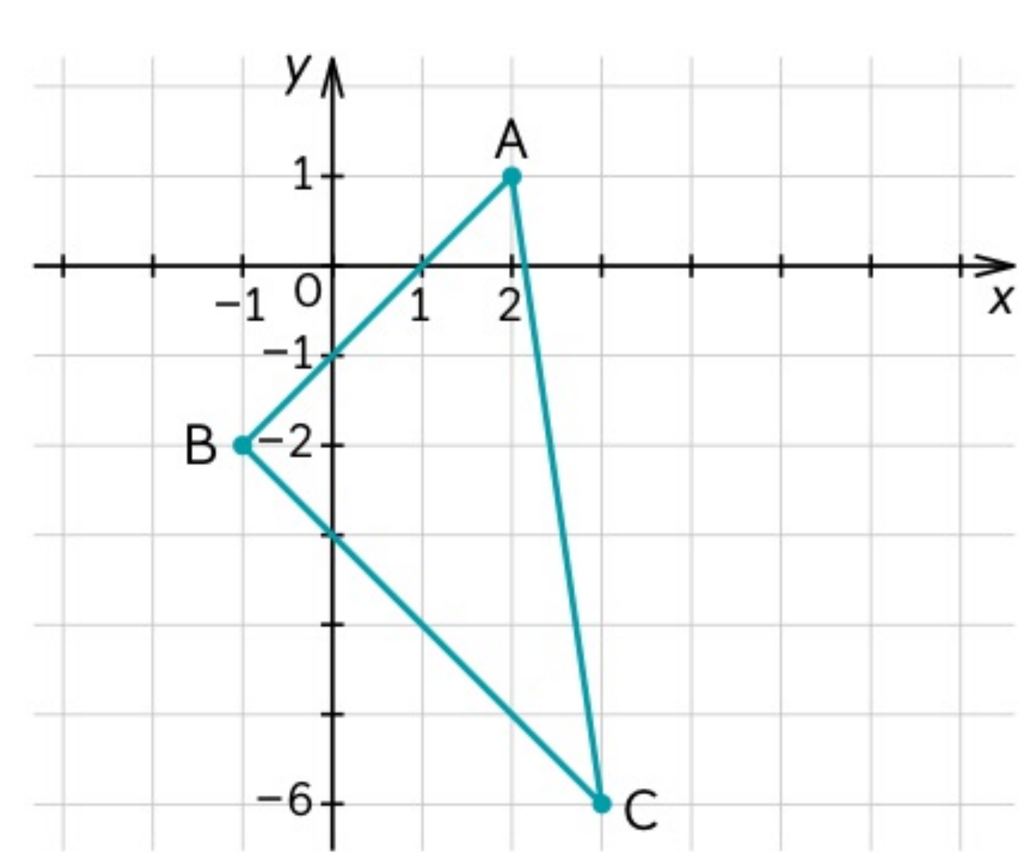
c) $y = 5 + \frac{5}{12}x$

107. Zināmas trīs punktu koordinātas. Aprēķini, starp kuriem punktiem ir vislielākais attālums!

a) E(8; 15), F(0; 15) un G(8; 0)

b) K(−6; 2), L(6; −3) un P(−3; −2)

108. Taisnleņķa trijstūra ABC perimetrs ir $12\sqrt{2}$ (skat. zīm.).
Ervīns trijstūri papildināja līdz taisnstūrim ABCD un aprēķināja, ka tā perimetrs ir $24\sqrt{2}$.
Vai Ervīna iegūtā atbilde ir patiesa?
Pamato savu atbildi ar aprēķiniem!



109. Aprēķini četrstūra diagonāles garumu!

a) Paralelograma ABCD virsotņu koordinātas ir A(5; 2), B(2; 4), C(6; 7) un D(9; 5).
Aprēķini paralelograma īsākās diagonāles garumu!

b) Taisnleņķa trapeces LMNT virsotņu koordinātas ir L(4; 6), M(4; 12), N(6; 12) un T(16; 6).
Aprēķini trapeces garākās diagonāles garumu!

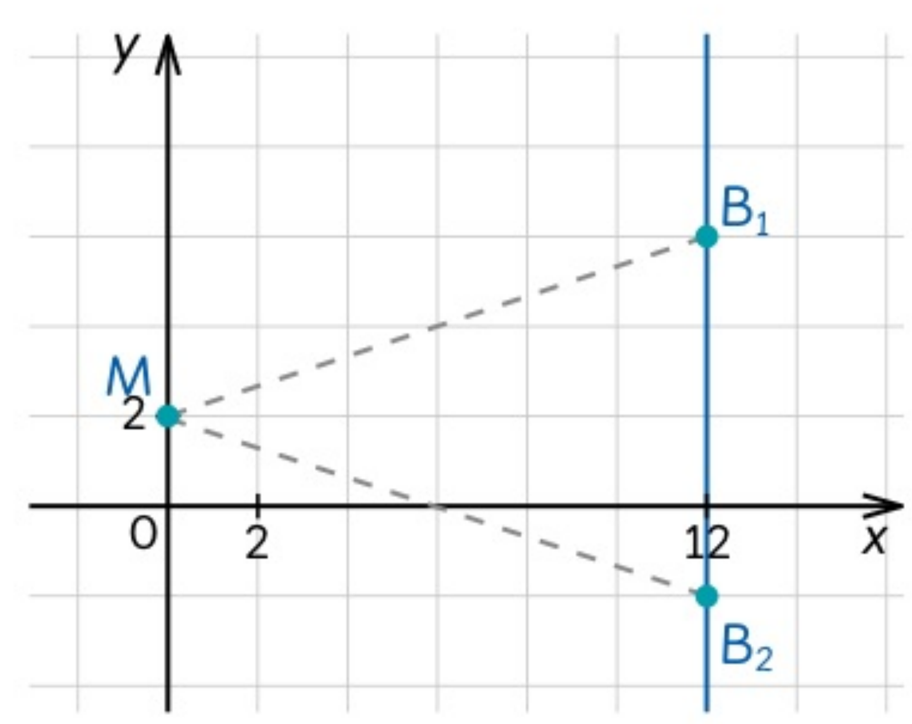
2. PIEMĒRS

Zināms, ka MB = 13, M(0; 2) un B(12; y). Kristers apgalvo, ka ir iespējamas divas y vērtības. Vai šis apgalvojums ir patiess? Pamato ar aprēķiniem! Nosaki y vērtības!

Risinājums

1) Veido skici:

- koordinātu plaknē atliek punktu M(0; 2),
- uzzīmē taisni $x = 12$, uz kuras atradīsies punkts B.



Tā kā MB = 13, tad nogrieznis MB nebūs perpendikulāri novietots attiecībā pret uzzīmēto taisni. Tātad punkta B koordinātai y var būt divas vērtības.

- Skicē atliek iespējamās punktu B_1 un B_2 atrašanās vietas.

Tātad Kristera apgalvojums ir patiess!

2) Nosaka y vērtības.

Pieraksta punktu M un B koordinātu vērtības.

$x_1 = 0, y_1 = 2, x_2 = 12, y_2 = y$

Ievieto formulā $MB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ punktu M un B koordinātas.

$$\sqrt{(12-0)^2 + (y-2)^2} = 13$$

Lai atbrīvotos no kvadrātsaknes, abas vienādojuma puses kāpina kvadrātā.

$$144 + (y-2)^2 = 169$$
$$(y-2)^2 = 25$$
$$y - 2 = \pm 5$$

$y = 7$ vai $y = -3 \Rightarrow y_2$ vērtības var būt 7 vai -3.

Kā pārbaudīt, vai aprēķinātās y vērtības ir pareizas?

3) Kad izdarīta pārbaude, pieraksta atbildi: $y = -3$ vai $y = 7$.

110. Izmantojot programmu *GeoGebra* (vai citu IT rīku), konstruē R. l. (M; 13 cm) un pārbaudi 2. piemērā iegūtās punktu B_1 un B_2 koordinātas!
Izmanto *slaideri*, maini punkta B koordinātu x un nosaki punktu B_1 un B_2 y koordinātas!

111. Doti punkti A(0; -2) un K(x; 7). Nosaki un pamato, cik nogriežņu AK var novilkt, ja

a) AK = 10, b) AK = $9\sqrt{2}$, c) AK = 9!

112. Aprēķini x vai y vērtību!

a) Attālums starp punktiem D(x; 3) un K(4; -1) ir 5 vienības.

b) Attālums starp punktiem C(1; 8) un F(-4; y) ir $5\sqrt{2}$ vienības.

Kā tu izvēlējies risināšanas veidu?
Salīdzini savu risinājumu ar klasesbiedru risinājumiem! Apspriediet, cik dažādus risinājumus varētu izveidot!

113. Aprēķini nezināmo koordinātu!

a) Zināms, ka A(−3; −2), B(x; 3), C(4; 5) un AB = BC.

b) Zināms, ka D(−1; 7), E(−1; 8), F(0; y) un DE = EF.

114. Izveido savu uzdevumu!

Koordinātu plaknē uzzīmē kādu figūru un nosaki dažādu tās elementu garumus! Izmantojot programmu *GeoGebra* (vai citu IT rīku), veic savu aprēķinu pārbaudi!

Izpildi klasesbiedra izveidoto uzdevumu!

115. Izvērtē Lienes, Emīlijas un Stefana pamatojumus!

Četrstūra virsotnes ir A(−3; 5), B(2; 5), C(4; 2) un D(−5; 2). Pamato, kāpēc šis četrstūris ir vienādsānu trapece!

Liene

Aprēķina visu malu garumus.

$AB = \sqrt{(2-(-3))^2 + (5-5)^2} = \sqrt{5^2 - 0} = 5$

$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

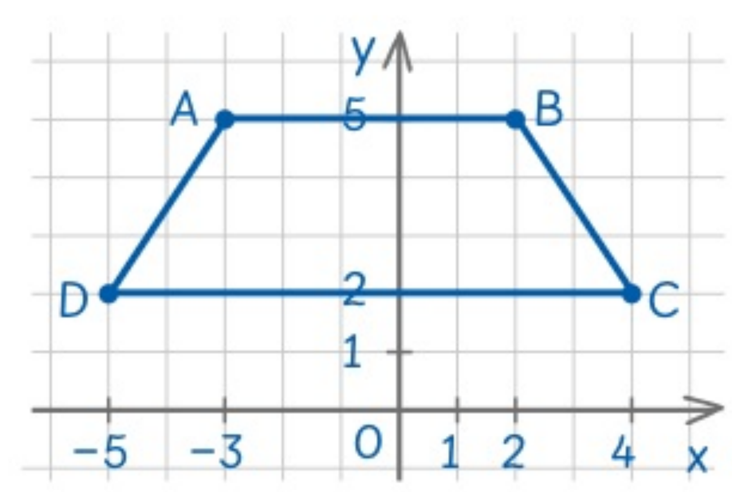
$CD = \sqrt{(-5-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9^2} = 9$

$DA = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Tā kā divas četrstūra pretējās malas ir vienādas, tad tā ir vienādsānu trapece.

Emīlija

Atliek punktus koordinātu plaknē. Iegūtajā zīmējumā ir redzams, ka tā ir vienādsānu trapece.



Stefans

Tā kā punktu A un B y koordinātas ir vienādas, tas nozīmē, ka AB atrodas uz taisnes $y = 5$.
Arī punktu C un D y koordinātas ir vienādas, tas nozīmē, ka CD atrodas uz taisnes $y = 2$.
Tātad AB || DC un četrstūra divas malas ir paralēlas.

Aprēķina paralēlo malu garumus.

$AB = 2 - (-3) = 5$ un $CD = 4 - (-5) = 9$

Aprēķina pārējo divu malu AD un BC garumus.

$AD^2 = (-3-(-5))^2 + (5-2)^2$	$BC^2 = (2-4)^2 + (5-2)^2$
$AD^2 = 2^2 + 3^2$	$BC^2 = (-2)^2 + 3^2$
$AD^2 = 13$	$BC^2 = 13$

Tātad AD = BC.

Tā kā divas malas ir vienādas un otras divas paralēlas, tad četrstūris ABCD ir vienādsānu trapece.

116. Zināms, ka A(0; 1), B(2; 3) un C(2; −1). Pierādi, ka trijstūris ABC ir vienādsānu trijstūris!

117. Pierādi un vizualizē pierādījumu!
Attālums starp punktiem A(a; b) un B(c; d) ir tieši tāds pats kā starp

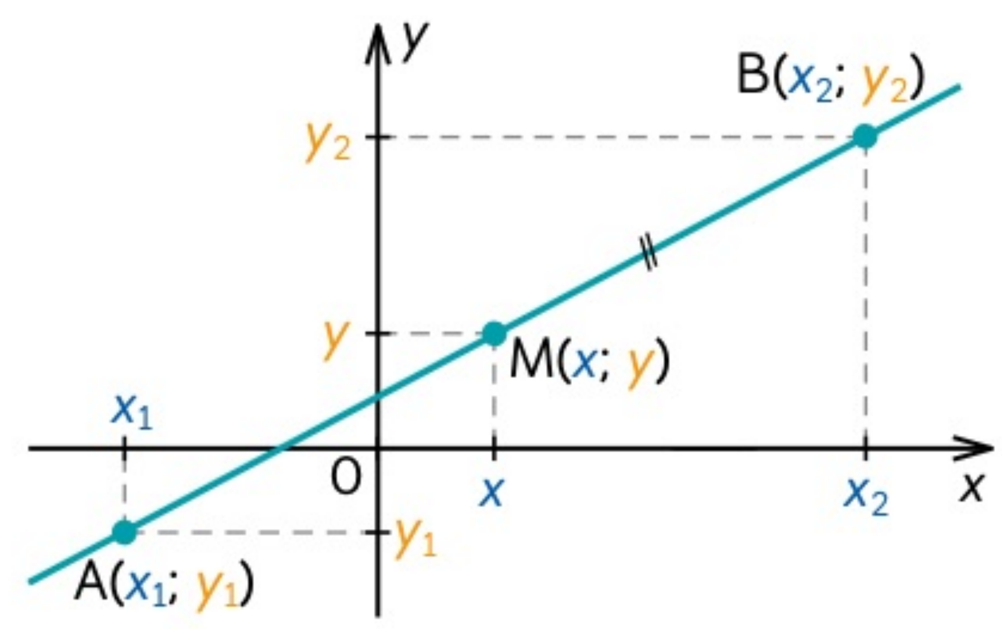
a) punktiem P(a; d) un Q(c; b),

b) punktiem U(b; a) un V(d; c).

Nogriežņa viduspunkta koordinātas

Nogriežņa AB, kur $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$, **viduspunkta** $M(x; y)$ **koordinātas** aprēķina, izmantojot sakarību

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



Izmantojot nogriežņa viduspunktu, var:
- uzzīmēt nogriežņa vidusperpendikulu,
- trijstūrī novilkt mediānu,
- spriest par paralelograma diagonāļu krustpunkta atrašanās vietu.

3. PIEMĒRS

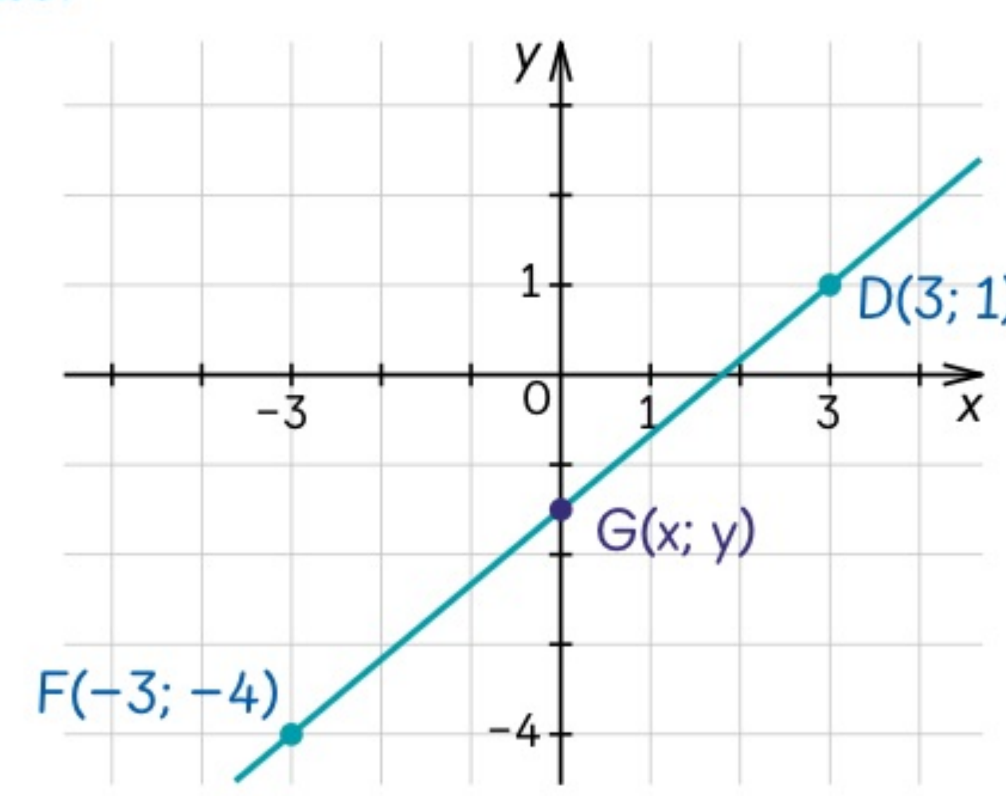
Zināms, ka $D(3; 1)$ un $F(-3; -4)$.
Nosaki nogriežņa DF viduspunkta $G(x; y)$ koordinātas!

Risinājums

Risināšanas plāns

Uzzīmē skici.

Izmantojot skici, var novērtēt, ka punkts G atrodas uz y ass.



Uzraksta nogriežņa viduspunkta koordinātu noteikšanas formulu.

$$G(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Pieraksta nepieciešamās vērtības.

$x_1 = 3;\ x_2 = -3;\ y_1 = 1;\ y_2 = -4$

Ievieto vērtības formulā un veic aprēķinus.

$$x = \frac{3 + (-3)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y = \frac{1 + (-4)}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

Novērtē risinājumu un uzraksta atbildi.

Salīdzina aprēķinātās vērtības un skicē redzamo.

Atbilde.
Nogriežņa DF viduspunkts ir punkts $G(0; -1{,}5)$.

Izvērtē apskatīto risināšanas plānu! Vai tev nepieciešami visi risināšanas soļi?
Paskaidro, kā tu rēķināsi nogriežņa viduspunkta koordinātas!
Vai un kuros gadījumos pietiktu ar zīmējuma izveidi?

Uzdevumi

Nogriežņa viduspunkta koordinātas

118. Aprēķini nogriežņa AB viduspunkta koordinātas!

a) A(3; 9) un B(−1; 5) b) A(1; 2) un B(7; 2) c) A(1; −2) un B(1; 3)

Vai, risinot uzdevumu, tu veidoji zīmējumu? Pamato savu izvēli!

119. Aprēķini koordinātas x un y!

a) Nogriežņa AB viduspunkta koordinātas ir (2; 5), bet galapunktu koordinātas ir A(x; y) un B(−5; 6).

b) Nogriežņa MT viduspunkta koordinātas ir (−4; 3,5), bet galapunktu koordinātas ir M(x; −6) un T(1; y).

c) Nogriežņa SK viduspunkta koordinātas ir (7; 3), bet galapunktu koordinātas ir S(5; y_1) un K(9; y_2).

120. Aprēķini punkta C koordinātas!

a) Nogriežņa AC viduspunkts ir B(2; −2) un punkta A koordinātas ir (−3; 1).

b) Nogriežņa CK viduspunkts ir E(8; 0) un punkta K abas koordinātas ir par 5 mazākas nekā viduspunkta atbilstošās koordinātas.

c) Nogriežņa CN viduspunkts ir L(−4; 6,4) un punkta N abscisa ir 8 reizes mazāka nekā punkta L abscisa, bet punkta N ordināta ir par 0,6 lielāka nekā punkta L ordināta.

4. PIEMĒRS

Trijstūra ABD virsotņu koordinātas ir A(2; 2), B(8; 4), D(3; 8). Anna apgalvo, ka, savienojot punktu D ar punktu C(5; 3), iegūst trijstūra mediānu.
Pamato Annas apgalvojumu!

Risinājums

Ja DC ir trijstūra ABD mediāna, tad C ir AB viduspunkts.

Aprēķina nogriežņa AB viduspunkta koordinātas (x; y).

$x = \frac{2 + 8}{2} = 5 \qquad y = \frac{2 + 4}{2} = 3$

Tātad AB viduspunkta koordinātas ir (5; 3), kas ir punkta C koordinātas.

DC tiešām ir trijstūra ABD mediāna, un Annas apgalvojums ir patiess.

121. Aprēķini mediānas otra galapunkta koordinātas!

a) Trijstūra virsotnes ir K(−4; 1), L(−4; 5) un M(−1; 0), un mediāna MA.

b) Trijstūra virsotnes ir D(−1; 3), E(3; 9) un L(5; 1), un mediānas EK.

122. Aprēķini trijstūra ABC mediānas AA_1 garumu!

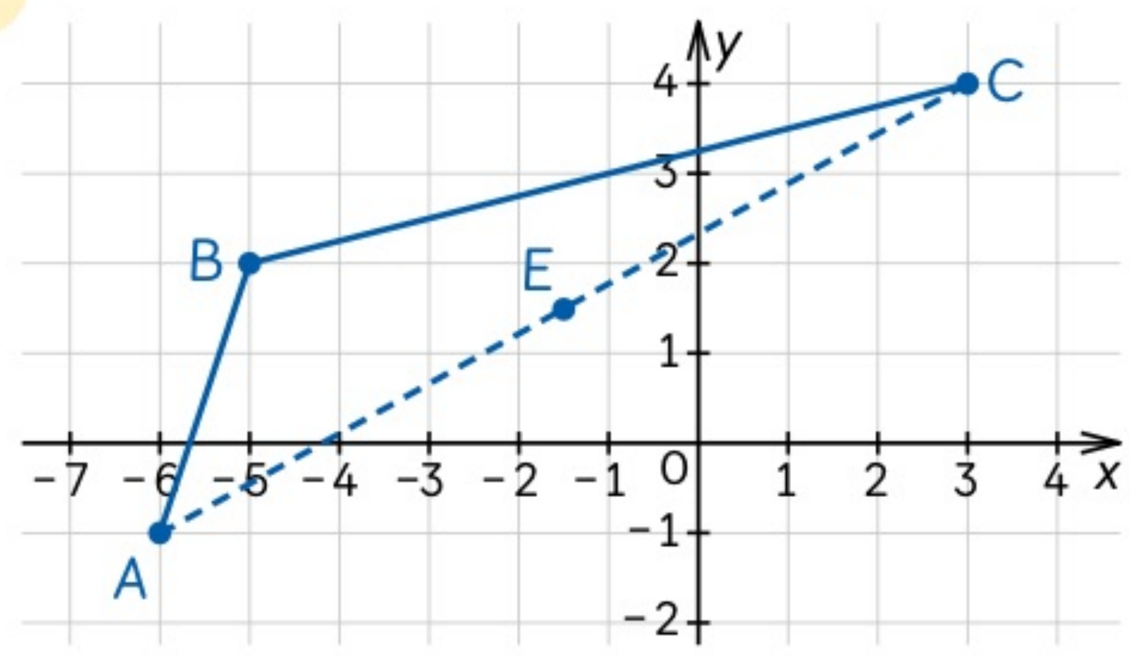
a) A(1; 0), B(0; 1), C(4; 3) b) A(−1; 1), B(2; −4), C(4; 2) c) A(0; 1), B(−1; −6), C(−3; 2)

123. Uzzīmē nogriezni AB un tā viduspunktu C programmā *GeoGebra* (vai citā IT programmā)! Atliec nogriežņa AC viduspunktu D! Kādās daļās punkts D sadala nogriezni AB?
Izdomā formulu punkta D koordinātu aprēķināšanai, izmantojot punktu A un B koordinātas!

5. PIEMĒRS Dots paralelograms ABCD. Zināms, ka A(−6; −1), B(−5; 2), C(3; 4).
Aprēķini paralelograma virsotnes D koordinātas!

Risinājums **Risināšanas plāns**

Uzzīmē skici un plāno risinājuma gaitu.



Zināms, ka paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm. Diagonāles AC viduspunkts E ir arī diagonāles BD viduspunkts. Aprēķinot punkta E koordinātas, varēs aprēķināt arī punkta D koordinātas.

Aprēķina nogriežņa AC viduspunkta koordinātas.

Aprēķina nogriežņa AC viduspunkta E koordinātas.
Izmanto doto: A(−6; −1), C(3; 4).

$$E(x; y) = \left(\frac{-6+3}{2}; \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}; \frac{3}{2}\right) = (-1{,}5; 1{,}5)$$

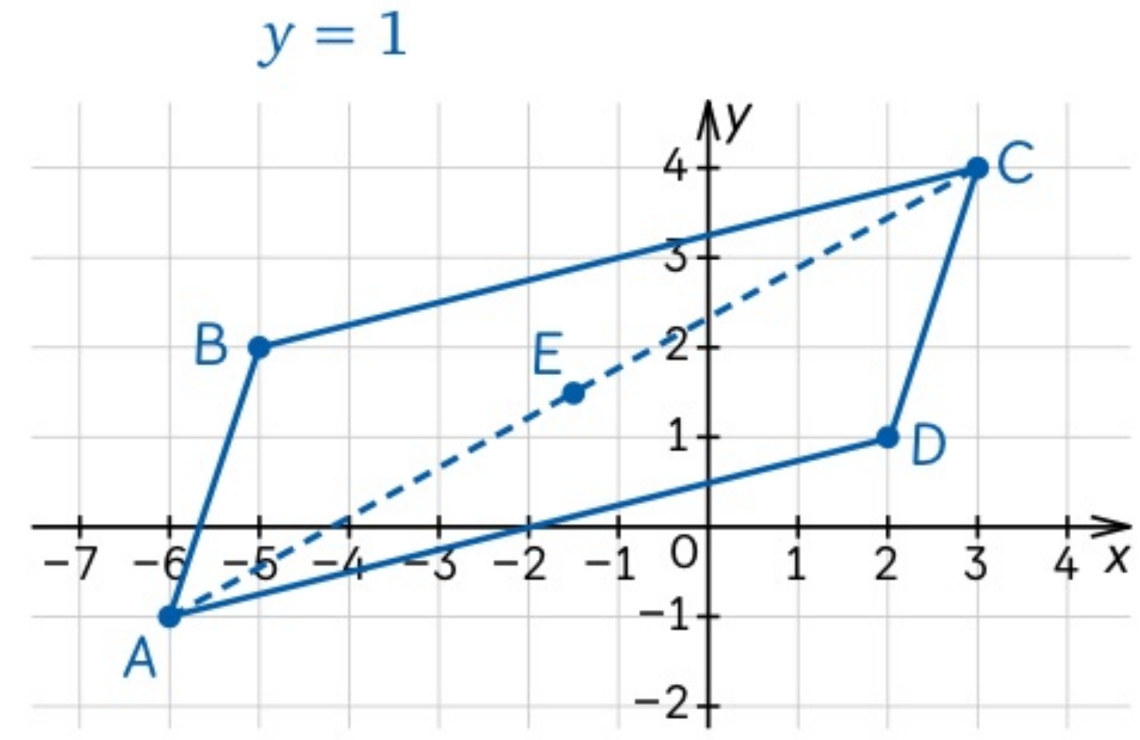
Aprēķina punkta D koordinātas.

Izmanto nogriezni jeb paralelograma diagonāli BD un tās viduspunkta E koordinātas.
Zināms, ka E(−1,5; 1,5), B(−5; 2), D(x; y).
Uzraksta nogriežņa viduspunkta koordinātu aprēķināšanas formulu un ievieto tajā zināmās vērtības.
Šoreiz atsevišķi raksta gan x, gan y koordinātu aprēķināšanas sakarības.

$$-1{,}5 = \frac{-5+x}{2} \;\Big|\cdot 2 \qquad 1{,}5 = \frac{2+y}{2} \;\Big|\cdot 2$$
$$-3 = -5 + x \qquad 3 = 2 + y$$
$$x = 2 \qquad y = 1$$

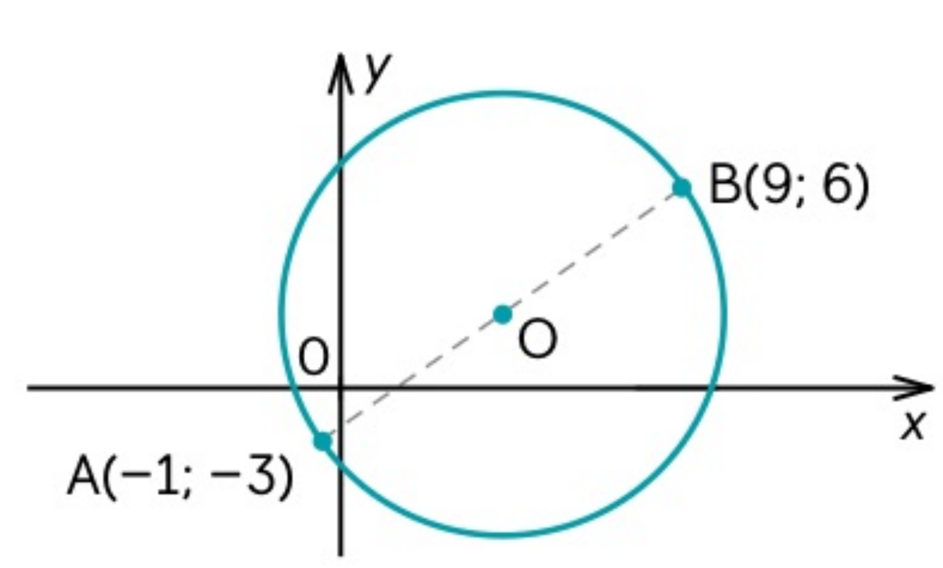
Novērtē atbildes ticamību un uzraksta atbildi.

Novērtēšanai šoreiz izmanto iesākto skici. Atliekot punktu D(2; 1) zīmējumā, secina, ka ir iegūts paralelograms.



Atbilde. Paralelograma ABCD ceturtā virsotne ir punkts D(2; 1).

124. Dota riņķa līnija ar centru punktā O (skat. zīm.). Aprēķini uzzīmētās riņķa līnijas centra koordinātas!



125. Dots rombs MAJS. Zināms, ka M(2; 2), A(4; 6), J(8; 8). Aprēķini virsotnes S koordinātas!

126. Punkti A(3; −1), B(6; 0), C(7; 3) un D(4; 2) ir četrstūra virsotnes. Vai šī četrstūra diagonāles to krustpunktā dalās uz pusēm? Pamato savu atbildi!

127. Punkti K(1; 1), L(−1; 4), P(2; 5) un R(4; 2) ir četrstūra virsotnes. Pamato, ka šī četrstūra diagonāles to krustpunktā dalās uz pusēm! Vai ar šo nosacījumu pietiek, lai apgalvotu, ka šis četrstūris ir rombs? Vai četrstūris KLPR ir rombs? Pamato savu atbildi!

128. Kvadrāta virsotnes atrodas punktos O(0; 0), A(a; 0), B(a; a), C(0; a).

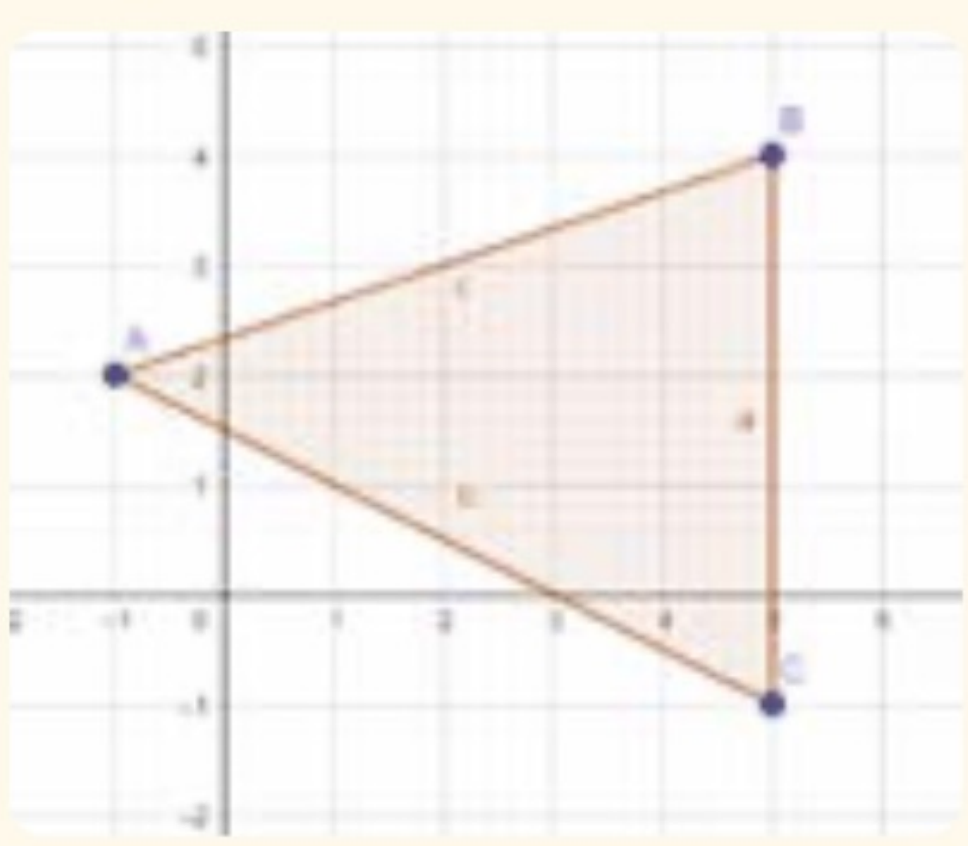
a) Nosaki diagonāļu OB un AC viduspunkta koordinātas!

b) Aprēķini kvadrāta diagonāles garumu un kvadrātam apvilktas riņķa līnijas rādiusu!

129. Punkti A(2; 3), B(4; −1) un C(2; 8) ir trijstūra virsotnes. X ir nogriežņa AB viduspunkts, bet Y ir nogriežņa BC viduspunkts. Uz taisnes XY atlikts punkts T tā, ka XY = YT. Aprēķini punkta T koordinātas! Nosaki figūras XBTC veidu! Pamato savu atbildi!

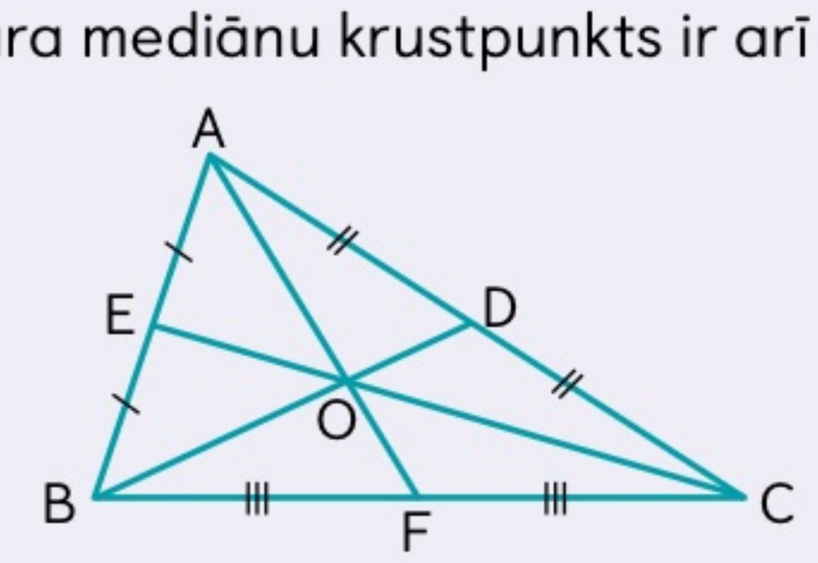
130. Dod padomu Robertam viņa uzdevuma risināšanā! Ja nepieciešams, izmanto uzziņu avotus!

Roberts nolēma veidot līdzsvara rotaļlietu, kurai ir trijstūra forma. Vispirms viņš to modelēja, izmantojot koordinātu plakni (skat. att.). Lai izveidotu rotaļlietu, viņam trijstūrī ir jāatzīmē tā smaguma centrs — jānosaka smaguma centra koordinātas.



Atceries!

Trijstūra mediānu krustpunkts ir arī trijstūra smaguma centrs.

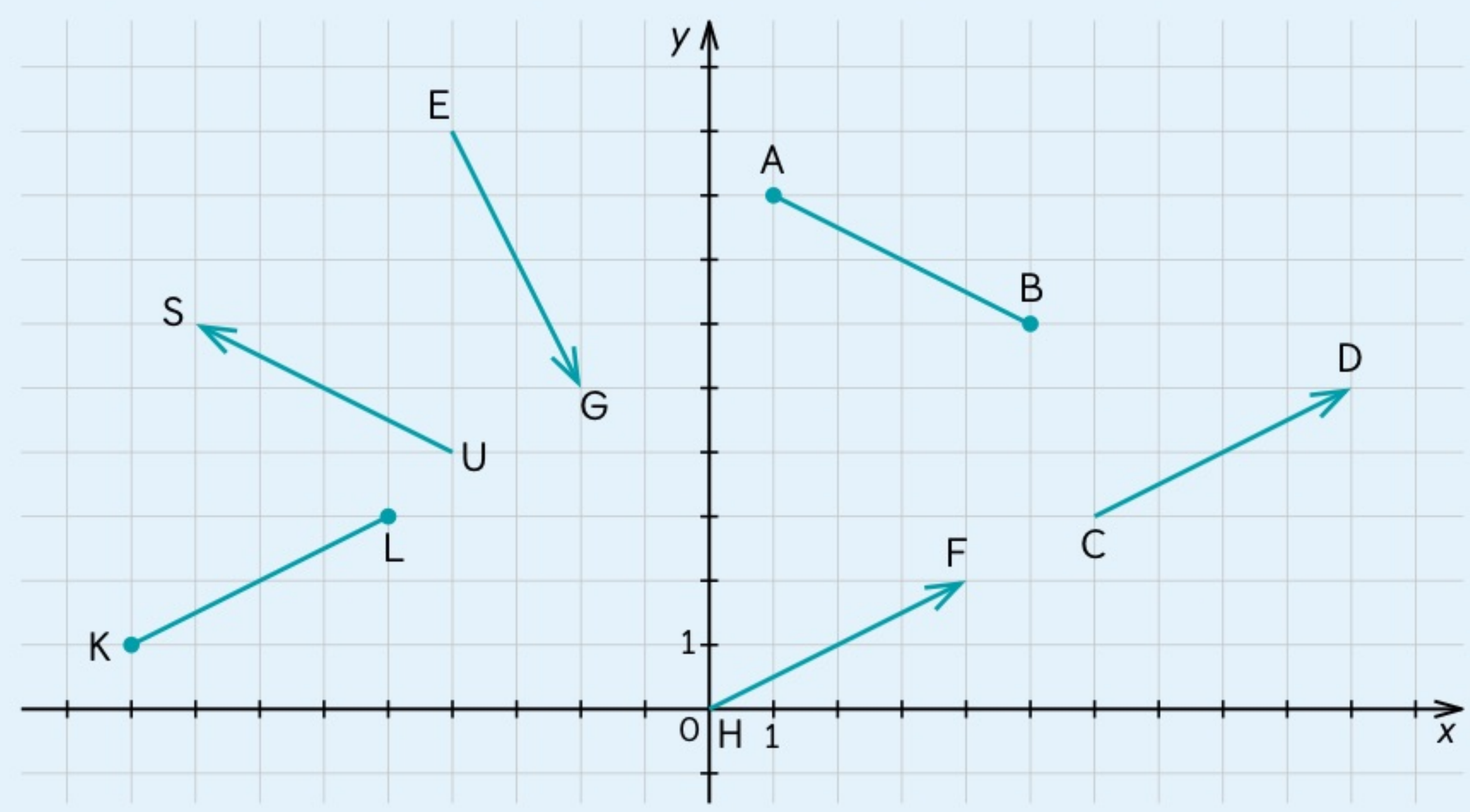


$$\frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OF} = \frac{CO}{OE} = \frac{2}{1}$$

131. Dots A(0; 4) un B(6; 1). Punkts P sadala nogriezni AB attiecībā 2 : 1, skaitot no punkta A. Nosaki punkta P koordinātas! Punkts Q sadala nogriezni AB attiecībā 5 : 1, skaitot no punkta A. Nosaki punkta Q koordinātas!

Vektors koordinātu plaknē

Aplūko zīmējumu!



> Apraksti koordinātu plaknē dotos nogriežņus un vektorus!

- Salīdzini savus aprakstus ar klasesbiedru aprakstiem!
- Kas ir kopīgs vai atšķirīgs izveidotajos raksturojumos?
- Kā aprakstījāt vektoru garumu, novietojumu un precīzu atrašanās vietu?
- Ko vēl iekļāvāt savā nogriežņu un vektoru raksturojumā?
- Kas kopīgs vai atšķirīgs nogriežņa un vektora raksturojumā?

> Izveido vienu nogriežņa un vienu vektora aprakstu un atbilstošu zīmējumu koordinātu plaknē!

Iedod aprakstu (bez zīmējuma) klasesbiedram, lai viņš uzzīmē nogriezni un vektoru koordinātu plaknē, izmantojot saņemto aprakstu! Salīdziniet savus zīmējumus!

Kā izveidot aprakstu, lai nogrieznis vai vektors būtu uzdots viennozīmīgi?

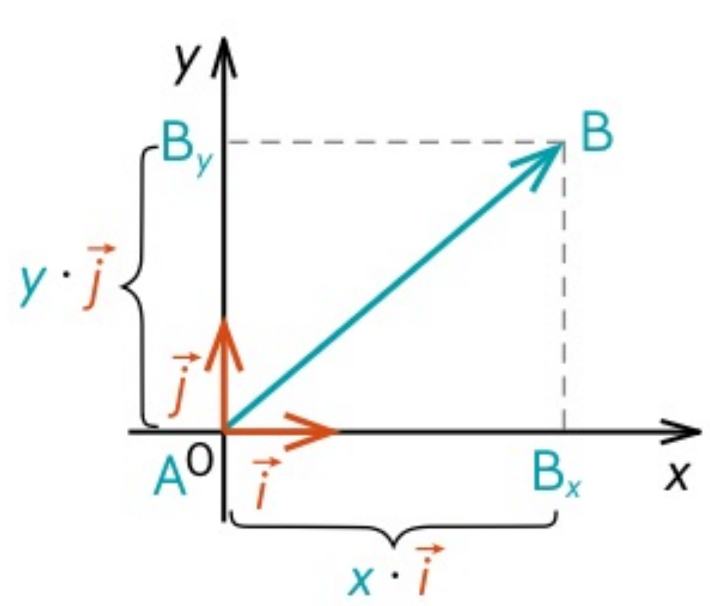
Vektori koordinātu formā un darbības ar tiem

Vektoru koordinātu plaknē var atlikt no dažādiem sākumpunktiem, bet vektora koordinātas to raksturo viennozīmīgi. Vektora pieraksts koordinātu formā ļauj ērti noteikt vektora garumu jeb moduli (izmantojot Pitagora teorēmu), veikt darbības — saskaitīt un atņemt divus vektorus, vektoru reizināt ar skaitli. Ja vektori doti koordinātu formā, tad darbības ar tiem var veikt, nezīmējot zīmējumus.

vienības vektori | vektora koordinātas | vektora modulis koordinātu formā

Vektora koordinātas

Novieto vektoru $\overrightarrow{AB}$ koordinātu plaknē tā, lai tā sākumpunkts A sakrīt ar koordinātu plaknes sākumpunktu O. Uz O*x* ass tiek atlikts vektors $\vec{i}$, kas ir 1 vienību garš, bet uz O*y* ass atliek 1 vienību garu vektoru $\vec{j}$.

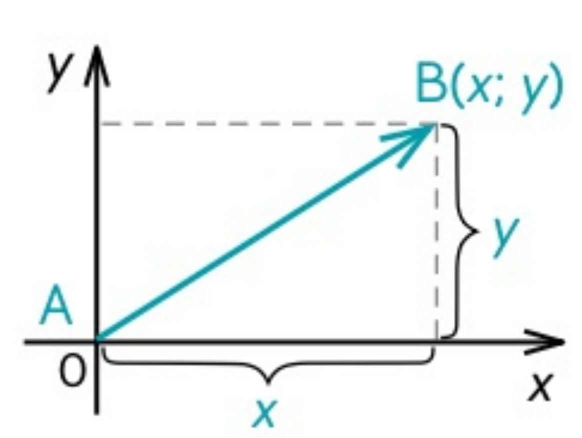


$\left.\begin{array}{l}\vec{i} \text{ garums ir } 1\\ \vec{j} \text{ garums ir } 1\end{array}\right\}$ **vienības vektori**

Izmanto paralelograma likumu un izsaka vektoru $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

Skaitļus *x* un *y* sauc par **vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātām**.



Vektoru, kas uzdots koordinātu formā, pieraksta: $\overrightarrow{AB} = (x; y)$.

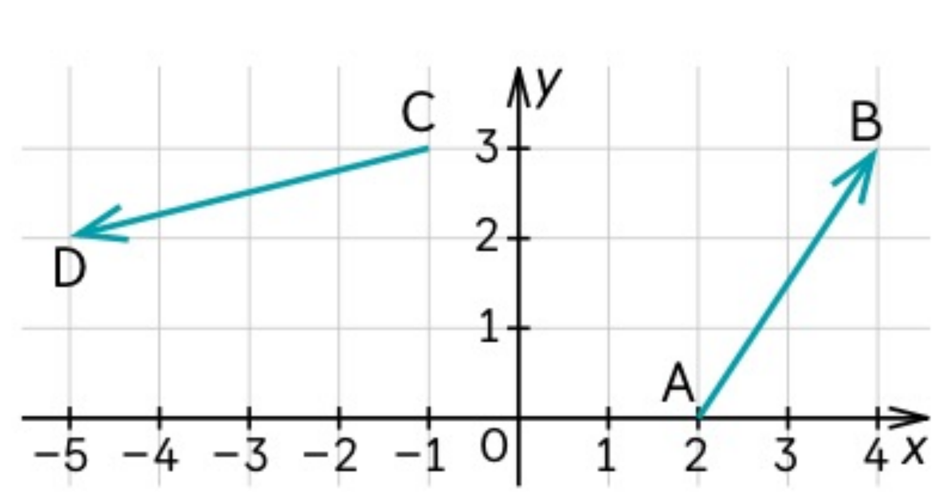
Ja vektora sākumpunkts A sakrīt ar koordinātu plaknes sākumpunktu, tad vektora koordinātas atbilst vektora galapunkta B koordinātām.

Vektoru $\overrightarrow{AB}$ koordinātu formā var pierakstīt arī $\overrightarrow{AB}(x; y)$.

1. PIEMĒRS

Aplūko zīmējumu!
Pieraksti vektorus, izmantojot vienības vektorus un koordinātas!

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{CD}$

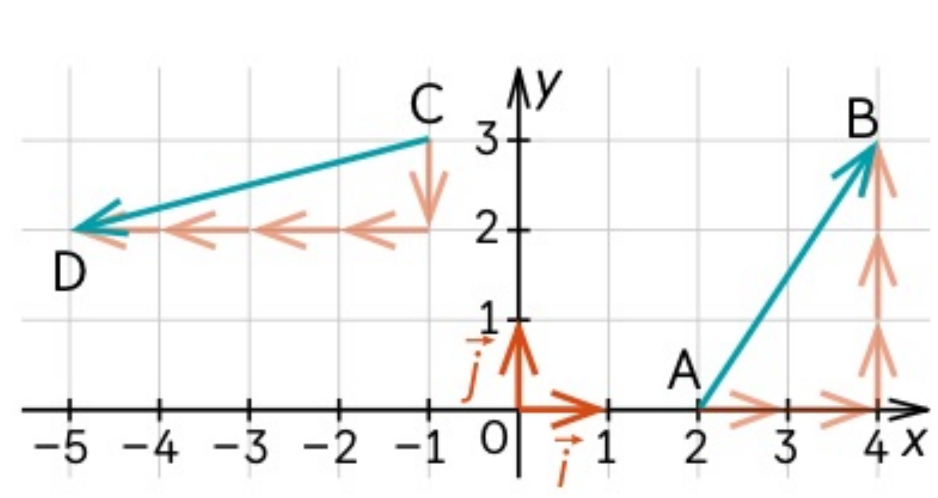


Risinājums

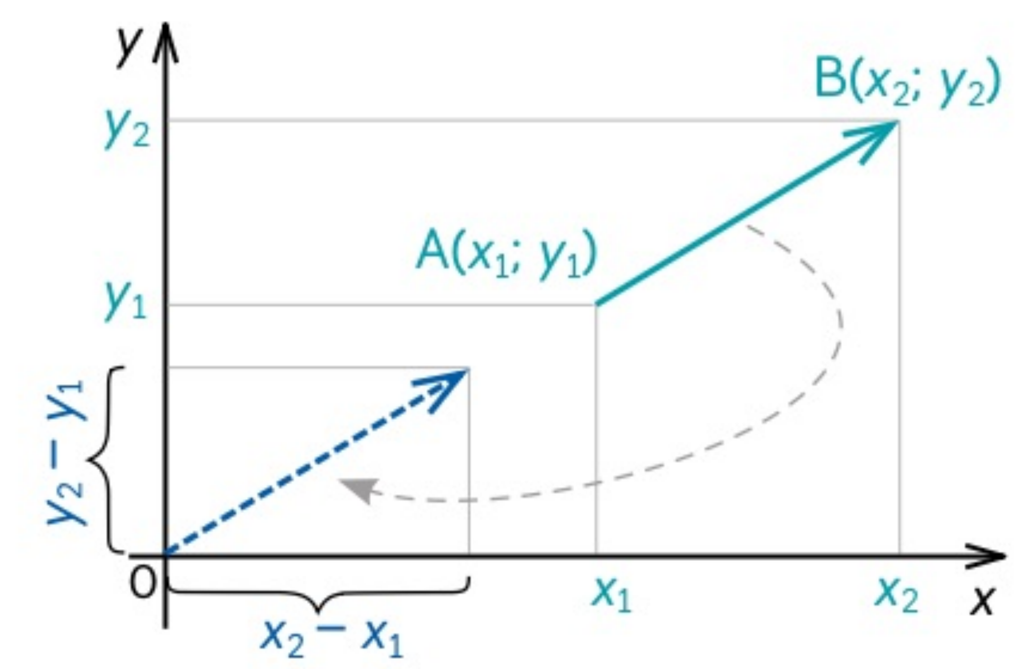
Vienības vektori ir $\vec{i}$ un $\vec{j}$. To virzieni sakrīt attiecīgi ar *x* un *y* ass pozitīvo virzienu, un katrs ir 1 vienību garš.

a) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
$\overrightarrow{AB} = (2; 3)$

b) $\overrightarrow{CD} = -4\vec{i} - \vec{j}$
$\overrightarrow{CD} = (-4; -1)$



Ja vektora sākumpunkts un galapunkts ir punkti ar koordinātām $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$, tad **vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātas** ir $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.



> Izmantojot doto zīmējumu, pamato vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātu aprēķināšanas formulu!

Vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BA}$ koordinātas ir pretēji skaitļi, t. i., ja $\overrightarrow{AB} = (x; y)$, tad $\overrightarrow{BA} = (-x; -y)$.

2. PIEMĒRS

Doti punkti $A(3; 2)$ un $B(-1; 0)$. Aprēķini vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BA}$ koordinātas!

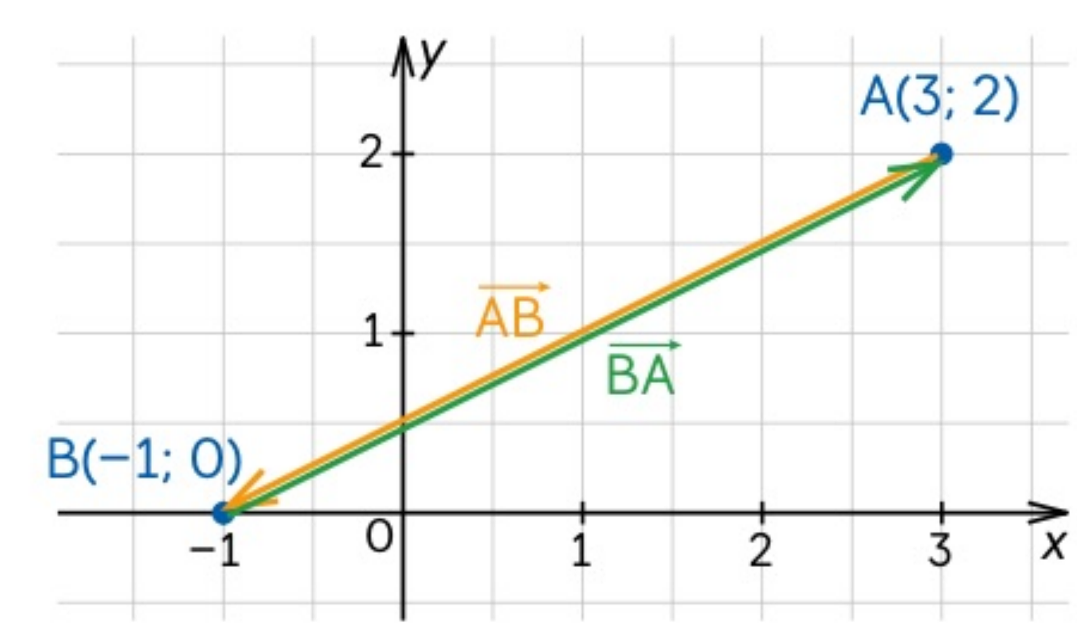
Risinājums

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3; 0 - 2) = (-4; -2)$

$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B; y_A - y_B)$

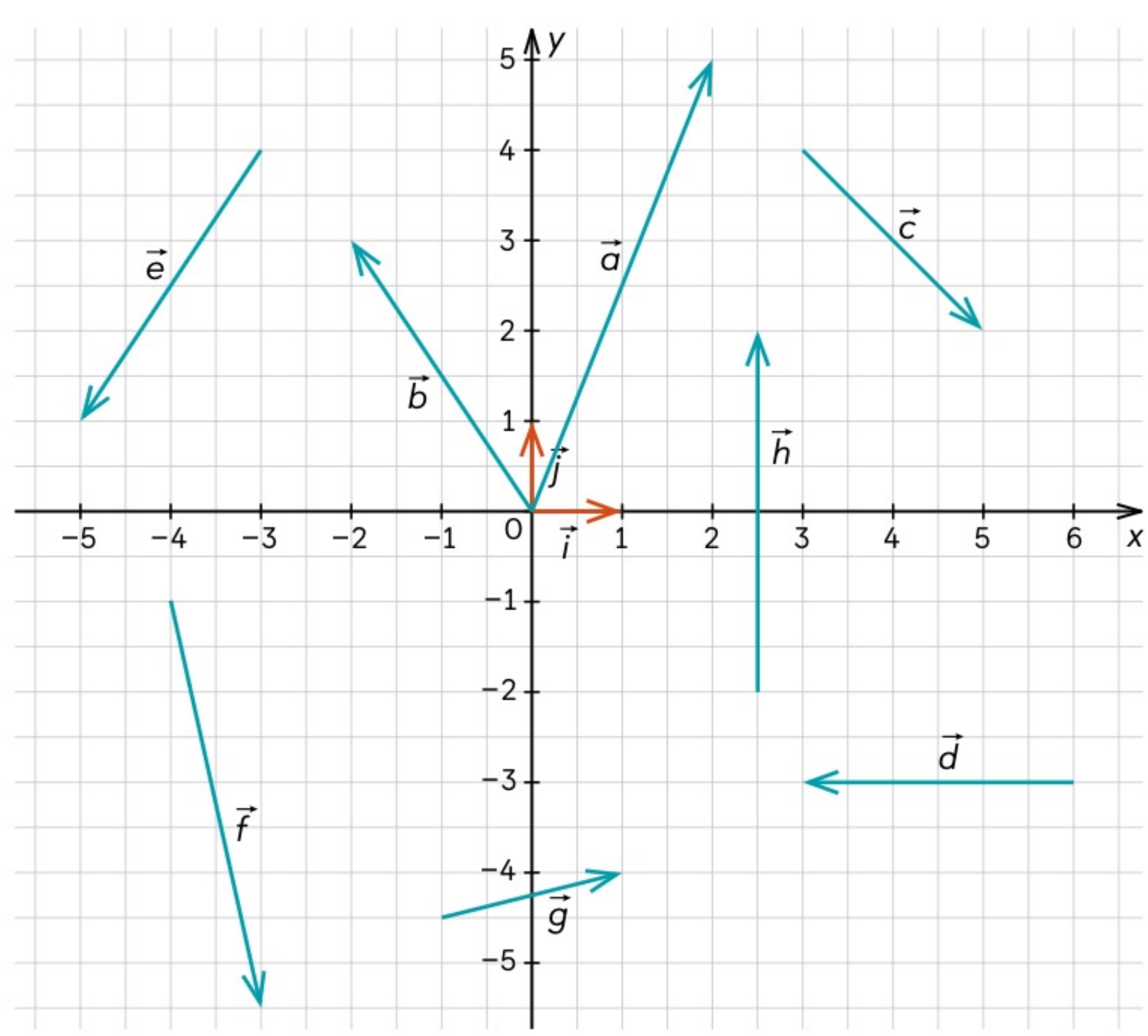
$\overrightarrow{BA} = (3 - (-1); 2 - 0) = (4; 2)$



Uzdevumi

Vektori koordinātu formā

132. Zinot vienības vektorus $\vec{i}$ un $\vec{j}$ vektoru $\vec{a}$ (skat. zīm.) var izteikt ar šiem vienības vektoriem: $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

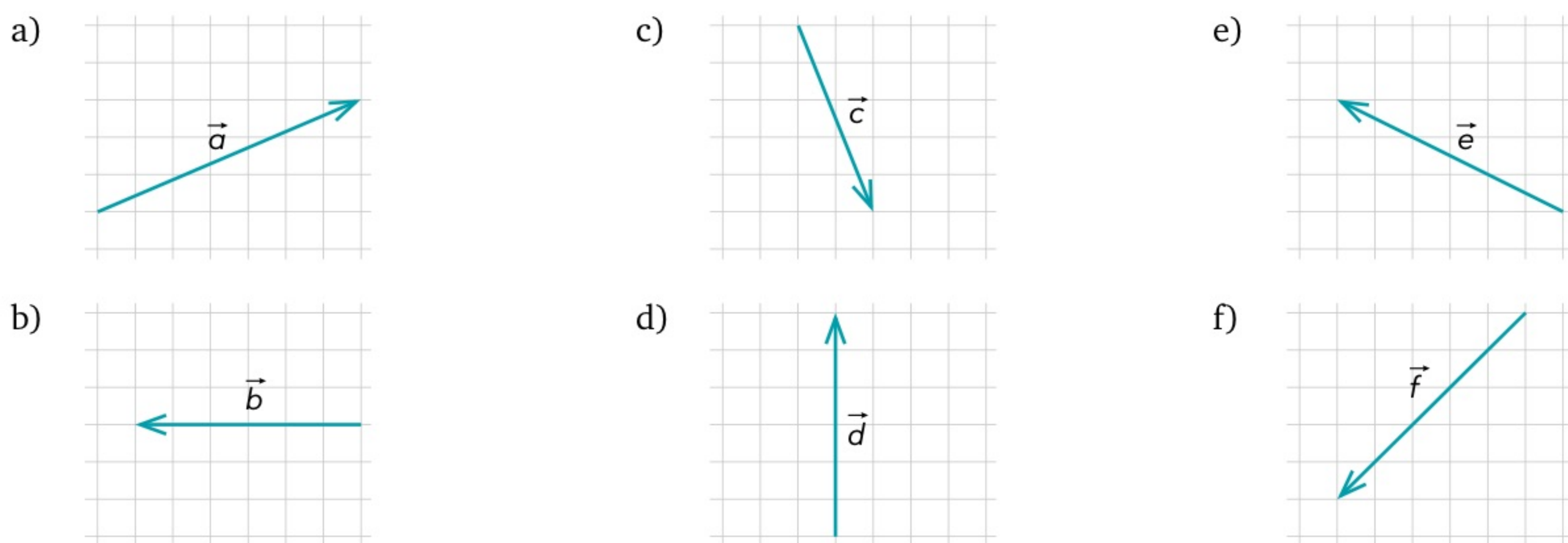


a) Uzraksti pārējos zīmējumā attēlotos vektorus ar vektoriem $\vec{i}$ un $\vec{j}$!

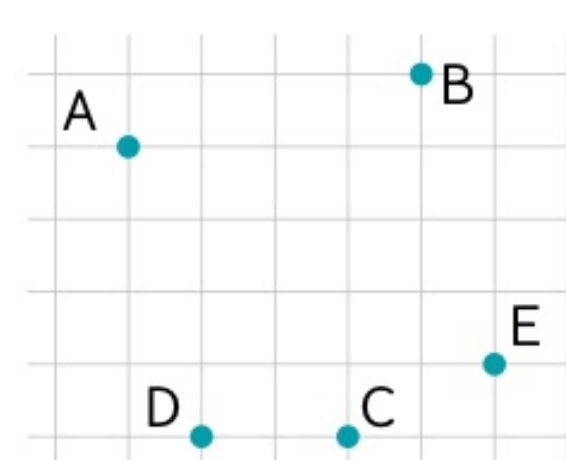
b) Uzraksti visu zīmējumā attēloto vektoru koordinātas!

c) Vai jebkuru brīvi izvēlētu vektoru var izteikt ar vienības vektoriem $\vec{i}$ un $\vec{j}$? Atbildi pamato!

133. Uzzīmē koordinātu plakni un uzraksti zīmējumā attēloto vektoru koordinātas — vispirms tās uzraksti, izmantojot vienības vektorus! Cik garu vienības vektoru izvēlējies?
Izstāsti vai uzraksti, kā tu noteici vektora koordinātas!



134. Aplūko zīmējumu!

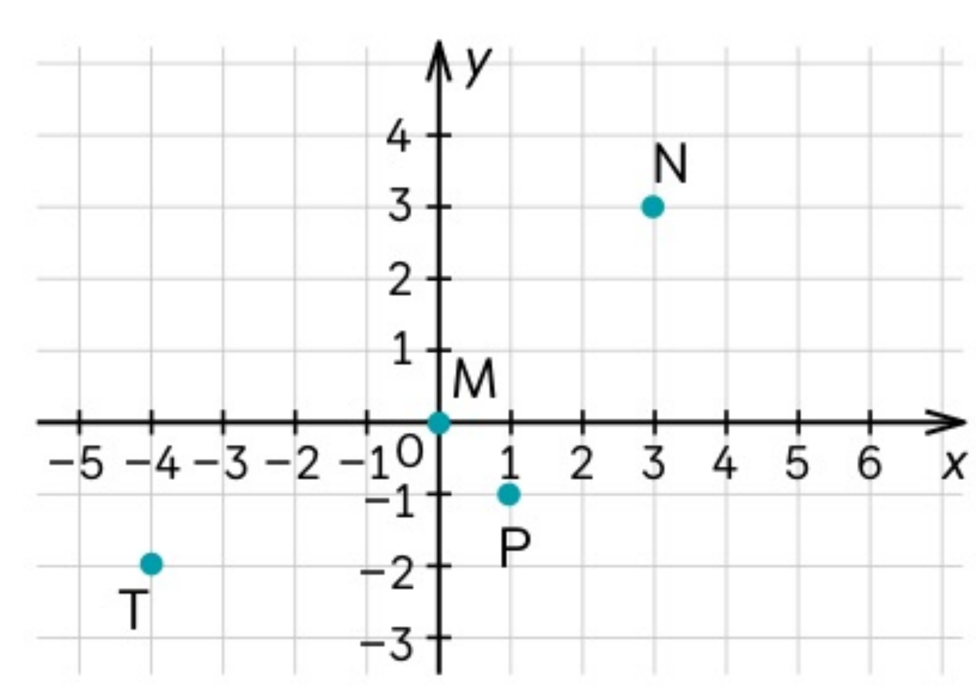


a) Uzraksti vektorus gan koordinātu formā, gan izmantojot vienības vektorus!
1) $\overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{BA}$ 3) $\overrightarrow{BC}$ 4) $\overrightarrow{DC}$ 5) $\overrightarrow{AC}$ 6) $\overrightarrow{DE}$

b) Kuri divi vektori no **a)** piemēra ir vienādi vērsti un kuri — pretēji vērsti? Pamato savu atbildi!

135. Koordinātu plaknē atzīmēts punkts O(0; 0). Uzzīmē vektorus $\overrightarrow{OA} = (2; 3)$, $\overrightarrow{OB} = (-2; 3)$, $\overrightarrow{OC} = (-2; -3)$ un $\overrightarrow{OD} = (2; -3)$! Salīdzini uzzīmētos vektorus un nosaki, kas tiem ir kopīgs, kas — atšķirīgs!

136. Doti punkti M(0; 0), N(3; 3), P(1; −1) un T(−4; −2).
Uzzīmē vektorus $\overrightarrow{ME} = (4; 1)$, $\overrightarrow{NF} = (-4; -1)$, $\overrightarrow{PG} = (4; 1)$ un $\overrightarrow{TH} = (-4; -1)$!
Nosaki uzzīmēto vektoru galapunktu koordinātas, ja dots vektors un tā sākumpunkta koordinātas!



137. Uzzīmē vektorus koordinātu plaknē, ja dotas to koordinātas!

a) (3; 4) b) (2; 0) c) (2; − 5) d) (−1; −3)

Zīmējumu veidojiet divējādi: savos pierakstos un izmantojot IT rīkus!
Kopā ar klasesbiedru salīdzini uzzīmētos vektorus un to atrašanās vietu koordinātu plaknē!
Uzrakstiet secinājumu par vektoru skaitu koordinātu plaknē, ja zināmas tikai vektora koordinātas!

138. Vienā koordinātu plaknē atliec vektorus:

1) $\overrightarrow{AB}$, ja A(4; 5), B(−1; 2),
2) $\vec{c} = (2; -3)$,
3) vektoram $\vec{c}$ vienādi vērstu vektoru $\vec{d}$,
4) vektoram $\overrightarrow{AB}$ pretēju vektoru!

139. Doti punkti A(0; 0), C(−3; 0) un E(1; 4). Nosaki vektoru $\overrightarrow{AP} = (5; -2)$, $\overrightarrow{CV} = (5; -2)$ un $\overrightarrow{EZ} = (5; -2)$ galapunktu koordinātas

a) aprēķinot,   b) izveidojot zīmējumu!

140. Nosaki vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātas, ja A(2; 3) un B(4; 7), izmantojot gan koordinātu plakni, gan formulu! Pārējos gadījumos izvēlies piemērotāko paņēmienu un nosaki vektora koordinātas!
Paskaidro katras metodes priekšrocības un trūkumus! Kā pārliecinājies, vai tava atbilde ir pareiza?

a) A(3; −1) un B(1; 4)   b) A(−2; 7) un B(1; 4)   c) B(3; 0) un A(2; 5)   d) B(0; 0) un A(−1; −3)

141. Zināms, ka:

a) $\overrightarrow{AB} = (3; 2)$ un A(4; 0). Nosaki punkta B koordinātas!

b) $\overrightarrow{CD} = (0; -2)$ un D(4; 5). Nosaki punkta C koordinātas!

Uzzīmē šos vektorus!

142. Zināms, ka A(1; 4).

a) Aprēķini punkta B koordinātas, ja $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$!

b) Aprēķini punkta C koordinātas, ja $\overrightarrow{CA} = (-1; 2)$!

143. Aprēķini vektora koordinātas!

a) $\overrightarrow{BA} = (2; -3)$ un $\overrightarrow{BC} = (-3; 1)$. Aprēķini vektora $\overrightarrow{AC}$ koordinātas!

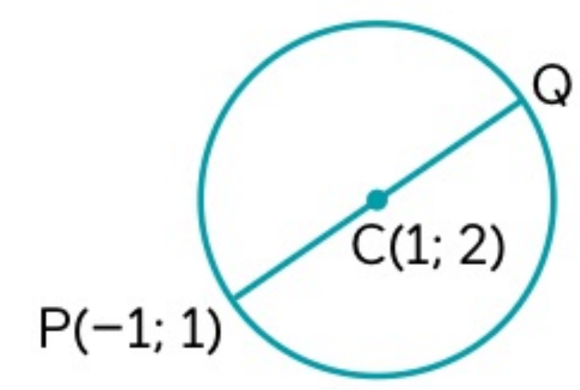
b) $\overrightarrow{AB} = (-1; 3)$ un $\overrightarrow{CA} = (2; -1)$. Aprēķini vektora $\overrightarrow{CB}$ koordinātas!

c) $\overrightarrow{PQ} = (-1; 4)$, $\overrightarrow{RQ} = (2; 1)$ un $\overrightarrow{RS} = (-3; 2)$. Aprēķini vektora $\overrightarrow{SP}$ koordinātas!

144. PQ ir riņķa līnijas diametrs, C — riņķa līnijas centrs (skat. zīm.).

a) Aprēķini $\overrightarrow{PC}$ koordinātas!

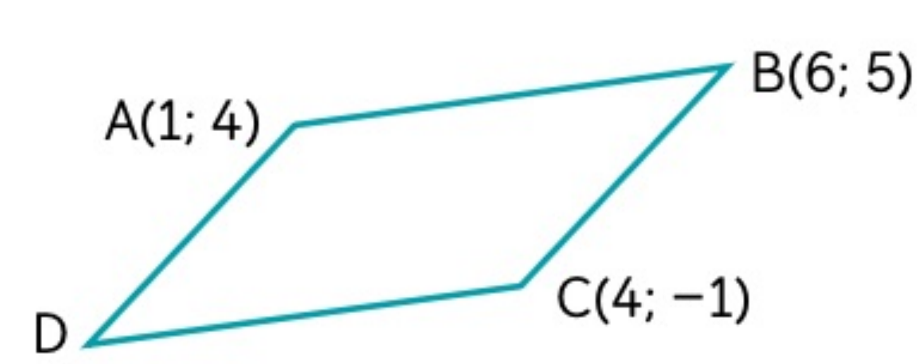
b) Nosaki punkta Q koordinātas!



145. ABCD ir paralelograms (skat. zīm.).

a) Aprēķini vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ koordinātas!

b) Aprēķini punkta D koordinātas!



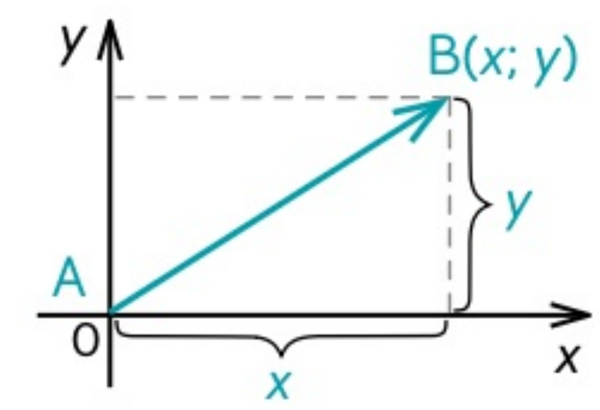
146. Par paralelograma ABCD virsotņu koordinātām zināms, ka A(2; −2), B(−1; 3), C(x; 5), D(7; y).
Aprēķini x un y vērtības!

Salīdzini savu un klasesbiedra risinājumu! Vai uzdevumu varēja atrisināt, tikai izveidojot zīmējumu vai arī zīmējumu vispār neveidojot? Ja tavi un klasesbiedra risinājumi bija vienādi, centieties atrast vēl kādu citu šī uzdevuma risinājuma veidu!

147. Punkti A(1; 1), B(7; 3) un C(x; y) ir trijstūra virsotnes. Punkts M ir trijstūra malas AB viduspunkts un $\overrightarrow{CM} = (1; -3)$. Aprēķini trijstūra virsotnes C koordinātas!

Vektora modulis vektoriem koordinātu formā

Ja dots vektors $\overrightarrow{AB} = (x; y)$, tad tā **moduli (garumu) aprēķina**, izmantojot formulu $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Vai nogriežņa AB un vektora $\overrightarrow{AB}$ garumi var atšķirties? Ja tu proti aprēķināt nogriežņa AB garumu, kura koordinātas ir dotas, kā šo prasmi izmantosi vektora garuma aprēķināšanai?

3. PIEMĒRS

Aprēķini vektoru $\vec{a}$ un $\overrightarrow{AB}$ garumu!

a) $\vec{a} = (6; 8)$ b) $A(-1; 2)$ un $B(4; 5)$

Risinājums

a) Vektora $\vec{a} = (6; 8)$ garumu jeb moduli aprēķina $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$x = 6, y = 8$, tātad

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

b) Ir zināmas vektora $\overrightarrow{AB}$ galapunktu koordinātas — $A(-1; 2)$ un $B(4; 5)$.

Nosaka vektora koordinātas, izmantojot sakarību $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

$\overrightarrow{AB} = (4 - (-1); 5 - 2) = (5; 3)$

Aprēķina vektora garumu.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

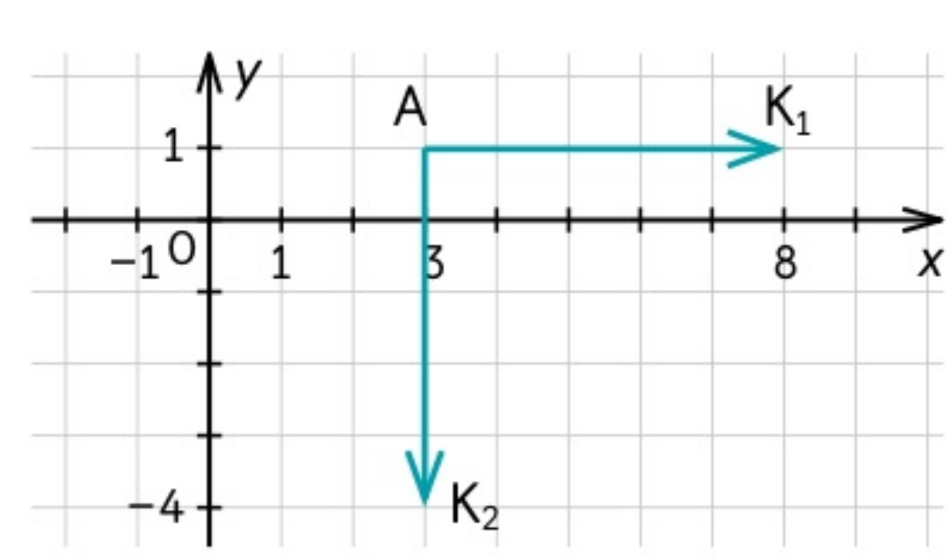
4. PIEMĒRS

Dots, ka $A(3; 1)$ un $|\overrightarrow{AK}| = 5$.
Aprēķini vektora $\overrightarrow{AK}$ galapunkta K koordinātas!

Risinājums

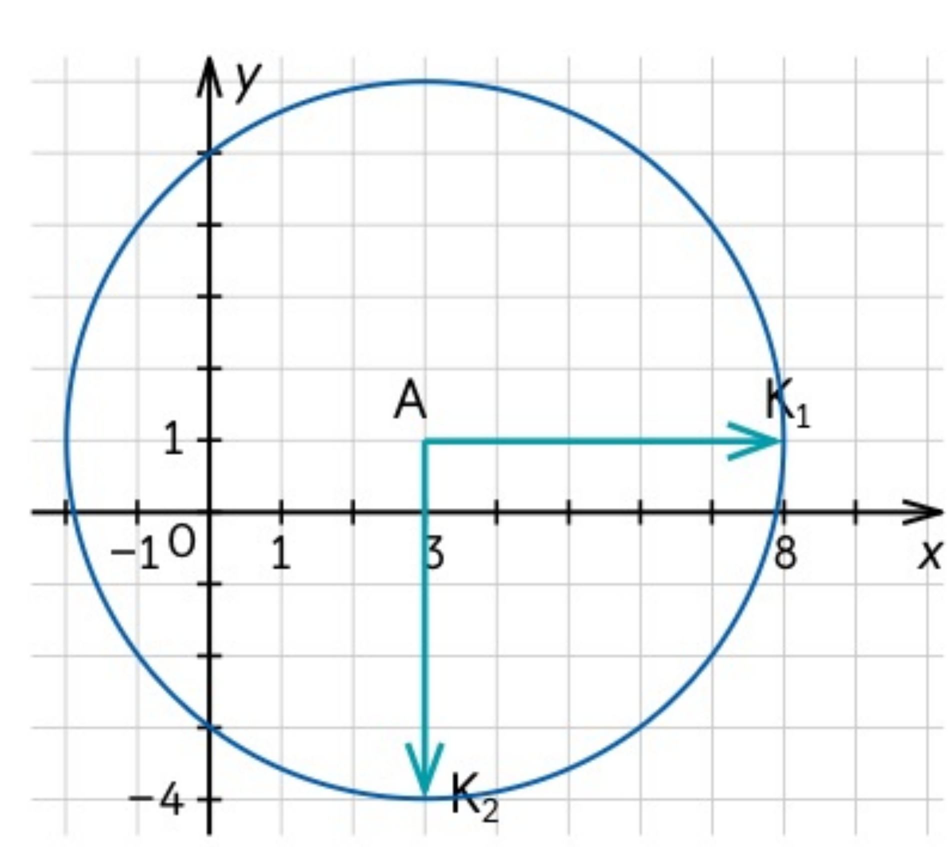
Izveido zīmējumu.

No punkta A var atlikt, piemēram, vektorus $\overrightarrow{AK_1}$ un $\overrightarrow{AK_2}$, kuru garums ir 5.



Ar vektora garumu nepietiek, jāzina arī vektora (kura sākumpunkts ir A un garums 5) virziens.

Šādu vektoru ir bezgalīgi daudz, tāpēc punkts K var atrasties uz riņķa līnijas ar centru A un rādiusu 5.



Uzdevumi

Vektora garums

148. Doti punkti K(2; 1), L(8; 1) un M(6; 4). Aprēķini vektoru $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MK}$ garumus!
Uzzīmē vektorus programmā *GeoGebra* (vai izmanto citu IT rīku) un salīdzini iegūtos rezultātus!

149. Dots vektors $\overrightarrow{CD} = (-2; -4)$ un vektors $\overrightarrow{AB}$, kuram $A(-1; -3)$ un $B(-2; 2)$. Uzzīmē šos vektorus!

a) Aprēķini abu vektoru garumu!

b) Aprēķini punkta E koordinātas, ja vektori $\overrightarrow{EF}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir vienādi un punkta F koordinātas ir (4; 5)!

c) Izmantojot zīmējumu, nosaki abu vektoru viduspunkta koordinātas. Izvirzi hipotēzi, kā var aprēķināt vektora viduspunkta koordinātas!

Vai tu šajā uzdevumā izmantoji zināšanas par nogriezni? Ja izmantoji, kā tu to darīji?

150. Zināms, ka $\vec{r} = (2; 3)$ un $\vec{s} = (-1; 4)$. Aprēķini!

a) $|\vec{r}|$

b) $|\vec{s}|$

c) $|\vec{r} + \vec{s}|$

d) $|\vec{r}| + |\vec{s}|$

e) $|\vec{r} - \vec{s}|$

f) $|\vec{s} - 2\vec{r}|$

Kā tu domā, kad $|\vec{r} + \vec{s}| = |\vec{r}| + |\vec{s}|$?

151. Doti punkti A(4; 0), B(5; 4), C(−3; 1) un D(1; −3). Aprēķini:

a) vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ koordinātas,

b) $|\overrightarrow{AB}|$ un $|\overrightarrow{CD}|$!

152. Doti punkti G(−9; −1), E(−7; 1) un F(−5; 3). Pamato, ka $\overrightarrow{EF}$ un $\overrightarrow{EG}$ ir pretēji vektori un $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{EG}|$!

Atceries!
Apgalvojums ir patiess, ja tas izpildās visos gadījumos.
Ja ir kaut viens gadījums, kad apgalvojums neizpildās, tad tas nav patiess.

153. Doti punkti A(−1; 3) un B(3; k), un zināms, ka $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

a) Nosaki divas iespējamās k vērtības!

b) Aprēķini vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātas!

154. Dots vektors $\vec{v}$.

a) Uzskicē zīmējumu, kas parāda, ka $|-2\vec{v}| = 2|\vec{v}|$!

b) Pierādi, ka $|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$!

155. Doti punkti A(7; −1), B(−2; 2) un C(−1; −5).
Aprēķini punkta M koordinātas, ja zināms, ka $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$!

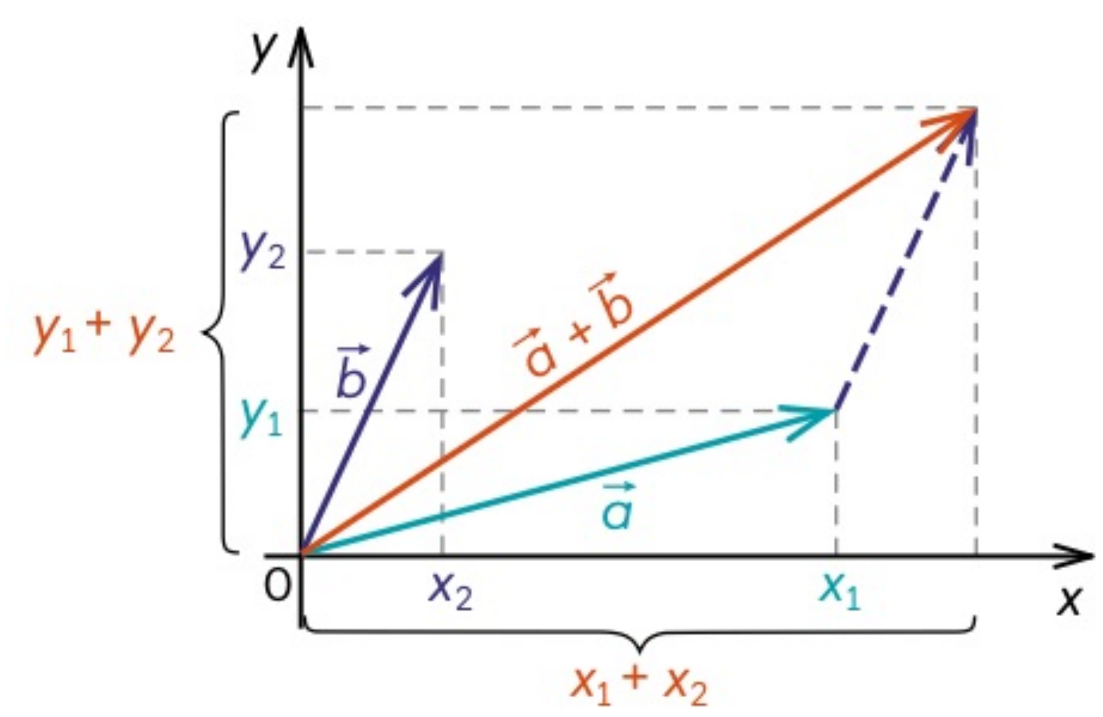
156. Doti vektori $\overrightarrow{EF} = (1; 3)$, $\overrightarrow{FG} = (1; -3)$ un $\overrightarrow{GH} = (-1; -3)$. Pierādi, ka četrstūris EFGH ir rombs!

Darbības ar vektoriem koordinātu formā

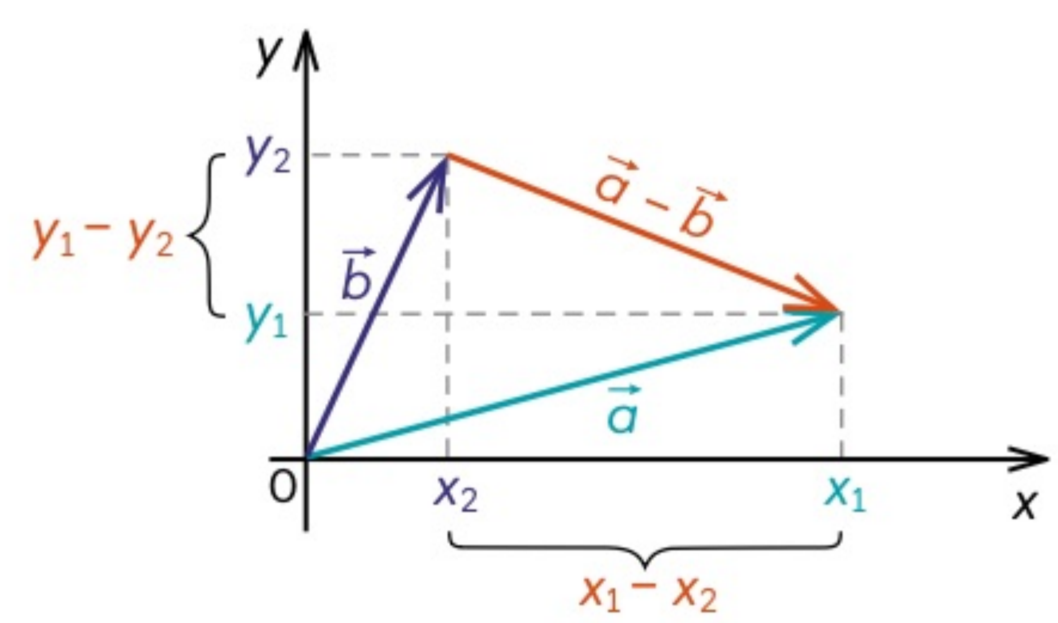
Ja vektori doti koordinātu formā, tad tos saskaita, atņem un reizina ar skaitli, ievērojot attiecīgos likumus.

Ja doti vektori $\vec{a} = (x_1; y_1)$ un $\vec{b} = (x_2; y_2)$, tad:

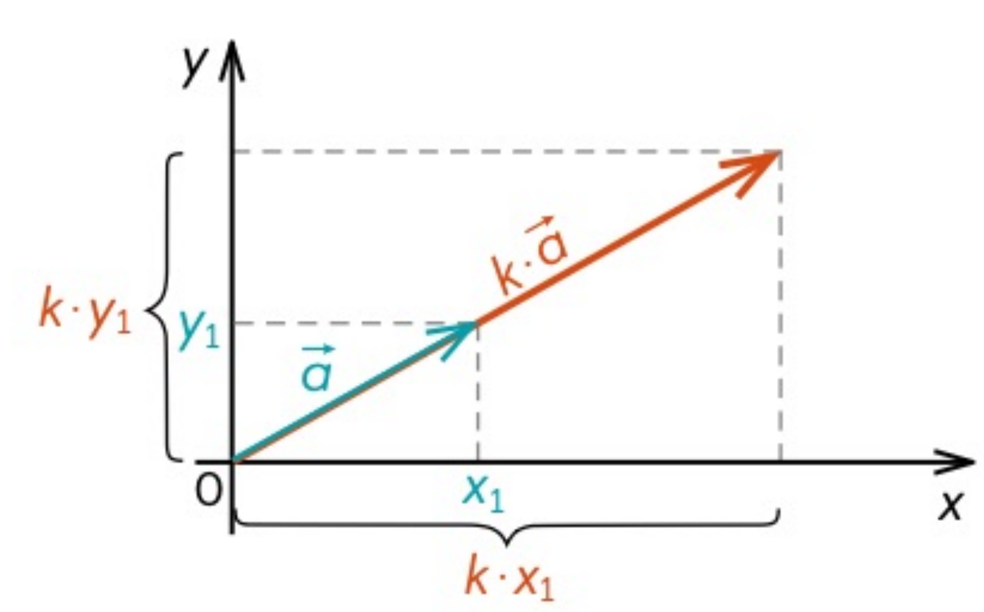
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$



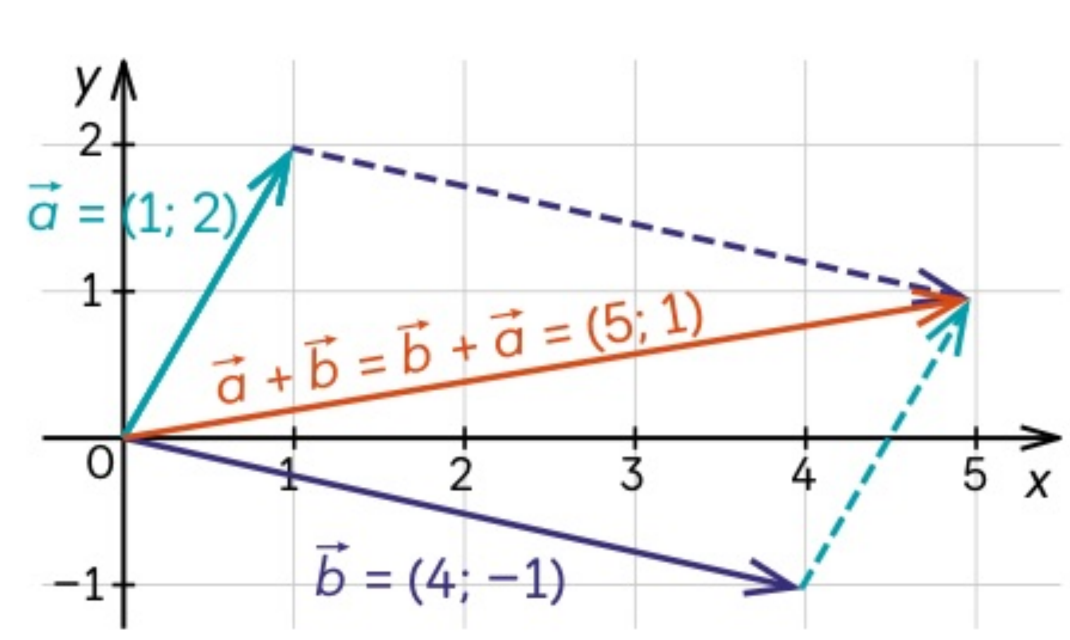
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$



$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$$



> Izmantojot zīmējumu, izskaidro saskaitīšanas pārvietojamības īpašību, ja vektori doti koordinātu formā! Salīdzini savu skaidrojumu ar klasesbiedru un uzlabo to, ja nepieciešams!

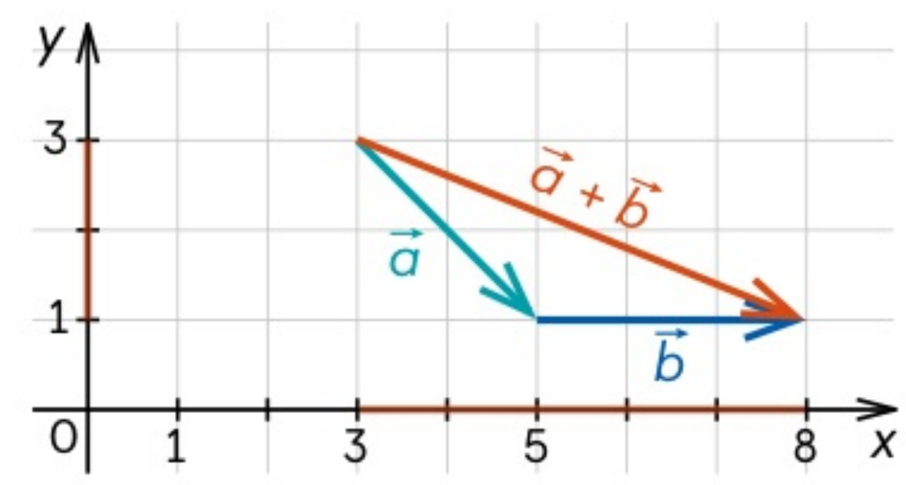


5. PIEMĒRS Doti vektori $\vec{a} = (2; -2)$ un $\vec{b} = (3; 0)$ un skaitļi $k = 3$ un $m = -0{,}75$. Aprēķini vektoru $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $k \cdot \vec{a}$ un $m \cdot \vec{b}$ koordinātas un attēlo tos koordinātu plaknē!

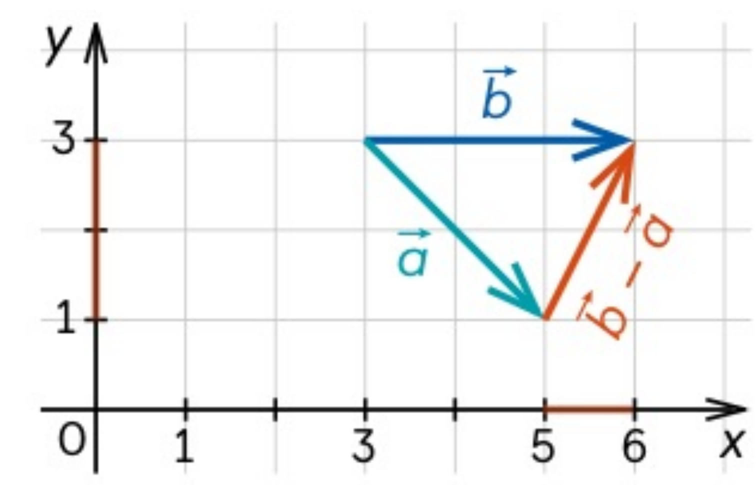
Atceries! Ja zināmas tikai vektora koordinātas, tad vektoru koordinātu plaknē var novietot jebkurā vietā.

Risinājums

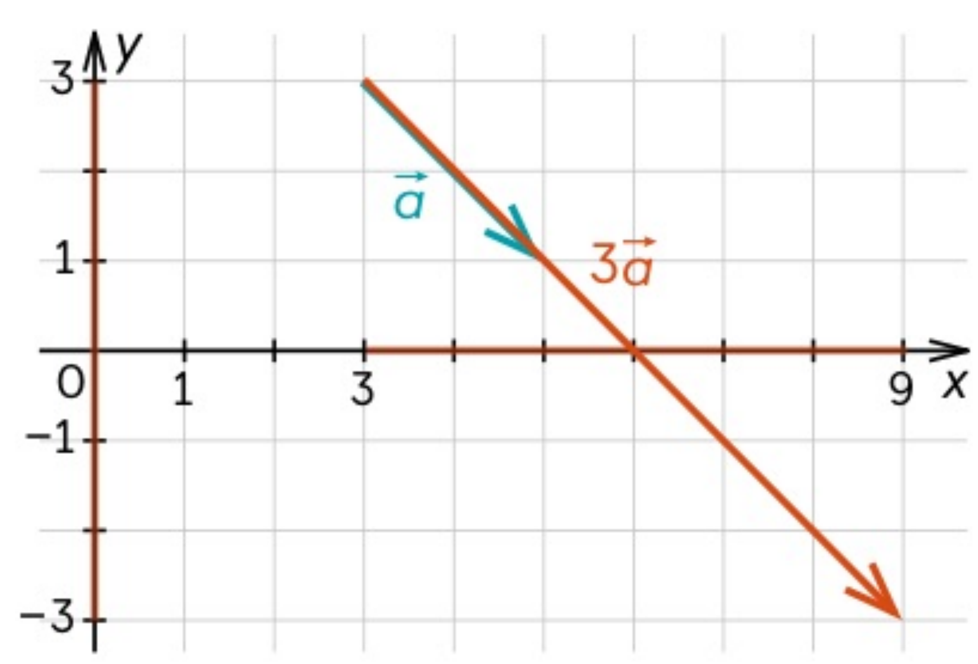
1) $\vec{a} + \vec{b} = (2 + 3; -2 + 0) = (5; -2)$



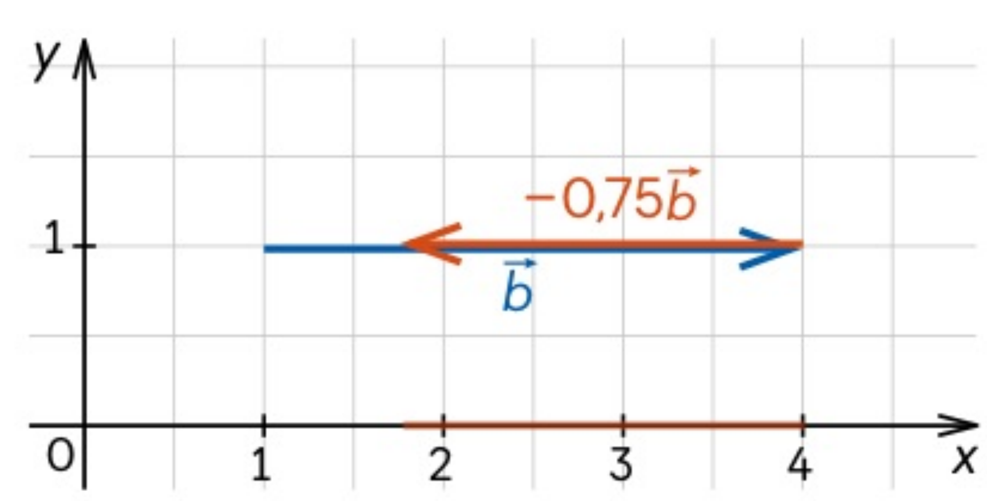
2) $\vec{b} - \vec{a} = (3 - 2; 0 - (-2)) = (1; 2)$



3) $k \cdot \vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot (-2)) = (6; -6)$



4) $m \cdot \vec{b} = (-0{,}75 \cdot 3; -0{,}75 \cdot 0) =$
$= (-2{,}25; 0)$



Uzdevumi

Darbības ar vektoriem koordinātu formā

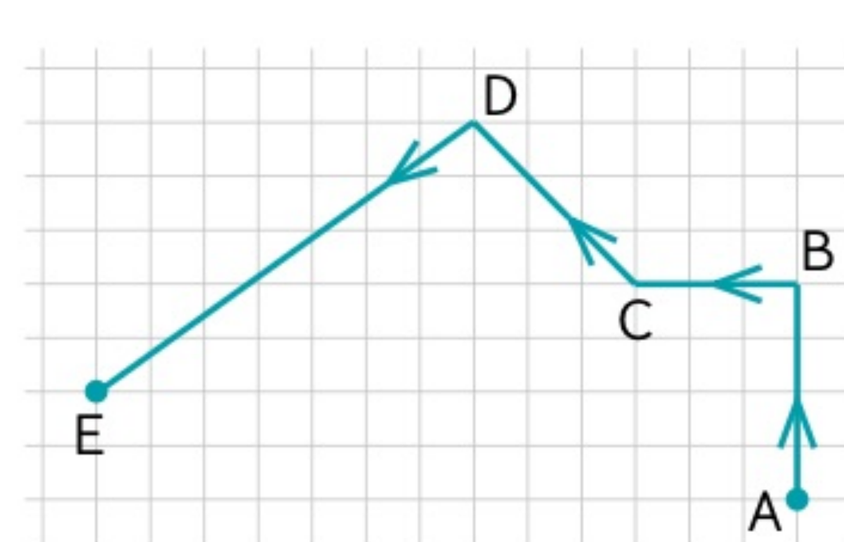
157. Aprēķini $\vec{a} + \vec{b}$, ja doti vektori $\vec{a} = (1; -3)$ un $\vec{b} = (4; 7)$! Pārbaudi savu atbildi, izveidojot zīmējumu! Vai vienmēr atbildi var pārbaudīt, izveidojot zīmējumu? Kā vēl iespējams pārliecināties, vai risinājums ir pareizis?

158. Automašīna brauc no punkta A uz E caur punktiem B, C, D (skat. zīm.).

a) Izsaki koordinātu formā vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{DE}$!

b) Izsaki koordinātu formā vektoru $\overrightarrow{AE}$!

c) Aprēķini koordinātu formā vektoru summu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$! Salīdzini iegūto summas vektoru ar vektora $\overrightarrow{AE}$ koordinātām!



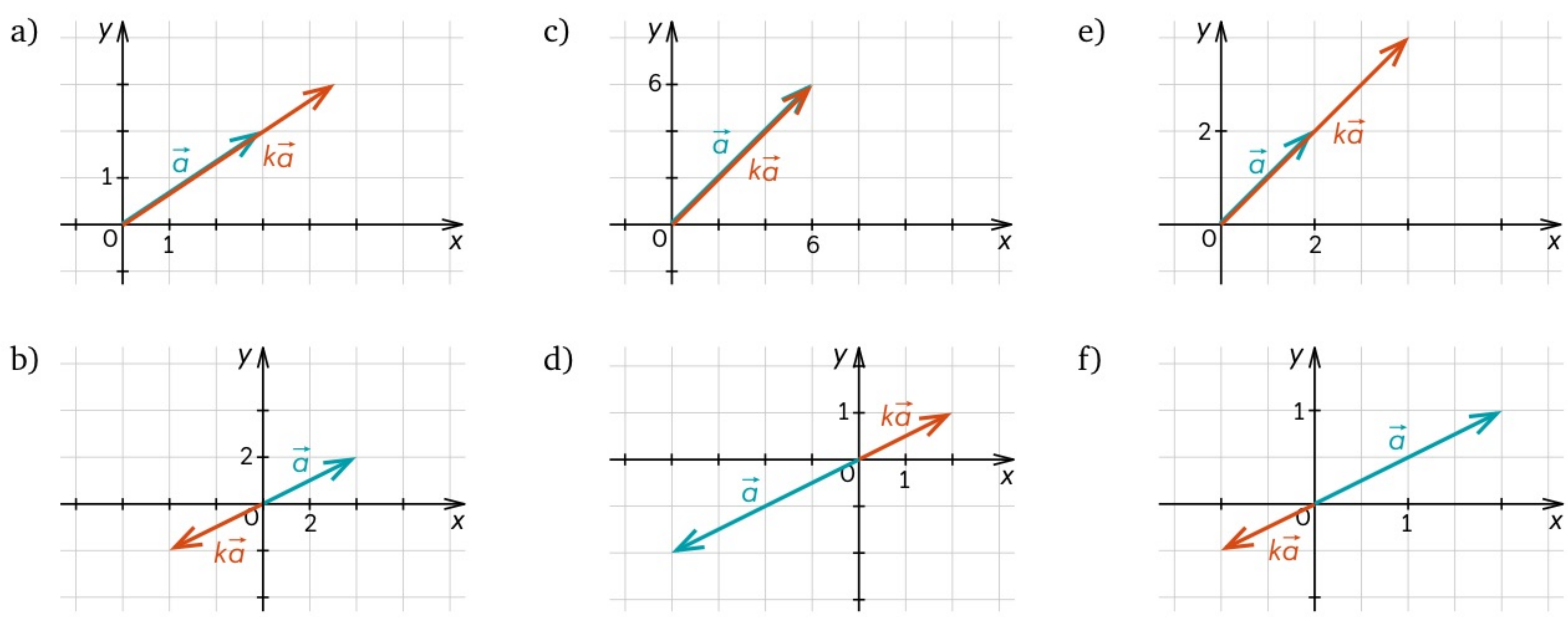
159. Zināms, ka $\vec{p} = (1; 1)$ un $\vec{r} = (2; -1)$. Uzzīmē izteiksmēm atbilstošus zīmējumus! Ko vari secināt par iegūtajiem rezultātiem?

a) $\vec{p} + \vec{p} + \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$

b) $\vec{p} + \vec{r} + \vec{p} + \vec{r} + \vec{r}$

c) $\vec{r} + \vec{p} + \vec{r} + \vec{p} + \vec{r}$

160. Uzraksti vektora $\vec{a}$ koordinātas un nosaki k vērtību!

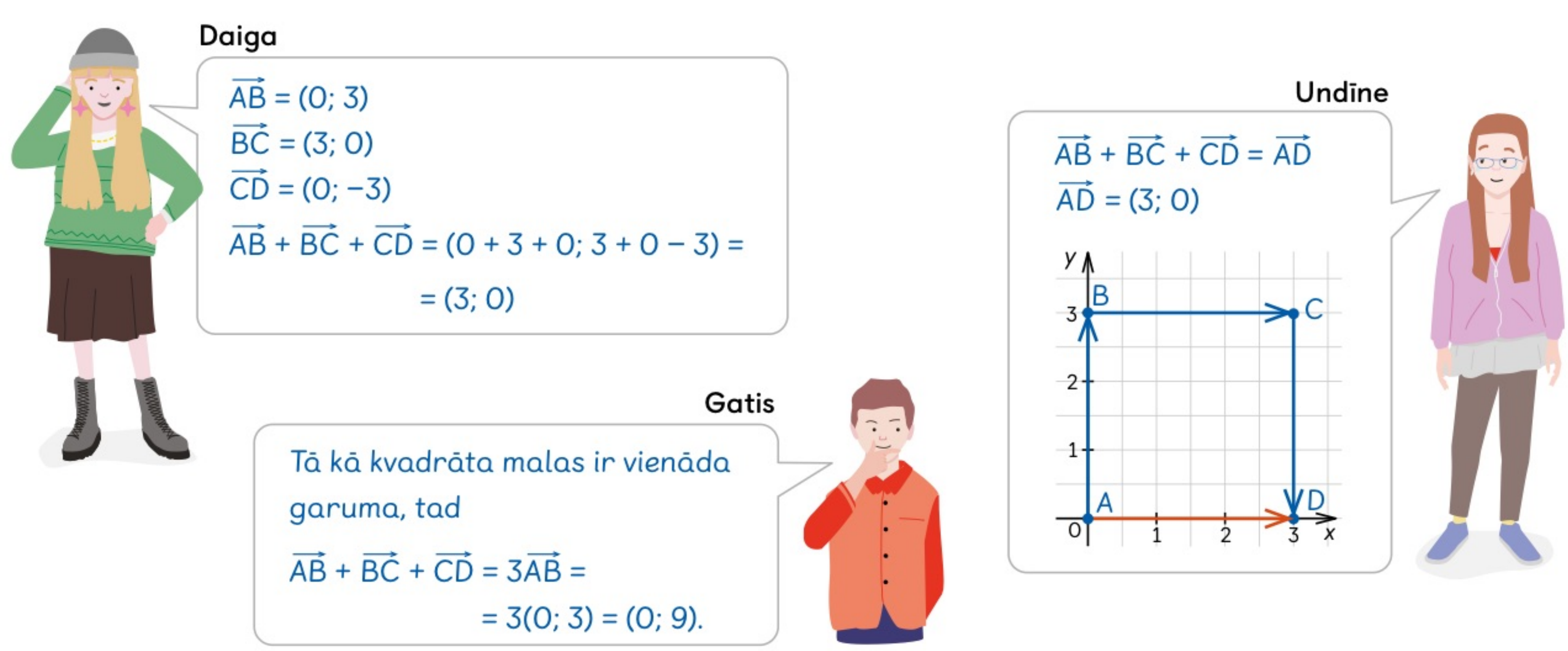


161. Dots $\vec{v} = (1; 2)$ un $\vec{u} = (3; 0)$. Aprēķini!

a) $3\vec{v}$ b) $\vec{v} + \vec{u}$ c) $\vec{v} - \vec{u}$ c) $2\vec{v} + 3\vec{u}$

162. Izvērtē Daigas, Undīnes un Gata risinājumu! Ja nepieciešams, kādus padomus tu katram dotu? Kā tu risinātu šo uzdevumu? Pamato savu risinājumu!

Koordinātu plaknē dots kvadrāts ABCD. Zināms, ka A(0; 0), B(0; 3), C(3; 3), D(3; 0). Nosaki vektora $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ koordinātas!



163. Zināms, ka $\vec{p} = (1; 5)$, $\vec{s} = (-2; 4)$ un $\vec{t} = (-3; -1)$. Aprēķini!

a) $-3\vec{p}$ c) $2\vec{p} + \vec{s}$ e) $\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{t}$ g) $2\vec{s} - 3\vec{t}$

b) $\frac{1}{2}\vec{s}$ d) $\vec{p} - 2\vec{s}$ f) $2\vec{p} + 3\vec{t}$ h) $2\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{t}$