Introduzione all’Ingegneria Finanziaria
Seminario Professionalizzante

Vincenzo Eugenio Corallo, Ph. D

Sapienza Università di Roma

vincenzo.corallo@uniroma1.it

Set-up Standard

Dato un insieme Ω, una classe $\Im$ di sottoinsiemi di Ω è un'algebra di Ω se $\Im$ è chiuso rispetto alle operazioni di unione e complementazione.

Si dice che $\Im$ è una σ-algebra di Ω se è chiuso anche rispetto a unione e complementazione infinita numerabile e $(\Omega, \Im)$ si dice **spazio misurabile**.

Se C è un sottoinsieme di Ω, la σ-algebra genererata da C, $\Im_C$ o anche $\sigma(C)$, è l'intersezione di tutte le σ-algebre di Ω contenenti C. Se $\Omega = \Re$ (insieme dei numeri reali) e B è la σ-algebra (detta di Borel) generata dagli intervalli aperti di $\Re$, $(\Re, B)$ si dice spazio di Borel e gli elementi di B si dicono insiemi di Borel.

Misure di Probabilità

Una misura σ-additiva di probabilità $\wp$ è una funzione a valori reali non negativi tale che:

$$\wp(A) \in [0,1] \quad \forall A \in \Im$$

$$\wp(\bigcup_j A_j) = \sum_j \wp(A_j) \quad \forall\ A_i \cap A_j = \emptyset \ \ i \neq j$$

$$\wp(\Omega) = 1$$

La tripla $(\Omega, \Im, \wp)$ si dice spazio probabilistico, in cui Ω è lo spazio degli eventi elementari, $\omega \in \Omega$, $\Im$ è una σ-algebra di Ω contenente sottoinsiemi A di Ω detti eventi e $\wp$ è la misura di probabilità detta probabilità naturale.

Indipendenza stocastica

Un'affermazione è 'quasi sicura', e si scrive $\wp - a.s.$, se l'insieme G in cui è falsa ha probabilità nulla: $\wp(G) = 0$.

Due o più eventi A_i sono (stocasticamente) **indipendenti** se:

$$\wp\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i \wp(A_i)$$

Variabili Aleatorie

Un'affermazione è 'quasi sicura', e si scrive $\wp - a.s.$, se l'insieme G in cui è falsa ha probabilità nulla: $\wp(G) = 0$.

Due o più eventi A_i sono (stocastricamente) **indipendenti** se:

$$\wp\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i \wp(A_i)$$

Una variabile aleatoria (v.a.) $\tilde{X}$ o semplicemente X è una funzione da Ω in $\Re$ tale che per ogni $a \in \Re$, l'insieme $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \in \Im$, vale a dire è un evento.

La funzione $F_X(a) = \wp(\omega \in \Omega : X(\omega) < a)$ da $\Re$ in $[0,1]$ si dice distribuzione di probabilità di X.

La misura $\wp^X(A) \equiv \wp(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$ per ogni $A \in B$ è la probabilità indotta da X sullo spazio di Borel $(\Re, B)$.

Variabili Aleatorie - 2

La v.a. X è $\Im$-**misurabile** se l'immagine inversa degli intervalli aperti di $\Re$ appartiene a $\Im$ vale a dire se $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \Im$ per ogni $I \in B$, spazio di Borel.

La v.a. X è integrabile (rispettivamente, integrabile al quadrato o *square integrable*) se $E(|X|) < \infty$ (se $E(|X|^2) < \infty$).

Una v.a. ha media finita se e solo se è integrabile.

La σ-algebra generata da X, $\sigma(X)$, è la più piccola σ-algebra di Ω tale che X è $\sigma(X)$-misurabile. Essa rappresenta tutta l'informazione contenuta in X.

Probabilità condizionata

Due v.a. X e Y, definite sullo stesso spazio probabilistico, sono indipendenti se $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$ sono indipendenti

Date due v.a. X e Y e un evento $H = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in D\}$ a probabilità non nulla, si definisce la probabilità condizionata di X dato H come:

$$\wp(X(\omega) \in A \mid Y(\omega) \in D) \equiv \frac{\wp(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \cap H)}{\wp(H)}$$

Chiaramente, se X eY sono indipendenti $\wp(X(\omega) \in A \mid Y(\omega) \in D) = \wp(X(\omega) \in A)$.

Processi stocastici

Un processo stocastico (p.s.) $(X(\omega, t),\ t \in \top)$, scritto anche $X_t(\omega)$ è una famiglia di v.a. indicizzate a un parametro reale $t \in \top$, in genere interpretato come il tempo, con $\top$ insieme discreto $(t_0, t_1, \ldots.t_n, \ldots)$ o continuo, finito $[0, T]$ o infinito $[0, +\infty[$.

In particolare, si noti che un p.s. è funzione di due variabili, $X(\omega, t)$, l'evento elementare e il tempo, per cui $X(., t)$ per dato t è una v.a. mentre $X(\omega, .)$ per dato ω è una funzione del tempo t detta traiettoria o sentiero campionario.

Il p.s. è spesso indicato semplicemente con (X_i) se l'indice è discreto e (X_t) o $(X(t))$ se l'indice è il tempo continuo.

Processi stocastici - 2

Un p.s. si dice di **classe** M^h, L^h, rispettivamente se:

$$E\left(\int_{T} | X_t |^h \, dt\right) < \infty, \qquad \wp\left(\int_{T} | X_t |^h \, dt < \infty\right) = 1$$

Un p.s. (X_t) è **misurabile** se $X(\omega, t)$ è $(B_T \otimes \Im)$-misurabile, essendo B_T la σ-algebra di Borel generata da T.

Un p.s. (X_t) è **progressivamente misurabile** se $X(\omega, t)$ è $(B_t \otimes \Im_t)$-misurabile, essendo B_t la σ-algebra di Borel generata da $[0, t]$.

Filtrazione standard

La sequenza $(\Im_t,\ t \in \top)$ di sotto-σ-algebre di $\Im$:

1. crescente: $\Im_t \subset \Im_s$ per ogni $t < s$;
2. completa: per ogni evento a probabilità nulla (evento impossibile) $A \in \Im$, $\wp(A) = 0$ si ha $A \in \Im_0$;
3. continua da destra: $\Im_t = \bigcap_{s>t} \Im_s$

si dice filtrazione (standard) e si indica anche con $(\Im_t)$.

In termini intuitivi, $\Im_t$ rappresenta tutta l'informazione disponibile in t e crescente al passare del tempo.

Considerando la minima σ-algebra $\Im_t^x$ rispetto a cui X_u è misurabile per ogni $u \leq t$, vale a dire $\Im_t^x = \sigma(X_u;\ u \leq t)$, si ottiene la filtrazione $(\Im_t^x)$ generata dal processo (X_t).

Misura, distribuzione e valore medio condizionato

Dato il set-up standard $(\Omega, \Im, (\Im_t), \wp)$, si possono definire la misura condizionata, la distribuzione condizionata e i momenti condizionati: $\wp(G \mid \Im_t)$, $F_{X_s}(a \mid \Im_t)$, $E(X_s \mid \Im_t)$ etc.

In particolare, la misura condizionata $\wp(G \mid \Im_t)$, $G \in \Im$ è quella funzione $\Im_t$-misurabile tale che, per ogni $\Lambda \in \Im_t$:

$$\int_\Lambda \wp(G \mid \Im_t)\wp(d\omega) = \int_\Lambda \chi_G(\omega)\wp(d\omega)$$

essendo $\chi_G(\omega)$ la funzione indicatore dell'insieme G e $\int$ l'integrale di Lebesgue rispetto alla misura $\wp$.

Si noti che spesso si scrive anche $E_t(X_s)$.

Concatenazione del valore medio condizionato

Per definizione, $E_0(X_s) \equiv E(X_s)$ e vale la proprietà di concatenazione dei valori medi condizionati:

$$E_u(E_t(X_s)) = E_u(X_t) \text{ per ogni } 0 \leq u < t < s$$

Se (X_t) è adattato vale $E(X_t \mid \Im_t) = X_t$ mentre se è anche predictable $E(X_t \mid \Im_{t-}) = X_t$.

Martingale

Un p.s. (X_t) è una $\wp$-martingala (rispetto alla data filtrazione $\Im_t$) se è adattato, integrabile e per ogni $s > t$:

$$E(X_s \mid \Im_t) = X_t$$

$$i.e.$$

$$E(X_s - X_t \mid \Im_t) = 0$$

Ciò significa che per una martingala, la migliore previsione (aspettativa) del valore futuro X_s è il valore corrente X_t.

Con tempo continuo ciò equivale a:

$$E(dX_t \mid \Im_t) = 0$$

essendo $dX_t \equiv X_{t+dt} - X_t$ l'incremento in avanti (forward) infinitesimo.

Sub-martingale e super-martingale

Si dice anche che un p.s. (X_t) è una $\wp$-martingala se e solo se ha incrementi a media condizionata nulla.

Un p.s. (X_t) è una sub-martingala se, per ogni $s > t$, $E(X_s \mid \Im_t) \geq X_t$ (super-martingala se $E(X_s \mid \Im_t) \leq X_t$). In termini intuitivi si scrive $E(dX_t \mid \Im_{t-}) \geq 0$ (≤ 0). Pertanto una sub- (super-) martingala tende a crescere (decrescere) nel tempo.

Teorema di convergenza delle martingale

Teorema ***di convergenza delle martingale.*** *Se* (X_t) *è una martingale allora esiste una v.a.* X_∞ *square integrable, tale che:*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} X_t = X_\infty$$

$$X_t = E(X_\infty \mid \Im_t)$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} E(X_t^2) = E(X_\infty^2)$$

Processi stocastici markoviani

Un processo (X_t) è di Markov o markoviano se per ogni n-pla di elementi crescenti in $\top$, $(t_1, t_2, ..., t_n)$ si ha:

$$\wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_1} = x_1, ...X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

vale a dire, intuitivamente, se, noto il valore corrente, x_{n-1}, il valore futuro X_{t_n} è indipendente dal passato, ovvero se tutta l'informazione rilevante su X_{t_n} è contenuta nell'ultimo valore disponibile x_{n-1} e i valori passati non aggiungono nulla che non sia già in x_{n-1}.

Si noti che si usano spesso lettere maiuscole X per indicare una v.a. e lettere minuscole x per indicare un valore specifico (realizzazione) assunto da una v.a.

Inoltre l'espressione $\wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$ andrebbe intesa come $\wp(\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \leq x_n\} \mid \{\omega \in \Omega : X_{t_{n-1}}(\omega) = x_{n-1}\})$.

Processi stocastici markoviani

Un processo (X_t) è di Markov o markoviano se per ogni n-pla di elementi crescenti in $\top$, $(t_1, t_2, ..., t_n)$ si ha:

$$\wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_1} = x_1, ...X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

vale a dire, intuitivamente, se, noto il valore corrente, x_{n-1}, il valore futuro X_{t_n} è indipendente dal passato, ovvero se tutta l'informazione rilevante su X_{t_n} è contenuta nell'ultimo valore disponibile x_{n-1} e i valori passati non aggiungono nulla che non sia già in x_{n-1}.

Si noti che si usano spesso lettere maiuscole X per indicare una v.a. e lettere minuscole x per indicare un valore specifico (realizzazione) assunto da una v.a.

Inoltre l'espressione $\wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$ andrebbe intesa come $\wp(\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \leq x_n\} \mid \{\omega \in \Omega : X_{t_{n-1}}(\omega) = x_{n-1}\})$.

Processo di Poisson

Processo di Poisson. Un processo (X_t) a valori interi $n \geq 0$, $X_0 = 0$ $(\wp - a.s.)$ e incrementi indipendenti con distribuzione:

$$\wp(X_s - X_t = n) = \frac{(s-t)^n \lambda^n}{n!} e^{-(s-t)\lambda} \quad s > t$$

è un processo di Poisson con media e varianza $E(X_t) = Var(X_t) = \lambda t$. Si noti che $X_t - \lambda t$ è una martingala.

Moto Browniano - Storia

Il botanico inglese Robert Brown osservò per la prima volta, nel 1827, i movimenti irregolari di particelle microscopiche immerse in un fluido, causati dall'impatto "termico" con le molecole del fluido.

Albert Einstein (1905) elaborò una teoria di tali "moti browniani", secondo cui, in prima approssimazione, ciascuna coordinata Z_t della posizione di una particella al tempo t è rappresentabile come un processo stocastico a incrementi indipendenti normali a media nulla, con varianza in funzione della massa della particella e della viscosità del liquido.

Moto Browniano - 1

Il botanico inglese Robert Brown osservò per la prima volta, nel 1827, i movimenti irregolari di particelle microscopiche immerse in un fluido, causati dall'impatto "termico" con le molecole del fluido.

Albert Einstein (1905) elaborò una teoria di tali "moti browniani", secondo cui, in prima approssimazione, ciascuna coordinata Z_t della posizione di una particella al tempo t è rappresentabile come un processo stocastico a incrementi indipendenti normali a media nulla, con varianza in funzione della massa della particella e della viscosità del liquido.

Moto Browniano - 2

In termini formali, un moto browniano standard (BM) o processo di Wiener (Z_t) è un p.s. tale che:

a) $Z_0 = 0$ ($\wp - a.s.$);
b) $Z_t \sim N(0, t)$ i.e. normale a media nulla e varianza t;
c) $E(Z_t Z_s) = \min(t, s)$.

È facile dimostrare che un BM ha incrementi indipendenti (omogeneità nello spazio), a media nulla, stazionari (omogeneità nel tempo), normali o gaussiani. È quindi un processo di Markov e una martingala.

Moto Browniano - 2

Teorema *di Lévy di caratterizzazione del BM.* *Se Z_t è una martingala con traiettorie continue e valgono le proprietà a) e c) allora Z_t è un BM. In altre parole, la proprietà di martingala a traiettorie continue assieme a a) e c) comporta la normalità b) del processo.*

Un BM standard ha, di conseguenza, numerose altre proprietà:

1. $Z_s - Z_t \sim N(0, s-t)$ indipendente da Z_u $\forall\ u \leq t$ e $\sigma(Z_s - Z_t; t \leq s)$ indipendente da $\Im_t$ $\forall\ t \geq 0$;
2. per ogni partizione di $(0, t)$, $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = t$ con $t_k = kh$, si può scrivere $Z_t = \sum_{k=0}^{n-1}(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k})$ per cui il BM è una somma di v.a. (gli incrementi) indipendenti ed equidistribuite (i.i.d.) ed è quindi 'infinitamente divisibile';