Richiami di Probabilità e Calcolo Stocastico per la Finanza

Introduzione all'Ingegneria Finanziaria
Seminario Professionalizzante

Vincenzo Eugenio Corallo, Ph. D

Sapienza Università di Roma

vincenzo.corallo@uniroma1.it

Set-up Standard

Dato un insieme Ω, una classe $\Im$ di sottoinsiemi di Ω è un'algebra di Ω se $\Im$ è chiuso rispetto alle operazioni di unione e complementazione.

Si dice che $\Im$ è una σ-algebra di Ω se è chiuso anche rispetto a unione e complementazione infinita numerabile e $(\Omega, \Im)$ si dice **spazio misurabile**.

Se C è un sottoinsieme di Ω, la σ-algebra genererata da C, $\Im_C$ o anche $\sigma(C)$, è l'intersezione di tutte le σ-algebre di Ω contenenti C. Se $\Omega = \Re$ (insieme dei numeri reali) e B è la σ-algebra (detta di Borel) generata dagli intervalli aperti di $\Re$, $(\Re, B)$ si dice spazio di Borel e gli elementi di B si dicono insiemi di Borel.

Misure di Probabilità

Una misura σ-additiva di probabilità $\wp$ è una funzione a valori reali non negativi tale che:

$$\wp(A) \in [0,1] \quad \forall A \in \Im$$
$$\wp(\bigcup_j A_j) = \sum_j \wp(A_j) \quad \forall\ A_i \cap A_j = \emptyset \;\; i \neq j$$
$$\wp(\Omega) = 1$$

La tripla $(\Omega, \Im, \wp)$ si dice spazio probabilistico, in cui Ω è lo spazio degli eventi elementari, $\omega \in \Omega$, $\Im$ è una σ-algebra di Ω contenente sottoinsiemi A di Ω detti eventi e $\wp$ è la misura di probabilità detta probabilità naturale.

Indipendenza stocastica

Un'affermazione è 'quasi sicura', e si scrive $\wp - a.s.$, se l'insieme G in cui è falsa ha probabilità nulla: $\wp(G) = 0$.

Due o più eventi A_i sono (stocasticamente) **indipendenti** se:

$$\wp\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i \wp(A_i)$$

Variabili Aleatorie - 1

Una variabile aleatoria (v.a.) $\tilde{X}$ o semplicemente X è una funzione da Ω in $\Re$ tale che per ogni $a \in \Re$, l'insieme $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \in \Im$, vale a dire è un evento.

La funzione $F_X(a) = \wp(\omega \in \Omega : X(\omega) < a)$ da $\Re$ in $[0, 1]$ si dice distribuzione di probabilità di X.

La misura $\wp^X(A) \equiv \wp(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$ per ogni $A \in B$ è la probabilità indotta da X sullo spazio di Borel $(\Re, B)$.

Variabili Aleatorie - 2

La v.a. X è $\Im$-**misurabile** se l'immagine inversa degli intervalli aperti di $\Re$ appartiene a $\Im$ vale a dire se $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \Im$ per ogni $I \in B$, spazio di Borel.

La v.a. X è integrabile (rispettivamente, integrabile al quadrato o *square integrable*) se $E(|X|) < \infty$ (se $E(|X|^2) < \infty$).

Una v.a. ha media finita se e solo se è integrabile.

La σ-algebra generata da X, $\sigma(X)$, è la più piccola σ-algebra di Ω tale che X è $\sigma(X)$-misurabile. Essa rappresenta tutta l'informazione contenuta in X.

Probabilità condizionata

Due v.a. X e Y, definite sullo stesso spazio probabilistico, sono indipendenti se $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$ sono indipendenti

Date due v.a. X e Y e un evento $H = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in D\}$ a probabilità non nulla, si definisce la probabilità condizionata di X dato H come:

$$\wp(X(\omega) \in A \mid Y(\omega) \in D) \equiv \frac{\wp(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \cap H)}{\wp(H)}$$

Chiaramente, se X eY sono indipendenti $\wp(X(\omega) \in A \mid Y(\omega) \in D) = \wp(X(\omega) \in A)$.

Processi stocastici

Un processo stocastico (p.s.) $(X(\omega, t),\ t \in \top)$, scritto anche $X_t(\omega)$ è una famiglia di v.a. indicizzate a un parametro reale $t \in \top$, in genere interpretato come il tempo, con $\top$ insieme discreto $(t_0, t_1, ...t_n, ...)$ o continuo, finito $[0, T]$ o infinito $[0, +\infty[$.

In particolare, si noti che un p.s. è funzione di due variabili, $X(\omega, t)$, l'evento elementare e il tempo, per cui $X(., t)$ per dato t è una v.a. mentre $X(\omega, .)$ per dato ω è una funzione del tempo t detta traiettoria o sentiero campionario.

Il p.s. è spesso indicato semplicemente con (X_i) se l'indice è discreto e (X_t) o $(X(t))$ se l'indice è il tempo continuo.

Processi stocastici - 2

Un p.s. si dice di **classe** M^h, L^h, rispettivamente se:

$$E\left(\int_{T} | X_t |^h \, dt\right) < \infty, \qquad \wp\left(\int_{T} | X_t |^h \, dt < \infty\right) = 1$$

Un p.s. (X_t) è **misurabile** se $X(\omega, t)$ è $(B_T \otimes \Im)$-misurabile, essendo B_T la σ-algebra di Borel generata da T.

Un p.s. (X_t) è **progressivamente misurabile** se $X(\omega, t)$ è $(B_t \otimes \Im_t)$-misurabile, essendo B_t la σ-algebra di Borel generata da $[0, t]$.

Filtrazione standard

La sequenza $(\Im_t,\ t \in \top)$ di sotto-σ-algebre di $\Im$:

1. crescente: $\Im_t \subset \Im_s$ per ogni $t < s$;
2. completa: per ogni evento a probabilità nulla (evento impossibile) $A \in \Im$, $\wp(A) = 0$ si ha $A \in \Im_0$;
3. continua da destra: $\Im_t = \bigcap_{s>t} \Im_s$

si dice filtrazione (standard) e si indica anche con $(\Im_t)$.

In termini intuitivi, $\Im_t$ rappresenta tutta l'informazione disponibile in t e crescente al passare del tempo.

Considerando la minima σ-algebra $\Im_t^x$ rispetto a cui X_u è misurabile per ogni $u \leq t$, vale a dire $\Im_t^x = \sigma(X_u;\ u \leq t)$, si ottiene la filtrazione $(\Im_t^x)$ generata dal processo (X_t).

Processi stocastici adattati, predicibili e non anticipativi

Il p.s. (X_t) è **adattato** (*adapted*) alla filtrazione $(\Im_t)$ se, per ogni t, X_t (come v.a.) è $\Im_t$-misurabile. Se (X_t) è adattato e continuo da sinistra il p.s. si dice *predictable*.

Un p.s. misurabile, separabile e adattato a una filtrazione (quindi progressivamente misurabile), si dice **non anticipativo** rispetto alla medesima filtrazione.

Misura, distribuzione e valore medio condizionato

Dato il set-up standard $(\Omega, \Im, (\Im_t), \wp)$, si possono definire la misura condizionata, la distribuzione condizionata e i momenti condizionati: $\wp(G \mid \Im_t)$, $F_{X_s}(a \mid \Im_t)$, $E(X_s \mid \Im_t)$ etc.

In particolare, la misura condizionata $\wp(G \mid \Im_t)$, $G \in \Im$ è quella funzione $\Im_t$-misurabile tale che, per ogni $\Lambda \in \Im_t$:

$$\int_\Lambda \wp(G \mid \Im_t)\wp(d\omega) = \int_\Lambda \chi_G(\omega)\wp(d\omega)$$

essendo $\chi_G(\omega)$ la funzione indicatore dell'insieme G e $\int$ l'integrale di Lebesgue rispetto alla misura $\wp$.

Si noti che spesso si scrive anche $E_t(X_s)$.

Concatenazione del valore medio condizionato

Per definizione, $E_0(X_s) \equiv E(X_s)$ e vale la proprietà di concatenazione dei valori medi condizionati:

$$E_u(E_t(X_s)) = E_u(X_t) \text{ per ogni } 0 \leq u < t < s$$

Se (X_t) è adattato vale $E(X_t \mid \Im_t) = X_t$ mentre se è anche predictable $E(X_t \mid \Im_{t-}) = X_t$.

Martingale

Un p.s. (X_t) è una $\wp$-martingala (rispetto alla data filtrazione $\Im_t$) se è adattato, integrabile e per ogni $s > t$:

$$E(X_s \mid \Im_t) = X_t$$

$$i.e.$$

$$E(X_s - X_t \mid \Im_t) = 0$$

Ciò significa che per una martingala, la migliore previsione (aspettativa) del valore futuro X_s è il valore corrente X_t.

Con tempo continuo ciò equivale a:

$$E(dX_t \mid \Im_t) = 0$$

essendo $dX_t \equiv X_{t+dt} - X_t$ l'incremento in avanti (forward) infinitesimo.

Sub-martingale e super-martingale

Si dice anche che un p.s. (X_t) è una $\wp$-martingala se e solo se ha incrementi a media condizionata nulla.

Un p.s. (X_t) è una sub-martingala se, per ogni $s > t$, $E(X_s \mid \Im_t) \geq X_t$ (super-martingala se $E(X_s \mid \Im_t) \leq X_t$). In termini intuitivi si scrive $E(dX_t \mid \Im_{t-}) \geq 0$ (≤ 0). Pertanto una sub- (super-) martingala tende a crescere (decrescere) nel tempo.

Teorema di convergenza delle martingale

Teorema ***di convergenza delle martingale.*** *Se* (X_t) *è una martingale allora esiste una v.a.* X_∞ *square integrable, tale che:*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} X_t = X_\infty$$
$$X_t = E(X_\infty \mid \Im_t)$$
$$\lim_{t \longrightarrow \infty} E(X_t^2) = E(X_\infty^2)$$

Processi stocastici markoviani

Un processo (X_t) è di Markov o markoviano se per ogni n-pla di elementi crescenti in $\top$, $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si ha:

$$\wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_1} = x_1, \ldots X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

vale a dire, intuitivamente, se, noto il valore corrente, x_{n-1}, il valore futuro X_{t_n} è indipendente dal passato, ovvero se tutta l'informazione rilevante su X_{t_n} è contenuta nell'ultimo valore disponibile x_{n-1} e i valori passati non aggiungono nulla che non sia già in x_{n-1}.

Si noti che si usano spesso lettere maiuscole X per indicare una v.a. e lettere minuscole x per indicare un valore specifico (realizzazione) assunto da una v.a.

Inoltre l'espressione $\wp(X_{t_n} \leq x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$ andrebbe intesa come $\wp(\{\omega \in \Omega : X_{t_n}(\omega) \leq x_n\} \mid \{\omega \in \Omega : X_{t_{n-1}}(\omega) = x_{n-1}\})$.

Processo di Poisson

Processo di Poisson. Un processo (X_t) a valori interi $n \geq 0$, $X_0 = 0$ $(\wp - a.s.)$ e incrementi indipendenti con distribuzione:

$$\wp(X_s - X_t = n) = \frac{(s-t)^n \lambda^n}{n!} e^{-(s-t)\lambda} \quad s > t$$

è un processo di Poisson con media e varianza $E(X_t) = Var(X_t) = \lambda t$. Si noti che $X_t - \lambda t$ è una martingala.

Moto Browniano - 1

Il botanico inglese Robert Brown osservò per la prima volta, nel 1827, i movimenti irregolari di particelle microscopiche immerse in un fluido, causati dall'impatto "termico" con le molecole del fluido.

Albert Einstein (1905) elaborò una teoria di tali "moti browniani", secondo cui, in prima approssimazione, ciascuna coordinata Z_t della posizione di una particella al tempo t è rappresentabile come un processo stocastico a incrementi indipendenti normali a media nulla, con varianza in funzione della massa della particella e della viscosità del liquido.

Moto Browniano - 2

In termini formali, un moto browniano standard (BM) o processo di Wiener (Z_t) è un p.s. tale che:

a) $Z_0 = 0$ $(\wp - a.s.)$;
b) $Z_t \sim N(0, t)$ i.e. normale a media nulla e varianza t;
c) $E(Z_t Z_s) = \min(t, s)$.

È facile dimostrare che un BM ha incrementi indipendenti (omogeneità nello spazio), a media nulla, stazionari (omogeneità nel tempo), normali o gaussiani. È quindi un processo di Markov e una martingala.

Caratterizzazione del Moto Browniano

Teorema *di Lévy di caratterizzazione del BM.* *Se Z_t è una martingala con traiettorie continue e valgono le proprietà a) e c) allora Z_t è un BM. In altre parole, la proprietà di martingala a traiettorie continue assieme a a) e c) comporta la normalità b) del processo.*

Un BM standard ha, di conseguenza, numerose altre proprietà:

1. $Z_s - Z_t \sim N(0, s-t)$ indipendente da $Z_u\ \forall\ u \leq t$ e $\sigma(Z_s - Z_t; t \leq s)$ indipendente da $\Im_t\ \forall\ t \geq 0$;
2. per ogni partizione di $(0, t)$, $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = t$ con $t_k = kh$, si può scrivere $Z_t = \sum_{k=0}^{n-1}(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k})$ per cui il BM è una somma di v.a. (gli incrementi) indipendenti ed equidistribuite (i.i.d.) ed è quindi 'infinitamente divisibile';

Moto Browniano non standard

Osservazione Il BM non standard si ricava dalla generalizzazione $Z_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Modelli alternativi alla dinamica del BM proposta da Einstein (1905) sono stati analizzati in letteratura. Ornstein e Uhlenbeck (1930) hanno modellato la velocità invece che la posizione di una particella in un fluido. Quest'ultima risulta così un p.s. markoviano normale ma con incrementi dipendenti. Il BM rappresenta il caso gaussiano nella più ampia famiglia dei p.s. a incrementi indipendenti (quindi markoviani) e stazionari detti processi di Lévy.

Moto Browniano - 3

Il BM è anche interpretabile come somma di v.a. (gli incrementi) indipendenti ed equidistribuite (i.i.d.) e quindi è un p.s. infinitamente divisibile e vale la legge forte dei grandi numeri:

$$\lim_{t\uparrow\infty} \frac{Z_t}{t} = 0 \qquad \wp - a.s.$$

ove $\wp - a.s.$ (*almost surely*) indica che l'insieme degli eventi ω in cui la proposizione è falsa ha probabilità nulla.

Moto Browniano - 4

Per continuità, il BM raggiunge un massimo su ogni intervallo finito di tempo:

$$M_t \equiv \max_{0 \leq s \leq t} Z_s \geq 0$$

con densità (su $\mathbf{R}^+$):

$$f_{M_t}(m) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{m^2}{2t}}$$

Variazione illimitata - 1

Nonostante la sua continuità, il BM è un p.s. fortemente oscillatorio: le stesse traiettorie, sebbene $\wp - a.s.$ continue dappertutto sono $\wp - a.s.$ non derivabili dappertutto e a **variazione illimitata**, essendo la variazione di Z_t su $(0,t)$ definita da:

$$\sup\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mid Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k} \mid\right)$$

ove il supremo è su tutte le partizioni di $(0,t)$, $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = t$.

Derivata in media quadratica

Si noti che una funzione a variazione limitata è derivabile quasi dappertutto (l'insieme dei punti di non derivabilità ha misura di Borel nulla) mentre una martingala a variazione limitata è una costante.

Non è facile immaginare e tanto meno disegnare traiettorie continue in ogni punto e non derivabili in ogni punto.

La derivata in media quadratica di un p.s. X_t, se esiste, è un p.s., indicato da $\frac{dX_t}{dt}$, tale che:

$$\lim_{h \downarrow 0} E\left(\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h} - \frac{dX_t}{dt} \right)^2 \right) = 0$$

Derivata in probabilità

Analogamente si definisce la derivata in probabilità. Ma nel caso del BM si ha:

$$\frac{Z_{t+h} - Z_t}{h} \sim N(0, \frac{1}{h})$$

e quindi

$$\lim_{h \downarrow 0} \wp \left(\frac{Z_{t+h} - Z_t}{h} \in A \right) = 0$$

con A insieme di Borel limitato. A parole, la probabilità che il rapporto incrementale stia in un intervallo limitato tende a 0 al calare di h e quindi il BM non è derivabile in probabilità (e quindi neppure in media quadratica): è “non abbastanza continuo”

Scomposizione di Doob-Mayer

Teorema ***di scomposizione di Doob-Meyer*** *(1962). Data una sub-martingala (X_t) esiste un'unica scomposizione:*

$$X_t = M_t + C_t$$

ove M_t è una martingala e C_t è un processo integrabile, crescente, predictable detto compensator.

In particolare, data una martingala continua, square integrable (M_t), M_t^2 è una sub-martingala e quindi esiste un'unica scomposizione di M_t^2 nella somma di una martingala continua N_t e di un processo continuo, integrabile, crescente, predictable a variazione limitata e nullo in $t = 0$ detto ***variazione quadratica*** *di M, $< M, M >$:*

$$M_t^2 = N_t + < M, M >_t \qquad \wp - a.s$$

Variazione quadratica

In termini operativi, la variazione quadratica di M_t si ottiene considerando successive partizioni m dell'intervallo $(0, t)$ sempre più fini::

$$\lim_{m \uparrow \infty} \sum_{k=0}^{n_m - 1} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 = < M, M >_t$$

Per il BM su ha $< Z, Z >_t = t$ $(\wp - a.s.)$ e il BM è anche l'unica martingala a traiettorie continue con variazione quadratica pari a t (teorema di Lévy). Pertanto, si può scrivere, per ogni incremento infinitesimo:

$$(dZ_t)^2 = dt$$

per cui, intuitivamente, dZ_t ha la dimensione di $\sqrt{dt}$ mentre per la derivabilità dovrebbe essere di dimensione più piccola, dt.

Ne segue che $Z_t^2 - t$ è una martingala.

Integrale stocastico - 1

Pur non esistendo la derivata del BM, è comunque possibile definire il differenziale stocastico del BM:

$$dZ_t \equiv Z_{t+dt} - Z_t \sim N(0, dt)$$

come processo normale, a media nulla e varianza dt.

Analogamente, l'operatore inverso, l'integrale stocastico:

$$\int g(s) dZ_s$$

richiede una definizione specifica dato che Z_t è a variazione illimitata e l'integrale non è interpretabile come integrale di Stieltjes (valido per funzioni a variazione limitata).

Integrale stocastico - 2

Una tale definizione è stata fornita da Kiyosi Itô (1944) per la classe dei processi stocastici $g(\omega, s)$ continui non anticipativi e di classe M^2 (per cui $E\left(\int \mid g(s) \mid^2 ds\right) < \infty$):

Teorema ***di Itô (1944) dell'integrale stocastico.*** *La successione delle somme parziali di Itô converge in media quadratica sull'insieme delle partizioni dell'intervallo* $(0, t)$ *a un processo detto integrale stocastico (di Itô):*

$$\sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}) \underset{n\uparrow\infty}{\rightarrow} I_t \equiv \int_0^t g(s) dZ_s$$

Proprietà dell'integrale stocastico - 1

Come l'integrale deterministico, anche l'operatore integrale stocastico è lineare:

$$\int (ag(s) + bf(s))dZ_s = a \int g(s)dZ_s + b \int f(s)dZ_s$$

Inoltre, l'integrale, come il BM, è una martingala a media nulla, è un processo di Markov, ha traiettorie continue ma non derivabili ed è anch'esso non anticipativo.

In particolare:

1. $E(I_s \mid \Im_t) \equiv E(\int_0^s g(v)dZ_v \mid \Im_t) = \int_0^t g(v)dZ_v \equiv I_t$ per ogni $t \leq s$;
2. $E(\int_0^t g(v)dZ_v) = 0$ per ogni $t \geq 0$;

Proprietà dell'integrale stocastico - 2

3. $E(\int_A g(v)dZ_v \cdot \int_B f(v)dZ_v) = E(\int_{A\cap B} g(v)f(v)dv)$ (isometria);
4. se $g(t)$ è una funzione deterministica $E\left[\left(\int_0^t g(s)dZ_s\right)^2\right] = \int_0^t g^2(s)ds$ e vale $I_t \sim N(0, \int_0^t g^2(s)ds)$ per cui I_t è un BM con un cambiamento di variabile nella dimensione temporale: $t \to T(t) \equiv \int_0^t g^2(s)ds$.

Si dice anche, equivalentemente, che l'integrale stocastico $I_t \equiv \int_0^t g(s)dZ_s$ è soluzione dell'equazione differenziale stocastica (SDE):

$$dI_t = g(t)dZ_t$$

e per il teorema di Clark, ogni $\wp$-martingala è rappresentabile come integrale stocastico.

Teorema di rappresentazione delle martingale

Teorema *di Clark (1970) o di rappresentazione delle martingale.*
Se Z_t è un BM e $(\Im_t^z)$ è la filtrazione generata da Z, ogni martingala M_t rispetto a $\Im_t^z$ ha la rappresentazione:

$$M_t = M_0 + \int_0^t g(s) dZ_s$$

con $g(t)$ processo non anticipativo di classe M^2, unico se la martingala è integrabile. Se $g(t)$ è a.s. non nullo, ogni altra martingala N_t si può rappresentare come:

$$N_t = N_0 + \int_0^t h(s) dM_s$$

con $h(t)$ processo non anticipativo di classe M^2, unico se la martingala N_t è integrabile.

Processi di Ito

se X_t è soluzione della SDE:

$$dX_t = a(\omega, t)dt + g(\omega, t)dZ_t$$
$$X_0 = x_0$$

con $a(t)$, $g(t)$ processi non anticipativi di classe M^1 e M^2 rispettivamente, ovvero, equivalentemente, se X_t è soluzione dell'equazione integrale stocastica di Itô (SIE):

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t g(\omega, s)dZ_s$$

si dice che X_t è un **processo di Itô**.

Se $a(t)$, $g(t)$ sono anche $\Im_t^x$-misurabili si può scrivere $a(x,t)$ e $g(x,t)$ e la soluzione X_t, se esiste, si chiama **processo diffusivo**. A fini pratici, processi diffusivi e processi di Itô rappresentano essenzialmente la stessa classe di processi stocastici.

Esistenza ed unicità della soluzione della SDE

Teorema ***di Itô (1951) della soluzione di una SDE****. Se* $a(x,t)$ *e* $g(x,t)$ *sono processi non anticipativi, di classe* M^1 *e* M^2*, non esplosivi e Lipschitz-continui in* x*, vale a dire:*

$|\, a(x,t) \,| + |\, g(x,t) \,| \leq k\sqrt{1+x^2}$ *(condizione di crescita)*

$|\, a(x,t) - a(y,t) \,| + |\, g(x,t) - g(y,t) \,| \leq k \,|\, x - y \,|$ *(condizione di continuità)*

allora esiste un processo X_t *non anticipativo, di classe* M^2*, markoviano, a traiettorie continue che risolve (strong solution) la SIE:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s)ds + \int_0^t g(X_s, s)dZ_s \qquad \text{(A.1)}$$

ovvero, equivalentemente, la SDE:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + g(X_t, t)dZ_t \qquad \text{(A.2)}$$

Drift e diffusione della SDE

*Inoltre, grazie alla condizione di Lipschitz, la soluzione è unica nel senso delle traiettorie (**pathwise unique**) poiché se Y_t è un'altra soluzione, $X_t = Y_t$ $\forall t \; \wp - a.s.$*

Il coefficiente $a(x,t)$ si dice drift della SDE mentre il coefficiente $g(x,t)$ si dice volatilità istantanea o coefficiente di diffusione della SDE. Attraverso quest'ultima componente, l'aleatorietà entra nella dinamica del processo che altrimenti sarebbe puramente deterministico ($g = 0$), guidato da un'equazione differenziale ordinaria (ODE).

Se $a(x)$ e $g(x)$ non dipendono direttamente dal tempo la SDE si dice autonoma o omogenea e la soluzione X_t è un p.s. di Markov e **stazionario** (omogeneità nel tempo).

Pur non essendo una martingala, la soluzione X_t è un processo di Markov, non anticipativo con traiettorie continue non derivabili (**semimartingala**).

Esempi di processi stocastici - 1

Corollario *Un processo diffusivo è una martingala se e solo se ha drift nullo* $a(X_t, t) = 0$.

Esempi

1. BM aritmetico o non standard:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dZ_t;$$

2. BM geometrico o lognormale:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dZ_t;$$

3. processo di Ornstein-Uhlenbeck (OU):

$$dX_t = (a + bX_t)dt + \sigma dZ_t;$$

Esempi di processi stocastici - 2

4. processo di Langevin (BM elastico):

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dZ_t \qquad b > 0;$$

5. processo di Feller o square-root:

$$dX_t = (a + bX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dZ_t;$$

6. processo a parametri deterministici:

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ_t.$$

Calcolo stocastico di Ito

La teoria di Itô ha consentito di impostare un vero e proprio calcolo stocastico, con le proprie regole di derivazione e integrazione.

Al riguardo vale il lemma di Itô (1951)-Doeblin (1940) o formula del cambiamento di variabile, che mostra che la classe dei processi non anticipativi è chiusa per trasformazioni regolari.

Lemma di Ito - 1

Lemma ***di Itô (1951)-Doeblin (1940) o formula del cambiamento di variabile.*** *Nelle ipotesi del teorema di Itô, se X_t è un processo diffusivo soluzione di:*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + g(X_t, t)dZ_t$$

e se $f(x, t)$ è una funzione continua con derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ continue, allora il p.s. $Y_t = f(X_t, t)$ è ancora un processo diffusivo, soluzione della SDE:

$$\begin{aligned} df(X_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}a(X_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}g^2(X_t, t)\right)dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x}g(X_t, t)\right)dZ_t \end{aligned}$$

Lemma di Ito - 2

Si noti che, a differenza del calcolo ordinario, il differenziale df include un termine quadratico $(dX_t)^2$ non trascurabile.

In particolare si ha:

$$(dX_t)^2 = g^2(t)dt$$

per cui, essendo, banalmente:

$$(dX_t)^2 = a^2(dt)^2 + 2ag \cdot dt \cdot dZ_t + g^2(dZ_t)^2$$

Lemma di Ito - 3

ne discendono le regole moltiplicative del calcolo di Itô:

1. $(dt)^2 = 0$
2. $dt\ dZ_t = 0$
3. $(dZ_t)^2 = dt$

Si noti che in termini integrali, si ottiene la variazione quadratica:

$$< X, X >_t = \int_0^t (dX_u)^2 = \int_0^t g^2(u)du$$

Teorema di Fubini - 1

Teorema ***di Fubini sull'ordine di integrazione deterministica e stocastica.***

$$\int_0^t \int_0^s g(s,u)du ds = \int_0^t \left(\int_0^s g(s,u)du \right) ds$$
$$= \int_0^t \left(\int_u^t g(s,u)ds \right) du = \int_0^t \int_u^t g(s,u)ds\ du$$

$$\int_0^t \int_0^s g(s,u)dZ_u ds = \int_0^t \left(\int_0^s g(s,u)dZ_u \right) ds$$
$$= \int_0^t \left(\int_u^t g(s,u)ds \right) dZ_u = \int_0^t \int_u^t g(s,u)ds\ dZ_u$$

Teorema di Fubini - 2

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s g(s,u)\,dZ_u dZ_s &= \int_0^t \left(\int_0^s g(s,u)\,dZ_u \right) dZ_s \\
&= \int_0^t \left(\int_u^t g(s,u)\,dZ_s \right) dZ_u = \int_0^t \int_u^t g(s,u)\,dZ_s\; dZ_u
\end{aligned}
$$

Teorema di Feynman - Kac - 1

Teorema ***di Feynman (1948)-Kac (1951) di soluzione di una PDE.*** *L'equazione alle derivate parziali lineare parabolica (PDE) della funzione* $V(X_t, t)$*:*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}g^2(X_t,t) + \frac{\partial V}{\partial x}a(X_t,t) + \frac{\partial V}{\partial t} - R(X_t,t)V + D(X_t,t) = 0 \qquad \text{(A.6)}$$

$$V(X_T, T) = \Psi(T)$$

ove X_t *è un p.s. descritto dalla SDE:*

$$dX_t = a(X_t,t)dt + g(X_t,t)dZ_t$$

Teorema di Feynman - Kac - 1

Teorema ***di Feynman (1948)-Kac (1951) di soluzione di una PDE.*** *L'equazione alle derivate parziali lineare parabolica (PDE) della funzione* $V(X_t, t)$*:*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g^2(X_t,t) + \frac{\partial V}{\partial x} a(X_t,t) + \frac{\partial V}{\partial t} - R(X_t,t)V + D(X_t,t) = 0 \qquad \text{(A.6)}$$

$$V(X_T, T) = \Psi(T)$$

ove X_t *è un p.s. descritto dalla SDE:*

$$dX_t = a(X_t,t)dt + g(X_t,t)dZ_t$$

Teorema di Feynman - Kac - 2

ha soluzione rappresentata dal valor medio:

$$V(X_t,t) = E_t\left(\Psi(T)e^{-\int_t^T R(X_s,s)ds} + \int_t^T D(X_s,s)e^{-\int_t^s R(X_u,u)du}ds\right) \quad (A.7)$$

Viceversa, la soluzione (A.7) soddisfa il problema PDE (A.6).

Misure di probabilità equivalenti

Due misure di probabilità, $\wp$ e $\aleph$, sullo stesso spazio misurabile $(\Omega, \Im)$ si dicono equivalenti se, per ogni $A \in \Im$:

$$\wp(A) = 0 \Leftrightarrow \aleph(A) = 0$$

vale a dire se condividono gli stessi eventi a probabilità nulla e a probabilità positiva. Vale il teorema di Radon-Nikodym.

Teorema di Radon-Nikodym - 1

Teorema ***di Radon-Nikodym sulla derivata di probabilità equivalenti***

a) Se $\wp$ *e* $\aleph$ *sono equivalenti, esiste una v.a. non negativa* $\Lambda(\omega) \equiv \frac{d\aleph}{d\wp}(\omega)$ *tale che, per ogni* $A \in \Im$:

$$\aleph(A) = \int_A \frac{d\aleph}{d\wp}(\omega) d\wp(\omega)$$

Tale v.a. si dice derivata di Radon-Nikodym di $\aleph$ *rispetto a* $\wp$.

Il suo valor medio in $\wp$ *è unitario:*

$$E\left(\frac{d\aleph}{d\wp}\right) = \int_\Omega \frac{d\aleph}{d\wp}(\omega) d\wp(\omega) = \aleph(\Omega) = E^{\aleph}(1) = 1$$

Si noti che $\Lambda^{-1} \equiv \frac{d\wp}{d\aleph}$.

Teorema di Radon-Nikodym - 2

b) In generale vale:

$$E^{\aleph}(X) = E(X \cdot \frac{d\aleph}{d\wp})$$

c) Ponendo:

$$\Lambda_t \equiv E(\Lambda \mid \Im_t) = E_t(\Lambda)$$

si ha che Λ_t *è una martingala:*

$$E(\Lambda_s \mid \Im_t) = E(E(\Lambda \mid \Im_s) \mid \Im_t) = E(\Lambda \mid \Im_t) = \Lambda_t$$

dal teorema delle probabilità condizionate:

Teorema di Radon-Nikodym - 3

$$\frac{d\aleph}{d\wp}_{/t} = \frac{\Lambda}{\Lambda_t}$$

e quindi:

$$E(\frac{d\aleph}{d\wp}_{/t} \mid \Im_t) = 1$$

per cui $\frac{d\aleph}{d\wp}_{/t}$ *è una* $\wp$*-martingala a media condizionata unitaria.*

d) In generale X_t *è una* $\aleph$*-martingala se e solo se* $X_t\Lambda_t$ *una* $\wp$*-martingala.*

$$E^{\aleph}(X_s \mid \Im_t) = E(X_s\frac{d\aleph}{d\wp}_{/t} \mid \Im_t) = E(X_s\frac{\Lambda}{\Lambda_t} \mid \Im_t)$$

$$= E(X_s E(\frac{\Lambda}{\Lambda_t} \mid \Im_s) \mid \Im_t) = E(X_s\frac{\Lambda_s}{\Lambda_t} \mid \Im_t)$$

Teorema di Radon-Nikodym - 4

Corollario *Se $C(t)$ e $D(t)$ sono $\wp$-martingale a valori positivi il rapporto $\frac{C(t)}{D(t)}$ è una $\wp^D$-martingala essendo $\wp^D$ la misura definita dalla derivata di Radon-Nikodym $\Lambda = \frac{D(T)}{D(0)}$, i.e.*

$$\wp^D(A) = \int_A \frac{D(T)}{D(0)} d\wp$$

Equivalentemente, essendo:

$$P(t,T) = \hat{E}_t\left(e^{-\int_t^T r(u)du}\right)$$

il prezzo di un titolo che non paga dividendi si ha:

$$V_t(X(T)) = P(t,T)E_t^{P(t,T)}\left(\frac{X(T)}{P(T,T)}\right) = P(t,T)E_t^{P(t,T)}(X(T))$$

Teorema di Girsanov - 1

Il teorema di Girsanov (noto anche come formula di Cameron-Martin) consente di trasformare SDE e processi definiti in uno spazio di probabilità in SDE e processi diversi, definiti in spazi di probabilità equivalenti, che danno luogo agli stessi sentieri campionari.

Teorema *di Girsanov (1960) o di Cameron-Martin (1944) o del cambiamento di drift.* *Dato il set-up* $(\Omega, \Im, (\Im_t^Z), \wp)$, *se* φ_t *è un processo non anticipativo che soddisfa la condizione di Novikov* $E\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T |\varphi_s|^2 ds}\right) < \infty$ *allora si ha che:*

a) il processo M_t *definito da:*

$$M_t \equiv e^{-\frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_s|^2 ds - \int_0^t \varphi_s \; dZ_s} \tag{A.8}$$

è una martingala a media unitaria, $E(M_T) = 1$;

Teorema di Girsanov - 2

b) la misura $\hat{\wp}$, *definita dalla derivata di Radon-Nikodym* $\frac{d\hat{\wp}}{d\wp} \equiv M_t$, *è equivalente a* $\wp$;

c) il processo $\hat{Z}_t$ *definito da:*

$$\hat{Z}_t \equiv Z_t + \int_0^t \varphi_s ds$$

ovvero dalla SDE:

$$d\hat{Z}_t \equiv dZ_t + \varphi_t dt \tag{A.9}$$

è un BM rispetto alla misura $\hat{\wp}$.

Teorema di Girsanov - 3

Viceversa, se $\hat{\wp}$ *è una misura equivalente a* $\wp$*, la derivata di Radon-Nikodym definisce una martingala* $M_t \equiv \frac{d\hat{\wp}}{d\wp}$ *a media unitaria rappresentabile come in (A.8) mediante un processo non anticipativo* φ_t *che rappresenta il drift del* $\hat{\wp}$*-BM* $\hat{Z}_t$ *rispetto alla misura* $\wp$ *come rappresentato in (A.9).*

Teorema di Girsanov - 4

Corollario *Dato il set-up $(\Omega, \Im, (\Im_t^Z), \wp)$, il processo diffusivo X_t soluzione della SDE:*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + g(X_t, t)dZ_t$$

può essere rappresentato come soluzione della SDE:

$$dX_t = (a(X_t, t) - g(X_t, t)b(X_t, t))\, dt + g(X_t, t)d\hat{Z}_t$$

sul nuovo set-up $(\Omega, \Im, (\Im_t^{\hat{Z}}), \hat{\wp})$, in cui $\hat{Z}_t$ è un BM, mentre nel vecchio set-up era un processo diffusivo:

$$d\hat{Z}_t \equiv b(X_t, t)dt + dZ_t$$

Teorema di Girsanov - 5

$\hat{\wp}$ è la nuova misura di probabilità, equivalente alla precedente e definita dalla derivata di Radon-Nikodym:

$$\frac{d\hat{\wp}}{d\wp}(X_t,t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t |b(X,s)|^2 ds - \int_0^t b(X,s)dZ_s}$$

essendo $b(X_t,t)$ un p.s. non anticipativo che soddisfa la condizione di Novikov. In particolare, per $b(X_t,t) = \frac{a(X_t,t)}{g(X_t,t)}$ la diffusione X_t è una martingala rispetto al nuovo set-up e quindi:

$$\hat{E}(X_s \mid \Im_t) = X_t$$

Cambiamento del tempo stocastico

Teorema ***del cambiamento del tempo.*** *Ogni processo diffusivo rispetto alla filtrazione* $(\Im_t, 0 \leq t \leq T)$ *è un BM con un cambiamento del tempo (o della filtrazione).*

In particolare, sia:

$$dX_t = g(t)dZ_t$$

$$\tau(t) \equiv \int_0^t g^2(s)ds$$

Allora $X_t = Z_{\tau(t)}$ *dove* Z_v *è un BM rispetto alla filtrazione* $\pounds_v = \Im_{\tau^{-1}(v)}$, $0 \leq v \leq \tau(T)$.

Processi diffusivi multimensionali - 1

Nel caso dei processi diffusivi si perviene alla SDE multidimensionale, vettoriale:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)dt + \mathbf{G}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{Z}(t)$$

ove:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{X}, t) \\ a_2(\mathbf{X}, t) \\ \ldots\ldots \\ a_i(\mathbf{X}, t) \\ \ldots\ldots \\ a_N(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix}$$

è un vettore $Nx1$ di drift

Processi diffusivi multimensionali - 2

mentre:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X},t) = \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{X},t) & g_{12}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{1j}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{1K}(\mathbf{X},t) \\ g_{21}(\mathbf{X},t) & g_{22}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{2j}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{2K}(\mathbf{X},t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{i1}(\mathbf{X},t) & g_{i2}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{ij}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{iK}(\mathbf{X},t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N1}(\mathbf{X},t) & g_{N2}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{Nj}(\mathbf{X},t) & \dots & g_{NK}(\mathbf{X},t) \end{bmatrix}$$

è una matrice NxK di coefficienti di diffusione.

Processi diffusivi multimensionali - 3

$\mathbf{Z}(t)$ che rappresenta un moto browniano multidimensionale standard,

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \ldots\ldots \\ Z_k(t) \\ \ldots\ldots \\ Z_K(t) \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_K t), \mathbf{I}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{bmatrix}$$

essendo $\mathbf{I}_K$ la matrice identità di dimensione K.

Processi diffusivi con BM indipendenti

In questo caso, i BM unidimensionali sono tra loro non correlati e quindi indipendenti:

$$dZ_i(t)dZ_j(t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ dt & i = j \end{cases}$$

$$d\mathbf{Z}(t) \sim N(0, \mathbf{I}_K dt)$$

Processi diffusivi con BM correlati - 1

Se i BM sono correlati si ha la SDE:

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= a_i(\mathbf{X}, t)dt + \sigma_i(\mathbf{X}, t)dW_i(t) \qquad\qquad i = \mathbf{1}, \ldots, N \\ d\mathbf{W}(t) &\sim N(0, \mathbf{R}dt) \end{aligned}$$

ove i BM W_i sono tra loro correlati:

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}(t)dt$$

con $\mathbf{R} = [\rho_{ij}(t)]$ matrice delle correlazioni (simmetrica e definita positiva) e $\rho_{ij} \in]-1, 1[$ per $i \neq j$ e $\rho_{ii} = 1$ per ogni i.

Processi diffusivi con BM correlati - 2

In tal caso si può trasformare la SDE in modo da ottenere BM indipendenti.

Si tratta di fattorizzare la matrice $\mathbf{R}$, ad esempio con la diagonalizzazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_\lambda \mathbf{\Gamma}' = \left(\mathbf{\Gamma}\sqrt{\mathbf{D}_\lambda}\right)\left(\mathbf{\Gamma}\sqrt{\mathbf{D}_\lambda}\right)'$$

ove Γ è la matrice ortonormale degli autovettori (ortogonali tra loro e normalizzati a 1) e $\mathbf{D}_\lambda$ è la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori. In tal modo si ottiene:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)dt + \mathbf{D}_\sigma(\mathbf{X}, t)\Gamma\sqrt{\mathbf{D}_\lambda}d\mathbf{Z}(t)$$

con $\mathbf{D}_\sigma(\mathbf{X}, t) = diag(\sigma_1(\mathbf{X}, t), ..., \sigma_N(\mathbf{X}, t))$ e $\mathbf{Z}(t)$ BM N-dimensionale standard.

Scomposizione di Cholesky

In alternativa, vale la scomposizione di Cholesky (1905) secondo cui ogni matrice simmetrica definita positiva **R** può essere fattorizzata mediante un'unica matrice triangolare inferiore **L** in modo che:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}'$$

con $\mathbf{L} = [L_{ij}]$ e:

$$L_{ii} = \left(\rho_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}}\left(\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}L_{jk}\right) \qquad j = i+1, i+2, ..., N$$

In tal modo la SDE diventa:

$$dX_i(t) = a_i(\mathbf{X}, t)dt + \sigma_i(\mathbf{X}, t)\mathbf{L}d\mathbf{Z}(t) \qquad i = 1, ..., N$$

$$d\mathbf{Z}(t) \sim N(0, \mathbf{I}_K dt)$$

Esempio di diagonalizzazione - 1

Per $N = 2$ si ha:

$$dX_i(t) = a_i(\mathbf{X}, t)dt + \sigma_i(\mathbf{X}, t)dW_i(t) \qquad i = 1, 2$$

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

Con la diagonalizzazione:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_\lambda = \begin{bmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix}$$

Esempio di diagonalizzazione - 2

e quindi, trascurando le dipendenze funzionali:

$$dX_1(t) = a_1 dt + \sigma_1 \left[\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} dZ_1 + \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} dZ_2 \right]$$

$$dX_2(t) = a_2 dt + \sigma_2 \left[\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} dZ_1 - \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} dZ_2 \right]$$

ove dZ_1 e dZ_2 sono BM indipendenti.

Esempio di triangolazone di Cholesky

Con la triangolarizzazione di Cholesky:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

e quindi, per $dZ_1 \equiv dW_1$ e $dZ_1 dZ_2 = 0$:

$$dX_1(t) = a_1 dt + \sigma_1 \left[dZ_1(t) + 0 \cdot dZ_2(t) \right]$$

$$dX_2(t) = a_2 dt + \sigma_2 \left[\rho dZ_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} dZ_2(t) \right]$$

Si noti che $\rho Z_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} Z_2(t)$ è un BM per il teorema di caratterizzazione di Lévy.

Lemma di Ito multdimensionale - 1

Lemma ***di Itô (1951)-Doeblin (1940) multidimensionale.*** *Nelle ipotesi del teorema di Itô, se* $\mathbf{X}(t)$ *è un processo diffusivo* N*-dimensionale, soluzione di:*

$$dX_i(t) = a_i(\mathbf{X}, t)dt + g_i'(\mathbf{X}, t)d\mathbf{Z}(t) \qquad i = 1, ..., N$$

e se $f(x_1, x_2, ..., x_N, t)$ *è una funzione continua con derivate parziali* $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *continue*

Lemma di Ito multdimensionale - 2

allora il p.s. $Y_t = f(\mathbf{X}, t)$ *è un processo diffusivo unidimensionale, soluzione della SDE:*

$$
\begin{aligned}
df(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_i(t) dX_j(t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i(\mathbf{X}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} g_i'(\mathbf{X}, t) g_j(\mathbf{X}, t) \right) dt + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i'(\mathbf{X}, t) \right) d\mathbf{Z}(t)
\end{aligned}
$$

Lemma di Ito multdimensionale – Esercizio

Siano $X_1(t)$, $X_2(t)$ due processi con dinamica (a coefficienti stocastici):

$$
\begin{aligned}
dX_1 &= \mu_1 X_1 dt + \sigma_1 X_1 dW_1 \\
dX_2 &= \mu_2 X_2 dt + \sigma_2 X_2 dW_2 \\
dW_1 dW_2 &= \rho_{12} dt
\end{aligned}
$$

Calcoliamo la dinamica di $Y(t) = \frac{X_1(t)}{X_2(t)}$.

Lemma di Ito multdimensionale – Svolgimento

Svolgimento.

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= \frac{\partial Y}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial Y}{\partial X_2}dX_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}(dX_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2}(dX_2)^2 + \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2}dX_1 dX_2 \\
&= \frac{1}{X_2}dX_1 - \frac{X_1}{X_2^2}dX_2 + \frac{1}{2}\frac{X_1 2X_2}{X_2^4}(dX_2)^2 - \frac{1}{X_2^2}dX_1 dX_2 \\
&= Y\frac{dX_1}{X_1} - Y\frac{dX_2}{X_2} + Y\left(\frac{dX_2}{X_2}\right)^2 - Y\frac{dX_1}{X_1}\frac{dX_2}{X_2} \\
&= Y(\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})dt + Y\sigma_1 dW_1 - Y\sigma_2 dW_2
\end{aligned}
$$

Lemma di Ito multdimensionale – Esempio pt. 1

Si supponga che $X_1(t)$, $X_2(t)$ siano due processi lognormali con BM correlati:

Allora anche $Y(t) = X_1(t)X_2(t)$ è log-normale con dinamica:

$$\begin{aligned} dY &= X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + dX_1 dX_2 \\ &= Y\left(\mu_1 + \mu_2 + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right) dt + Y\left(\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2\right) \\ &\equiv Y\left(\mu_1 + \mu_2 + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right) dt + Y\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\, dW \end{aligned}$$

Lemma di Ito multdimensionale – Esempio pt. 2

$$dWdW_1 = \frac{\sigma_1 + \rho_{12}\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}}dt$$

$$dWdW_2 = \frac{\sigma_2 + \rho_{12}\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}}dt$$

ove, dal teorema di Lévy, W è un BM standard in modo che σW ha la stessa distribuzione di probabilità di $\sigma_1 W_1 + \sigma_2 W_2$ vale a dire $\sigma dW \stackrel{D}{=} \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2$ da cui $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$.

In particolare, il valor medio di Y^α si calcola come:

$$E_{t_0}(Y^\alpha(t)) = Y^\alpha(t_0)e^{\alpha(\mu_1+\mu_2-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))(t-t_0)+\alpha^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right)(t-t_0)/2}$$

Teorema di Feynman – Kac multidimensionale -1

Teorema ***di Feynman (1948)-Kac (1951) multidimensionale.*** *L'equazione alle derivate parziali lineare parabolica (PDE) della funzione* $V(X_t, t)$:

$$\frac{1}{2}\sum_i^N \sum_j^N \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_i(\mathbf{X},t)\sigma_j(\mathbf{X},t)\rho_{ij}(t) + \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial x_i} a_i(\mathbf{X},t) + \tag{A.10}$$

$$+\frac{\partial V}{\partial t} - R(\mathbf{X},t)V + D(\mathbf{X},t) = 0$$

$$V(\mathbf{X},T) = \Psi(T)$$

ove $\mathbf{X}(t)$ *è un p.s.* N*-dimensionale descritto dal sistema di SDE:*

$$dX_i(t) = a_i(\mathbf{X},t)dt + \sigma_i(\mathbf{X},t)dW_i(t) \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}(t)dt$$

Teorema di Feynman – Kac multidimensionale - 2

ha soluzione rappresentata dal valor medio:

$$V(\mathbf{X},t) = E_t\left(\Psi(T)e^{-\int_t^T R(\mathbf{X},s)ds} + \int_t^T D(\mathbf{X},s)e^{-\int_t^s R(\mathbf{X},u)du}ds\right) \qquad \text{(A.11)}$$

Vale anche il viceversa per cui la soluzione (A.11) soddisfa il problema PDE (A.10).

Teorema di Girsanov multidimensionale - 1

Teorema di Girsanov multidimensionale. *Dato il set-up* $(\Omega, \Im, (\Im_t^{\mathbf{Z}}), \wp)$, *se* $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_N(t))$ *è un processo non anticipativo che soddisfa la condizione di Novikov* $E\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T |\boldsymbol{\varphi}(s)|^2 ds}\right) < \infty$ *ove* $|\boldsymbol{\varphi}(s)|$ *è la norma euclidea:*

$$|\boldsymbol{\varphi}(s)| = \left(\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(s)^2\right)^{1/2}$$

allora si ha che:

a) il processo $M(t)$ *definito da:*

$$M(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t |\boldsymbol{\varphi}(s)|^2 ds - \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}) d\mathbf{Z}(s)}$$

è una martingala a media unitaria, $E(M(T)) = 1$;

Teorema di Girsanov multidimensionale - 2

b) la misura $\hat{\wp}$, *definita dalla derivata di Radon-Nikodym* $\frac{d\hat{\wp}}{d\wp} \equiv M(t)$, *è equivalente a* $\wp$;

c) il processo $\hat{\mathbf{Z}}(t)$ *definito da:*

$$\hat{\mathbf{Z}}(t) \equiv \mathbf{Z}(t) + \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(s)ds$$

ovvero dalla SDE multidimensionale:

$$d\hat{\mathbf{Z}}(t) \equiv d\mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\varphi}(t)dt$$

è un BM standard N*-dimensionale rispetto alla misura* $\hat{\wp}$.

Teorema di Girsanov multidimensionale - 3

Viceversa, se $\hat{\wp}$ *è una misura equivalente a* $\wp$*, la derivata di Radon-Nikodym definisce una martingala* $M(t) \equiv \frac{d\hat{\wp}}{d\wp}$ *a media unitaria rappresentabile mediante un processo non anticipativo* $\boldsymbol{\varphi}(t)$ *che rappresenta il drift del* $\hat{\wp}$*-BM* $\hat{\mathbf{Z}}(t)$ *rispetto alla misura* $\wp$*.*

Da notare che i BM componenti $\hat{\mathbf{Z}}$ *sono indipendenti rispetto a* $\hat{\wp}$ *anche quando non lo sono rispetto a* $\wp$ *per via di un processo* $\boldsymbol{\varphi}$ *stocastico.*

Referenze

- Cesari, Riccardo (2009). *Introduzione alla Finanza Matematica – Derivati, Prezzi e Coperture*. Springer