Introduzione all'Ingegneria Finanziaria

Vincenzo Eugenio Corallo

vincenzo.corallo@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Doctoral School of Economics (DSE)

December 16, 2019

Table of contents

Set-up standard

Dato un'insieme Ω, anche detto spazio di degli eventi possibili, una famiglia $\mathcal{F}$ di suoi sottoinsiemi è un'σ-*algebra* per Ω se essa è chiusa[1] rispetto alle operazioni di:

- **unione**: se una famiglia numerabile di insiemi $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ allora anche la loro unione $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- **complementazione**: se $A \in \mathcal{F} \to A^C \in \mathcal{F}$

$(\Omega, \mathcal{F})$ si dice **spazio misurabile**. Se $\Omega = \mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali) e B è la σ-algebra (detta di Borel), generata dagli intevalli aperti di $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, B)$ si dice spazio di Borel e gli elementi di B si dicono insiemi di Borel.

[1] In matematica, si dice che un'operazione $\#$ definita su un insieme non vuoto X, verifica la proprietà chiusura di se:

$$\forall x, y \in X, \quad x \# y \in X$$

ovvero se essa è interna su X. Alternativamente si dice che l'insieme X è chiuso rispetto all'operazione $\#$.

Misure di probabilità

Una misura di probabilità $\mathcal{P}$ è una funzione a valori reali non negativi tale che:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &\in [0,1] \quad \forall A \in \mathcal{F} \\ \mathcal{P}(\cup_j A_j) &= \sum_j \mathcal{P}(A_j) \quad \forall A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j \\ \mathcal{P}(\Omega) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Una tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ si dice spazio di probabilità con filtrazione, in cui Ω è lo spazio degli eventi elementari, $\omega \in \Omega$, $\mathcal{F}$ è un'algebra di Ω e $\mathcal{P}$ è una misura di probabilità detta naturale.

Un'affermazione è "quasi sicura", e si scrive $\mathcal{P} - a.s.$, se l'insieme G in cui è falsa ha probabilità nulla: $\mathcal{P}(G) = 0$.

Due o più eventi A_i sono **stocasticamente indipendenti** se:
$\mathcal{P}\left(\cap_i A_i\right) = \prod_i \mathcal{P}(A_i)$

Variabili aleatorie

Una variabile aleatoria (v.a.) X è una funzione da Ω in $\mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$, è un evento.

La funzione $F_X(a) = \mathcal{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a)$ da $\mathbb{R}$ in $[0, 1]$ si dice **funzione di ripartizione** di X.

La v.a. X è $\mathcal{F}$-**misurabile** se l'immagine inversa degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{F}$ vale a dire se $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F}$, per ogni $I \in B$, spazio di Borel.

La v.a. X è **integrabile** (rispettivamente quadrato integrabile) se $\mathbb{E}(|X|) \leq \infty$ (se $\mathbb{E}(|X|^2) \leq \infty$).

Una v.a. ha media finita se e solo se è integrabile.

Date due v.a. X e Y e un evento $H = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in D\}$ a probabilità non nulla, si definisce **probabilità condizionata** di X dato H come:

$$\mathcal{P}(X(\omega) \in A \mid Y(\omega) \in D) = \frac{\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)\} \cap H)}{\mathcal{P}(H)}$$

Processi stocastici

Un **processo stocastico** $(X(\omega, t), t \in T)$, scritto anche $X_t(\omega)$ è una famiglia di variabili aleatorie indicizzate al tempo, con t insieme discreto $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ o continuo $[0, T]$. $X(., t)$ per t dato è una variabile aleatoria, mentre $X(\omega, .)$ per ω dato è una funzione del tempo detta traiettoria o sentiero campionario.

Grazie per l'attenzione!