Richiami di Finanza Matematica

Introduzione all'Ingegneria Finanziaria

Seminario Professionalizzante

Vincenzo Eugenio Corallo, Ph. D

Sapienza Università di Roma

vincenzo.corallo@uniroma1.it

I titoli derivati

Definizione *Un titolo derivato, o contingent claim (diritto contingente), è un titolo il cui flusso di cassa (e quindi il cui prezzo di mercato) dipende esplicitamente (contrattualmente) dal valore di altri titoli. Definiamo titolo elementare un titolo non derivato. Ad esempio, se* $S(T)$ *è il flusso alla data futura* T *derivante da un titolo elementare, un titolo derivato è rappresentato dal flusso* $H(T) = f(S(T))$ *, funzione di* $S(T)$*. Poiché il valore futuro* $S(T)$ *è, in generale, una variabile aleatoria (v.a.), un derivato è una v.a. ottenibile da una trasformata funzionale di una v.a.*

Prezzi di non arbitraggio - 1

Per definizione, ogni derivato ha un legame funzionale, quantitativo, con uno o più titoli sottostanti.

I prezzi dei derivati devono quindi rispettare particolari relazioni con i sottostanti al punto che, in genere, il prezzo del derivato è ricavabile da tali relazioni.

In caso contrario, si avrebbe quella che si chiama una opportunità di arbitraggio, vale a dire la presenza di disallineamenti nei prezzi dei titoli presenti sul mercato, tali da generare guadagni certi senza investire capitali e senza correre rischi.

L'ipotesi di non arbitraggio (*no arbitrage* o *no free lunch hypothesis*) elimina tale possibilità.

Prezzi di non arbitraggio - 2

Definizione. *L'ipotesi di non arbitraggio afferma che i prezzi dei titoli finanziari devono essere tali da non consentire arbitraggi privi di rischio, vale a dire la possibilità di costruire strategie di compravendita che consentano di fare profitti certi positivi senza capitale e senza correre rischi, ovvero profitti certi positivi o nulli con capitale di prestito (indebitamento).*

Una immediata conseguenza è che titoli e portafogli con eguali cash-flow devono avere eguali prezzi (*law of one price*).

Il pricing dei derivati sfrutta questa condizione per ricavare il prezzo dei contingent claim.

Hedging e Risk-Management - 1

La finalità principale dei derivati è la protezione dei rischi, intendendo per rischio la possibilità che un titolo o portafoglio perda inaspettatamente di valore in un momento futuro.

Definizione *Si dice rischiosa una qualunque situazione che possa dar luogo a una riduzione del valore delle attività in portafoglio e/o a un aumento delle passività (definizione patrimoniale di rischio). In alternativa, è rischiosa qualunque situazione che possa dar luogo a una riduzione dei profitti e/o a un aumento delle perdite di bilancio (definizione reddituale).*

Hedging e Risk-Management - 2

I rischi sui mercati finanziari sono di vario genere e per ogni tipologia di rischio vi sono corrispondenti tipologie di derivati. Ad esempio per la copertura del rischio di tasso ci sono i derivati sui tassi (interest rate derivatives); per i rischi di cambio ci sono i derivati sui cambi (currency derivatives); per i rischi azionari ci sono i derivati su azioni e indici (stock market derivatives); per il rischio di credito ci sono i derivati creditizi (credit derivatives); per il rischio d'inflazione ci sono i derivati sui beni (inflation-linked derivatives e commodity derivatives).

Rischio di Credito (o di Controparte)

Ad esempio, il **rischio di credito** o credit risk o rischio di controparte, riguarda un particolare problema legato al fallimento (default) di un debitore. Si determina rischio di credito quando l'emittente va in default (fallisce) oppure quando, meno drammaticamente, ha una riduzione della sua capacità di far fronte agli obblighi sottoscritti. In quest'ultimo caso si ha una diminuzione (downgrading) del suo merito di credito (rating). Ogni volta che si verifica una di queste due possibilità il creditore è soggetto a rischio di credito.

Rischio azionario (Equity)

Il **rischio azionario** invece si verifica ogni volta che si acquista un titolo soggetto alle fluttuazioni del mercato azionario. Da notare come il rischio azionario sia dovuto alle oscillazioni di tutto il mercato di riferimento, legato ai movimenti globali dei mercati azionari; diverso è invece il rischio idiosincratico del singolo titolo legato alle specificità dei titolo stesso e quindi, in ultima analisi, agli stessi fattori (risk drivers, risk factors) che determinano il rischio di credito.

Rischio di tasso (Interest Rate)

Il **rischio di tasso** genera possibili perdite a causa dei movimenti dei tassi d'interesse: un rialzo dei tassi determina di regola una caduta dei prezzi mentre un calo dei tassi fa lievitare i prezzi dei titoli corrispondenti. La disponibilità di derivati sensibili in modo opposto ai movimenti dei tassi ovvero di derivati sui quali è possibile prendere posizioni in vendita (short positions) consente la copertura parziale o totale dei rischio di tasso.

Rischio di cambio (Forex)

Il **rischio di cambio** si determina ogni volta che un titolo è legato a una valuta estera, come ad esempio nel caso di un investitore europeo che acquista un Treasury bond americano; il tasso di cambio euro/dollaro (o dollaro/euro) oscilla e determina rischio di cambio nel momento della conversione dei dollari Usa generati dal bond in euro. In particolare è possibile scomporre il rischio del titolo nella somma delle due componenti: il rischio di cambio dovuto alle fluttuazioni del dollaro rispetto all'euro ed il rischio di tasso dovuto alle variazioni dei tassi americani; mediante i derivati è possibile coprirsi da uno dei due rischi e non dall'altro ovvero da entrambi.

La struttura a termine dei tassi di interesse

Il termine *struttura per scadenza (SPS) dei tassi d'interesse* vuole indicare il legame *strutturale e fondamentale* esistente tra tassi di interesse relativi a scadenze diverse.

Il tasso applicato per scontare nel tempo lo stesso ammontare è diverso da scadenza a scadenza: i diversi tassi relativi a diverse scadenze definiscono la curva detta *struttura per scadenza dei tassi d'interesse*.

Relazione tra rendimento e prezzo del bond: capitalizzazione composta

In generale, se $P(t,T)$ è il prezzo in t dello ZCB che scade in T, il tasso della SPS nella usuale capitalizzazione composta è:

$$R(t,T) = \left(\frac{1}{P(t,T)}\right)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

$$P(t,T) = \frac{1}{(1+R(t,T))^{T-t}}$$

Equivalentemente, in termini di durata $\tau = T - t$ si ha la relazione $R(t,\tau)$ che rappresenta, per dato istante t, il legame tra tassi (risk-free rates) e scadenze temporali τ, es. $\tau = 1, 2, 3,$..... anni.

Capitalizzazione semplice e continua

In capitalizzazione semplice si ha la relazione:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right)$$

$$P(t,T) = \frac{1}{1 + R(t,T)(T-t)}$$

mentre in capitalizzazione continua:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{1}{P(t,T)}\right)$$

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

I titoli ZCB sono gli ingredienti di base per prezzare ogni altra attività finanziaria.

Strategie di trading (o portafogli)

Definizione *Si definisce* ***strategia di trading*** *un processo stocastico N-dimensionale $\boldsymbol{\alpha}(t)$ descritto dalle quantità $\alpha_j(t)$ di ciascun degli N titoli elementari a ogni istante t:*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_N(t))$$

Definizione *Si definisce* ***valore della strategia*** *al tempo t l'ammontare:*

$$V(t, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) P_j(t)$$

Condizione di autofinanziamento - 1

Definizione *Una strategia di trading* α *è* ***autofinanziante*** *se in ogni istante il valore complessivo degli investimenti e disinvestimenti è nullo, i primi venendo realizzati con vendite di altri titoli e non con apporti di fondi dall'esterno del portafoglio. In termini formali, se la strategia è autofinanziante si ha:*

$$V(T,\boldsymbol{\alpha}) = V(t,\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j=1}^{N} \int_t^T \alpha_j(s)dP_j(s)$$

In termini infinitesimi:

$$dV(t,\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)dP_j(t)$$

Condizione di autofinanziamento – 2

Per N=2 si consideri il portafoglio:

$$V(t,\alpha) = \alpha_1(t)P_1(t) + \alpha_2(t)P_2(t)$$

Il differenziale è:

$$\begin{aligned} dV(t,\alpha) = {} & \alpha_1(t)dP_1(t) + \alpha_2(t)dP_2(t) + \\ & [P_1(t)d\alpha_1(t) + P_2(t)d\alpha_2(t) + d\alpha_1(t)dP_1(t) + d\alpha_2(t)dP_2(t)] \end{aligned}$$

e l'investimento netto è indicato in parentesi quadra

In assenza di dividendi, la mancanza di finanziamenti esterni (autofinanziamento) significa che l'investimento netto è zero, cioè che è zero il valore totale di tutte le variazioni di quantità $d\alpha_j$ (in parentesi quadra):

$$P_1(t)d\alpha_1(t) + P_2(t)d\alpha_2(t) + d\alpha_1(t)dP_1(t) + d\alpha_2(t)dP_2(t) = 0$$

Definizione di arbitraggio

Definizione *Arbitraggio.* *Una strategia di trading autofinanziante α è un* ***arbitraggio*** *se il suo valore oggi è nullo mentre domani è certamente non negativo e probabilmente positivo:*

$$V(t, \alpha) = 0 \tag{2.1}$$

$$Prob\,(V(T, \boldsymbol{\alpha}) < 0) = 0 \quad e \quad Prob\,(V(T, \boldsymbol{\alpha}) > 0) > 0 \tag{2.2}$$

(una definizione più forte è quella di valore certamente positivo $Prob(V(T, \boldsymbol{\alpha}) > 0) = 1$).

Un derivato senza flussi intermedi è rappresentabile come una qualunque variabile aleatoria con valore $X(T)$ al tempo T.

Stretegia di replica

Definizione ***Strategia di replica.*** *Se esiste una strategia autofinanziante* $\boldsymbol{\alpha}$ *tale che* $V(T,\boldsymbol{\alpha}) = X(T)$*, si dice che il derivato è* ***replicabile*** *e la strategia è detta* ***strategia di replica dinamica*** *per il derivato. Nell'ipotesi di non arbitraggio, il valore in* t *del derivato eguaglia il valore in* t *della strategia di replica dinamica (no arbitrage pricing). Nell'ipotesi di mercati completi, tutti i derivati sono replicabili mediante una strategia di replica dinamica.*

L'operatore Valore Attuale

Ross (1978) ha mostrato che, sotto l'ipotesi di non arbitraggio, esiste un funzionale V_t, detto valore attuale, condizionato all'informazione corrente t, definito sullo spazio di tutti i cash-flow $\mathbf{X}$, contenenti, ciascuno, i flussi, positivi o negativi, generati, tra t e $+\infty$, dai titoli presenti sul mercato, tale che:

1. coincide con il prezzo di non arbitraggio del titolo con cash-flow $\mathbf{X}$: $V_t(\mathbf{X}) = P_{\mathbf{X}}(t)$;
2. è lineare: $V_t(a\mathbf{X} \oplus b\mathbf{Y}) = aV_t(\mathbf{X}) + bV_t(\mathbf{Y})$ essendo $\oplus$ il simbolo della somma nello spazio dei cash-flow (ammontari in date diverse);
3. conserva il segno: $V_t(\mathbf{X}) \geqslant 0$ per ogni $\mathbf{X} \geqslant 0$;
4. coincide con la SPS: $V_t(1(T)) = P(t,T)$ per ogni $T \geq t$, essendo $1(T)$ il cash-flow puntuale costituito da una unità monetaria al tempo T;
5. ha la proprietà di concatenazione: $V_t(\mathbf{X}) = V_t(V_s(\mathbf{X}))$ per ogni $s \geq t$.

Mercati completi

Definizione ***Mercato completo.*** *Un mercato si dice* **completo** *se mediante i titoli quotati è possibile generare tutto lo spazio dei possibili cash-flow* **X**. *Viceversa, un mercato è incompleto se con i titoli quotati non è possibile ottenere qualunque profilo di flussi di cassa.*

Osservazione Si noti che la definizione di completezza è relativa. Se un derivato non è quotato e non è replicabile con i titoli quotati, il mercato è incompleto. Se un secondo derivato entra sul mercato, il primo potrebbe diventare replicabile coi vecchi titoli e il nuovo derivato. Si vedrà che in mercati completi, l'operatore valore attuale è unico.

Somma intertemporale

Si supponga di voler valutare un titolo con cash-flow $X(S)$ al tempo S e $X(T)$ al tempo $T > S$.

$$\begin{aligned} V_t\left(X(S) \oplus X(T)\right) &= V_t\left(V_S\left(X(S) \oplus X(T)\right)\right) \\ &= V_t\left(X(S) + V_S(X(T))\right) \\ &= V_t(X(S)) + V_t(X(T)) \end{aligned}$$

Ciò significa che il flusso più lontano $X(T)$ può essere sostituito dal suo valore alla data precedente S, in modo che il flusso intertemporale $X(S) \oplus X(T)$ è equivalente al flusso in S: $X(S) + V_S(X(T))$. Il simbolo $\oplus$ di somma intertemporale indica la somma tra ammontari di date diverse.

Prodotto intertemporale

Sia $X(S,T) \equiv X(S) \odot 1(T)$ una quantità nota in S e operativa in $T \geq S$, con $X(S,S) \equiv X(S) \odot 1(S) = X(S)$. Si ha, per $t \leq S \leq U \leq T$:

$$\begin{aligned} V_t\left((X(S) \odot X(U)) \odot 1(T)\right) &= V_t\left(X(S)V_S\left(X(U) \odot 1(T)\right)\right) \\ &= V_t\left(X(S)V_S\left(X(U)V_U(1(T))\right)\right) \\ &= V_t\left(X(S)V_S\left(X(U)P(U,T)\right)\right) \end{aligned}$$

Il simbolo $\odot$ di prodotto intertemporale indica il prodotto tra ammontari noti in date diverse.

Valori attuali deflazionati - 1

Si consideri un ammontare nominale $X(S)$ e un processo inflazionistico rappresentato da livello dei prezzi $p(t)$.

Il valore attuale nominale di $X(S)$ è $V_t(X(S))$ ma si può pensare anche a un valore attuale "reale" ottenuto attualizzando le grandezze "reali", $X^R(S)$ definite dal rapporto tra grandezze nominali al livello dei prezzi: $X^R(S) \equiv \frac{X(S)}{p(S)}$. Sia $W_t(.)$ l'operatore valore attuale reale. Dovrà essere:

$$\frac{V_t(X(S))}{p(t)} = W_t\left(\frac{X(S)}{p(S)}\right) \equiv W_t(X^R(S))$$

Valori attuali deflazionati - 2

vale a dire: il valore attuale dell'ammontare futuro nominale, una volta deflazionato, eguaglia il valore attuale reale dell'ammontare futuro deflazionato. Detto altrimenti: il valore attuale dell'ammontare futuro nominale eguaglia il prodotto tra il livello corrente dei prezzi e il valore attuale reale dell'ammontare futuro deflazionato.

Per $X(S) = p(S)$ si ottiene:

$$V_t(p(S)) = p(t)W_t(1^R(S))$$

ove $p(t)W_t(1^R(S))$ è il prezzo nominale di uno ZCB reale, vale a dire di uno ZCB che dà in S una unità del bene reale.

Valori attuali in valuta estera - 1

Lo stesso principio si applica, invece che al passaggio tra grandezze reali e nominali, al passaggio tra grandezze in valuta nazionale e grandezze in valuta estera.

Si consideri un ammontare in valuta domestica $X(S)$ e un tasso di cambio $E(t)$, es. euro/dollaro. L'ammontare $X^*(S) \equiv \frac{X(S)}{E(S)}$ rappresenta dollari in S.

Se il valore attuale di $X(S)$ è $V_t(X(S))$ esisterà un operatore valore attuale in dollari: $V_t^*(.)$ tale che:

$$\frac{V_t(X(S))}{E(t)} = V_t^*\left(\frac{X(S)}{E(S)}\right) \equiv V_t^*(X^*(S))$$

Valori attuali in valuta estera - 2

vale a dire: il valore attuale dell'ammontare futuro in euro, una volta trasformato (senza costi) in dollari, eguaglia il valore attuale in dollari dell'ammontare futuro di valuta estera. Detto altrimenti: il valore attuale dell'ammontare futuro in euro eguaglia il prodotto tra il livello corrente del tasso di cambio e il valore attuale in dollari dell'ammontare futuro di dollari.

Per $X(S) = E(S)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} V_t(E(S)) &= E(t)V_t^*(1^*(S)) \\ &= E(t)P^*(t,S) \end{aligned}$$

Il cambiamento di numerario per l'operatore valore attuale (v. anche l'Appendice) ha consentito notevoli progressi nella valutazione dei derivati, potendosi effettuare con qualunque prezzo-numerario utile a semplificare la soluzione del pricing di non arbitraggio

Monotonia della struttura a termine dei prezzi degli ZCB - 1

Il prezzo in t di un titolo ZCB che scade in T è indicato come $P(t,T)$ ovvero, usando la durata $\tau = T - t$, come $P(t,\tau)$.

Esso prende anche il nome di funzione o *fattore di sconto* di 100 unità monetarie da ricevere (con certezza) in T, cioè fra τ periodi.

Chiaramente:

$$P(t,t) = 100 = P(T,T)$$

rappresentando il valore in t (o T) di 100 euro da ricevere in t (o T).

In generale, per l'ipotesi di preferenza temporale degli operatori, per $t < T$ vale:

$$P(t,T) < 100 = P(t,t)$$

ma vale anche, per non arbitraggio, che, dati $T_1 < T_2$ (a parole, titolo a breve e titolo a lunga):

$$P(t,T_1) > P(t,T_2)$$

Monotonia della struttura a termine dei prezzi degli ZCB - 2

cioè la funzione di sconto deve essere monotona decrescente. Naturalmente *quanto decrescente* la condizione di non arbitraggio non riesce a specificare.

In termini analitici:

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial T} < 0$$

e questa condizione sul segno della derivata del prezzo rispetto alla scadenza equivale a tassi forward e tassi spot positivi stante la definizione:

$$r_{FW}(t,T) = -\frac{1}{P(t,T)}\frac{\partial P(t,T)}{\partial T} = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_{FW}(t,S)dS$$

Teorema di Dybvig, Ingersoll e Ross

Si noti che tale risultato di non arbitraggio si riflette sull'andamento decrescente di $P(t,T)$ al variare di T (dinamica sezionale) mentre non vincola l'andamento di $P(t,T)$ al variare di t (dinamica temporale). Tuttavia, vale il teorema di Dybvig, Ingersoll e Ross (1996).

Teorema *Dybvig, Ingersoll e Ross (1996). Se la SPS è di non arbitraggio, il tasso spot a lunga* $R(t,\infty) = \lim_{T\uparrow\infty} R(t,T)$ *e il tasso forward a lunga* $r_{FW}(t,\infty) = \lim_{T\uparrow\infty} r_{FW}(t,T)$ *sono non decrescenti nel tempo.*

Introduzione ai teoremi di pricing di non arbitraggio - 1

Si consideri un set-up standard $(\Omega, \Im, (\Im_t), \wp)$ (v. Appendice) e il processo stocastico "conto corrente" $B(t)$ (detto anche *cash account* o *money market account*) che rappresenta l'accumulo al tasso risk free $r(t)$ derivante dal versamento di un'unità monetaria al tempo iniziale 0:

$$B(t) = e^{\int_0^t r(u)du}$$

Si noti che $B(t)$ è anche soluzione di:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

$$B(0) = 1$$

Introduzione ai teoremi di pricing di non arbitraggio - 2

Definizione ***Misura risk-neutral.*** *Una misura di probabilità si dice risk-neutral o $B(t)$-neutral, indicata con $\wp^B$, se è equivalente a $\wp$ e se il prezzo di qualunque titolo o derivato $V(t)$ scontato con $B(t)$, cioè $\frac{V(t)}{B(t)}$, è una $B(t)$-martingala:*

$$\frac{V(t)}{B(t)} = E_t^B\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right)$$

Teorema ***I Teorema fondamentale (Harrison e Kreps, 1979).*** *Se un sistema di prezzi di mercato ammette una misura risk-neutral allora non ammette arbitraggio. Viceversa, se un sistema di prezzi non ammette arbitraggio, ammette una misura risk-neutral.*

Dimostrazione euristica del I Teorema Fondamentale - 1

Sia α una strategia di trading autofinanziante. Dimostriamo, con ragionamento per assurdo, che α non può essere un arbitraggio. Infatti, per ipotesi, il valore della strategia, $V(t, \alpha)$, è una $B(t)$-martingala essendo combinazione di prezzi di mercato. Ma per essere un arbitraggio deve aversi, in primo luogo, $V(t, \alpha) = 0$ (v. 2.1). Allora anche $\frac{V(t,\alpha)}{B(t)} = 0$ e quindi, per la proprietà delle martingale:

$$E_t^B\left(\frac{V(T,\alpha)}{B(T)}\right) = 0$$

Dimostrazione euristica del I Teorema Fondamentale - 2

Ma se α *è un arbitraggio (v. 2.2)* $Prob(V(T,\alpha) < 0) = 0$ *e quindi, per l'equivalenza delle misure, anche* $Prob^B(V(T,\alpha) < 0) = Prob^B(\frac{V(T,\alpha)}{B(T)} < 0) = 0$. *Poiché la media è nulla, si ha anche* $Prob^B(\frac{V(T,\alpha)}{B(T)} > 0) = Prob^B(V(T,\alpha) > 0) = Prob(V(T,\alpha) > 0) = 0$ *invece che positiva. Quindi* α *non è un arbitraggio. In altre parole, se esiste una misura risk-neutral, un portafoglio o strategia con valore nullo corrente non può avere valore futuro certamente non negativo e probabilmente positivo. Per il viceversa del teorema si veda Delbaen e Schachermayer (1997).*

Relazione tra l'assenza di arbitraggi e l'esistenza della misura *risk neutral* - 1

Dunque, l'assenza di opportunità di arbitraggio equivale all'esistenza di una misura di probabilità, $\wp^B$, detta misura *risk-neutral*, o *equivalent martingale measure* (EMM), tale che il prezzo $V(t)$ di qualunque derivato è il valore atteso secondo la misura $\wp^B$ del valore futuro generato dal derivato, scontato al tasso risk-free. Indicando tale valore con $V(T)$ il teorema dice che:

$$V(t) \equiv V_t\left(V(T)\right) = E_t^B\left(V(T)e^{-\int_t^T r(u)du}\right) \tag{2.4}$$

Chiaramente:

$$V(t) \equiv V_t(V(T)) = E_t^B\left(V(T)\frac{B(t)}{B(T)}\right) = B(t)E_t^B\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right)$$

per cui:

$$\frac{V(t)}{B(t)} = E_t^B\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right) \tag{2.5}$$

Relazione tra l'assenza di arbitraggi e l'esistenza della misura *risk neutral* - 2

In altre parole, il teorema fondamentale del pricing di può formulare dicendo che in assenza di arbitraggio esiste una misura di probabilità $\wp^B$ equivalente a $\wp$, rispetto alla quale i prezzi deflazionati col numerario $B(t)$ sono martingale (o meglio: $B(t)$-martingale in quanto il valor medio è calcolato rispetto alla misura $\wp^B$).

Il teorema identifica anche l'operatore valore attuale tra t e T come:

$$V_t(\,\cdot\,) = E_t^B\left(\,(\,\cdot\,)e^{-\int_t^T r(u)du}\right)$$

In particolare la SPS è:

$$P(t,T) = V_t(1(T)) = E_t^B\left(e^{-\int_t^T r(u)du}\right)$$

Le prime versioni del teorema risalgono a Harrison e Kreps (1979), a tempo discreto e Harrison e Pliska (1981), nel continuo. Una versione generale è in Delbaen e Schachermayer (1994).

Principio della neutralità al rischio

Osservazione (Pseudo-) Risk Neutrality. Il termine di misura "risk-neutral" deriva dal fatto che se si analizzasse un mondo di investitori neutrali al rischio (Cesari e Susini (2005b) p. 11) il prezzo sarebbe il valore futuro atteso secondo la probabilità naturale, scontato al tasso privo di rischio:

$$V(t) = E_t\left(V(T)e^{-\int_t^T r(u)du}\right) = E_t(V(T))e^{-r(T-t)}$$

ove E_t indica la misura naturale e l'ultima eguaglianza si ha nel caso di tasso costante r. La misura $\wp^B$ è stata suggestivamente chiamata misura "risk-neutral" solo perché porta a una formula di prezzo apparentemente simile a quella di un mondo di operatori neutrali al rischio (ma con E_t^B al posto di E_t). In realtà gli operatori sono avversi al rischio e tale avversione è inglobata nella misura $\wp^B$.

II Teorema Fondamentale

Teorema ***II Teorema fondamentale: unicità dei prezzi (Harrison e Pliska, 1983)*** *Se il mercato è completo, la misura risk-neutral, se esiste, è unica e viceversa, se la misura è unica il mercato è completo.*

Dimostrazione euristica.
In modo euristico, si noti che in mercati completi, per definizione, tutte le variabili aleatorie (cash-flow futuri o, equivalentemente, distribuzioni di probabilità possono essere replicate coi titoli esistenti e quindi tutti i rischi possono essere perfettamente coperti (perfect hedging). In tal modo, l'attività d'arbitraggio forza il prezzo dell'acquirente (buyer price) e il prezzo del venditore (seller price) a eguagliarsi: il sistema dei prezzi di mercato è quindi **unico** *e identificato dall'unica misura risk-neutral* $\wp^B$.

Corollario ***Legge del prezzo unico.*** *Se due strategie (portafogli)* α *e* β *danno luogo agli stessi flussi di cassa* $V(T,\boldsymbol{\alpha}) = V(T,\beta)$ *devono avere lo spesso prezzo corrente* $V(t,\boldsymbol{\alpha}) = V(t,\beta)$.

Teorema del cambiamento di numerario – 1

Data la misura risk-neutral $\wp^B$, se $C(t)$ è un processo stocastico (es. un prezzo di mercato di un titolo che non paga dividendi) tale che il valore deflazionato è una $B(t)$-martingala:

$$\frac{C(t)}{B(t)} = E_t^B\left(\frac{C(T)}{B(T)}\right)$$

allora esiste una misura di probabilità, $\wp^C$, equivalente a $\wp^B$, tale che i prezzi dei titoli, $V(t)$, deflazionati con $C(t)$ sono $C(t)$-martingale, cioè:

$$V(t) = V_t(V(T)) = C(t)E_t^C\left(\frac{V(T)}{C(T)}\right) \tag{2.9}$$

Teorema del cambiamento di numerario - 2

Inoltre si ha, da 2.5:

$$V(t) = B(t)E_t^B\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right) = C(t)E_t^C\left(\frac{V(T)}{C(T)}\right)$$

e quindi:

$$E_t^B\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right) = E_t^C\left(\frac{V(T)}{B(T)}\ \frac{B(T)/B(t)}{C(T)/C(t)}\right)$$
$$E_t^C\left(\frac{V(T)}{C(T)}\right) = E_t^B\left(\frac{V(T)}{C(T)}\ \frac{C(T)/C(t)}{B(T)/B(t)}\right)$$

vale a dire:

$$\frac{d\wp^C}{d\wp^B}_{/t} = \frac{C(T)/C(t)}{B(T)/B(t)}$$

è la derivata di Radon-Nikodym di $\wp^C$ rispetto a $\wp^B$ ed è una B-martingala a media unitaria (v. Appendice).

Teorema del cambiamento di numerario - 3

L'operatore valore attuale tra t e T si può esprimere come:

$$V_t(\,\cdot\,) = C(t)E_t^C\left((\,\cdot\,)\frac{1}{C(T)}\right)$$

Ad esempio, utilizzando come numerario $P(t,T)$ si ha:

$$\begin{aligned} V(t) &= P(t,T)E_t^{P(t,T)}\left(\frac{V(T)}{P(T,T)}\right) \\ &= P(t,T)E_t^{P(t,T)}\,(V(T)) \end{aligned}$$

e la misura equivalente $\wp^{P(t,T)}$ si chiama misura $P(t,T)$-*forward*.

In generale, ogni rapporto tra prezzi è una martingala secondo una opportuna misura di probabilità.

Teorema del cambiamento di numerario - 4

Osservazione Nel mondo $C(t)$-neutral si ha:

$$1 = E_t^C \left(\frac{V(T)/V(t)}{C(T)/C(t)} \right)$$

e $H(T) = \frac{V(T)/V(t)}{C(T)/C(t)}$ è una $C(t)$-martingala per cui dal lemma di Itô e dal teorema di rappresentazione delle martingale si ha $\mu_V = \mu_C$ cioè nel mondo $C(t)$-neutral tutti gli asset hanno lo stesso tasso di rendimento atteso μ_C.

Esempio di risk neutral pricing – 1 (opzionale)

Supponiamo ci siano due squadre di calcio, A e B, con probabilità (oggettiva o naturale) di vincere un confronto diretto (senza possibilità di pareggio) rispettivamente di $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$ (A è più forte, odds: $\frac{2/3}{1/3} = 2 : 1$).

Un bookmaker (commissioni a parte) potrebbe essere disposto a ricevere 2 per la scommessa di: pagare 3 se vince A e 0 in caso contrario e ricevere 1 per la scommessa di: pagare 3 se vince B e 0 in caso contrario. Le due scommesse sono eque (Cesari e Susini, 2005b, cap. 1) poiché:

$$\frac{2}{3}(2-3) + \frac{1}{3}(2-0) = 0$$
$$\frac{1}{3}(1-3) + \frac{2}{3}(1-0) = 0$$

Esempio di risk neutral pricing - 2

Chiaramente, 2 è il prezzo della prima scommessa e 1 il prezzo della seconda:

$$2 = V_t(3\chi_A) = 3V_t(\chi_A)$$
$$1 = V_t(3\chi_B) = V_t\left(3(1-\chi_A)\right) = 3 - 3V_t(\chi_A)$$

ove χ_A è la variabile aleatoria indicatore della vittoria di A, pari a 1 se A vince e 0 se A non vince:

$$\chi_A = \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{cases}$$

Il prezzo del titolo rappresentato da χ_A (*Arrow-Debreu security*) che paga 1 se A vince e 0 in ogni altro caso è dunque facilmente ricavabile ed è pari alla probabilità dell'evento $(V_t(\chi_A) = \frac{2}{3})$.

Esempio di risk neutral pricing - 3

Supponiamo che 80 persone scommettono su A e 20 su B.
Il profitto atteso del bookmaker è ovviamente 0:

$$80\left[\frac{2}{3}(2-3)+\frac{1}{3}(2-0)\right]+20\left[\frac{1}{3}(1-3)+\frac{2}{3}(1-0)\right]=0$$

Tuttavia la variabilità del profitto è elevata tra -60 e $+120$:

$$\begin{cases} 2\cdot 80-3\cdot 80+20=180-3\cdot 80=-60 & se\ vince\ A \\ 2\cdot 80+20-3\cdot 20=180-3\cdot 20=+120 & se\ vince\ B \end{cases}$$

e il profitto nullo si ricaverebbe solo su un alto numero di ripetizioni della gara.

Evidentemente, non è la stessa cosa avere un solo cliente e ripetere la gara 100 volte o avere 100 clienti e fare una sola partita.

Nel primo caso opera la legge dei grandi numeri, nel secondo no.

Esempio di risk neutral pricing - 4

Si immagini che il bookmaker (il mercato) abbia la possibilità di cambiare i termini della scommessa (la vincita di 3) in modo da annullare la variabilità nei due casi:

$$180 - h_A 80 = 0$$
$$180 - h_B 20 = 0$$

da cui:

$$h_A = \frac{180}{80}$$
$$h_B = \frac{180}{20}$$

Esempio di risk neutral pricing - 5

Evidentemente le singole scommesse non sono più eque; per il bookmaker la prima è favorevole, la seconda sfavorevole (viceversa per i suoi clienti):

$$\frac{2}{3}(2 - \frac{180}{80}) + \frac{1}{3}(2 - 0) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}(1 - \frac{180}{20}) + \frac{2}{3}(1 - 0) = -2$$

ma lo diventano per il bookmaker sommando tutti i clienti (cioè aggregando tutto il mercato) poiché oltre ad annullare la variabilità dei profitti danno un profitto atteso nullo:

$$80\left[\frac{2}{3}(2 - \frac{180}{80}) + \frac{1}{3}(2 - 0)\right] + 20\left[\frac{1}{3}(1 - \frac{180}{20}) + \frac{2}{3}(1 - 0)\right] = 40 - 40 = 0$$

Le nuove scommesse sono quindi preferibili in quanto annullano sia il profitto aggregato sia la sua variabilità.

Esempio di risk neutral pricing - 6

Sarebbero eque, nel senso usuale, se le probabilità fossero diverse: non le probabilità naturali $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ bensì le probabilità "risk-neutral" $\left(\hat{p} = \frac{160}{180}, 1 - \hat{p} = \frac{20}{180}\right)$:

$$\hat{p}\left(2 - \frac{180}{80}\right) + (1 - \hat{p})(2 - 0) = 0$$

$$(1 - \hat{p})\left(1 - \frac{180}{20}\right) + \hat{p}(1 - 0) = 0$$

Quindi si può pensare che il bookmaker fissi le scommesse "come se" dovessero essere eque rispetto alle probabilità risk-neutral e non alle probabilità oggettive.

Esempio di risk neutral pricing - 7

Il caso precedente si formalizza come segue: sia p_A, V_A, g_A rispettivamente la probabilità di vincita, il prezzo della scommessa e la vincita della scommessa su A (erano rispettivamente $\frac{2}{3}$, 2, 3). La condizione di scommessa equa implica (analogamente per B):

$$p_A(V_A - g_A) + (1 - p_A)(V_A - 0) = 0$$

$$\textit{ovvero } V_A = p_A \cdot g_A$$

che per $g_A = 1$ dà il prezzo dell'Arrow-Debreu security χ_A associata all'evento A.

Esempio di risk neutral pricing - 8

Se N_A e N_B sono il numero di clienti delle due scommesse la variabilità del profitto è:

$$\begin{cases} N_A V_A + N_B V_B - N_A g_A \ \textit{se vince } A \\ N_A V_A + N_B V_B - N_B g_B \ \textit{se vince } B \end{cases}$$

che, nell'ipotesi di scommesse eque, si annullano se $N_A g_A = N_B g_B$ mentre in generale si annullano, se:

$$g'_A = \frac{N_A V_A + N_B V_B}{N_A}$$

$$g'_B = \frac{N_A V_A + N_B V_B}{N_B}$$

Esempio di risk neutral pricing - 9

Le probabilità "risk-neutral" (o prezzi di Arrow-Debreu) sono quindi i prezzi per unità di vincita:

$$p'_A = \frac{V_A}{g'_A} = \frac{N_A V_A}{N_A V_A + N_B V_B}$$
$$p'_B = \frac{V_B}{g'_B} = \frac{N_B V_B}{N_A V_A + N_B V_B}$$

Esse possono essere usate per prezzare altre scommesse legate alle precedenti applicando la formula "come se" fossero eque. Si noti che il ragionamento non ha determinato i prezzi V_A e V_B che sono un dato esogeno.

Gli Swaps

I contratti swap sono un'importante tipologia di derivati che estende al caso multiperiodale il singolo flusso di scambio (swap) definito nel contratto FRA

In generale, i contratti swap prevedono lo scambio tra diverse variabili (tasso fisso contro variabile ma anche tasso variabile contro variabile, fisso contro fisso, valuta domestica contro valuta estera) o tra diversi titoli (asset swap), sebbene l'interest rate swap (IRS, tasso fisso contro variabile) è la tipologia più nota e diffusa

Interest Rate Swap (IRS) - 1

Definizione *L'interest rate swap (IRS), nella sua forma semplice (plain vanilla swap), è un contratto in base al quale le due parti contraenti, senza alcun pagamento iniziale, assumono il reciproco impegno di scambiarsi periodici interessi su un capitale di riferimento (capitale nozionale) per un periodo di tempo prefissato (durata dello swap).*

Nella tipologia fisso contro variabile (fixed for floating), una parte, detta payer o buyer, paga tasso fisso TF e riceve tasso variabile TV (posizione lunga rispetto al tasso variabile); l'altra parte, detta receiver o seller, paga tasso variabile e riceve tasso fisso (posizione corta rispetto al tasso variabile).

Interest Rate Swap (IRS) - 2

il contratto swap può essere visto come un portafoglio di tanti FRA quante sono le date di pagamento di fisso contro variabile.

Di conseguenza, considerando tutte le date di pagamento $(t_1, t_2, ..., t_n)$ e i risultati sui FRA (capitolo 3) si ha, attualizzando i flussi ed equagliando a 0 tale valore attuale:

$$\sum_{i=1}^{n} TF_{SW} P(t, t_i) - \sum_{i=1}^{n} R(t, t_{i-1}, t_i) P(t, t_i) = 0$$

e quindi:

$$TF_{SW} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R(t, t_{i-1}, t_i) P(t, t_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(t, t_i)}$$

Interest Rate Swap (IRS) - 3

Si noti che anche in questo caso (come già per i floater) a fini di pricing il tasso swap si ricava come se i tassi variabili futuri incogniti venissero sostituiti dai tassi forward correnti per le varie scadenze.

Poiché il tasso swap è una media ponderata, con pesi decrescenti, dei tassi forward il *valore* dei singoli pagamenti componenti lo swap acquistato sarà positivo per le scadenze vicine (tasso swap maggiore del tasso forward) e negativo per le scadenze lontane (tasso swap minore del tasso forward) se la SPS forward è crescente. Viceversa, il *valore* dei singoli pagamenti componenti lo swap acquistato sarà negativo per le scadenze vicine (tasso swap minore del tasso forward) e positivo per le scadenze lontane (tasso swap maggiore del tasso forward) se la SPS forward è decrescente

Il pricing degli IRS - 1

In modo più formalizzato, si tratta di determinare al tempo t il tasso fisso $R_{SW}(t, n, \delta)$ (detto tasso swap) che eguaglia a zero il valore attuale dei flussi futuri scambiati alle date $(t_1, t_2, ..., t_n)$ (*tenor structure of settlement dates*), con $t_i \equiv t + i\delta$, $i = 1, ..., n$, $t_0 \equiv t$, $t_i - t_{i-1} = \delta$ (periodicità costante per semplicità), essendo $(t_0, t_1, ..., t_{n-1})$ le *reset dates* (*in advance*) in cui si fissano i tassi:

$$V_t\left[\sum_{i=1}^{n}\left(R_{SW}(t,n,\delta) - R(t_{i-1},t_i)\right)\delta \odot 1(t_i)\right] = 0$$

da cui, per le proprietà del valore attuale:

$$V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R_{SW}(t,n,\delta)\delta \odot 1(t_i)\right) - V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R(t_{i-1},t_i)\delta \odot 1(t_i)\right) = 0 \qquad (6.2)$$

Il pricing degli IRS - 2

sommando una unità a scadenza:

$$V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R_{SW}(t,n,\delta)\delta \odot 1(t_i) \oplus 1(t_n)\right)$$
$$= V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R(t_{i-1},t_i)\delta \odot 1(t_i) \oplus 1(t_n)\right) = 1$$

Dunque, poiché al momento della sottoscrizione del contratto swap non avviene nessuno scambio, così come alla scadenza ci si limita a scambiare l'ultimo differenziale d'interessi, il contratto swap, in mercati perfetti, equivale all'acquisto di un par bond (titolo a cedola fissa di valore unitario) e all'emissione di un floater (titolo con cedola variabile, anch'esso di valore unitario).

Il pricing degli IRS - 3

Ne segue che il tasso swap di non arbitraggio è semplicemente il tasso cedolare (nonché il TIR) del par bond, calcolabile come:

$$V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R_{SW}(t,n,\delta)\delta \odot 1(t_i) \oplus 1(t_n)\right) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(R_{SW}(t,n,\delta)\delta V_t\left(1(t_i)\right)\right) + V_t\left(1(t_n)\right) =$$

$$R_{SW}(t,n,\delta)\sum_{i=1}^{n} \delta P(t,t_i) + P(t,t_n) = 1$$

e quindi:

$$R_{SW}(t,n,\delta) = \frac{1 - P(t,t_n)}{\sum_{i=1}^{n} \delta P(t,t_i)}$$

ove $P(t,t_i) \equiv P(t,t+\delta i)$ è il prezzo dello ZCB cha scade in t_i.

Il pricing degli IRS - 4

Il tasso swap è quindi funzione della SPS spot e può facilmente ricavarsi da questa (tasso swap spot).

Si noti che il tasso swap è rappresentabile anche come media ponderata dei tassi forward di durata δ sulle scadenze tra t e t_{n-1} :

$$R_{SW}(t,n,\delta) = \frac{1 - P(t,t_n)}{\sum_{i=1}^{n} \delta P(t,t_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P(t,t_{i-1}) - P(t,t_i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} \delta P(t,t_i)} \qquad (6.3)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(t,t_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(t,t_i)} R(t,t_{i-1},t_i)$$

Il pricing degli IRS - 5

e lo stesso risultato si può ricavare osservando che, dalla definizione di tasso swap:

$$V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R_{SW}(t,n,\delta)\odot 1(t_i)\right)=V_t\left(\sum_{i=1}^{n} R(t_{i-1},t_i)\odot 1(t_i)\right)$$

$$\begin{aligned}
R_{SW}(t,n,\delta)\sum_{i=1}^{n}P(t,t_i) &= \sum_{i=1}^{n} V_t\left(R(t_{i-1},t_i)\odot 1(t_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P(t,t_i)E_t^{P(t,t_i)}\left(R(t_{i-1},t_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P(t,t_i)R(t,t_{i-1},t_i)
\end{aligned}$$

La misura swap

Teorema *Il tasso swap $R_{SW}(t,n,\delta)$, essendo un rapporto tra prezzi, è anche una $A(t,n,\delta)$-martingala e la corrispondente misura di probabilità $\wp^A$, detta swap-measure, è:*

$$R_{SW}(t,n,\delta) = \frac{1-P(t,t_n)}{\sum_{i=1}^{n}\delta P(t,t_i)} = E_t^{A(t,n,\delta)}\left(\frac{1-P(u,t_n)}{\sum_{i=1}^{n}\delta P(u,t_i)}\right)$$
$$= E_t^{A(t,n,\delta)}\left(R_{SW}(u,n,\delta)\right) \qquad \forall u \leq t_1$$

ove $A(t,n,\delta) \equiv \sum_{i=1}^{n}\delta P(t,t_i)$ è detta anche *annuity*.

Il bootstrapping della yield curve

Come è possibile ricavare il tasso swap dalla SPS, così è possibile anche il viceversa, attraverso il procedimento detto di *bootstrapping*

L'obiettivo è quello di ricavare dai tassi swap $R_{SW}(i)$ per le scadenze (annue, per semplicità) $i = 1, ..., n$ i tassi $R_1, R_2, ..., R_n$ della SPS.

$$R_i = \left(\frac{1 + R_{SW}(i)}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{R_{SW}(i)}{(1+R_j)^j}} \right)^{\frac{1}{i}} - 1$$

Poichè i tassi swap sono quotati fino anche a lunghe scadenze come 30–50 anni, mentre i tassi ZCB (i.e. Libor) sono osservabili sino a 1-2 anni, la tecnica del bootsrapping consente di ricavare molto semplicemente la SPS implicita nelle quotazioni dei tassi swap.

Le opzioni plain vanilla: Call europea

Definizione *Una* ***call europea*** *è un contratto che dà diritto a comprare un titolo finanziario, di prezzo $S(T)$, detto sottostante dell'opzione, ad una certa data T detta data di esercizio o data di scadenza (maturity) dell'opzione (entro la data T per la* ***call americana****), ad un dato prezzo predefinito K detto prezzo di esercizio o strike price.*

Si noti che il sottostante può essere qualunque tipo di titolo, elementare (es. opzioni standard su azioni, obbligazioni, cambi) o a sua volta derivato (es. opzioni su futures, swap, opzioni su opzioni e altre forme "esotiche").
Il cash-flow o payoff a scadenza generato dalla call europea è pertanto:

$$Call(T, K) = \max(0, S(T) - K)$$

Le opzioni plain vanilla: Put europea

Definizione. *Una **put europea** è un contratto che conferisce il diritto di vendere il sottostante $S(T)$ alla data di esercizio T (maturity) o entro la data T per la **put americana**, ad un prezzo prestabilito K (strike).*

In questo caso l'opzione verrà esercitata soltanto se il differenziale tra K e $S(T)$ è positivo per cui il payoff a scadenza è:

$$Put(T, K) = \max(0, K - S(T))$$

In termini formali, essendo il prezzo nient'altro che il valore attuale del payoff a scadenza, esso deve essere, per $t < T$, positivo sia per la call sia per la put:

$$Call(t, K) = V_t\left[Call(T)\right] = V_t\left[\max(0, S(T) - K)\right] > 0$$

$$Put(t, K) = V_t\left[Put(T)\right] = V_t\left[\max(0, K - S(T))\right] > 0$$

Moneyness dell'opzione

Definizione *Moneyness*. *Un'opzione si dice* **at the money** *(ATM) se il prezzo corrente del sottostante coincide con lo strike $S(t) = K$;* **in the money** *(ITM) se, immaginando l'esercizio immediato, darebbe un payoff positivo (dunque se $S(t) > K$ per le call e $S(t) < K$ per le put);* **out of the money** *(OTM) se, nell'ipotesi di esercizio immediato, darebbe un payoff nullo (dunque se $S(t) < K$ per le call e $S(t) > K$ per le put).*

Valore intrinseco e valore temporale dell’opzione

Definizione *Si dice* ***valore intrinseco*** *di un’opzione il suo payoff nell’ipotesi che venga esercitata immediatamente:*

$$Valore\ intrinseco\ della\ Call = \max(0, S(t) - K)$$

$$Valore\ intrinseco\ della\ Put = \max(0, K - S(t))$$

Pertanto, si può scrivere che il valore di un’opzione è scomponibile in due parti, il valore intrinseco e il ***valore temporale****, essendo questo definito per differenza:*

$$Valore\ opzione = Valore\ intrinseco + Valore\ temporale$$

Il valore intrinseco può essere positivo o nullo; il valore temporale è sempre positivo e in particolare rappresenta, quando l’opzione è ATM o OTM, la probabilità che comunque l’opzione scada ITM.

Put – Call parity - 1

Per comprendere come call e put sono entrambe strumenti di copertura si parta dalla seguente definizione:

$$\begin{aligned} S(T) - K &= \max(0, S(T) - K) + \min(0, S(T) - K) \\ &= \max(0, S(T) - K) - \max(0, K - S(T)) \\ &= Call(T, K) - Put(T, K) \end{aligned} \tag{7.1}$$

In altre parole si può replicare un payoff simile al forward acquistato (ma attenzione, K non è necessariamente il prezzo forward del sottostante) con un portafoglio fatto da una call acquistata (posizione lunga) e una put venduta (posizione corta). Si è così ottenuto un (quasi-) forward *artificiale* o *sintetico*. Ovviamente un forward in vendita si ottiene con Put meno Call (*long put* e *short call*).

Put – Call parity - 2

Se attualizziamo il payoff dell'equazione (7.1) si ottiene, se il sottostante non paga dividendi o cedole:

$$V_t\left(S\left(T\right)-K\right)=S(t)-KP(t,T)=Call(t,K)-Put(t,K)$$

Di qui la relazione di non arbitraggio nota come *put-call parity*:

$$S(t)+Put(t,K)=Call(t,K)+KP(t,T)$$

La relazione dice che una posizione nel sottostante più una put è uguale a una posizione nella call più uno ZCB con valore facciale pari allo strike.

Il modello di Black & Scholes - 1

Oltre alle usuali ipotesi di mercati perfetti assumiamo che:

1. il sottostante sia un titolo elementare senza dividendi, il cui prezzo sia descritto da un BM geometrico:

$$dS(t) = \mu_S S(t)dt + \sigma_S S(t)dZ(t)$$

con μ_S (drift) e σ_S (volatilità istantanea) costanti;

2. esista un titolo istantaneamente risk-free (conto corrente) che cresce al tasso costante r:

$$dB(t) = rB(t)dt$$

Il modello di Black & Scholes - 2

Vogliamo determinare il prezzo della call europea con scadenza T e strike price K, che vale a scadenza:

$$Call(T, S(T), K) = \max(0, S(T) - K)$$

Si tratta cioè di determinare:

$$Call(t, S(t), K) = V_t\left(\max(0, S(T) - K)\right)$$

e arriveremo alla soluzione in due modi diversi:

1. seguendo la strada, più lunga ma economicamente più chiara, del portafoglio d'arbitraggio (ovvero della strategia di replica), aperta, per la prima volta dai due pionieri della Finanza Matematica;
2. applicando il metodo del valor medio equivalente, che rappresenta una strada certamente più corta ma anche più sofisticata e probabilistica.

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 1

Dal lemma di Itô possiamo ricavare un'espressione che vincola la dinamica del prezzo, scritto C, (**vincolo stocastico**) senza, tuttavia, identificarla completamente:

$$\begin{aligned} dC(t) &= \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dS)^2 \\ &\equiv \mu_C C(t)dt + \sigma_C C(t)dZ(t) \\ \mu_C C(t) &\equiv \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}\mu_S S(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2(t) \\ \sigma_C C(t) &\equiv \frac{\partial C}{\partial S}\sigma_S S(t) \end{aligned} \tag{7.6}$$

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 2

Il ragionamento di non arbitraggio fornisce un vincolo ulteriore (**vincolo economico**). Costruiamo un portafoglio con Δ azioni in posizione lunga e una call in posizione corta:

$$\Pi(t) = \Delta S(t) - C(t)$$

La dinamica del portafoglio è:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \Delta dS - dC \qquad (7.7) \\ &= \Delta dS - \frac{\partial C}{\partial t}dt - \frac{\partial C}{\partial S}dS - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dS)^2 \\ &= (\Delta - \frac{\partial C}{\partial S})\sigma_S S(t)dZ(t) + (\Delta - \frac{\partial C}{\partial S})\mu_S S(t)dt - \frac{\partial C}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dS)^2 \end{aligned}$$

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 3

ponendo:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

il portafoglio diventa privo di rischio e per non arbitraggio, identico al conto corrente per cui:

$$\begin{aligned} d\Pi &= -\frac{\partial C}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 \\ &= r\Pi dt \\ &= r \left(\frac{\partial C}{\partial S} S(t) - C(t) \right) dt \end{aligned} \tag{7.8}$$

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 4

Eguagliando le due espressioni del drift si ha la PDE di tipo parabolico di Black, Scholes e Merton

(**vincolo economico-stocastico**):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2(t) + r\frac{\partial C}{\partial S}S(t) + \frac{\partial C}{\partial t} - rC(t) = 0$$

È utile fare subito alcune osservazioni.

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 5

È utile fare subito alcune osservazioni.

1. Innanzi tutto, si noti che, da (7.7) e da (7.8), si può scrivere:

$$\frac{\partial C}{\partial S} S(t)\mu_S - C(t)\mu_C = r\left(\frac{\partial C}{\partial S} S(t) - C(t)\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} S(t)\,(\mu_S - r) = C(t)\,(\mu_C - r)$$

$$C(t)\frac{\sigma_C}{\sigma_S}\,(\mu_S - r) = C(t)\,(\mu_C - r)$$

da cui l'eguaglianza, in condizioni di non arbitraggio, degli indici di Sharpe nel continuo (cfr. Cesari e Susini, 2005b, paragrafo 6.3):

$$\frac{\mu_S - r}{\sigma_S} = \frac{\mu_C - r}{\sigma_C} = \varphi$$

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 6

ovvero:

$$\mu_S = r + \varphi \sigma_S \tag{7.9}$$

$$\mu_C = r + \varphi \sigma_C$$

a indicare che il tasso atteso di rendimento di ogni titolo, per la condizione di non arbitraggio, è pari al tasso privo di rischio più un premio al rischio proporzionale alla volatilità istantanea del titolo stesso. Il valore φ è chiamato anche prezzo di mercato del rischio.

2. In secondo luogo, nel mondo risk-neutral anche i derivati hanno tasso di rendimento atteso pari al risk-free. Infatti, da (7.6) e dalla PDE ricavata sopra si ottiene che, quando $\mu_S = r$, anche $\mu_C = r$.

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 7

Si è così ottenuto il problema PDE:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2(t) + \frac{\partial C}{\partial S} rS(t) + \frac{\partial C}{\partial t} - rC(t) = 0 \\ dS(t) = rS(t)dt + \sigma_S S(t) d\hat{Z}(t) \\ C(T) = \max(0, S(T) - K) \end{cases} \tag{7.10}$$

in cui:

$$d\hat{Z}(t) \equiv \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} dt + dZ(t) \equiv \varphi dt + dZ(t) \tag{7.11}$$

e, per il teorema di Girsanov, $\hat{Z}$ è un BM sotto una opportuna misura di derivata di Radon-Nicodym di $\wp^B$ rispetto a $\wp$).

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 8

Si è così ottenuto il problema PDE:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2(t) + \frac{\partial C}{\partial S} rS(t) + \frac{\partial C}{\partial t} - rC(t) = 0 \\ dS(t) = rS(t)dt + \sigma_S S(t) d\hat{Z}(t) \\ C(T) = \max(0, S(T) - K) \end{cases} \tag{7.10}$$

in cui:

$$d\hat{Z}(t) \equiv \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} dt + dZ(t) \equiv \varphi dt + dZ(t) \tag{7.11}$$

e, per il teorema di Girsanov, $\hat{Z}$ è un BM sotto una opportuna misura di derivata di Radon-Nicodym di $\wp^B$ rispetto a $\wp$).

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 9

Si noti che l'equazione PDE in (7.10) ha validità generale, nel senso che deve essere soddisfatta da qualunque derivato o portafoglio $\Pi(t, S(t))$ dipendente da $S(t)$. L'unica differenza, naturalmente, è la condizione terminale $\Pi(T)$ specifica del derivato considerato.

Dal teorema di Feynman-Kac la soluzione del problema di PDE (7.10) è:

$$\begin{aligned} Call(t, S(t), K) &= \hat{E}_t\left(\max(0, S(T) - K)e^{-\int_t^T r du}\right) \qquad (7.12) \\ &= e^{-r(T-t)}\hat{E}_t\left(\max(0, S(T) - K)\right) \\ &= e^{-r(T-t)}\int_K^{+\infty}(S(T) - K)\hat{f}_S dS \end{aligned}$$

B&S: Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE - 10

ove il valor medio è calcolato rispetto alla distribuzione di probabilità rappresentata dalla dinamica risk-adjusted o risk-neutral:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma_S S(t)d\hat{Z}(t) \tag{7.13}$$

La condizione di non arbitraggio ha consentito di trasformare il generico operatore valore attuale $V_t(.)$ in un valor medio ben preciso $\hat{E}_t(.)$ da scontare al tasso privo di rischio.

Si noti che in termini della misura naturale la valorizzazione richiede la conoscenza di μ_S ovvero del prezzo del rischio φ e risulta più impegnativa:

$$\begin{aligned} Call(t, S(t), K) &= e^{-r(T-t)}\hat{E}_t\left(\max(0, S(T) - K)\right) \\ &= e^{-r(T-t)}E_t\left(\max(0, S(T) - K)e^{-\int_t^T \varphi(s)dZ(s) - \frac{1}{2}\int_t^T \varphi^2(s)ds}\right) \end{aligned}$$

B&S: Metodo del valor medio equivalente o della EMM

Per il teorema fondamentale del pricing di non arbitraggio, il prezzo della call è una $B(t)$-martingala, vale a dire una martingala rispetto alla misura risk-neutral associata al numerario conto corrente (*equivalent martingale measure* EMM). Pertanto:

$$
\begin{aligned}
Call(t, S(t), K) &= B(t)\hat{E}_t \left(\frac{\max(0, S(T) - K)}{B(T)} \right) \\
&= \hat{E}_t \left(\max(0, S(T) - K) e^{-\int_t^T r du} \right) \\
&= e^{-r(T-t)} \hat{E}_t \left(\max(0, S(T) - K) \right)
\end{aligned}
$$

ove il valor medio è calcolato rispetto alla dinamica risk-neutral:

$$
dS(t) = rS(t)dt + \sigma_S S(t) d\hat{Z}(t) \tag{7.14}
$$

ottenuta sostituendo al drift μ_S del sottostante il tasso risk-free r.

Il prezzo calcolato come il valor medio - 1

Dalla dinamica (7.14) sappiamo che $S(t)$ è log-normale (rispetto alla misura risk-neutral), in funzione di r e del parametro di volatlità σ_S e quindi $ln(S(T)) = y(T)$ ha distribuzione condizionata:

$$\ln(S(T)) \mid S(t) \sim N\left(\ln(S(t)) + (r - \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t),\ \sigma_S^2(T-t)\right)$$

Pertanto il valor medio è calcolabile, con le usuali regole degli integrali, come:

$$\hat{E}_t\left(\max(0, S(T) - K)\right) = \int_K^{+\infty} (S(T) - K)\hat{f}_S dS \tag{7.17}$$

$$= \int_{\ln K}^{+\infty} (e^{y(T)} - K)\hat{f}_y dy$$

Il prezzo calcolato come il valor medio - 2

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\ln K}^{+\infty} e^{y(T)} \hat{f}_y dy - K \int_{\ln K}^{+\infty} \hat{f}_y dy \\
&= \hat{E}_t(S(T))N(d_1) - KN(d_2) \\
&= S(t)e^{r(T-t)} N(d_1) - KN(d_2)
\end{aligned}
$$

ove si è definito:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}} = d_1^{BS}(S(t), K, r, \sigma_S, T-t) \qquad (7.18) \\
d_2 &= \frac{\ln(\frac{S(t)}{K}) + (r - \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}} = d_2^{BS}(S(t), K, r, \sigma_S, T-t) \\
&= d_1 - \sigma_S\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

e $N(x) = 1 - N(-x)$ è la probabilità di estrarre un numero $\leq x$ da una distribuzione normale standard $N(0,1)$.

Il prezzo calcolato come il valor medio - 3

In conclusione, il valore della call europea è dato dalla ormai classica formula di Black e Scholes:

$$\begin{aligned} Call(t, S(t), K) &= e^{-r(T-t)} \left[S(t) e^{r(T-t)} N(d_1) - K N(d_2) \right] \\ &= S(t) N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned} \tag{7.19}$$

mentre per la put europea (al solito ricavabile direttamente o via put-call parity) si ottiene:

$$Put(t, S(t), K) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S(t) N(-d_1) \tag{7.20}$$

Considerazioni sul modello di Black & Scholes - 1

1. Il prezzo della call dipende da 6 elementi (d_1 e d_2 sono variabili):
   a) il tempo t;
   b) il prezzo del sottostante $S(t)$;
   c) lo strike K;
   d) la data di scadenza T;
   e) la volatilità del sottostante σ_S;
   f) il tasso d'interesse r.

   Bisognerebbe scrivere, per completezza $Call(t, S(t), K, T, \sigma_S, r)$. Queste dipendenze funzionali sono alla base delle formule di hedging per i portafogli di opzioni.
2. Si noti la proprietà di linearità (meglio: omogeneità di primo grado) in $S(t)$ e K del prezzo della call; per ogni costante a vale:

$$Call(t, aS(t), aK) = aCall(t, S(t), K)$$

Considerazioni sul modello di Black & Scholes - 2

3. Il prezzo di una call risulta la differenza di due elementi, uno in $S(t)$ e l'altro in K. Ne segue che chi acquista opzioni si compra un "portafoglio" in parte lungo e in parte corto. Poiché la parte corta corrisponde a una sorta di emissione, c'è un grado di indebitamento (*leverage*) in ogni opzione.
4. In particolare, la formula fa assomigliare la call a un portafoglio costituito da $N(d_1)$ unità del sottostante acquistate (posizione lunga) e $KN(d_2)$ quantità di ZCB vendute (posizione corta), con le quantità non costanti ma variabili con tempo e il sottostante. Questa peculiarità è alla base della replica di opzioni (*synthetic options*) ottenuta mediante il trading di azioni e obbligazioni: comprando e vendendo azioni e ZCB in modo da averne continuamente in portafoglio nella quantità $N(d_1)$ e $-KN(d_2)$ si costruisce artificialmente una call.

Considerazioni sul modello di Black & Scholes - 3

5. Anche se non se ne sente la mancanza, va notato che nella formula non appare il rendimento atteso dell'azione μ_S che sembra quindi non influenzare il prezzo delle opzioni.
6. L'unica variabile non osservabile sul mercato in modo diretto è il parametro di volatilità σ_S, assunto costante. Ciò significa che per prezzare una call occorre: o stimare σ_S da una serie storica dei prezzi dell'azione (considerato che la dinamica risk-neutral e quella naturale hanno drift diversi ma lo stesso coefficiente di volatilità); oppure ricavarlo da oltre opzioni sul medesimo sottostante già quotate sul mercato, usando il procedimento detto della *implied volatility*.
7. Le ipotesi di costanza di r e σ_S possono sembrare irrealistiche. Entrambe sono state eliminate dando luogo ai modelli a tasso stocastico e a volatilità stocastica.

Perché il rendimento atteso non entra nel prezzo dell'opzione?

Nella formula di BS non appare il rendimento atteso dell'azione μ_S che sembra quindi ininfluente: opzioni call scritte su azioni ad elevata crescita varrebbero quanto quelle a crescita bassa. Tuttavia, da (7.9), sappiamo che il rendimento atteso dipende da r, σ_S e φ, tutti ingredienti presenti nella formula (l'ultimo è nella misura del BM) e che il prezzo corrente $S(t)$ dell'azione contiene già tutta l'informazione sul titolo (incluso il rendimento atteso: cfr. il CAPM) valutata dal mercato. In tal senso, il prezzo della call è un prezzo relativo rispetto a quello del sottostante.

Le greche di Black & Scholes: Delta - 1

Il delta, Δ, è la derivata del prezzo dell'opzione call rispetto al sottostante $S(t)$:

$$\Delta_C = \frac{\partial Call}{\partial S} = N(d_1) \qquad \in \ ]0,1[$$
$$\Delta_P = \frac{\partial Put}{\partial S} = -N(-d_1) = \Delta_C - 1 \quad \in \ ]-1,0[$$

Il delta è positivo per una call a indicare che al crescere del sottostante la call (ceteris paribus) tende a crescere; negativo per la put. Il delta del sottostante è ovviamente 1. Si noti che nel calcolo del delta si sfrutta la semplificazione:

$$S(t)N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$$

ove si è scritto $N'(x)$ per la densità della normale standard: $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Le greche di Black & Scholes: Delta - 2

Come si è visto nella derivazione del prezzo, il delta rappresenta la quantità di azioni necessaria per rendere istantaneamente risk-free un portafoglio costituito da sottostante e da una posizione corta nella call. Dopo l'acquisto di Δ_C azioni il portafoglio diventa:

$$\Pi = \Delta_C S - C$$

la cui derivata parziale rispetto a $S(t)$ è:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = \Delta_C - \frac{\partial Call}{\partial S} = 0$$

e quindi il portafoglio è istantaneamente coperto (*hedged*) dal rischio di variazioni del sottostante.

Le greche di Black & Scholes: Delta - 3

Infatti, in termini di differenziale, da (7.7) si ottiene:

$$d\Pi = -\frac{\partial Call}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Call}{\partial S^2}(dS)^2$$

che è istantaneamente privo di rischio essendo $(dS)^2 \propto dt$.

L'avverbio istantaneamente è necessario poiché il delta è una funzione (un processo stocastico) dipendente da tutte le 6 variabili viste sopra:

$$\Delta_C(t, S(t), K, T, \sigma_S, r) = \int_{-\infty}^{d_1} N'(x)dx$$

Di conseguenza, essendo la quantità Δ_C variabile, le azioni in portafoglio vanno continuamente ribilanciate in modo da averne sempre, in ogni istante, Δ_C e preservare la copertura del portafoglio. L'attività di continuo ribilanciamento prende il nome di *delta hedging*.

Le greche di Black & Scholes: Vega

Il vega è la derivata del prezzo rispetto al parametro di volatilità. Chiaramente, se questa è costante, la derivata è priva di senso ma l'ipotesi di costanza è chiaramente una semplificazione ed è significativo valutare la sensibilità dell'opzione al variare della volatilità del sottostante.

$$Vega = \frac{\partial Call}{\partial \sigma_S} = \frac{\partial Put}{\partial \sigma_S} = S(t)\sqrt{T-t}N'(d_1) > 0$$

Il vega è lo stesso per call e put e sempre positivo: un aumento della volatilità fa apprezzare le opzioni (almeno quelle plain vanilla) poiché il valore dell'opzione è vincolato sopra zero e una maggiore volatilità rende più probabile per il sottostante trovarsi sopra K.

Volatilità storica

Si è detto che il parametro di volatilità è l'unico elemento, nel prezzo di Black e Scholes, non direttamente osservabile.

Disponendo di $n+1$ osservazioni del prezzo del sottostante a intervalli equispaziati: S_{t_0}, S_{t_1}, ...,S_{t_n} su un periodo storico passato, tra t_0 e t_n, si ricava una stima classica della *volatilità storica*

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(S_{t_i}) - \ln(S_{t_{i-1}}) - \hat{\alpha}\right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(S_{t_i}) - \ln(S_{t_{i-1}})\right) = \frac{\ln(S_{t_n}) - \ln(S_{t_0})}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_{t_0}}\right)$$

che rappresenta la volatilità che si è manifestata nel periodo (passato) usato per la stima e che, sotto l'ipotesi di stazionarietà del processo, rappresenta una stima ottima (in senso statistico) del parametro sottostante.

Volatilità implicita

In tal modo l'implied vol ha una corrispondenza 1 a 1 con i prezzi di mercato e il modello di BS viene utilizzato convenzionalmente (anche quando si hanno modelli più avanzati) per trasformare i prezzi delle opzioni (metrica dell'euro) in volatilità implicite (metrica dei tassi).

L'implied volatility, nella teoria di Black e Scholes, dovrebbe risultare costante:

$$\sigma_S^I(t, S(t), K, T, Call(t), r) = \text{costante}$$

nel senso che le volatilità ricavate in tempi t diversi, con diversi livelli del sottostante $S(t)$, con diversi strike K e diverse scadenze dell'opzione T dovrebbero, per ipotesi, essere le stesse.

In realtà non solo l'implied σ_S^I è diversa dall'historical $\hat{\sigma}_S$, tendendo a sottostimarla ma è anche diversa:

1. nel tempo, per il fenomeno detto della volatilità stocastica;
2. per diversi strike, per il fenomeno detto dello smile e dello smirk;
3. per diverse scadenze, per il fenomeno detto della struttura per scadenza della volatilità.

Opzioni su Forex (FX)

Garman e Kohlhagen (1983) hanno considerato il caso di una call europea sul tasso di cambio (es. euro/dollaro) $E(t)$, con payoff:

$$Call(T, E(T), K) = \max(0, E(T) - K)$$

Tale contratto, detto *currency option*, oltre a rappresentare un titolo molto diffuso sul mercato, è interessante in quanto rappresenta un'opzione su una variabile, il tasso di cambio $E(t)$, che per ipotesi ha la solita dinamica geometrica:

$$dE(t) = \mu_E E dt + \sigma_E E dZ(t)$$

ma che non è rappresentativa del prezzo di un titolo esistente sul mercato essendo solo un fattore di conversione da un'unità di conto a un'altra.

Il titolo esistente è invece il conto corrente in valuta estera $B^*(t)$ che consente di costruire un portafoglio d'arbitraggio.

Pricing dell'opzione FX tramite EMM - 1

Si ha che $E(t)$ non è un prezzo di un titolo mentre lo è $B^*(t)E(t)$. Pertanto:

$$Call(t, E(t), K) = B(t)\hat{E}_t\left(\frac{\max(0, E(T) - K)}{B(T)}\right)$$

e la dinamica del rapporto $B_f^B(t) \equiv \frac{B^*(t)E(t)}{B(t)}$ è:

$$dB_f^B(t) = (r^* + \mu_E - r)B_f^B(t)dt + \sigma_E B_f^B(t)dZ(t)$$

La condizione di non arbitraggio (o di EMM) impone che $B_f^B(t)$ sia una martingala sullo spazio RN e quindi in tale spazio il drift del tasso di cambio vale $\mu_E = r - r^*$ (c.d. parità scoperta dei tassi d'interesse).

Pricing dell'opzione FX tramite EMM - 2

La condizione di non arbitraggio (o di EMM) impone che $B_f^B(t)$ sia una martingala sullo spazio RN e quindi in tale spazio il drift del tasso di cambio vale $\mu_E = r - r^*$ (c.d. parità scoperta dei tassi d'interesse).

Pertanto:

$$\begin{aligned} Call(t, E(t), K) &= B(t)\hat{E}_t\left(\frac{\max(0, E(T) - K)}{B(T)}\right) \\ &= \hat{E}_t\left(\max(0, E(T) - K)e^{-\int_t^T r du}\right) \\ &= e^{-r(T-t)}\hat{E}_t\left(\max(0, E(T) - K)\right) \end{aligned}$$

ove il valor medio è calcolato rispetto alla dinamica RN:

$$dE(t) = (r - r^*)E(t)dt + \sigma_E E(t)d\hat{Z}(t)$$

Opzioni «quanto» su indici esteri - 1

Una complicazione deriva dal caso di call su indici cross-currency, vale a dire opzioni (dette *quantos*) che rappresentano payoff in valuta domestica stabiliti in funzione di indici in valuta estera, ad es. opzioni sul Nasdaq *quanto* euro.

Sia $I^*(t)$ l'indice in valuta estera (es. dollaro) con dinamica:

$$dI^*(t) = (\mu_I^* - \delta_I^*)I^*(t)dt + \sigma_I^* I^*(t)dZ^*(t)$$

e sia $E(t)$ il tasso di cambio della valuta estera in termini di quella domestica (es. euro/dollaro):

$$dE(t) = \mu_E E dt + \sigma_E E dZ(t)$$

Opzioni «quanto» su indici esteri - 2

Nel modello sono presenti due BM, uno che influisce sul mercato estero, $Z^*(t)$, e uno che influisce sul tasso di cambio, $Z(t)$. In generali i due BM sono correlati, con correlazione ρ:

$$dZ^*(t)dZ(t) = \rho dt$$

L'opzione call da esaminare ha il payoff:

$$\max(0, I^*(T) - K)$$

ove, si noti, $I^*(T)$ pur essendo un prezzo estero ha un ruolo, come K, di ammontare in moneta domestica (titolo estero *quanto* euro).

Opzioni «quanto» su indici esteri - 3

Si ha:

$$Call(t, I^*(t), K) = B(t)\hat{E}_t\left(\frac{\max(0, I^*(T) - K)}{B(T)}\right)$$

Il rapporto tra montanti è:

$$I_f^B(t) \equiv \frac{E(t)I^*(t)e^{\delta_I^* t}}{B(t)}$$

con dinamica:

$$dI_f^B(t) = (\mu_E + \mu_I^* - r + \sigma_E\sigma_I^*\rho)I_f^B(t)dt + \sigma_E I_f^B(t)dZ(t) + \sigma_I^* I_f^B(t)dZ^*(t)$$

che è una martingala per:

$$\begin{aligned}\mu_I^* &= r - \mu_E - \sigma_E\sigma_I^*\rho \\ &= r^* - \sigma_E\sigma_I^*\rho\end{aligned}$$

ove la seconda eguaglianza deriva dalla condizione di non arbitraggio sul mercato monetario, $B^*(t)$.

Opzioni «quanto» su indici esteri - 4

In altre parole, dal teorema di Girsanov, i p.s. definiti da:

$$d\hat{Z}(t) = \frac{\mu_E + r^* - r}{\sigma_E} dt + dZ(t)$$

$$d\check{Z}^*(t) = \frac{\mu_I^* - r^* + \sigma_E \sigma_I^* \rho}{\sigma_{I^*}} dt + dZ^*(t)$$

sono BM in una EMM (RN measure) in cui i prezzi $I_f^B(t)$ sono $B(t)$-martingale.

Pertanto:

$$Call(t, I^*(t), K) = e^{-r(T-t)} \hat{E}_t \left(\max(0, I^*(T) - K) \right)$$

ove il valor medio è calcolato rispetto alla dinamica RN:

$$dI^*(t) = (r^* - \delta_I^* - \sigma_E \sigma_I^* \rho) I^*(t) dt + \sigma_I^* I^*(t) d\check{Z}^*(t)$$

Volatilità stocastica - 1

Numerose evidenze hanno portato ad estendere il modello di BS al caso di volatilità non costante.

Quando gli stessi Black e Scholes (1972) applicarono per la prima volta il loro modello ai dati di mercato (2059 call e 3052 straddle scritti tra il 1966 e il 1969) trovarono: a) conferma dell'efficienza dei prezzi di mercato delle opzioni una volta tenuto conto dei costi di transazione; b) una sovrastima dei prezzi di mercato nel caso di stock con alta volatilità storica $\hat{\sigma}_1$ e una sottostima nel caso di stock a bassa volatilità storica $\hat{\sigma}_0$.

Quest'ultimo risultato, in termini di volatilità implicita σ^I si potrebbe tradurre come:

$$\sigma_0^I < \hat{\sigma}_0 < \hat{\sigma}_1 < \sigma_1^I$$

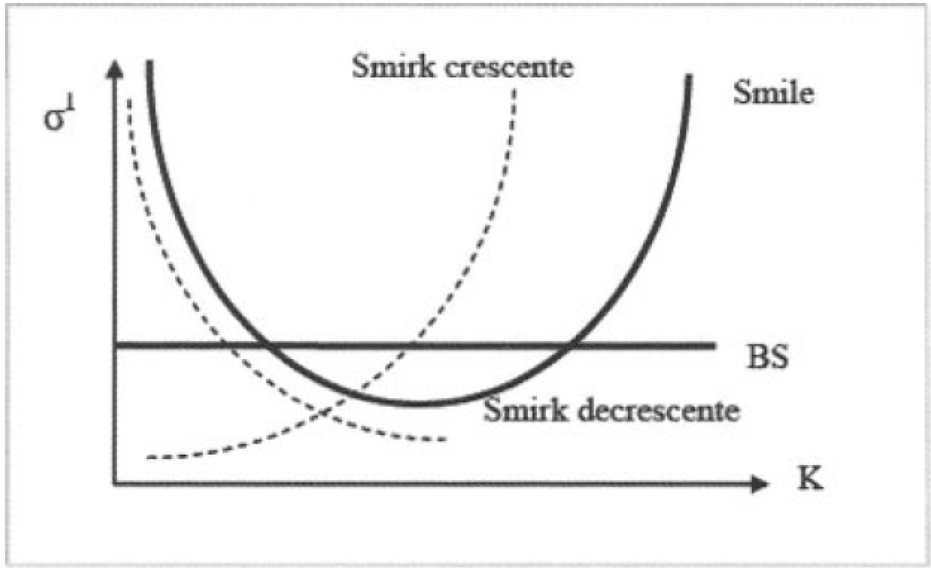
Volatilità stocastica - 2

Naturalmente, non sorprende che sottostanti diversi abbiano volatilità (storiche e implicite) diverse. Tuttavia il risultato, sostanzialmente confermato anche in indagini successive (Galai, 1977), indica che l'uso della volatilità storica determina stime distorte dei prezzi di mercato. In altre parole, data la validità del modello di pricing, la volatilità storica non risulta una buona proxy della volatilità ex ante (o futura) che influenza implicitamente i prezzi delle opzioni. Una volatilità stocastica, vale a dire non costante può essere la causa di tale bias.

Più di recente, con lo sviluppo dei mercati d'opzione, è stato possibile mettere a confronto opzioni call e put sullo stesso sottostante, la stessa scadenza e diverso strike.

Strike structure della volatilità implicita

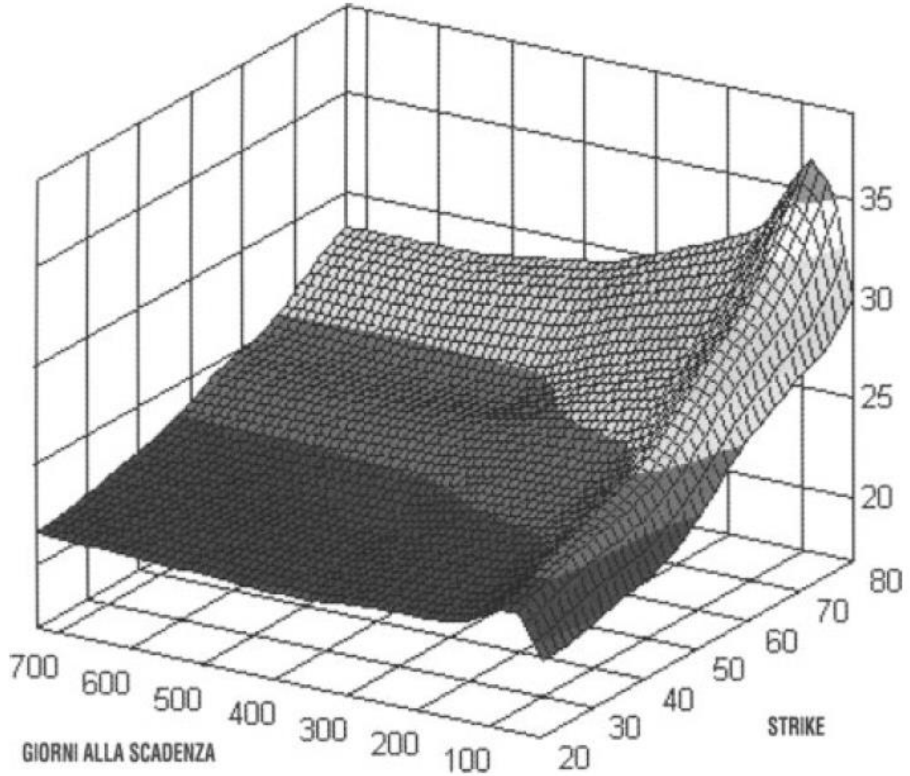
Se $Call(K_j)$, $j = 1, \ldots, n$ sono i prezzi osservati di n opzioni (call) con n strike diversi si ottengono altrettante vol implicite $\sigma_j^I = \sigma^I(t, K_j)$ (*strike-structure* della vol) con andamenti convessi, detti *smile* (sorriso, se simmetrici) e *skew* o *smirk* (sorrisetto, se asimmetrici), con valori minimi intorno agli strike ATM (forward)



Struttura per scadenza della volatilità implicita - 1

L'esame di opzioni quotate con stesso strike e scadenze diverse T_h ha portato analogamente a implied vol dipendenti dalla scadenza $\sigma_h^I = \sigma^I(t, T_h)$ (*term-structure* della vol), simile, a prima vista, alla SPS dei tassi d'interesse. Queste due evidenze congiuntamente considerate portano a stimare, al tempo t, interpolando opportunamente strike e scadenze osservate (es. Tompkins, 2001), una **superficie di volatilità implicita**, $\sigma^I = \sigma^I(t, K, T)$ (*implied volatilty surface*) dipendente dallo strike e dalla scadenza

Struttura per scadenza della volatilità implicita - 2



Ne segue che o la volatilità non è costante o, pur essendo costante, il modello di BS non è valido.

Modelli di pricing con volatilità locale

Si consideri un modello diffusivo con dinamica RN del tipo:

$$dS(t) = (r - \delta_S)S(t)dt + S(t)\sigma(t, S)d\hat{Z}(t) \tag{8.16}$$

La funzione $\sigma(S, t)$ prende il nome di *local volatility* (LV) o *implied volatility function* (IVF) e rappresenta un'estensione generale del modello di BS. Dupire, nel 1993 ha dimostrato il seguente teorema.

Modello di Dupire - 1

Teorema ***Dupire (1994).*** *Dato un insieme (continuo) di prezzi osservati sul mercato di opzioni call plain vanilla, $Call(t, K, T)$, se la local volatility è data da:*

$$\sigma(t, S) = 2\frac{\frac{\partial Call}{\partial T} + (r - \delta_S)S\frac{\partial Call}{\partial K} + \delta_S Call}{S^2 \frac{\partial^2 Call}{\partial K^2}}$$

allora il prezzo di una call plain vanilla è il valore attuale dell'aspettativa RN del payoff della call rispetto alla dinamica (8.16) e coincide con i dati prezzi di mercato:

$$Call(t, K, T) = e^{-r(T-t)}\hat{E}_t(\max(0, S(T) - K))$$

Modello di Dupire - 2

Il risultato di Dupire consente di passare dai prezzi delle opzioni plain vanilla alla vol del sottostante coerente con essi. Inoltre il mercato generato dal modello LV è completo, nel senso che le opzioni sono ridondanti, replicabili con strategie dinamiche in stock e cash.

Prima del suo risultato, erano state proposte alcune generalizzazioni della dinamica lognormale di BS che pur non consentendo un perfetto fit alla superficie di volatilità potevano rappresentare diverse forme di "variabilità" della vol. In tal modo, data la dinamica del sottostante si è cercato di rappresentare al meglio le volatilità implicite nei prezzi di mercato.

Modelli con volatilità stocastica - 1

Un approccio alternativo ai modelli LV è quello della volatilità come processo stocastico $\sigma(t)$ non perfettamente correlato con il sottostante. La volatilità diventa così un processo diffusivo che induce nel mercato un autonomo fattore di rischio (*volatility risk*) e rende il mercato, in senso stretto, incompleto, con derivati non più replicabili con stock e cash.

Il modello a volatilità stocastica (SV) assume la dinamica naturale bidimensionale:

$$\begin{aligned} dS(t) &= (\mu_S - \delta_S)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW_S(t) \\ d\sigma(t) &= a_\sigma(t)dt + g_\sigma(t)dW_\sigma(t) \\ dW_S(t)dW_\sigma(t) &= \rho(t)dt \end{aligned}$$

Modelli con volatilità stocastica - 2

la PDE del prezzo $V(t)$ di un derivato diventa:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}g_\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}g_\sigma \sigma S\rho + \frac{\partial V}{\partial S}\left[r - \delta_S\right]S +$$
$$\frac{\partial V}{\partial\sigma}\left[a_\sigma - g_\sigma\lambda\right] + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$$

La dinamica RN è ora costituita dalle SDE:

$$dS(t) = (r - \delta_S)S(t)dt + \sigma(t)S(t)d\hat{W}_S(t)$$
$$d\sigma(t) = \hat{a}_\sigma(t)dt + g_\sigma(t)d\hat{W}_\sigma(t)$$
$$d\hat{W}_S(t)d\hat{W}_\sigma(t) = \rho(t)dt$$

Modelli con volatilità stocastica - 3

una delle quali rappresenta l'andamento della vol, con un suo drift $a_\sigma(t)$ e una sua vol $g_\sigma(t)$ (*volvol*)

Si noti che l'esistenza di una misura equivalente rispetto a cui $S(t)/B(t)$ è una martingala richiede condizioni non banali sul processo della vol (Sin, 1998).

Inoltre, dal teorema di Girsanov, il drift RN della vol è descrivibile come trasformata del drift naturale (v. Capitolo 2) attraverso il "prezzo" $\lambda(t)$ del volatility risk:

$$\hat{a}_\sigma(t) = a_\sigma(t) - \lambda(t) g_\sigma(t)$$

Tuttavia, $\lambda(t)$ è esogeno e la misura RN non è unica. In altre parole, il mercato non è completo e i derivati non sono replicabili con stock e cash (ma i derivati completano il mercato).

Il modello di Heston - 1

Una particolare modello SV è stato proposto da Heston (1993):

$$dS(t) = rS(t)dt + S(t)\sqrt{v(t)}d\hat{W}_S(t)$$
$$dv(t) = k(\hat{v} - v(t))dt + \eta\sqrt{v(t)}d\hat{W}_v(t)$$
$$d\hat{W}_S(t)d\hat{W}_\sigma(t) = \rho dt$$

con $v(t)$ processo della varianza (quadrato della vol), con dinamica di tipo square-root mean reverting

La soluzione in forma chiusa del prezzo di una call europea è:

$$Call(t) = S(t)P_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

Il modello di Heston - 2

con $P_{1,2}$ probabilità che $S(T) > K$ in opportuni spazi probabilistici ottenibili via trasformata di Fourier. Si veda Minenna (2006, p. 367) per la derivazione completa e le greche. Per $\rho > 0$ (< 0) il modello di Heston mostra uno smirk crescente (decrescente) mentre per $\rho = 0$ si ottiene uno smile simmetrico. La dinamica della varianza del modello di Heston (1993) è un esempio di processo continuo ottenibile come limite di dinamiche discrete dette a Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH), proposte nella letteratura econometrica da Bollerslev (1986) e Engle.

Il modello SABR

Per catturare lo smile e la sua dinamica futura Hagan, Kumar, Lesniewski e Woodward (2002) hanno proposto il modello SV detto SABR (sigma alpha beta rho), con dinamica del prezzo forward $Q(t) = S(t)e^{r(T-t)}$ data da:

$$dQ(t) = \sigma(t)Q^{\beta}(t)d\hat{W}_Q(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha\sigma(t)d\hat{W}_{\sigma}(t)$$

$$d\hat{W}_Q(t)d\hat{W}_{\sigma}(t) = \rho dt$$

Modelli con salti - 1

Osservazione. Modelli con salti. Una terza classe di modelli (Geman, 2002) in grado di spiegare gli effetti di smile è quella dei modelli a salti o processi di Lévy, caratterizzati da incrementi indipendenti e stazionari ma con traiettorie (escluso il solo caso normale o browniano) discontinue (continue da destra). Si noti che nonostante i salti, tali traiettorie sono a variazione finita mentre la variazione quadratica è aleatoria. Merton (1976) estese per primo il modello di BS aggiungendo alla dinamica lognornale dello stock quella di un processo di Poisson (jump-diffusion model). Per l'analisi del modello

Modelli con salti - 2

di Merton si veda anche Minenna (2006, p. 344). Modelli di tipo pure jump (es. iperbolici, normal inverse Gaussian, variance gamma, CGMY di Carr, Geman, Madan e Yor, 2002, 2003) sembrano avere ottime capacità di modellazione della volatilità. Ad esempio, nel modello variance gamma, un processo a salti sempre positivi, g, (subordinator) consente un cambiamento aleatorio del tempo (da tempo storico a tempo economico o business time g) detto random time change che determina prezzi condizionatamente lognormali con volatilità $\sigma\sqrt{g}$ invece della classica $\sigma\sqrt{T-t}$.

Opzioni su tasso di interesse

Come sottolineato da Hull (2003, cap. 22), i derivati di tasso presentano maggiori difficoltà analitiche rispetto ai derivati su azioni o valute. Si pensi al fatto che:

1. i tassi sono coinvolti sia nel payoff futuro del derivato sia nel fattore di attualizzazione necessario per ricavare il prezzo corrente;
2. a differenza di un'azione, un'obbligazione ha una dinamica che non è pienamente libera bensì è vincolata a convergere al valore facciale alla scadenza;
3. a differenza delle diverse azioni, i tassi relativi a scadenze diverse sono tra loro collegati da relazioni di non arbitraggio che determinano la c.d. struttura per scadenza del tassi d'interesse (v. capitolo 2). Modellare i tassi significa modellare una curva con dinamica parzialmente vincolata;
4. le volatilità dei tassi, variando col tempo e le scadenze, descrivono un'intera superficie, concettualmente suggestiva ma analiticamente impegnativa.

Opzioni su tassi Libor: Caplet e Floorlet - 1

Un *caplet* è un contratto d'opzione call europea che ha come sottostante un tasso d'interesse a pronti $R(S,T)$ (in capitalizzazione semplice, tasso Libor) osservato in S per la durata $T - S$ e che, se l'opzione viene esercitata, paga alla scadenza T (caplet in advance) --off:

$$\max(0, R(S,T) - K) \cdot (T - S) \cdot Nom$$

in cui Nom è l'ammontare nominale (capitale nozionale) usato come base di riferimento per il calcolo del pagamento finale.

Chi compra un caplet riceve un pagamento solo se il tasso sottostante supera un livello prefissato K. Di conseguenza, il caplet può convenire a chi riceve un tasso fisso, per sfruttare rialzi del mercato o a chi paga un tasso variabile, per ridurre l'esborso se i tasso dovessero salire.

Opzioni su tassi Libor: Caplet e Floorlet - 2

Trascurando il nozionale, notiamo che il payoff si può scrivere in termini di tasso Libor forward $R(S,S,T) = R(S,T)$, che, sappiamo essere una
una $P(t,T)$-martingala.

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
C(t, R(t,S,T), K) &= V_t \left(\max(0, R(S,T) - K) \odot 1(T)\right)(T - S) \\
&= P(t,T) E_t^{P(t,T)} \left(\max(0, R(S,S,T) - K)\right)(T - S)
\end{aligned}
$$

La formula di Black per il Caplet

Assumendo $R(t,S,T)$ lognormale con **volatilità deterministica** $\gamma_{FW}(t,S,T)$:

$$dR(t,S,T) = \gamma_{FW}(t,S,T)R(t,S,T)dZ^{P(t,T)}(t)$$

si può applicare la formula di Black che dà:

$$C(t,R(t,S,T),K) = (T-S)P(t,T)\left[R(t,S,T)N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{R(t,S,T)}{K}\right) + \frac{\Gamma^2_{FW}}{2}}{\Gamma_{FW}}$$

$$d_2 = d_1 - \Gamma_{FW}$$

$$\Gamma^2_{FW} = \int_t^S \gamma^2_{FW}(t,S,T)dt$$

La formula di Black per il Floorlet

Un *floorlet* è un contratto d'opzione put europea che ha come sottostante un tasso d'interesse a pronti $R(S,T)$ (in capitalizzazione semplice, tasso Libor) osservato in S per la durata $T-S$ e che, se esercitato, paga alla scadenza T (floorlet in advance) il payoff:

$$\max(0, K - R(S,T)) \cdot (T-S) \cdot Nom$$

Ragionando come per il caplet si ha:

$$P(t, R(t,S,T), K) = (T-S)P(t,T)\left[KN(-d_2) - R(t,S,T)N(-d_1)\right]$$

ove d_1 e d_2 sono stati definiti sopra.

Dalle definizione date si ricava che la differenza tra un caplet e un florlet dà un contratto di tipo FRA (il FRA ha $K = R(t,S,T)$):

$$\max(0, R(S,T) - K) - \max(0, K - R(S,T)) = R(S,T) - K$$

$$caplet - floorlet = \text{“}FRA\text{”}$$

Caplet e Floorlet in arrears - 1

Un *caplet in arrears* (cioè con tassi Libor fissati in concomitanza col pagamento) è un contratto d'opzione call europea che paga l'eventuale payoff allo stesso tempo S in cui è osservato il tasso Libor $R(S,T)$. Pertanto:

$$\begin{aligned} C^a(t, R(t,S,T), K) &= V_t\left(\max(0, R(S,T) - K)\right)(T-S) \\ &= P(t,S)E_t^{P(t,S)}\left(\max(0, R(S,S,T) - K)\right)(T-S) \end{aligned}$$

Si noti, tuttavia, che il tasso forward $R(t,S,T)$ non è una $P(t,S)$-martingala ma una $P(t,T)$-martingala.

Caplet e Floorlet in arrears - 2

Si noti, tuttavia, che il tasso forward $R(t,S,T)$ non è una $P(t,S)$-martingala ma una $P(t,T)$-martingala.

A tal fine si può considerare la relazione:

$$C^a(t,R(t,S,T),K) = P(t,T)E_t^{P(t,T)}\left(\frac{\max(0,R(S,S,T)-K)}{P(S,T)}\right)(T-S)$$

$$= P(t,T)E_t^{P(t,T)}\left(\max(0,R(S,S,T)-K)(1+(T-S)R(S,S,T))\right)(T-S)$$

$$= P(t,T)E_t^{P(t,T)}\Big(\max(0,(T-S)R^2(S,S,T)+ \\ + R(S,S,T)(1-(T-S)K)-K)\Big)(T-S)$$

e usare un'approssimazione per la distribuzione di aR^2+bR.

Cap

Un *cap* è un portafoglio di caplet (portafoglio di call su Libor), vale a dire un contratto che alle date $(t_1, t_2, ..., t_n)$, con $t_i = t + i\delta$, $i = 1, ..., n$, $t_0 \equiv t$, $t_n \equiv T$, paga i caplet (set in advance):

$$\max(0, R(t_{i-1}, t_i) - K) \cdot \delta \cdot Nom \odot 1(t_i) \qquad i = 1, ..., n$$

e il valore del cap sarà la somma dei valori dei caplet:

$$\begin{aligned} Cap(t, n, \delta, K) &= \delta\ V_t \left(\sum_{i=2}^{n} \max(0, R(t_{i-1}, t_i) - K) \odot 1(t_i) \right) + \\ &\quad + \delta\ P(t, t_1) \max(0, R(t, t_1) - K) \\ &= \sum_{i=2}^{n} C(t, R(t, t_{i-1}, t_i), K) + \delta \cdot P(t, t_1) \max(0, R(t, t_1) - K) \end{aligned}$$

Cap - Floor parity

Un *floor* è un portafoglio di floorlet (portafoglio di put su Libor) con valore:

$$Floor(t, n, \delta, K) = \sum_{i=2}^{n} P(t, R(t, t_{i-1}, t_i), K) + \delta \cdot P(t, t_1) \max(0, K - R(t, t_1))$$

Si noti la *cap-floor parity* per cui la differenza tra un cap e un floor è un contratto di tipo swap (un contratto swap ha $K = R_{SW}(t, n, \delta)$):

$$\sum_{i=1}^{n} \max(0, R(t_{i-1}, t_i) - K)\delta \odot 1(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \max(0, K - R(t_{i-1}, t_i))\delta \odot 1(t_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (R(t_{i-1}, t_i) - K)\delta \odot 1(t_i)$$

$$cap(K) - floor(K) = \text{“}swap\text{”}(K)$$

Ovviamente si possono definire cap e floor in arrears.

Swaption Europee - 1

Definizione *Una **swaption**, o swap option è un'opzione su un contratto swap con tasso prefissato K.*

In particolare, l'acquirente della payer swaption, alla scadenza T dell'opzione, ha diritto a entrare in un contratto payer swap di durata n anni in cui paga il tasso fisso K e riceve il tasso variabile Libor. L'acquirente della receiver swaption, alla scadenza T, ha diritto a entrare in un contratto receiver swap di durata n anni i cui incassa il tasso fisso K e paga il Libor.

In particolare, alla data T converrà esercitare la payer swaption se il tasso swap prevalente sul mercato in T è superiore al tasso fisso K scritto nella swaption: $R_{SW}(T, n, \delta) > K$.

Swaption Europee - 2

Il valore della payer swaption sarà il valore attuale di tali differenze:

$$Callsw(t, R_{SW}(t,n,\delta), K) = V_t\left(\sum_{i=1}^{n} \max(0, R_{SW}(T,n,\delta) - K)\delta \odot 1(T_i)\right)$$

$$= V_t\left(\max(0, R_{SW}(T,n,\delta) - K)\sum_{i=1}^{n} \delta P(T,T_i)\right)$$

All'opposto, con la receiver swaption, se esercitata, si incassa in T_i:

$$(K - R(T_{i-1}, T_i))\,\delta \qquad i = 1, \ldots, n$$

contro l'incasso nel receiver swap di mercato:

$$(R_{SW}(T,n,\delta) - R(T_{i-1}, T_i))\,\delta \qquad i = 1, \ldots, n$$

Swaption Europee - 3

per cui l'esercizio è conveniente se $R_{SW}(T,n,\delta) < K$ e la receiver swap vale:

$$\begin{aligned} Putsw(t, R_{SW}(t,n,\delta), K) &= V_t\left(\sum_{i=1}^{n} \max(0, K - R_{SW}(T,n,\delta))\delta \odot 1(T_i)\right) \\ &= V_t\left(\max(0, K - R_{SW}(T,n,\delta))\sum_{i=1}^{n} \delta P(T,T_i)\right) \end{aligned}$$

Ne segue che una payer swaption è simile a un cap forward starting sul tasso swap (quindi a un portafoglio di call), mentre una receiver swaption è simile a un floor forward starting sul tasso swap (quindi a un portafoglio di put).

La formula di Black per le swaption europee - 1

Ne segue che, in caso di lognormalità, con volatilità deterministica $\sigma_{SW}(t,n,\delta)$:

$$
\begin{aligned}
Callsw(t, R_{SW}(T,n,\delta), K) &= V_t \left(\max(0, R_{SW}(T,n,\delta) - K) \sum_{i=1}^{n} \delta P(T,T_i) \right) \\
&= A(t,n,\delta) E_t^{A(t,n,\delta)} \left(\max(0, R_{SW}(T,n,\delta) - K) \right) \\
&= \left[R_{SW}(t,n,\delta) N(d_1) - K N(d_2) \right] \sum_{i=1}^{n} \delta P(t,T_i)
\end{aligned}
$$

La formula di Black per le swaption europee - 2

ove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{R_{SW}(t,n,\delta)}{K}\right) + \frac{\Sigma^2_{SW}}{2}}{\Sigma_{SW}}$$

$$d_2 = d_1 - \Sigma_{SW}$$

$$\Sigma^2_{SW} = \int_t^T \sigma^2_{SW}(u,n,\delta)du$$

mente la receiver swaption vale:

$$\begin{aligned} Putsw(t, R_{SW}(T,n,\delta), K) &= V_t \left(\max(0, K - R_{SW}(T,n,\delta)) \sum_{i=1}^{n} \delta P(T,T_i) \right) \\ &= A(t,n,\delta) E_t^{A(t,n,\delta)} \left(\max(0, K - R_{SW}(T,n,\delta)) \right) \\ &= [KN(-d_2) - R_{SW}(t,n,\delta) N(-d_1)] \sum_{i=1}^{n} \delta P(t,T_i) \end{aligned}$$

Cap – Swaption parity - 1

Si noti che la differenza tra payer swaption e receiver swaption è uno "swap froward":

$$\sum_{i=1}^{n} \max(0, R_{SW}(T,n,\delta) - K)\delta \odot 1(T_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \max(0, K - R_{SW}(T,n,\delta))\delta \odot 1(T_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ([R(T_{i-1},T_i) - K] - [R(T_{i-1},T_i) - R_{SW}(T,n,\delta)])\delta \odot 1(T_i)$$

$$payer\ swaption(K)\ - receiver\ swaption(K)$$

$$= \text{“}swap\ forward\text{”}(K)\ -\ swap(R_{SW})$$

Cap – Swaption parity - 2

essendo T la scadenza comune e tenuto conto del fatto che il valore di uno swap di mercato in T è nullo per convenzione.

Ne discende la relazione di non arbitraggio (cap-swaption parity) per cui:

$$\begin{aligned} &\textit{payer swaption}(K) - \textit{receiver swaption}(K) \\ &= \textit{cap forward}(K) - \textit{floor forward}(K) \end{aligned}$$

Il metodo Monte Carlo - 1

Il metodo Monte Carlo consiste nella generazione di un numero elevato H (es. 10 mila) di sentieri temporali (*path*) di un p.s. (tipicamente il o i sottostanti $S(t)$ del contratto d'opzione) tra il tempo t e la scadenza T.

Si supponga che in un opportuno spazio probabilistico (es. quello RN ma non solo), $S(t)$ sia descritto dalla SDE:

$$dS(t) = \hat{\mu}S(t)dt + \sigma_S S(t)d\hat{W}(t)$$

Passo 1. Si sceglie una discretizzazione (12.2), ad es. quella semplice di Euler, e un passo di discretizzazione (es. 1 giorno $= \delta = 1/365$) per cui:

$$S(t+\delta) \simeq S(t) + \hat{\mu}S(t)\delta + \sigma_S S(t)u(t+\delta) \qquad u(t+\delta) \sim iid\ N(0,\delta) \qquad (12.10)$$

Il metodo Monte Carlo - 2

Passo 2. Il calcolatore genera $n = (T-t)/\delta$ disturbi casuali u_i normali o direttamente per sue routine interne o indirettamente via distribuzione uniforme ω su $]0,1[$ e conseguente v.a. normale standard ε:

$$\omega_i \sim U(0,1) \qquad i = 1, ..., n$$

$$\varepsilon_i = N^{-1}(\omega_i) \sim N(0,1)$$

$$u_i = \varepsilon_i \sqrt{\delta} \qquad \sim N(0,\delta)$$

$$u(t+i\delta) \equiv u_i \qquad i = 1, ..., n$$

Il metodo Monte Carlo - 3

Se sono necessarie due distribuzioni normali indipendenti standard, ε^1 e ε^2 si può usare il metodo di Box-Muller (Kloeden, Platen e Schurz, 1994, cap. 1):

$$\varepsilon_i^1 = \sqrt{-2\ln(\omega_i^1)}\cos(2\pi\omega_i^2)$$

$$\varepsilon_i^2 = \sqrt{-2\ln(\omega_i^1)}\sin(2\pi\omega_i^2)$$

Per ottenere normali correlate si può effettuare una trasformata lineare. Ad esempio, per ottenere due normali standard η^1 e η^2 con correlazione ρ si pone:

$$\eta_i^1 = \varepsilon_i^1$$

$$\eta_i^2 = \rho\varepsilon_i^1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_i^2$$

Il metodo Monte Carlo - 4

In generale, tuttavia, se il modello dinamico è costituito da vari p.s. con altrettanti BM correlati, attraverso la scomposizione di Cholesky (v. Appendice) lo si può trasformare in un modello a BM indipendenti.

La generazione degli n disturbi è ripetuta H volte.

Passo 3. Gli n disturbi generano H sentieri $S^j(v)$ del sottostante attraverso la formula ricorsiva di (12.10).

Naturalmente se si dispone della soluzione in forma chiusa e non serve l'intero sentiero temporale (es. per opzioni lookback) si può generare direttamente $S(T)$. Ad esempio, nel caso lognormale:

$$S^j(T) = S(t)e^{(\hat{\mu} - \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)+\sigma_S\sqrt{T-t}\varepsilon_j} \qquad j = 1, ..., H$$

Il metodo Monte Carlo - Pricing

Passo 4. Sulla base degli H sentieri generati per $S(t)$ si calcolano altrettanti payoff del derivato. Ad esempio $V^j(T) = \max(0, \min_{t \le v \le T} S^j(v) - K)$ per una fixed strike lookback call e si calcola il prezzo, nel caso RN come valor medio scontato al tasso risk-free:

$$V(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{H} V^j(T)$$

Il metodo Monte Carlo – Calcolo delle greche

Passo 5. Prima di completare la procedura è bene calcolare le greche del derivato. Ciò può essere fatto usando gli stessi $n \times H$ disturbi casuali generati per il pricing, riutilizzandoli per generare il valore a partire dal valore iniziale del sottostante leggermente inferiore al vero, S^-, e calcolando la derivata backward:

$$\Delta = \frac{V(t, S(t)) - V(t, S^-)}{S(t) - S^-}$$

ovvero, in analogia con (12.8), la media di backward e forward:

$$\Delta(t, S(t)) = \frac{V(t, S^+(t)) - V(t, S^-)}{S^+ - S^-}$$

Analogamente per le altre sensitivities

Referenze

- Cesari, Riccardo (2009). *Introduzione alla Finanza Matematica – Derivati, Prezzi e Coperture*. Springer