

Compte rendu  
Projet de Calcul Scientifique Numérique

Belpois Vincent  
Chomette Hugo

# Table des matières

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Présentation du problème</b>  | <b>3</b> |
| 1.1      | Le problème . . . . .  | 3        |
| 1.2      | Interprétation des coefficients . . . . .                                    | 3        |
| 1.3      | Mise en équation du problème . . . . .                                       | 3        |
| <b>2</b> | <b>Choix du système de coordonnées et du maillage</b>                        | <b>4</b> |
| 2.1      | Comparaison des systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques . . . . . | 4        |
| 2.1.1    | Coordonnées cartésiennes . . . . .   | 4        |
| 2.1.2    | Coordonnées sphériques . . . . .   | 4        |
| 2.2      | Réécriture des équations adaptée au nouveau système de coordonnées . . . . . | 4        |
| 2.3      | Maillage de la sphère . . . . .  | 5        |
| <b>3</b> | <b>Discrétisation du problème</b>  | <b>5</b> |
| 3.1      | Discrétisation de l'équation de la chaleur . . . . .                         | 5        |
| 3.2      | Discrétisation des condition aux limites . . . . .                           | 5        |
| <b>4</b> | <b>Simulation Python</b>   | <b>6</b> |
| 4.1      | Structure du code . . . . .  | 6        |
| 4.2      | Implémentation du maillage . . . . .   | 6        |
| 4.2.1    | Maillage et simulation . . . . .   | 6        |
| 4.2.2    | Implémentation des maillages et des simulations . . . . .                    | 6        |
| 4.3      | Implémentation des équations . . . . .                                       | 6        |
| 4.4      | Simulations . . . . .  | 6        |
| 4.4.1    | Choix des valeurs des paramètre . . . . .                                    | 6        |
| 4.4.2    | Test de l'influence de certains paramètres . . . . .                         | 6        |
| 4.4.3    | Simulations . . . . .  | 6        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>7</b> |

# 1 Présentation du problème

## 1.1 Le problème

On modélise un thermocouple par une sphère uniforme de rayon  $a$ . Cette sphère, initialement à la température  $T_0$ , échange convectivement avec le milieu extérieur, à la température  $T_\infty$ , selon la loi  $\varphi = h(\theta)(T - T_\infty)$ .

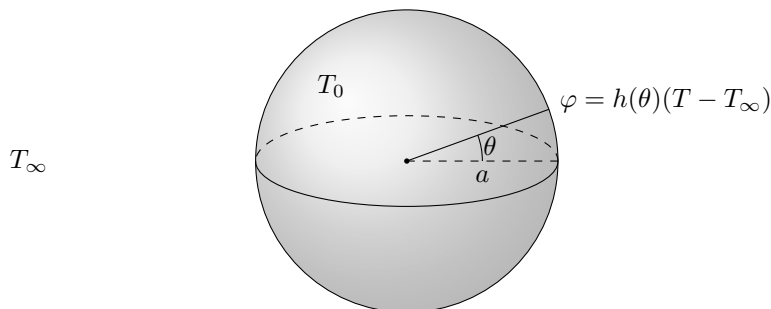


Figure 1: Schéma du Thermocouple

On cherche alors à étudier la réponse de ce thermocouple au cours du temps. Pour cela, on s'impose l'utilisation de la méthode des différences finies

## 1.2 Interprétation des coefficients

La fonction  $h(\theta)$  décrit la dépendance de la convection avec l'angle  $\theta$  entre la normale à la surface de la sphère et la direction de l'échange thermique. Plus précisément, la quantité de chaleur échangée par convection entre la sphère et le milieu extérieur est proportionnelle à la différence de température entre la sphère et le milieu extérieur, multipliée par  $h(\theta)$ .

La forme de la fonction  $h(\theta) = K(1 + \cos(\theta))$  indique que l'échange de chaleur par convection est maximale lorsque la normale à la surface de la sphère est parallèle à la direction de l'échange thermique et dans le même sens que celui-ci, c'est-à-dire lorsque  $\theta = 0^\circ$ . Dans ces cas,  $h(\theta) = K(1 + 1) = 2K$ . L'échange de chaleur par convection est minimale lorsque la normale à la surface de la sphère est dans le sens opposé à celui de l'échange thermique, c'est-à-dire lorsque  $\theta = 180^\circ$ . Dans ce cas,  $h(\theta) = K(1 - 1) = 0$ .

La constante  $K$  détermine l'intensité de l'échange de chaleur par convection pour un angle  $\theta$  donné. Plus  $K$  est grand, plus l'échange de chaleur par convection est important.  $K$  est alors exprimé en  $W.m^{-2}.K^{-1}$ , tout comme  $h(\theta)$ .

## 1.3 Mise en équation du problème

Ce problème revient alors à résoudre l'équation de la chaleur en 3 dimensions et au cours du temps. De manière générale, l'équation de la chaleur s'écrit de la manière suivante.

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + s \quad (1)$$

Dans notre cas, cette équation peut être simplifiée. On a premièrement  $u = 0$  car la sphère n'est pas en mouvement. De plus,  $\lambda$  est constant, on a donc par linéarité du gradient  $\nabla(\lambda \nabla T) = \lambda \nabla^2 T$ . Enfin, le thermocouple n'étant traversé par aucun courant électrique, aucune chaleur n'est produite en son sein et donc le terme de source  $s$  est nul.

L'équation de la chaleur devient alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad (2)$$

## 2 Choix du système de coordonnées et du maillage

### 2.1 Comparaison des systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques

#### 2.1.1 Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnées cartésiennes a l'avantage d'utiliser un repère orthonormé. L'expression des opérateurs tels que le laplacien est donc simple et les équations sont alors simplifiées. Cependant, si le maillage n'est pas régulier selon les trois axes du système de coordonnées cartésiennes, l'expression du pas est alors plus complexe.

#### AJOUTER PETIT REPERE CARTESIEN

#### 2.1.2 Coordonnées sphériques

Le problème décrivant une sphère, le seul système de coordonnées qui peut être intéressant à utiliser est le système de coordonnées sphériques. Ce système de coordonnées est aussi constitué de trois axes orthonormés:  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ . On utilisera alors pour décrire la position d'un point un triplet de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ .

#### AJOUTER PETIT REPERE SPHERIQUE

Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques on utilise les équations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (3)$$

De la même manière, pour passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes on utilise les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

### 2.2 Réécriture des équations adaptée au nouveau système de coordonnées

L'équation de la chaleur Eq.(2) utilise l'opérateur laplacien ( $\Delta = \nabla^2$ ). Cet opérateur s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (5)$$

En coordonnées sphérique, cet opérateur s'écrit alors :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (6)$$

L'équation de la chaleur Eq.(2) s'écrit alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) \quad (7)$$

Dans la suite du problème on utilisera la constante  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  afin de simplifier l'écriture de l'équation ci-dessus.

### 2.3 Maillage de la sphère

## 3 Discrétisation du problème

### 3.1 Discrétisation de l'équation de la chaleur

### 3.2 Discrétisation des condition aux limites

## 4 Simulation Python

Petite introduction sur pourquoi on a utiliser python pour faire cette simulation

### 4.1 Structure du code

### 4.2 Implémentation du maillage

#### 4.2.1 Maillage et simulation

explication du type mesh

explication de la list de meshes qui est alors une simulation

#### 4.2.2 Implémentation des maillages et des simulations

### 4.3 Implémentation des équations

### 4.4 Simulations

#### 4.4.1 Choix des valeurs des paramètre

Choix des pas, des dimensions, de Delta t, du temps de simulation

#### 4.4.2 Test de l'influence de certains paramètres

#### 4.4.3 Simulations

## 5 Conclusion

Conclure sur la méthode utilisé, l'implémentation, la convainance des résultats.

Finir sur ce que cela nous a appris, la facilitée d'implémenter vs la difficulté à discrétiser le problème et choisir la valeur des paramètres