

Compte rendu
Projet de Calcul Scientifique Numérique

Belpois Vincent
Chomette Hugo

Table des matières

1	Présentation du problème	3
1.1	Le problème	3
1.2	Interprétation des coefficients	3
1.3	Mise en équation du problème	3
2	Choix du système de coordonnées et du maillage	5
2.1	Comparaison des systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques	5
2.1.1	Coordonnées cartésiennes	5
2.1.2	Coordonnées sphériques	5
2.2	Réécriture des équations adaptée au nouveau système de coordonnées	5
2.3	Maillage de la sphère	6
3	Discrétisation du problème	7
3.1	Discrétisation de l'équation de la chaleur	7
3.2	Discrétisation des condition aux limites	8
4	Simulation Python	9
4.1	Structure du code	9
4.2	Implémentation du maillage	9
4.2.1	Maillage et simulation	9
4.2.2	Implémentation des maillages et des simulations	9
4.3	Implémentation des équations	9
4.4	Simulations	9
4.4.1	Choix des valeurs des paramètre	9
4.4.2	Test de l'influence de certains paramètres	9
4.4.3	Simulations	9
5	Conclusion	10

1 Présentation du problème

1.1 Le problème

On modélise un thermocouple par une sphère uniforme de rayon a . Cette sphère, initialement à la température T_0 , échange convectivement avec le milieu extérieur, à la température T_∞ , selon la loi $\varphi = h(\theta)(T - T_\infty)$.

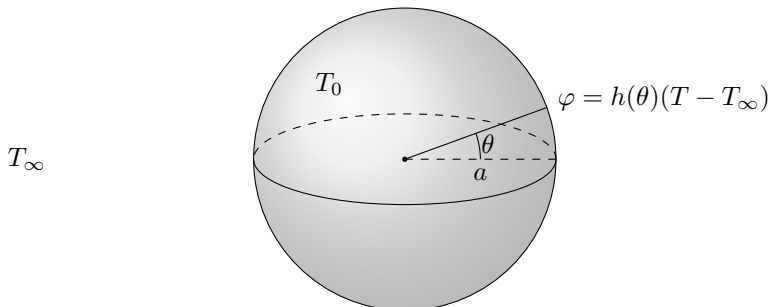


Figure 1: Schéma du Thermocouple

On cherche alors à étudier la réponse de ce thermocouple au cours du temps. Pour cela, on s'impose l'utilisation de la méthode des différences finies

1.2 Interprétation des coefficients

La fonction $h(\theta)$ décrit la dépendance de la convection avec l'angle θ entre la normale à la surface de la sphère et la direction de l'échange thermique. Plus précisément, la quantité de chaleur échangée par convection entre la sphère et le milieu extérieur est proportionnelle à la différence de température entre la sphère et le milieu extérieur, multipliée par $h(\theta)$.

La forme de la fonction $h(\theta) = K(1 + \cos(\theta))$ indique que l'échange de chaleur par convection est maximale lorsque la normale à la surface de la sphère est parallèle à la direction de l'échange thermique et dans le même sens que celui-ci, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0^\circ$. Dans ces cas, $h(\theta) = K(1 + 1) = 2K$. L'échange de chaleur par convection est minimale lorsque la normale à la surface de la sphère est dans le sens opposé à celui de l'échange thermique, c'est-à-dire lorsque $\theta = 180^\circ$. Dans ce cas, $h(\theta) = K(1 - 1) = 0$.

La constante K détermine l'intensité de l'échange de chaleur par convection pour un angle θ donné. Plus K est grand, plus l'échange de chaleur par convection est important. K est alors exprimé en $W.m^{-2}.K^{-1}$, tout comme $h(\theta)$.

1.3 Mise en équation du problème

Ce problème revient alors à résoudre l'équation de la chaleur en 3 dimensions et au cours du temps. De manière générale, l'équation de la chaleur s'écrit de la manière suivante.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + s \quad (1)$$

Dans notre cas, cette équation peut être simplifiée. On a premièrement $u = 0$ car la sphère n'est pas en mouvement. De plus, λ est constant, on a donc par linéarité du gradient $\nabla(\lambda \nabla T) = \lambda \nabla^2 T$. Enfin, le thermocouple n'étant traversé par aucun courant électrique, aucune chaleur n'est produite et le terme de source s est nul.

L'équation de la chaleur devient alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad (2)$$

On peut aussi écrire une condition à la surface de la sphère, représentant un échange convectif :

$$\varphi = h(\theta)(T - T_\infty)$$

Avec $h(\theta)$ le coefficient de convection exprimé précédemment.

2 Choix du système de coordonnées et du maillage

2.1 Comparaison des systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques

2.1.1 Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnées cartésiennes a l'avantage d'utiliser un repère orthonormé. L'expression des opérateurs tels que le laplacien est donc simple et les équations sont alors simplifiées. Cependant, si le maillage n'est pas régulier selon les trois axes du système de coordonnées cartésiennes, l'expression du pas est alors plus complexe.

AJOUTER PETIT REPERE CARTESIEN

2.1.2 Coordonnées sphériques

Le problème décrivant une sphère, le seul système de coordonnées qui peut être intéressant à utiliser est le système de coordonnées sphériques. Ce système de coordonnées est aussi constitué de trois axes orthonormés: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$. On utilisera alors pour décrire la position d'un point un triplet de coordonnées (r, θ, φ) .

AJOUTER PETIT REPERE SPHERIQUE

Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques on utilise les équations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (3)$$

De la même manière, pour passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes on utilise les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

2.2 Réécriture des équations adaptée au nouveau système de coordonnées

L'équation de la chaleur Eq.(2) utilise l'opérateur laplacien ($\Delta = \nabla^2$). Cet opérateur s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (5)$$

En coordonnées sphérique, cet opérateur s'écrit alors :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (6)$$

L'équation de la chaleur Eq.(2) s'écrit alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) \quad (7)$$

Dans la suite du problème on utilisera la constante $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ afin de simplifier l'écriture de l'équation ci-dessus.

2.3 Maillage de la sphère

Une sphère peut être maillée de plusieurs manières dans un espace 3D, certains maillages favoriseront l'uniformité de la taille des mailles comme les maillages quadrangulaires ou en géode par triangulation tandis que d'autres faciliteront la résolution numérique du problème comme le maillage en sphère UV (maillage en faces rectangulaires, formé par des segments assimilables à des lignes de longitude et de latitude sur un globe).

AJOUTER PETIT SPHERE QUADRANGULAIRE, GEODE(ISO) et UV

On utilisera dans le cadre de notre simulation un maillage UV de la sphère, ce modèle se prêtant très bien au système de coordonnées sphérique. Cela simplifiera les calculs et l'implémentation des équations.

Les paramètres pour construire ce maillage seront alors **Nr**, **Ntheta**, **Nphi**, représentant respectivement le nombre de mailles dans la direction r , la direction θ , et la direction φ

On repèrera par le triplet (i, j, k) les coordonnées du nœud du maillage de la sphère.

3 Discrétisation du problème

La méthode utilisée ici est la méthode des différences finies. On choisi d'utiliser l'ordre 1 afin de simplifier les expressions des termes de l'équation de la chaleur, un ordre supérieur pourra être utilisé afin d'augmenter la précision et la stabilité si nécessaire.

3.1 Discrétisation de l'équation de la chaleur

On rapelle l'équation de la chaleur utilisée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (8)$$

Et donc en coordonées sphériques, en prenant en compte l'invariance du champ de température par rapport à φ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

On cherche à exprimer T^n en fonction uniquement de T^{n-1} On utilise alors un schéma arrière temporel. :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} \quad (10)$$

On discrétise ensuite avec un schéma centré les termes issus du laplacien de la température :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \rightarrow \frac{T_{i+1,j,k}^{n-1} - 2T_{i,j,k}^{n-1} + T_{i-1,j,k}^{n-1}}{\Delta r^2} \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow \frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1,j,k}^{n-1} - T_{i-1,j,k}^{n-1}}{\Delta r} \quad (12)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \rightarrow \frac{1}{r_i^2} \frac{T_{i,j+1,k}^{n-1} - 2T_{i,j,k}^{n-1} + T_{i,j-1,k}^{n-1}}{\Delta \theta^2} \quad (13)$$

$$\frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \rightarrow \frac{1}{r_i^2 \tan \theta_j} \frac{T_{i,j+1,k}^{n-1} - T_{i,j-1,k}^{n-1}}{2\Delta \theta} \quad (14)$$

On peut alors exprimer T^n :

$$T^n = \alpha \Delta t \left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n-1} - 2T_{i,j,k}^{n-1} + T_{i-1,j,k}^{n-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1,j,k}^{n-1} - T_{i-1,j,k}^{n-1}}{\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{T_{i,j+1,k}^{n-1} - 2T_{i,j,k}^{n-1} + T_{i,j-1,k}^{n-1}}{\Delta \theta^2} + \frac{1}{r_i^2 \tan \theta_j} \frac{T_{i,j+1,k}^{n-1} - T_{i,j-1,k}^{n-1}}{2\Delta \theta} \right) + T^{n-1} \quad (15)$$

3.2 Discrétisation des condition aux limites

On doit par la suite discrétiser notre condition à la surface de la sphère que l'on rappelle être :

$$\varphi = h(\theta)(T - T_\infty) \quad (16)$$

On a donc par la loi de Fourier :

$$h(\theta)(T(r = a) - T_\infty) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (17)$$

On a alors, par les discrétisation des dérivées partielles précédentes :

$$T_{i,j,k}^n = \left(h(\theta) + \frac{\lambda}{\Delta r} \right)^{-1} \cdot \left(h(\theta)T_\infty + \lambda \frac{T_{i-1,j,k}}{\Delta r} \right) \quad (18)$$

Les équations Eq.(15)et Eq.(18) nous permettront alors d'exprimer, en tout point de la sphère, la température en fonction des températures de la sphère l'instant précédent

4 Simulation Python

Pour implémenter une telle simulation, nous avons utilisé Python comme langage de programmation pour sa facilité et sa capacité à visualiser des données à l'aide de bibliothèques simples. La capacité à exécuter du code sans compiler nous a aussi permis d'itérer plus rapidement et de déboguer simplement le code.

4.1 Structure du code

Le code est composé de quelques fonctions simples et notre situation ne semblait pas demander d'introduire de la programmation orientée objet, car nous avons décidé de représenter les maillages et les simulations comme de simples tableaux `numpy`.

Ainsi, on commence d'abord par fixer nos constantes de la simulation comme les paramètres de maille, les constantes du matériau considéré, les températures (T_0 et T_∞), le facteur de convection, etc. . .

On construit ensuite le maillage de la sphère.

Enfin on itère la simulation en stockant chaque maillage de la simulation dans une liste.

Finalement, on affiche cette simulation et on enregistre une animation de celle-ci.

4.2 Implémentation du maillage

4.2.1 Maillage et simulation

explication du type mesh

explication de la liste de meshes qui est alors une simulation

4.2.2 Implémentation des maillages et des simulations

4.3 Implémentation des équations

4.4 Simulations

4.4.1 Choix des valeurs des paramètres

Choix des pas, des dimensions, de Δt , du temps de simulation

4.4.2 Test de l'influence de certains paramètres

4.4.3 Simulations

5 Conclusion

Conclure sur la méthode utilisé, l'implémentation, la convainance des résultats.

Finir sur ce que cela nous a appris, la facilitée d'implémenter vs la difficulté à discrétiser le problème et choisir la valeur des paramètres