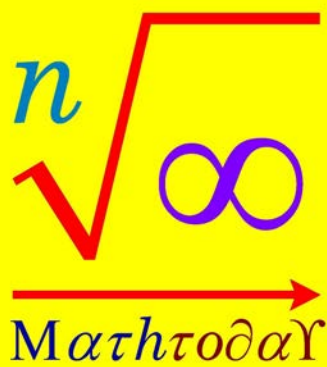


គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ



សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតគណិតវិទ្យាល័យ

វិធីសាស្ត្រគណិតវិទ្យា

- * សង្ខេបមេរៀននិងគន្លឹះដោះស្រាយសំខាន់ៗ
- * លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
- * លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់អិច្វីការផ្ទះ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិភពលោកថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

អ្នករៀនរៀន

និង ជំនួយ

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

ជំពូកទី០១

សង្ខេបមេរៀននិងរូបមន្តសំខាន់ៗក្នុងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១-ព្រីមីទីវ

១.១.និយមន័យ ៖

គេថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I កាលណាចំពោះគ្រប់ $x \in I$

គេបាន $F'(x) = f(x)$ ។

១.២.ទ្រឹស្តីបទ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I នោះចំពោះ

គ្រប់ $x \in I$ គេមាន $F(x) = G(x) + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

២-អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

២.១.និយមន័យ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $\int f(x).dx = F(x) + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

២.២.លក្ខណៈ

a) $\int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx$

b) $\int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$

c) $\int [f(x) - g(x)].dx = \int f(x).dx - \int g(x).dx$

៣-រូបមន្តសំខាន់ៗរាំងគេក្រាលមិនកំណត់

1. $\int k \cdot dx = kx + c$
2. $\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
6. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$
10. $\int e^x \cdot dx = e^x + c$
11. $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
12. $\int e^{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c$
13. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax+b} + c$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
16. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
21. $\int \cot x \cdot dx = \ln|\sin x| + c$
22. $\int \tan x \cdot dx = -\ln|\cos x| + c$
23. $\int \sin(ax) \cdot dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$
24. $\int \cos(ax) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) + c$

៤-រូបមន្តប្តូរអថេរ

សន្មតថាមានអាំងតេក្រាល ៖ $I = \int f[\phi(x)] \cdot \phi'(x) \cdot dx$

បើគេតាង $u = \phi(x)$ នាំអោយ $du = \phi'(x) \cdot dx$

គេបាន $I = \int f[\phi(x)] \cdot \phi'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du = F(u) + c$ ។

៥-រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

- | | |
|--|--|
| 1. $\int k \cdot du = ku + c$ | 8. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$ |
| 2. $\int u^n \cdot du = \frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} + c$ | 9. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + c$ |
| 3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$ | 10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 + a^2} \right + c$ |
| 4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$ | 11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$ |
| 5. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$ | 12. $\int \tan u \cdot du = -\ln \cos u + c$ |
| 6. $\int e^u \cdot du = e^u + c$ | 13. $\int \cot u \cdot du = \ln \sin u + c$ |
| 7. $\int \sin u \cdot du = -\cos u + c$ | 14. $\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{\ln a} + c$ |

៧-រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗគួរចងចាំ ៖

1. $\int k \cdot P'(x) \cdot dx = k \cdot P(x) + c$
2. $\int P^n(x) \cdot P'(x) \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot P^{n+1}(x) + c, n \neq -1$

$$3. \int \frac{P'(x)}{P(x)} \cdot dx = \ln|P(x)| + c$$

$$4. \int \frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}} \cdot dx = 2\sqrt{P(x)} + c$$

$$5. \int \frac{P'(x)}{P^2(x)} \cdot dx = -\frac{1}{P(x)} + c$$

$$6. \int e^{P(x)} \cdot P'(x) \cdot dx = e^{P(x)} + c$$

៨-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ពីរ $u = u(x)$ និង $v = v(x)$

គេមាន $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$ (រូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល)

គេបាន $\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$

ដូចនេះ $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$ (ហៅថារូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសផ្នែកអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

០១.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2x + 3)dx$

ខ. $\int (4x - 1)dx$

គ. $\int 3x^2 dx$

ឃ. $\int 4x^3 dx$

ង. $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$

ច. $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

ឆ. $\int x^2(4x + 3)dx$

ជ. $\int x(8x^2 - 9x + 2)dx$

ឈ. $\int (5x^2 - 3)^2 dx$

ញ. $\int x(2x + 3)^2 dx$

០២.គណនាអាំងតេក្រាល ៖

ក. $\int (\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})dx$

ខ. $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x})dx$

គ. $\int \frac{x+1}{x} dx$

ឃ. $\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x} dx$

ង. $\int \frac{4x^2 - 1}{x} dx$

ច. $\int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2} dx$

ឆ. $\int \frac{(2x+1)^2}{x} dx$

ជ. $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3} dx$

ឈ. $\int \frac{(x-2)^2}{x^3} dx$

ញ. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx$

០៣.គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\text{ខ.} \int \frac{dx}{x-3}$$

$$\text{គ.} \int \frac{4dx}{2x+3}$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{dx}{3x-1}$$

$$\text{ង.} \int \frac{dx}{5-2x}$$

$$\text{ច.} \int \frac{dx}{-x+2}$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$\text{ជ.} \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

$$\text{ញ.} \int \frac{6dx}{(3x-1)^2}$$

០៤.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$ ដែល $x \notin \{-1, 3\}$ ។

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)} dx$ ។

០៥.ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ និង $x \neq 2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ។

០៦.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} \right) dx$ ។

០៧.គេឲ្យ $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2(x-1)}$ ដែល $x \neq 0$ និង $x \neq 1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ និង $x \neq 1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

០៨.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x+1}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1} dx$ ។

០៩.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 3}{x-2}$ ដែល $x \neq 2$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x-2}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^2 - 5x - 3}{x-2} dx$ ។

១០.កំណត់ A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{2x-1} = Ax + B + \frac{C}{2x-1}$

គ្រប់ $x \neq \frac{1}{2}$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} dx$ ។

១១. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}$ ដែល $x \notin \{1, 3\}$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} \quad \text{គ្រប់ } x \neq 1 \text{ និង } x \neq 3 \text{ ។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} dx$ ។

១២. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2}$ ដែល $x \notin \{1, -2\}$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \quad \text{គ្រប់ } x \neq 1 \text{ និង } x \neq -2 \text{ ។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2} dx$ ។

១៣. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2}$ ដែល $x \neq 2$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = A + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \quad \text{គ្រប់ } x \neq 2 \text{ ។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2} dx$ ។

១៤. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2}$ ដែល $x \neq -1$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \text{គ្រប់ } x \neq -1 \text{ ។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2} dx$ ។

១៥. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ ដែល $x \neq 0, x \neq 1$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{គ្រប់ } x \neq 0, x \neq 1 \text{ ។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ ។

១៦. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$ ដែល $x \neq \pm 1$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \text{គ្រប់ } x \neq -1 \text{ និង } x \neq 1 \text{ ។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2} dx$ ។

១៧.ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$ ។

១៨.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2 \cos x - \sin x) dx$

ខ. $\int (\cos x + 3 \sin x) dx$

គ. $\int \sin 2x dx$

ឃ. $\int (3 - 2 \cos 2x) dx$

ង. $\int (1 - 4 \sin 2x) dx$

ច. $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

ឆ. $\int (\cos x - \sin x)^2 dx$

ជ. $\int 4 \sin^2 x dx$

ឈ. $\int (3 - 2 \cos^2 x) dx$

ញ. $\int (1 + 2 \sin x)^2 dx$

១៩.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2 \cos x - 1)^2 dx$

ខ. $\int \sin x \sin 3x dx$

គ. $\int \sin 2x \cos 4x dx$

ឃ. $\int \cos x \cos 5x dx$

ង. $\int \sin^3 x dx$

ច. $\int \cos^3 x dx$

ឆ. $\int (2 \sin^2 x - 3 \sin x) dx$

ជ. $\int (\cos x - 4 \cos^2 x) dx$

ឈ. $\int \sin^2 2x dx$

ញ. $\int \cos^2 3x dx$

២០.គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{1 + \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{ខ.} \int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{គ.} \int (\tan x + \cot x)^2 dx$$

$$\text{ឃ.} \int (\tan x - \cot x)^2 dx$$

$$\text{ង.} \int (1 + \sin x + \cos x)^2 dx$$

២១.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

$$\text{ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \text{ គ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \text{ ។}$$

២២.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

$$\text{ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \text{ គ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int (\cos^6 x + \sin^6 x) dx \text{ ។}$$

២៣.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = (\sin x + 3\cos x)^2$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

$$\text{ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } f(x) = 5 + 4\cos 2x + 3\sin 2x \text{ គ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int (\sin x + 3\cos x)^2 dx \text{ ។}$$

២៤.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = 2(2\sin x - 3\cos x)^2$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

$$\text{ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } f(x) = 13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x \text{ គ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int f(x) dx \text{ ។}$$

២៥. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = (1 + 2\sin x)^3$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $f(x) = 7 + 12\sin x - 6\cos 2x - 2\sin 3x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

២៦. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos x - 3\sin x)^2 dx$ ។

២៧. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int (e^x + e^{-x}) dx$

ខ. $\int (e^x - e^{-x}) dx$

គ. $\int (2e^{2x} - 3e^x + 1) dx$

ឃ. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

ង. $\int (e^x - 2e^{-x})^2 dx$

ច. $\int e^{-3x}(e^x + 1)^2 dx$

ឆ. $\int (1 + 2e^x)^2 dx$

ជ. $\int (e^x + 1)^3 dx$

ឈ. $\int (e^x - e^{-x})^3 dx$

ញ. $\int (1 + e^x + e^{-x})^2 dx$

២៨. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមតាមវិធីប្តូរអថេរ ៖

ក. $\int e^x(e^x + 2)^3 dx$

ខ. $\int (e^x - e^{-x})^4(e^x + e^{-x}) dx$

គ. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$

ឃ. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

ង. $\int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x}} dx$

ច. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} + 1} dx$

ឆ. $\int (2x - 1)e^{x^2 - x} dx$

ជ. $\int x^2 e^{x^3} dx$

ឈ. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

ញ. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

២៩. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1} + \frac{ce^x}{(e^x + 1)^2}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

៣០. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int \frac{2x dx}{x^2 + 4}$

ខ. $\int \frac{2x - 1}{(x^2 - x)^2} dx$

គ. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}} dx$

ឃ. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \sin x}}$

ង. $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x}$

ច. $\int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^2}$

ឆ. $\int \sin^4 x \cos x dx$

ជ. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

ឈ. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

ញ. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

៣១. គណនាអាំងតេក្រាល ៖

ក. $\int \frac{(x + 1) dx}{x^2 + 2x - 3}$

ខ. $\int \frac{(x - 2) dx}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

គ. $\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$

ឃ. $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^3} dx$

ង. $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 - \cos x + \sin x} dx$

ច. $\int \frac{2 \tan x + 3}{\cos^2 x} dx$

$$\text{ឆ.} \int \frac{1 - 4 \cot x}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{ជ.} \int \frac{3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx$$

$$\text{ញ.} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

៣២. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2 \cos^3 x - \sin 2x + 3}{\cos^2 x} dx$ ។

៣៣. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក.} I = \int \sin^4 x dx$$

$$\text{ខ.} I = \int (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$$

$$\text{គ.} I = \int \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x} dx$$

$$\text{ឃ.} I = \int \frac{\cos 2x + \cos 4x}{\cos 3x} dx$$

$$\text{ង.} I = \int \frac{\cos x - \cos 5x}{1 + 2 \cos 2x} dx$$

$$\text{ច.} I = \int \frac{\cos 5x - \cos 7x}{1 + 2 \cos 4x} dx$$

$$\text{ឆ.} I = \int \sin^2 x \cos 5x dx$$

$$\text{ជ.} I = \int \sin 3x \cos^2 2x dx$$

$$\text{ឈ.} I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$\text{ញ.} I = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$$

៣៤. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក.} I = \int (2x - 1)(x^2 - x + 1)^2 dx$$

$$\text{ខ.} I = \int x^2(x^3 + 4)^5 dx$$

$$\text{គ.} I = \int (x + 1)(x^2 + 2x - 3)^4 dx$$

$$\text{ឃ.} I = \int e^x(e^x + 2)^3 dx$$

$$\text{ង.} I = \int \sin^6 x \cos x dx$$

$$\text{ច.} I = \int \frac{\ln^4 x}{x} dx$$

$$\text{ឆ.} I = \int \frac{\sin x dx}{2 - \cos x}$$

$$\text{ជ.} I = \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin x}$$

$$\text{ឈ.} I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\text{ញ.} I = \int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x}$$

៣៥. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{2x dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{4 \sin^2 x dx}{\sqrt{2x + 1 - \sin 2x}}$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^3} dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{x^2 e^x dx}{1 + (x^2 - 2x + 2)e^x}$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{(\cos x - \sin x)e^x}{\sqrt{1 + e^x \cos x}} dx$$

៣៦. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{dx}{e^x + 2}$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x + 1}{x + e^{-x}} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2(x + 3)e^x}{(1 + x^3 e^x)^2} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x(2 \sin x + x \cos x)}{\sqrt{1 + x^2 \sin x}} dx$$

$$\text{ង. } I = \int (x - 1)e^{x^2 - 2x} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{\ln x dx}{1 - x + x \ln x}$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{(1 + x \sin(\ln x))^2} dx$$

៣៧.កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ គេបាន ៖

$$\frac{4x^2 - 5x + 3}{(x-1)(x^2 - x + 1)} = \frac{m}{x-1} + \frac{nx+p}{x^2 - x + 1} \text{ រួចគណនា } \int \frac{(4x^2 - 5x + 3)dx}{(x-1)(x^2 - x + 1)} \text{ ។}$$

៣៨.គេឲ្យ $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x-2)(x^2 + x + 1)}$ ដែល $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2 + x + 1}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

៣៩.គេឲ្យ $f(x) = \frac{11-5x}{(x+1)(x^2 - 3x + 4)}$ ដែល $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2 - 3x + 4}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

៤០.គេឲ្យ $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 8}{x^3 - 2x^2 + 4x}$ ដែល $x \in \mathbb{R}^*$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2 - 2x + 4}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

៤១.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 6}$ ។

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = \frac{A \cos x}{2 \sin x + 3} + \frac{B \cos x}{\sin x - 2} \text{ គ្រប់ចំនួនពិត } x \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 6} dx \text{ ។}$$

៤២.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក.} \int x e^x dx$$

$$\text{ខ.} \int x \sin x dx$$

$$\text{គ.} \int x \cos x dx$$

$$\text{ឃ.} \int \ln x dx$$

$$\text{ង.} \int x^2 \ln x dx$$

$$\text{ច.} \int (2x - 1)e^x dx$$

$$\text{ឆ.} \int (x + 1) \sin x dx$$

$$\text{ជ.} \int x^2 \cos x dx$$

$$\text{ឈ.} \int x^2 e^x dx$$

$$\text{ញ.} \int (\ln x)^2 dx$$

៤៣.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក.} \int x \tan^2 x dx$$

$$\text{ខ.} \int x \cot^2 x dx$$

$$\text{គ.} \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$\text{ង.} \int \frac{\sin 2x}{(2 - \cos x)^2} dx$$

$$\text{ច.} \int \frac{e^{2x} dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{x e^x dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{ជ.} \int \frac{\ln x dx}{x(1 + \ln x)^2}$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{2x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ញ.} \int \frac{x(x-1)(2x-1)}{(x^2 - x + 2)^2} dx$$

៤៤. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int x \cos^2 x \, dx$ និង $J = \int x \sin^2 x \, dx$

ក. គណនា $I + J$ និង $I - J$ ។

ខ. ទាញរក I និង J ។

៤៥. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int e^x \sin x \, dx$

ខ. $\int e^x \cos x \, dx$

គ. $\int x \sin^3 x \, dx$

ឃ. $\int x \cos^3 x \, dx$

ង. $\int \sin(\ln x) \, dx$

ច. $\int \cos(\ln x) \, dx$

ឆ. $\int x^3 (\ln x)^2 \, dx$

ជ. $\int (\ln x)^3 \, dx$

ឈ. $\int x e^x \sin x \, dx$

ញ. $\int x e^x \cos x \, dx$

៤៦. គេឲ្យអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int x^2 \cos^2 x \, dx, \quad J = \int x^2 \sin^2 x \, dx \quad \text{និង} \quad K = \int x^2 \cos 2x \, dx$$

ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា K ។

ខ. គណនា $I + J$ ។

គ. បង្ហាញថា $I - J = K$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល I និង J ។

៤៧.គេឲ្យអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int e^x \cos^2 x \, dx, \quad J = \int e^x \sin^2 x \, dx \quad \text{និង} \quad K = \int e^x \cos 2x \, dx$$

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា K ។

ខ.គណនា $I + J$ ។

គ.បង្ហាញថា $I - J = K$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល I និង J ។

៤៨.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$ និង $J = \int \frac{2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីបាន $\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាល J ។

៤៩.គេឲ្យអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{(x + 2)dx}{x(x^2 + x + 1)} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(2x + 1)(x + 2 \ln x)}{(x^2 + x + 1)^2} dx$$

ក.ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{x + 2}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាល J ។

៥០.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ និង $J = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$ ។

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរស្រាយថា $J = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}I$ ។

ខ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$ គ្រប់ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

គ.គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរក J ។

៥១.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int x \sin x \cos^2 x \, dx$

ខ. $\int x \cos x \sin^2 x \, dx$

គ. $\int \frac{x^2 \ln x}{(x^3 + 1)^2} \, dx$

ឃ. $\int \frac{(x-1)e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \, dx$

ង. $\int \frac{2xe^x \, dx}{(e^x + 1)^3}$

ច. $\int \frac{x \cos x}{\sin^4 x} \, dx$

ឆ. $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx$

ជ. $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$

ឈ. $\int \frac{x^2 \tan x}{\cos^2 x} \, dx$

ញ. $\int x \tan^4 x \, dx$

៥២.គេឲ្យអាំងតេក្រាល

$$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x} \, dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{\cos 2x \, dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

ក.ស្រាយថា $I - J = \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ។

៥៣.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)^2}$ និង $J = \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \cos x)^3}$ ។

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកស្រាយថា $J = \frac{\cos x}{(2 + \cos x)^2} + I$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរក J ។

៥៤.គណនា $I = \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx$ ។

៥៥.គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int \frac{4 \sin x dx}{2 + \cos x}, J = \int \frac{\sin 2x dx}{2 + \cos x} \quad \text{និង} \quad K = \int \frac{\sin x \cos 2x}{(2 + \cos x)^2} dx$$

ក.បង្ហាញថា $I + J = 2 \int \sin x dx$ រួចគណនា $I + J$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកគណនា K ។

៥៦.គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x + \sin x} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx$$

ក.គណនា $I + J$ និង $I - J$ រួចទាញរក I និង J ។

ខ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនា ៖

$$K = \int \frac{(x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx$$

$$L = \int \frac{(x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx$$

៥៧. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2\cos x dx}{1 + \sin x}$ និង $J = \int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin x}$

ក. គណនា $I + J$, I រួចទាញរក J ។

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា ៖

$$K = \int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \sin x)^2} \text{ និង } L = \int \frac{\cos x \cos 2x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

៥៨. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 + 1)^3} dx$ ។

ចូរគណនា I ដោយតាង $u = x^3 - 3x$ និង $dv = \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3}$ ។

៥៩. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(x^2 + 2x)(1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} dx$ ។

ក. ដោយតាង $u = x^2 + 2x$ និង $dv = \frac{1 - e^{-x}}{(x + e^{-x})^2} dx$ និងប្រើអាំងតេក្រាល

$$\text{តាមផ្នែកចូរស្រាយថា } I = -\frac{x^2 + 2x}{x + e^{-x}} + 2 \int \frac{(x + 1)e^x}{1 + xe^x} dx \text{ ។}$$

ខ. គេយក $t = 1 + xe^x$ គណនា $\frac{dt}{dx}$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃអាំងតេក្រាល I ។

៦០.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $I = \int x^n (\ln x)^2 dx$, $n \in \mathbb{N}$ ។

៦១.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2} \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right) dx$$

៦២.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{\ln x dx}{(x+2)^2} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{\cos x \sin x}{(2 - \sin x)^2} dx$$

៦៣.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(2x-3)\ln x}{(x^2-3x+2)^2} dx$ ។

៦៤.គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(x+4)(3x^2+2x+1)}{x(x^2+x+1)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូគណនា J ។

៦៥.គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(x+4)(3x^2+4x+2)}{x(x^2+2x+2)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

៦៥.គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{x-2}{x(x^2-x+1)} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(x-2\ln x)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{x-2}{x(x^2-x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

៦៦.គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2+x-2)} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(2x+1)\ln x}{(x^2+x-2)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{x(x^2+x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

៦៧.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x(x+1)}$ និង $J = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ ។

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែក។

៦៨.ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{a \sin x}{1 - \cos x} + \frac{b \sin x}{1 + \cos x} \quad \text{គ្រប់ } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{។}$$

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា $J = \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ ។

៦៩.ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} \quad \text{គ្រប់ } x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{។}$$

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\cos x}$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា $J = \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$ ។

៧០.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x + 2}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{x^2 - x + 2}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា

$$J = \int \frac{(2x^3 + 9x)(2x - 1)}{(x^2 - x + 2)^2} dx \quad \text{។}$$

៧១.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x^2 - 2x + 1}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{2x^2 - 2x + 1}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

គ.ប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរទាញរក $J = \int \frac{(x-1)^3(2x-1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} dx$ ។

៧២.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ

ក.ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3 + C}{1+x^4}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

គ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{4x^3 \ln x \cdot dx}{(1+x^4)^2}$ ។

៧៣.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត។

ក.ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = A + \frac{Be^{2x}}{e^{2x} + 1}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

គ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{2xe^{2x}dx}{(e^{2x}+1)^2}$ ។

៧៤.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x \cot x}{\sin^3 x} dx$ និង $J = \int \frac{x \tan x}{\cos^3 x} dx$ ។

៧៥.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{xe^x dx}{(e^x+1)^2}$ និង $J = \int \frac{\ln(1+x^4)}{x^4} dx$

៧៦.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \sqrt{\sin 2x} \cos x dx \text{ និង } J = \int \ln(x^4 + 1) dx$$

៧៧.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \ln(x^4 - x^2 + 1) dx \text{ និង } J = \int \frac{(\cos 2x + 2 \sin 2x) \ln(\cos x)}{(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x)^2} dx$$

៧៨.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x \cot x} dx$ ។

៧៩.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \sqrt{\tan x} dx$ និង $J = \int \sqrt{\cos x} dx$

គណនា $I + J$ និង $I - J$ រួចទាញរក I និង J ។

៨០.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^3 e^{-x} dx}{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)^2}$ ។

WWW.MATHTODAY.WORDPRESS.COM

ជំពូកទី០៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2x + 3)dx$

ខ. $\int (4x - 1)dx$

គ. $\int 3x^2 dx$

ឃ. $\int 4x^3 dx$

ង. $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$

ច. $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

ឆ. $\int x^2(4x + 3)dx$

ជ. $\int x(8x^2 - 9x + 2)dx$

ឈ. $\int (5x^2 - 3)^2 dx$

ញ. $\int x(2x + 3)^2 dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (2x + 3)dx = \int 2x dx + \int 3dx = x^2 + 3x + C$

ខ. $\int (4x - 1)dx = \int 4x dx - \int dx = 2x^2 - x + C$

គ. $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + C = x^3 + C$

$$\text{ឃ.} \int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx = 4 \left(\frac{1}{4} x^4 \right) + C = x^4 + C$$

$$\text{ង.} \int (3x^2 + 2x + 1) dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int dx = x^3 + x^2 + x + C$$

$$\text{ច.} \int (x^2 - 2x + 5) dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 5x + C$$

$$\text{ឆ.} \int x^2(4x + 3) dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx = x^4 + x^3 + C$$

$$\text{ជ.} \int x(8x^2 - 9x + 2) dx = \int 8x^3 dx - \int 9x^2 dx + \int 2x dx = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + C$$

$$\text{ឈ.} \int (5x^2 - 3)^2 dx = \int (25x^4 - 30x^2 + 9) dx = 5x^5 - 10x^3 + 9x + C$$

$$\text{ញ.} \int x(2x + 3)^2 dx = \int (4x^3 + 12x^2 + 9x) dx = x^4 + 4x^3 + \frac{9}{2} x^2 + c$$

លំហាត់ទី០២

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$\text{ខ.} \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$\text{គ.} \int \frac{x+1}{x} dx$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x} dx$$

$$\text{ង.} \int \frac{4x^2 - 1}{x} dx$$

$$\text{ច.} \int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2} dx$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{(2x+1)^2}{x} dx$$

$$\text{ជ.} \int \frac{x^2 - x + 2}{x^3} dx$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{(x-2)^2}{x^3} dx$$

$$\text{ញ.} \int \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2} = \ln |x| + \frac{2}{x} + C$$

$$\text{ខ.} \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 2 \int \frac{dx}{x} = 2\sqrt{x} - 2\ln |x| + C$$

$$\text{គ.} \int \frac{x+1}{x} dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} = x + \ln |x| + C$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x} dx = 2 \int x dx + 3 \int dx + \int \frac{dx}{x} = x^2 + 3x + \ln |x| + C$$

$$\text{ង.} \int \frac{4x^2 - 1}{x} dx = 4 \int x dx - \int \frac{dx}{x} = 2x^2 - \ln |x| + C$$

$$\text{ច.} \int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2} dx = 2 \int \frac{dx}{x} - 3 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = 2x - 3\ln |x| + \frac{1}{x} + C$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{(2x+1)^2}{x} dx = \int 4x dx + \int 4 dx + \int \frac{dx}{x} = 2x^2 + 4x + \ln |x| + C$$

$$\text{ជ.} \int \frac{x^2 - x + 2}{x^3} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int x^{-3} dx = \ln |x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{(x-2)^2}{x^3} dx = \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2} + 4 \int x^{-3} dx = \ln |x| + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + C$$

$$\text{ញ.} \int \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx = 3 \int \sqrt{x} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2\sqrt{x} + C$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី០៣

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\text{ខ.} \int \frac{dx}{x-3}$$

$$\text{គ.} \int \frac{4dx}{2x+3}$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{dx}{3x-1}$$

$$\text{ង.} \int \frac{dx}{5-2x}$$

$$\text{ច.} \int \frac{dx}{-x+2}$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$\text{ជ.} \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

$$\text{ញ.} \int \frac{6dx}{(3x-1)^2}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx = \ln |x+1| + C$$

$$\text{ខ.} \int \frac{dx}{x-3} = \int \frac{(x-3)'}{(x-3)} dx = \ln |x-3| + C$$

$$\text{គ.} \int \frac{4dx}{2x+3} = 2 \int \frac{(2x+3)'}{(2x+3)} dx = 2 \ln |2x+3| + C$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \int \frac{(3x-1)'}{(3x-1)} dx = \frac{1}{3} \ln |3x-1| + C$$

$$ង. \int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2x-5)'}{(2x-5)} dx = -\frac{1}{2} \ln |2x-5| + C$$

$$ច. \int \frac{dx}{-x+2} = -\int \frac{(x-2)'}{(x-2)} dx = -\ln |x-2| + C$$

$$ឆ. \int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\int \frac{(x+2)'}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} + C$$

$$ជ. \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\int \frac{(x-3)'}{(x-3)^2} dx = -\frac{1}{x-3} + C$$

$$ឈ. \int \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} dx = -\frac{1}{2(2x+1)} + C$$

$$ញ. \int \frac{6dx}{(3x-1)^2} = 2 \int \frac{(3x-1)'}{(3x-1)^2} dx = -\frac{2}{3x-1} + C$$

លំហាត់ទី០៤

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$ ដែល $x \notin \{-1, 3\}$ ។

ក. កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ៖

គេមាន $f(x) = \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$ (1) និង $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ (2)

ជំនួស (1) & (2) គេបាន $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$

តម្រូវកាត់បែងរួចលុបចោលគេបាន $A(x-3) + B(x+1) = 3x-5$

សមមូល $(A+B)x + (-3A+B) = 3x-5$

គេទាញ $\begin{cases} A+B=3 \\ -3A+B=-5 \end{cases}$ នោះគេបាន $A=2, B=1$ ។

ដូចនេះ $A=2, B=1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)} dx$

ចំពោះ $A=2, B=1$ គេបាន $\frac{3x-5}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3}$

នោះ $I = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3} \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-3}$

ដូចនេះ $I = 2 \ln |x+1| + \ln |x-3| + C$ ។

លំហាត់ទី០៥

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ និង $x \neq 2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B

គេមាន $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ និង $x \neq 2$ ។

តម្រូវភាគបែងរួមរួចលុបចោលគេបាន $1 = A(x-2) + B(x-1)$

សមមូល $1 = (A+B)x + (-2A-B)$ នោះគេទាញ $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $A = -1$, $B = 1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

ចំពោះ $A = -1$, $B = 1$ គេមាន $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

គេបាន $I = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1}$

ដូចនេះ $I = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$ ។

លំហាត់ទី០៦

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} \right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} \right) dx$

យើងបាន
$$I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{x-1}$$

ដូចនេះ $I = \ln |x| - 2 \ln |x+1| + 3 \ln |x-1| + C$ ។

លំហាត់ទី០៧

គេឲ្យ $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2(x-1)}$ ដែល $x \neq 0$ និង $x \neq 1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C

ដើម្បីឲ្យបាន
$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ និង $x \neq 1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C

យើងបាន
$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2(x-1)}$$

សមមូល $Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = 4x^2 - 3x + 2$

ដោយសមភាពចុងក្រោយនេះពិតជានិច្ចគ្រប់ x នោះយើងអាចជ្រើសរើសយក

តម្លៃពិសេសនៃ x មួយចំនួនដូចតទៅ៖

.ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $-B = 2$ នោះ $B = -2$

.ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $C = 4 - 3 + 2 = 3$

.ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $2A + B + 4C = 16 - 6 + 2 = 12$

ដោយ $B = -2$, $C = 3$ នោះ $2A - 2 + 12 = 12$ នោះ $A = 1$ ។

ដូចនេះ $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ៖

ចំពោះ $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$ គេបាន $\frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1}$

$$\begin{aligned} I &= \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2} + 3 \int \frac{dx}{x-1} = \ln |x| + \frac{2}{x} + 3 \ln |x-1| + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \ln |x| + \frac{2}{x} + 3 \ln |x-1| + C$ ។

លំហាត់ទី០៨

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x+1}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1} = \frac{(x+1)(2x-7) + 11}{x+1} = 2x - 7 + \frac{11}{x+1}$$

ដោយ $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x+1}$ នោះគេទាញបាន $A = 2$, $B = -7$, $C = 11$ ។

ដូចនេះ $A = 2$, $B = -7$, $C = 11$ ។

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1} dx$$

$$\text{តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន } \frac{2x^2 - 5x + 4}{x+1} = 2x - 7 + \frac{11}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } I &= \int \left(2x - 7 + \frac{11}{x+1} \right) dx = \int 2x dx - \int 7 dx + 11 \int \frac{dx}{x+1} \\ &= 2 \int x dx - 7 \int dx + 11 \int \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = x^2 - 7x + 11 \ln |x+1| + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី០៩

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 3}{x-2}$ ដែល $x \neq 2$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x-2}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^2 - 5x - 3}{x - 2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x - 2}$

យើងមាន $f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 3}{x - 2} = \frac{(x - 2)(4x + 3) + 3}{x - 2} = 4x + 3 + \frac{3}{x - 2}$

ដោយ $f(x) = Ax + B + \frac{C}{x - 2}$ នោះគេទាញ $A = 4$, $B = 3$, $C = 3$ ។

ដូចនេះ $A = 4$, $B = 3$, $C = 3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^2 - 5x - 3}{x - 2} dx$

គេមាន $\frac{4x^2 - 5x - 3}{x - 2} = 4x + 3 + \frac{3}{x - 2}$

គេបាន $I = \int \left(4x + 3 + \frac{3}{x - 2} \right) dx = 4 \int x dx + 3 \int dx + 3 \int \frac{dx}{x - 2}$

ដូចនេះ $I = 2x^2 + 3x + 3 \ln |x - 2| + C$ ។

លំហាត់ទី១០

កំណត់ A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} = Ax + B + \frac{C}{2x - 1}$ គ្រប់ $x \neq \frac{1}{2}$

រួចទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ A, B និង C

គេមាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} = Ax + B + \frac{C}{2x - 1}$ គ្រប់ $x \neq \frac{1}{2}$

ដោយ $\frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} = x - 1 + \frac{1}{2x - 1}$ នោះគេទាញ $A = 1, B = -1, C = 1$

ដូចនេះ $A = 1, B = -1, C = 1$ ។

ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} dx$

យើងមាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{2x - 1} = x - 1 + \frac{1}{2x - 1}$

យើងបាន $I = \int (x - 1 + \frac{1}{2x - 1}) dx = \int x dx - \int dx + \int \frac{dx}{2x - 1}$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln|2x - 1| + C$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}$ ដែល $x \notin \{1, 3\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 3}$

គ្រប់ $x \neq 1$ និង $x \neq 3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3}$

យើងបាន $A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}$

តម្រូវកាត់បែងរួម $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ រួចលុបចោលគេបាន៖

$$A(x^2 - 4x + 3) + B(x-3) + C(x-1) = x^2 + x - 6$$

ដោយសមភាពចុងក្រោយនេះពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ x នោះយើងអាចជ្រើសរើសយក

តម្លៃពិសេសនៃ x មួយចំនួនដូចតទៅ៖

.ចំពោះ $x=1$ គេបាន $-2B = -4$ នោះ $B=2$

.ចំពោះ $x=3$ គេបាន $2C = 6$ នោះ $C=3$ ។

.ចំពោះ $x=0$ គេបាន $3A - 3B - C = -6$ ដោយ $B=2, C=3$

គេបាន $3A - 6 - 3 = -6$ នោះ $A=1$ ។

ដូចនេះ $A=1, B=2, C=3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} dx$

ចំពោះ $A=1, B=2, C=3$ គេមាន $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-3}$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } I &= \int \left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-3} \right) dx = \int dx + 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x-3} \\ &= x + 2 \int \frac{(x-1)'}{x-1} dx + 3 \int \frac{(x-3)'}{x-3} dx\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = x + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-3| + C \quad \forall$$

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2}$ ដែល $x \notin \{1, -2\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

គ្រប់ $x \neq 1$ និង $x \neq -2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$$\text{យើងបាន } A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{សមមូល } A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1) = 2x^2 + 6x - 5$$

.ចំពោះ $x=1$ គេបាន $3B=3$ នោះ $B=1$ ។

.ចំពោះ $x=-2$ គេបាន $-3C=-9$ នោះ $C=3$

.ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $-2A + 2B - C = -5$

នោះគេទាញបាន $A = \frac{2B - C + 5}{2} = \frac{2 - 3 + 5}{2} = 2$ ។

ដូចនេះ $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2} dx$

ចំពោះ $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$ គេមាន $\frac{2x^2 + 6x - 5}{x^2 + x - 2} = 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int \left(2 + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} \right) dx \\ &= 2 \int dx + \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+2} \\ &= 2x + \ln |x-1| + 3 \ln |x+2| + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = 2x + \ln |x-1| + 3 \ln |x+2| + C$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2}$ ដែល $x \neq 2$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

គ្រប់ $x \neq 2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

$$\text{យើងបាន } A + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2}$$

$$\text{សមមូល } A(x-2)^2 + B(x-2) + C = x^2 - 6x + 5$$

$$\text{.ចំពោះ } x=2 \text{ គេបាន } C = 4 - 12 + 5 = -3$$

$$\text{.ចំពោះ } x=0 \text{ គេបាន } 4A - 2B - 3 = 5 \text{ ឬ } 2A - B = 4$$

$$\text{.ចំពោះ } x=1 \text{ គេបាន } A - B - 3 = 0 \text{ ឬ } A - B = 3$$

$$\text{គេបានប្រព័ន្ធ } \begin{cases} 2A - B = 4 \\ A - B = 3 \end{cases} \text{ នោះ } A=1, B=-2 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } A=1, B=-2, C=-3 \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2} dx$$

$$\text{ចំពោះ } A=1, B=-2, C=-3 \text{ គេបាន } \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2} = 1 - \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2}$$

$$I = \int \left(1 - \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx = \int dx - 2 \int \frac{d}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = x - 2 \ln |x-2| + \frac{3}{x-2} + C \text{ ។}$$

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2}$ ដែល $x \neq -1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

គ្រប់ $x \neq -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

យើងបាន $A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2}$

សមមូល $A(x+1)^2 + B(x+1) + C = 2x^2 + 7x + 1$

.ចំពោះ $x = -1$ គេបាន $C = 2 - 7 + 1 = -4$

.ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $A + B - 4 = 1$ ឬ $A + B = 5$

.ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $4A + 2B - 4 = 10$ ឬ $2A + B = 7$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} A + B = 5 \\ 2A + B = 7 \end{cases}$ សមមូល $A = 2, B = 3$ ។

ដូចនេះ $A = 2, B = 3, C = -4$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2} dx$

បើ $A = 2, B = 3, C = -4$ នោះ $\frac{2x^2 + 7x + 1}{(x+1)^2} = 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2}$

គេបាន $I = 2\int dx + 3\int \frac{dx}{x+1} - 4\int \frac{dx}{(x+1)^2}$

ដូចនេះ $I = 2x + 3\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + C$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ ដែល $x \neq 0, x \neq 1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{គ្រប់ } x \neq 0, x \neq 1 \text{ ។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C

យើងបាន $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

សមមូល $A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = 3x^2 - x + 1$

.ចំពោះ $x=0$ គេបាន $A=1$ ។

.ចំពោះ $x=1$ គេបាន $C=3$ ។

.ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $A + 2B + 2C = 11$ នោះ $B = \frac{11-1-6}{2} = 2$ ។

ដូចនេះ $A = 1, B = 2, C = 3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

ចំពោះ $A = 1, B = 2, C = 3$ នោះ $\frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$

យើងបាន $I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} \right) = \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2}$

ដូចនេះ $I = \ln |x| + 2 \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + C$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$ ដែល $x \neq \pm 1$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ គ្រប់ $x \neq -1$ និង $x \neq 1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ៖

យើងបាន $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$

សមមូល $A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1) = 5x^2 + x + 2$

.ចំពោះ $x = -1$ គេបាន $-2C = 6$ នោះ $C = -3$ ។

.ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $4A = 8$ នោះ $A = 2$ ។

.ចំពោះ $x = 0$ នោះ $A - B - C = 2$ គេទាញ $B = A - C - 2 = 3$ ។

ដូចនេះ $A = 2, B = 3, C = -3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2} dx$

បើ $A = 2, B = 3, C = -3$ នោះ $\frac{5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$

គេបាន $I = 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+1} - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2}$

ដូចនេះ $I = 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+1| + \frac{3}{x+1} + C$ ។

លំហាត់ទី១៧

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីម៉ូឌុលីត A, B និង C ៖

$$\frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

សមមូល $6x^2 - 7x - 1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$

.ចំពោះ $x = -1$ គេបាន $12 = 6B$ នោះ $B = 2$ ។

.ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $-2 = -2A$ នោះ $A = 1$ ។

.ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $24 - 14 - 1 = 3C$ នោះ $C = 3$ ។

ដូចនេះ $A = 1, B = 2, C = 3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A = 1, B = 2, C = 3$ គេបាន ៖

$$\frac{6x^2 - 7x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \quad \text{។}$$

យើងបាន $I = \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{x-2}$

ដូចនេះ $I = \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C$ ។

លំហាត់ទី១៨

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក.} \int (2 \cos x - \sin x) dx$$

$$\text{ខ.} \int (\cos x + 3 \sin x) dx$$

$$\text{គ.} \int \sin 2x dx$$

$$\text{ឃ.} \int (3 - 2 \cos 2x) dx$$

$$\text{ង.} \int (1 - 4 \sin 2x) dx$$

$$\text{ច.} \int (\sin x + \cos x)^2 dx$$

$$\text{ឆ.} \int (\cos x - \sin x)^2 dx$$

$$\text{ជ.} \int 4 \sin^2 x dx$$

$$\text{ឈ.} \int (3 - 2 \cos^2 x) dx$$

$$\text{ញ.} \int (1 + 2 \sin x)^2 dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក.} \int (2 \cos x - \sin x) dx = 2 \int \cos x dx - \int \sin x dx = 2 \sin x + \cos x + C$$

$$\text{ខ.} \int (\cos x + 3 \sin x) dx = \int \cos x dx + 3 \int \sin x dx = \sin x - 3 \cos x + C$$

$$\text{គ.} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$\text{ឃ.} \int (3 - 2 \cos 2x) dx = 3x - \sin 2x + C$$

$$\text{ង.} \int (1 - 4 \sin 2x) dx = x + 2 \cos 2x + C$$

$$\begin{aligned} \text{ច.} \int (\sin x + \cos x)^2 dx &= \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$\text{ឆ.} \int (\cos x - \sin x)^2 dx = \int (\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int (1 - \sin 2x) dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$\text{ជ.} \int 4 \sin^2 x dx = 2 \int (1 - \cos 2x) dx = 2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$\text{ឈ.} \int (3 - 2 \cos^2 x) dx = \int (2 - \cos 2x) dx = 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\begin{aligned} \text{ញ.} \int (1 + 2 \sin x)^2 dx &= \int (1 + 4 \sin x + 4 \sin^2 x) dx = \int (3 + 4 \sin x - 2 \cos 2x) dx \\ &= 3x - 4 \cos x - \sin 2x + C \quad \text{។} \end{aligned}$$

លំហាត់ទី១៩

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក.} \int (2 \cos x - 1)^2 dx$$

$$\text{ខ.} \int \sin x \sin 3x dx$$

$$\text{គ.} \int \sin 2x \cos 4x dx$$

$$\text{ឃ.} \int \cos x \cos 5x dx$$

$$\text{ង.} \int \sin^3 x dx$$

$$\text{ប.} \int \cos^3 x dx$$

$$\text{ឆ.} \int (2 \sin^2 x - 3 \sin x) dx$$

$$\text{ជ.} \int (\cos x - 4 \cos^2 x) dx$$

$$\text{ឈ.} \int \sin^2 2x dx$$

$$\text{ញ.} \int \cos^2 3x dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} \text{ក.} \int (2 \cos x - 1)^2 dx &= \int (4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1) dx \quad \text{ដោយ } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \int (2 \cos 2x - 4 \cos x + 3) dx \\ &= \sin 2x - 4 \sin x + 3x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ខ. \int \sin x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} គ. \int \sin 2x \cos 4x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 6x - \sin 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \cos 6x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ឃ. \int \cos x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 6x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ង. \int \sin^3 x dx &= \frac{1}{4} \int (3 \sin x - \sin 3x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-3 \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ឈ. \int \cos^3 x dx &= \frac{1}{4} \int (3 \cos x + \cos 3x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ឍ. \int (2 \sin^2 x - 3 \sin x) dx &= \int (1 - \cos 2x - 3 \sin x) dx \\ &= x - \frac{1}{2} \sin 2x + 3 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ជ. \int (\cos x - 4 \cos^2 x) dx &= \int (\cos x - 2 \cos 2x - 2) dx \\ &= \sin x - \sin 2x - 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ឈ.} \int \sin^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ញ.} \int \cos^2 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 6x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C\end{aligned}$$

លំហាត់ទី២០

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{1 + \sin^3 x}{\sin^2 x} \, dx$$

$$\text{ខ.} \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$\text{គ.} \int (\tan x + \cot x)^2 \, dx$$

$$\text{ឃ.} \int (\tan x - \cot x)^2 \, dx$$

$$\text{ង.} \int (1 + \sin x + \cos x)^2 \, dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{1 + \sin^3 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \sin x \right) \, dx = -\cot x - \cos x + C$$

$$\text{ខ.} \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \, dx = 2 \sin x - \tan x + C$$

$$\begin{aligned}\text{គ. } \int (\tan x + \cot x)^2 dx &= \int (\tan^2 x + 2 \tan x \cot x + \cot^2 x) dx \\ &= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ឃ. } \int (\tan x - \cot x)^2 dx &= \int (\tan^2 x - 2 \tan x \cot x + \cot^2 x) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 4 \right) dx \\ &= \tan x - \cot x - 4x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ង. } \int (1 + \sin x + \cos x)^2 dx \\ &= \int (1 + \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \cos x + 2 \sin x \cos x) dx \\ &= \int (2 + 2 \sin x + 2 \cos x + \sin 2x) dx \\ &= 2x - 2 \cos x + 2 \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + C\end{aligned}$$

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

យើងមាន $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$

យើងបាន $f(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
 $= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$
 $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ ពិត

ដូចនេះ $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos^4 x + \sin^4 x)dx$

ដោយ $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

យើងបាន $I = \int \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)dx = \frac{3x}{4} + \frac{1}{16}\sin 4x + C$

ដូចនេះ $I = \frac{3x}{4} + \frac{1}{16}\sin 4x + C$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos^6 x + \sin^6 x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

យើងមាន $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

តាម $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ឬ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

យក $a = \sin^2 x$ និង $b = \cos^2 x$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \quad \text{ដោយ } \sin 2x = 2\sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \quad \checkmark$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \quad \checkmark$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos^6 x + \sin^6 x)dx$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

$$\text{យើងបាន } I = \int \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \right) dx = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x + C \quad \checkmark$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x + C \quad \checkmark$$

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = (\sin x + 3\cos x)^2$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = 5 + 4\cos 2x + 3\sin 2x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\sin x + 3\cos x)^2 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = 5 + 4\cos 2x + 3\sin 2x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

យើងមាន $f(x) = (\sin x + 3\cos x)^2$

$$= \sin^2 x + 6\sin x \cos x + 9\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin 2x + 4(1 + \cos 2x)$$

ដូចនេះ $f(x) = 5 + 4\cos 2x + 3\sin 2x$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\sin x + 3\cos x)^2 dx$

ដោយ $(\sin x + 3\cos x)^2 = 5 + 4\cos 2x + 3\sin 2x$ (សម្រាយខាងលើ)

យើងបាន $I = \int (5 + 4\cos 2x + 3\sin 2x) dx$

ដូចនេះ $I = 5x + 2\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x + C$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = 2(2\sin x - 3\cos x)^2$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = 13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = 13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{យើងមាន } f(x) &= 2(2\sin x - 3\cos x)^2 \\ &= 2(4\sin^2 x - 12\sin x \cos x + 9\cos^2 x) \\ &= 2\left[4(\sin^2 x + \cos^2 x) - 6\sin 2x + 5\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)\right] \\ &= 8 - 12\sin 2x + 5 + 5\cos 2x = 13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x) = 13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$

ដោយ $f(x) = 13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x$ (សម្រាយខាងលើ)

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } I &= \int (13 - 12\sin 2x + 5\cos 2x) dx \\ &= 13 \int dx - 12 \int \sin 2x dx + 5 \int \cos 2x dx\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = 13x + 6\cos 2x + \frac{5}{2}\sin 2x + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = (1 + 2\sin x)^3$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $f(x) = 7 + 12\sin x - 6\cos 2x - 2\sin 3x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $f(x) = 7 + 12\sin x - 6\cos 2x - 2\sin 3x$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

យើងមាន $f(x) = (1 + 2\sin x)^3 = 1 + 6\sin x + 12\sin^2 x + 8\sin^3 x$

ដោយ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ និង $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

គេបាន $f(x) = 1 + 6\sin x + 6 - 6\cos 2x + 6\sin x - 2\sin 3x$

ដូចនេះ $f(x) = 7 + 12\sin x - 6\cos 2x - 2\sin 3x$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$

សម្រាយខាងលើគេមាន $f(x) = 7 + 12\sin x - 6\cos 2x - 2\sin 3x$

យើងបាន $I = \int (7 + 12\sin x - 6\cos 2x - 2\sin 3x) dx$

$$= 7 \int dx + 12 \int \sin x dx - 6 \int \cos 2x dx - 2 \int \sin 3x dx$$

ដូចនេះ $I = 7x - 12\cos x - 3\sin 2x + \frac{2}{3}\cos 3x + C$

លំហាត់ទី២៦

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos x - 3\sin x)^2 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\cos x - 3 \sin x)^2 dx$

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } (\cos x - 3 \sin x)^2 &= \cos^2 x - 6 \cos x \sin x + 9 \sin^2 x \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x) - 3(2 \sin x \cos x) + 4(1 - \cos 2x) \\ &= 5 - 3 \sin 2x - 4 \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } I &= \int (5 - 3 \sin 2x - 4 \cos 2x) dx \\ &= 5 \int dx - 3 \int \sin 2x dx - 4 \int \cos 2x dx \\ &= 5x + \frac{3}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } I = 5x + \frac{3}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី២៧

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក. } \int (e^x + e^{-x}) dx$$

$$\text{ខ. } \int (e^x - e^{-x}) dx$$

$$\text{គ. } \int (2e^{2x} - 3e^x + 1) dx$$

$$\text{ឃ. } \int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$\text{ង. } \int (e^x - 2e^{-x})^2 dx$$

$$\text{ច. } \int e^{-3x} (e^x + 1)^2 dx$$

$$\text{ឆ. } \int (1 + 2e^x)^2 dx$$

$$\text{ជ. } \int (e^x + 1)^3 dx$$

$$\text{ឈ. } \int (e^x - e^{-x})^3 dx$$

$$\text{ញ. } \int (1 + e^x + e^{-x})^2 dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក.} \int (e^x + e^{-x}) dx = \int e^x dx + \int e^{-x} dx = e^x - e^{-x} + C$$

$$\text{ខ.} \int (e^x - e^{-x}) dx = \int e^x dx - \int e^{-x} dx = e^x + e^{-x} + C$$

$$\text{គ.} \int (2e^{2x} - 3e^x + 1) dx = e^{2x} - 3e^x + x + C$$

$$\text{ឃ.} \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x + C$$

$$\text{ង.} \int (e^x - 2e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + 4e^{-2x} - 4) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{-2x} - 4x + C$$

$$\text{ច.} \int e^{-3x}(e^x + 1)^2 dx = \int (e^{-x} + 2e^{-2x} + e^{-3x}) dx = -e^{-x} - e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$\text{ឆ.} \int (1 + 2e^x)^2 dx = \int (1 + 4e^x + 4e^{2x}) dx = x + 4e^x + 2e^{2x} + C$$

$$\text{ជ.} \int (e^x + 1)^3 dx = \int (e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1) dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x + x + C$$

$$\text{ឈ.} \int (e^x - e^{-x})^3 dx = \int (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) dx = \frac{1}{3}e^{3x} - 3e^x - 3e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$\text{ញ.} \int (1 + e^x + e^{-x})^2 dx \quad \text{តាម } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= \int (1 + e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-x} + 2) dx$$

$$= \int (3 + e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-x}) dx$$

$$= 3x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2e^x - 2e^{-x} + C$$

សំណត់ទី២៨

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមតាមវិធីប្តូរអថេរ ៖

$$\text{ក.} \int e^x (e^x + 2)^3 dx$$

$$\text{ខ.} \int (e^x - e^{-x})^4 (e^x + e^{-x}) dx$$

$$\text{គ.} \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$$

$$\text{ង.} \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x}} dx$$

$$\text{ច.} \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} + 1} dx$$

$$\text{ឆ.} \int (2x - 1)e^{x^2 - x} dx$$

$$\text{ជ.} \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ញ.} \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមតាមវិធីប្តូរអថេរ ៖

$$\text{ក.} \int e^x (e^x + 2)^3 dx \quad \text{តាង } u = e^x + 2 \text{ នោះ } du = e^x dx$$

$$\text{គេបាន } \int e^x (e^x + 2)^3 dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int e^x (e^x + 2)^3 dx = \frac{1}{4} (e^x + 2)^4 + C \text{ ។}$$

$$\text{ខ.} \int (e^x - e^{-x})^4 (e^x + e^{-x}) dx \quad \text{តាង } u = e^x - e^{-x} \text{ នោះ } du = (e^x + e^{-x}) dx$$

$$\text{គេបាន } \int (e^x - e^{-x})^4 (e^x + e^{-x}) dx = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } \int (e^x - e^{-x})^4 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{5} (e^x - e^{-x})^5 + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} \text{ តាង } u = e^x + 1 \text{ នោះ: } du = e^x dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx \text{ តាង } u = e^x + e^{-x} \text{ នោះ: } du = (e^x - e^{-x}) dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } \int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx = -\frac{1}{e^x + e^{-x}} + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x}} dx \text{ តាង } u = e^x - x \text{ នោះ: } du = (e^x - 1) dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x}} dx = 2\sqrt{e^x - x} + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} + 1} dx \text{ តាង } u = e^x - e^{-x} + 1 \text{ នោះ: } du = (e^x + e^{-x}) dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} + 1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} + 1} dx = \ln |e^x - e^{-x} + 1| + C$$

ឆ. $\int (2x-1)e^{x^2-x} dx$ តាង $u = x^2 - x$ នោះ $du = (2x-1)dx$

គេបាន $\int (2x-1)e^{x^2-x} dx = \int e^u du = e^u + C$

ដូចនេះ $\int (2x-1)e^{x^2-x} dx = e^{x^2-x} + C$ ។

ជ. $\int x^2 e^{x^3} dx$ តាង $u = x^3$ នោះ $du = 3x^2 dx$ ឬ $x^2 dx = \frac{1}{3} du$

គេបាន $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$ ។

ឈ. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$ ។

ញ. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = e^{\sin^2 x} + C$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1} + \frac{ce^x}{(e^x + 1)^2}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1} + \frac{ce^x}{(e^x + 1)^2}$

យើងបាន $a + \frac{be^x}{e^x + 1} + \frac{ce^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$

សមមូល $a(e^x + 1)^2 + be^x(e^x + 1) + ce^x = 1$

សមមូល $(a + b)e^{2x} + (2a + b + c)e^x + a = 1$

គេទាញបាន $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$ សមមូល $a = 1, b = -1, c = -1$ ។

ដូចនេះ $a = 1, b = -1, c = -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$

ចំពោះ $a = 1, b = -1, c = -1$ នោះ $f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

គេបាន $I = \int \left[1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right] dx$

$$= \int dx - \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} - \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$= x - \int \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)} dx - \int \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$= x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} + C$$

ដូចនេះ $I = \int f(x) dx = x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} + C$ ។

លំហាត់ទី៣០

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក.} \int \frac{2x dx}{x^2 + 4}$$

$$\text{ខ.} \int \frac{2x-1}{(x^2-x)^2} dx$$

$$\text{គ.} \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}} dx$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\sin x}}$$

$$\text{ង.} \int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}$$

$$\text{ច.} \int \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^2}$$

$$\text{ឆ.} \int \sin^4 x \cos x dx$$

$$\text{ជ.} \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ញ.} \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក.} \int \frac{2x dx}{x^2 + 4} = \int \frac{(x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)} dx = \ln(x^2 + 4) + C$$

$$\text{ខ.} \int \frac{2x-1}{(x^2-x)^2} dx = \int \frac{(x^2-x)'}{(x^2-x)^2} dx = -\frac{1}{x^2-x} + C$$

$$\text{គ.} \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}} dx = \int \frac{(x^2-3x+5)' dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} = 2\sqrt{x^2-3x+5} + C$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \sin x}} = \int \frac{(2 + \sin x)'}{\sqrt{2 + \sin x}} dx = 2\sqrt{2 + \sin x} + C$$

$$\text{ង.} \int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{(1 + \sin^2 x)'}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x) + C$$

$$\text{ច.} \int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} dx = -\frac{1}{3(x^3 + 1)} + C$$

$$\text{ឆ.} \int \sin^4 x \cos x dx = \int (\sin x)^4 (\sin x)' dx = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$\text{ជ.} \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sqrt{\sin x}} dx = 2\sqrt{\sin x} + C$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$$

$$\text{ញ.} \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int (\sin x)^{-3} (\sin x)' dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

លំហាត់ទី៣១

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\text{ខ.} \int \frac{(x-2)dx}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$\text{គ.} \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^3} dx$$

$$\text{ង.} \int \frac{\cos x + \sin x}{2 - \cos x + \sin x} dx$$

$$\text{ច.} \int \frac{2 \tan x + 3}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{1 - 4 \cot x}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{ជ.} \int \frac{3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx$$

$$\text{ញ.} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{ក.} \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{តាង } u = x^2 + 2x - 3 \text{ នោះ } du = 2(x+1)dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x - 3| + C$$

$$\text{ខ.} \int \frac{(x-2)dx}{(x^2 - 4x + 3)^2} \quad \text{តាង } u = x^2 - 4x + 3 \text{ នោះ } du = 2(x-2)dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{(x-2)dx}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \frac{(x-2)dx}{(x^2 - 4x + 3)^2} = -\frac{1}{2(x^2 - 4x + 3)} + C$$

$$\text{គ.} \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} \quad \text{តាង } u = x^2 - 6x + 10 \text{ នោះ } du = 2(x-3)dx$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \sqrt{u} + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} = \sqrt{x^2 - 6x + 10} + C$$

ឃ. $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^3} dx$ តាង $u = x^4 - x^2 + 1$ នោះ $du = 2(2x^3 - x)dx$

គេបាន $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = -\frac{1}{4u^2} + C$

ដូចនេះ $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^3} dx = -\frac{1}{4(x^4 - x^2 + 1)^2} + C$

ង. $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 - \cos x + \sin x} dx$

តាង $u = 2 - \cos x + \sin x$ នោះ $du = (\sin x + \cos x)dx$

គេបាន $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 - \cos x + \sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

ដូចនេះ $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 - \cos x + \sin x} dx = \ln |2 - \cos x + \sin x| + C$

ច. $\int \frac{2\tan x + 3}{\cos^2 x} dx$ តាង $u = 2\tan x + 3$ នោះ $du = 2 \frac{dx}{\cos^2 x}$

គេបាន $\int \frac{2\tan x + 3}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{4} u^2 + C$

ដូចនេះ $\int \frac{2\tan x + 3}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{4} (2\tan x + 3)^2 + C$ ។

ឆ. $\int \frac{1 - 4\cot x}{\sin^2 x} dx$ តាង $u = 1 - 4\cot x$ នោះ $du = \frac{4dx}{\sin^2 x}$

គេបាន $\int \frac{1 - 4\cot x}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{4} \int u du = \frac{1}{8} u^2 + C$

ដូចនេះ $\int \frac{1 - 4\cot x}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{8} (1 - 4\cot x)^2 + C$

$$\text{ជ.} \int \frac{3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1}{\cos^2 x} dx \text{ តាង } u = \tan x \text{ នោះ } du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1}{\cos^2 x} dx = \int (3u^2 - 4u + 1) du = u^3 - 2u^2 + u + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \frac{3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1}{\cos^2 x} dx = \tan^3 x - 2 \tan^2 x + \tan x + C$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx = \int \tan^5 x \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ តាង } u = \tan x \text{ នោះ } du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx = \int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx = \frac{1}{6} \tan^6 x + C \text{ ។}$$

$$\text{ញ.} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ តាង } u = \tan x \text{ នោះ } du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3} \tan^3 x + C \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៣២

$$\text{គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{2 \cos^3 x - \sin 2x + 3}{\cos^2 x} dx \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned}
 \text{យើងបាន } I &= \int \frac{2\cos^3 x - \sin 2x + 3}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int \frac{2\cos^3 x - 2\sin x \cos x + 3}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int \left(2\cos x - 2\frac{\sin x}{\cos x} + 3\frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\
 &= 2\int \cos x dx + 2\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx + 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} \\
 &= 2\sin x + 2\ln |\cos x| + 3\tan x + C
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $I = 2\sin x + 3\tan x + 2\ln |\cos x| + C$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int \sin^4 x dx$

ខ. $I = \int (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$

គ. $I = \int \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x} dx$

ឃ. $I = \int \frac{\cos 2x + \cos 4x}{\cos 3x} dx$

ង. $I = \int \frac{\cos x - \cos 5x}{1 + 2\cos 2x} dx$

ច. $I = \int \frac{\cos 5x - \cos 7x}{1 + 2\cos 4x} dx$

ឆ. $I = \int \sin^2 x \cos 5x dx$

ជ. $I = \int \sin 3x \cos^2 2x dx$

ឈ. $I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$

ញ. $I = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}\text{ក. } I &= \int \sin^4 x \, dx \text{ តាមរូបមន្ត } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \text{ និង } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int (2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ: } I = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}\text{ខ. } I &= \int (\cos^6 x + \sin^6 x) dx \text{ តាមរូបមន្ត } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= \int \left[(\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) \right] dx \\ &= \int \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \right) dx = \int \left(1 - \frac{3}{4} \times \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \right) dx = \frac{5x}{8} + \frac{3}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{គ. } I &= \int \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x} dx \text{ តាមរូបមន្ត } \sin p + \sin q = 2\sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ &= \int \frac{2\sin 2x \cos x}{\sin 2x} dx = 2 \int \cos x \, dx = 2\sin x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ឃ. } I &= \int \frac{\cos 2x + \cos 4x}{\cos 3x} dx \text{ តាមរូបមន្ត } \cos p + \cos q = 2\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ &= \int \frac{2\cos x \cos 3x}{\cos 3x} dx = 2 \int \cos x \, dx = 2\sin x + C\end{aligned}$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{\cos x - \cos 5x}{1 + 2\cos 2x} dx \text{ តាមរូបមន្ត } \cos p - \cos q = -2\sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{-2 \sin 3x \sin(-2x)}{1 + 2 \cos 2x} dx = 2 \int \frac{(3 \sin x - 4 \sin^3 x) \sin 2x}{1 + 2 \cos 2x} dx \\
 &= 2 \int \frac{\sin x \left(3 - 4 \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \sin 2x}{1 + 2 \cos 2x} dx = 2 \int \frac{\sin x (1 + 2 \cos 2x) \sin 2x}{1 + 2 \cos 2x} dx \\
 &= 2 \int \sin x \sin 2x dx = \int [\cos(x - 2x) - \cos(x + 2x)] dx \\
 &= \int \cos x dx - \int \cos 3x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{\cos 5x - \cos 7x}{1 + 2 \cos 4x} dx$$

តាមរូបមន្ត $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{-2 \sin 6x \sin(-x)}{1 + 2 \cos 4x} dx = 2 \int \frac{(3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x) \sin x}{1 + 2 \cos 4x} dx \\
 &= 2 \int \frac{\sin 2x \left(3 - 4 \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \sin x}{1 + 2 \cos 4x} dx = 2 \int \frac{\sin 2x (1 + 2 \cos 4x) \sin x}{1 + 2 \cos 4x} dx \\
 &= 2 \int \sin x \sin 2x dx = \int (\cos x - \cos 3x) dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{ឆ. } I = \int \sin^2 x \cos 5x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos 5x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x - \cos 2x \cos 5x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos 5x dx - \frac{1}{4} \int (\cos 7x + \cos 3x) dx \\
 &= \frac{1}{20} \sin 5x - \frac{1}{28} \sin 7x - \frac{1}{12} \sin 3x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{ជ. } I = \int \sin 3x \cos^2 2x dx = \int \sin 3x \frac{1 + \cos 4x}{2} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 3x \cos 4x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin 3x dx + \frac{1}{4} \int (\sin 7x - \sin x) dx \\
 &= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{28} \cos 7x + \cos x + C
 \end{aligned}$$

ឈ. $I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \int \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right] dx$

ដោយ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ និង $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

គេបាន $I = \int \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) dx = \int \left(1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} \right) dx$

$$= \frac{3}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx = \frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x + C$$

ញ. $I = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$ ដោយ $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

យើងបាន $I = \int \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| + C$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៤

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int (2x - 1)(x^2 - x + 1)^2 dx$

ខ. $I = \int x^2(x^3 + 4)^5 dx$

គ. $I = \int (x + 1)(x^2 + 2x - 3)^4 dx$

ឃ. $I = \int e^x(e^x + 2)^3 dx$

$$ង. I = \int \sin^6 x \cos x \, dx$$

$$បិ. I = \int \frac{\ln^4 x}{x} dx$$

$$ឆ. I = \int \frac{\sin x \, dx}{2 - \cos x}$$

$$ជ. I = \int \frac{\cos x \, dx}{2 + \sin x}$$

$$ឈ. I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$ញ. I = \int \frac{\sin 2x \, dx}{1 + \cos^2 x}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$ក. I = \int (2x - 1)(x^2 - x + 1)^2 dx \quad \text{តាង } u = x^2 - x + 1 \text{ នៅ: } du = (2x - 1) dx$$

$$\text{គេបាន } I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \frac{1}{3} (x^2 - x + 1)^3 + C \quad \text{។}$$

$$ខ. I = \int x^2 (x^3 + 4)^5 dx \quad \text{តាង } u = x^3 + 4 \text{ នៅ: } du = 3x^2 dx$$

$$\text{គេបាន } I = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{18} u^6 + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \frac{1}{18} (x^3 + 4)^6 + C \quad \text{។}$$

$$គ. I = \int (x + 1)(x^2 + 2x - 3)^4 dx \quad \text{តាង } u = x^2 + 2x - 3 \text{ នៅ: } du = 2(x + 1) dx$$

$$\text{គេបាន } I = \frac{1}{2} \int u^4 dx = \frac{1}{10} u^5 + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \frac{1}{10} (x^2 + 2x - 3)^5 + C$$

ឃ. $I = \int e^x (e^x + 2)^3 dx$ តាង $u = e^x + 2$ នៅ: $du = e^x dx$

គេបាន $I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C$

ដូចនេះ: $I = \frac{1}{4} (e^x + 2)^4 + C$

ង. $I = \int \sin^6 x \cos x dx$ តាង $u = \sin x$ នៅ: $du = \cos x dx$

គេបាន $I = \int u^6 du = \frac{1}{7} u^7 + C$

ដូចនេះ: $I = \frac{1}{7} \sin^7 x + C$ ។

ច. $I = \int \frac{\ln^4 x}{x} dx$ តាង $u = \ln x$ នៅ: $du = \frac{1}{x} dx$

គេបាន $I = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$

ដូចនេះ: $I = \frac{1}{5} (\ln x)^5 + C$ ។

ឆ. $I = \int \frac{\sin x dx}{2 - \cos x}$ តាង $u = 2 - \cos x$ នៅ: $du = \sin x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

ដូចនេះ: $I = \ln |2 - \cos x| + C$ ។

ជ. $I = \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin x}$ តាង $u = 2 + \sin x$ នៅ: $du = \cos x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

ដូចនេះ: $I = \ln |2 + \sin x| + C$ ។

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{តាង } u = \cos x + \sin x \quad \text{នោះ } du = (\cos x - \sin x) dx$$

$$\text{គេបាន } I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \ln |\cos x + \sin x| + C$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x} \quad \text{តាង } u = 1 + \cos^2 x \quad \text{នោះ } du = -\sin 2x dx$$

$$\text{គេបាន } I = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ } I = -\ln(1 + \cos^2 x) + C \quad ។$$

លំហាត់ទី៣៥

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{2x dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{4 \sin^2 x dx}{\sqrt{2x + 1 - \sin 2x}}$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^3} dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{x^2 e^x dx}{1 + (x^2 - 2x + 2)e^x}$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{(\cos x - \sin x)e^x}{\sqrt{1 + e^x \cos x}} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ តាង $u = \cos x$ នោះ $du = -\sin x dx$

គេបាន $I = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + C$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{\cos x} + C$

ខ. $I = \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ តាង $u = \ln x$ នោះ $du = \frac{1}{x} dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{\ln x} + C$ ។

គ. $I = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}$ តាង $u = e^x + 1$ នោះ $du = e^x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{e^x + 1} + C$ ។

ឃ. $I = \int \frac{2x dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \int \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^2}$ តាង $u = x^2$ នោះ $du = 2x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{x^2 + 1} + C$ ។

ង. $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

តាង $u = \sin x + \cos x$ នៅ៖ $u = (\cos x - \sin x) dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{\sin x + \cos x} + C$ ។

ច. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ តាង $u = \ln x$ នៅ៖ $du = \frac{1}{x} dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$ ។ ដូចនេះ $I = 2\sqrt{\ln x} + C$ ។

ឆ. $I = \int \frac{4 \sin^2 x dx}{\sqrt{2x+1-\sin 2x}}$

តាង $u = 2x+1-\sin 2x$ នៅ៖ $du = 2(1-\cos 2x) dx = 4 \sin^2 x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$ ។ ដូចនេះ $I = 2\sqrt{2x+1-\sin 2x} + C$ ។

ជ. $I = \int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3} dx$ តាង $u = x^2+2x+2$ នៅ៖ $du = 2(x+1) dx$

គេបាន $I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2+2x+2)^2} + C$

ឈ. $I = \int \frac{x^2 e^x dx}{1+(x^2-2x+2)e^x}$ តាង $u = 1+(x^2-2x+2)e^x$ នៅ៖ $du = x^2 e^x dx$

$$\text{គេបាន } I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |1 + (x^2 - 2x + 2)e^x| + C \quad \text{។}$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{(\cos x - \sin x)e^x}{\sqrt{1 + e^x \cos x}} dx$$

$$\text{តាង } u = 1 + e^x \cos x \text{ នៅ: } du = (\cos x - \sin x)e^x dx$$

$$\text{គេបាន } I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1 + e^x \cos x} + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៣៦

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{dx}{e^x + 2}$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x+1}{x + e^{-x}} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2(x+3)e^x}{(1+x^3e^x)^2} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x(2\sin x + x \cos x)}{\sqrt{1+x^2 \sin x}} dx$$

$$\text{ង. } I = \int (x-1)e^{x^2-2x} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ណ. } I = \int \frac{\ln x dx}{1-x+x \ln x}$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{(1+x \sin(\ln x))^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{dx}{e^x + 2} = \int \frac{e^{-x} dx}{1 + 2e^{-x}} \quad \text{តាង } u = 1 + 2e^{-x} \text{ នៅ: } du = -2e^{-x} dx$$

$$\text{គេបាន } I = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = -\frac{1}{2} \ln(1 + 2e^{-x}) + C \quad \text{។}$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x+1}{x+e^{-x}} dx = \int \frac{(x+1)e^x dx}{xe^x + 1} \quad \text{តាង } u = xe^x + 1 \text{ នៅ: } du = (x+1)e^x$$

$$\text{គេបាន } I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \ln |xe^x + 1| + C \quad \text{។}$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2(x+3)e^x}{(1+x^3e^x)^2} dx \quad \text{តាង } u = 1 + x^3e^x \text{ នៅ: } du = x^2(x+3)e^x$$

$$\text{គេបាន } I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = -\frac{1}{1+x^3e^x} + C \quad \text{។}$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x(2\sin x + x\cos x)}{\sqrt{1+x^2\sin x}} dx$$

$$\text{តាង } u = 1 + x^2\sin x \text{ នៅ: } du = x(2\sin x + x\cos x) dx$$

$$\text{គេបាន } I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = 2\sqrt{1+x^2\sin x} + C \quad \text{។}$$

$$\text{ង. } I = \int (x-1)e^{x^2-2x} dx \quad \text{តាង } u = x^2 - 2x \text{ នៅ: } du = 2(x-1) dx$$

$$\text{គេបាន } I = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$ ។

ច. $I = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ តាង $u = \ln x$ នោះ $du = \frac{1}{x} dx$

គេបាន $I = \int \sin u du = -\cos u + C$

ដូចនេះ $I = -\cos(\ln x) + C$ ។

ឆ. $I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ តាង $u = \ln x$ នោះ $du = \frac{1}{x} dx$

គេបាន $I = \int \cos u du = \sin u + C$

ដូចនេះ $I = \sin(\ln x) + C$ ។

ជ) $I = \int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ តាង $u = \sqrt{x}$ នោះ $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

គេបាន $I = 2 \int \tan u du = -2 \ln |\cos u| + C$

ដូចនេះ $I = -2 \ln |\cos(\sqrt{x})| + C$ ។

ឈ. $I = \int \frac{\ln x dx}{1-x+x \ln x}$ តាង $u = 1-x+x \ln x$ នោះ $du = \ln x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

ដូចនេះ $I = \ln |1-x+x \ln x| + C$ ។

ញ. $I = \int \frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{(1+x \sin(\ln x))^2} dx$

តាង $u = 1+x \sin(\ln x)$ នោះ $du = (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{1+x\sin(\ln x)} + C$ ។

លំហាត់ទី៣៧

កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ គេបាន ៖

$$\frac{4x^2 - 5x + 3}{(x-1)(x^2 - x + 1)} = \frac{m}{x-1} + \frac{nx+p}{x^2 - x + 1} \text{ រួចគណនា } \int \frac{(4x^2 - 5x + 3)dx}{(x-1)(x^2 - x + 1)} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់បីចំនួនពិត m, n និង p

$$\frac{4x^2 - 5x + 3}{(x-1)(x^2 - x + 1)} = \frac{m}{x-1} + \frac{nx+p}{x^2 - x + 1}$$

តម្រូវកាត់បែងរួម $(x-1)(x^2 - x + 1)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$4x^2 - 5x + 3 = m(x^2 - x + 1) + (x-1)(nx+p)$$

ដោយសមភាពខាងក្រោយនេះពិតចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះយើងអាចជ្រើសរើស

តម្លៃពិសេសនៃ x ដូចតទៅ៖

.ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2 = m$ ឬ $m=2$ ។

.ចំពោះ $x=0$ គេបាន $3 = m - p$ នោះ $p = m - 3 = 2 - 3 = -1$ ។

.ចំពោះ $x=-1$ គេបាន $12 = 3m + 2n - 2p$ នោះ $n = \frac{12 - 6 - 2}{2} = 2$ ។

ដូចនេះ $m = 2$, $n = 2$, $p = -1$ ។

គណនា $I = \int \frac{(4x^2 - 5x + 3)dx}{(x-1)(x^2 - x + 1)} \div$

ចំពោះ $m = 2$, $n = 2$, $p = -1$ នោះ $\frac{4x^2 - 5x + 3}{(x-1)(x^2 - x + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$

យើងបាន $I = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \right) dx$

$$= 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= 2 \int \frac{(x-1)'}{(x-1)} dx + \int \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} dx$$

ដូចនេះ $I = 2 \ln |x-1| + \ln(x^2 - x + 1) + C$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

សំណត់ទី៣៨

គេឲ្យ $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x-2)(x^2 + x + 1)}$ ដែល $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$

យើងបាន $\frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}$

សមមូល $a(x^2+x+1) + (x-2)(bx+c) = x^2+6x+5$

.ចំពោះ $x=2$ គេបាន $7a=21$ នោះ $a=3$

.ចំពោះ $x=0$ គេបាន $a-2c=5$ នោះ $c = \frac{a-5}{2} = -1$ ។

.ចំពោះ $x=1$ គេបាន $3a-b-c=12$ នោះ $b=3a-c-12=-2$ ។

ដូចនេះ $a=3, b=-2, c=-1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$

ចំពោះ $a=3, b=-2, c=-1$ គេបាន $f(x) = \frac{3}{x-2} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

យើងបាន $I = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) dx$

$$= 3 \int \frac{(x+2)'}{x+2} dx - \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx$$

$$= 3 \ln |x+2| - \ln(x^2+x+1) + C$$

ដូចនេះ $I = 3 \ln |x+2| - \ln(x^2+x+1) + C$

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យ $f(x) = \frac{11-5x}{(x+1)(x^2-3x+4)}$ ដែល $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-3x+4}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-3x+4}$

យើងបាន $\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-3x+4} = \frac{11-5x}{(x+1)(x^2-3x+4)}$

តម្រូវភាគបែងរួម $(x+1)(x^2-3x+4)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$11-5x = a(x^2-3x+4) + (x+1)(bx+c)$$

$$11-5x = (a+b)x^2 + (-3a+b+c)x + (4a+c)$$

គេទាញ $\begin{cases} a+b=0 \\ -3a+b+c=-5 \\ 4a+c=11 \end{cases}$ នោះ $a=2, b=-2, c=3$ ។

ដូចនេះ $a=2, b=-2, c=3$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$

ចំពោះ $a = 2$, $b = -2$, $c = 3$ គេបាន $f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$

$$\begin{aligned}\text{នោះ } I &= \int f(x) dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{2x-3}{x^2-3x+4} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2x-3}{x^2-3x+4} dx \\ &= 2 \int \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx - \int \frac{(x^2-3x+4)'}{x^2-3x+4} dx\end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = 2 \ln |x+1| - \ln(x^2-3x+4) + C$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យ $f(x) = \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+4x}$ ដែល $x \in \mathbb{R}^*$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4}$

$$\text{យើងបាន } \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4} = \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+4x}$$

តម្រូវកាត់បែងរួម $x(x^2-2x+4)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$a(x^2 - 2x + 4) + x(bx + c) = 3x^2 - 5x + 8$$

$$(a + b)x^2 + (-2a + c)x + 4a = 3x^2 - 5x + 8$$

គេទាញ
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + c = -5 \\ 4a = 8 \end{cases}$$
 សមមូល $a = 2, b = 1, c = -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ៖

ចំពោះ $a = 2, b = 1, c = -1$ គេបាន $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 4}$

$$I = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 4} \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 2x + 4)'}{x^2 - 2x + 4} dx$$

ដូចនេះ $I = 2 \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 4) + C$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 6}$ ។

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = \frac{A \cos x}{2 \sin x + 3} + \frac{B \cos x}{\sin x - 2} \quad \text{គ្រប់ចំនួនពិត } x \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 6} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x) = \frac{A \cos x}{2 \sin x + 3} + \frac{B \cos x}{\sin x - 2} \quad \text{គ្រប់ចំនួនពិត } x$$

$$\text{យើងបាន } \frac{A \cos x}{2 \sin x + 3} + \frac{B \cos x}{\sin x - 2} = \frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 6}$$

$$\text{សមមូល } \frac{A \cos x (\sin x - 2) + B \cos x (2 \sin x + 3)}{(2 \sin x + 3)(\sin x - 2)} = \frac{6 \sin x \cos x + 2 \cos x}{(2 \sin x + 3)(\sin x - 2)}$$

$$\text{សមមូល } (A + 2B) \sin x \cos x + (-2A + 3B) \cos x = 6 \sin x \cos x + 2 \cos x$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} A + 2B = 6 \\ -2A + 3B = 2 \end{cases} \quad \text{សមមូល } A = 2, B = 2 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } A = 2, B = 2 \text{ ។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 6} dx$$

$$\text{ចំពោះ } A = 2, B = 2 \text{ គេមាន } f(x) = \frac{2 \cos x}{2 \sin x + 3} + \frac{2 \cos x}{\sin x - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int \left(\frac{2 \cos x}{2 \sin x + 3} + \frac{2 \cos x}{\sin x - 2} \right) dx \\ &= \int \frac{(2 \sin x + 3)'}{2 \sin x + 3} dx + 2 \int \frac{(\sin x - 2)'}{\sin x - 2} dx \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \ln |2 \sin x + 3| + 2 \ln |\sin x - 2| + C \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៤២

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int x e^x dx$

ខ. $\int x \sin x dx$

គ. $\int x \cos x dx$

ឃ. $\int \ln x dx$

ង. $\int x^2 \ln x dx$

ច. $\int (2x - 1)e^x dx$

ឆ. $\int (x + 1) \sin x dx$

ជ. $\int x^2 \cos x dx$

ឈ. $\int x^2 e^x dx$

ញ. $\int (\ln x)^2 dx$

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int x e^x dx$ តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$

ដូចនេះ $\int x e^x dx = (x - 1)e^x + C$

ខ. $\int x \sin x dx$ តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

គេបាន $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

ដូចនេះ $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$ ។

$$\text{គ. } \int x \cos x dx \text{ តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\text{ឃ. } \int \ln x dx \text{ តាង } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \text{ គេបាន } \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$$

$$\text{ង. } \int x^2 \ln x dx \text{ តាង } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

$$\text{ច. } \int (2x-1)e^x dx \text{ តាង } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int (2x-1)e^x dx = (2x-1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \int (2x-1)e^x dx = (2x-3)e^x + C \quad \text{។}$$

$$\text{ឆ.} \int (x+1) \sin x \, dx \quad \text{តាង} \begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន} \int (x+1) \sin x \, dx = -(x+1) \cos x + \int \cos x \, dx = -(x+1) \cos x + \sin x + C$$

$$\text{ដូចនេះ} \int (x+1) \sin x \, dx = -(x+1) \cos x + \sin x + C \quad \text{។}$$

$$\text{ជ.} \int x^2 \cos x \, dx \quad \text{តាង} \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន} \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx$$

$$\text{តាង} \begin{cases} u = 2x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = 2 \, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន} \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x \, dx$$

$$\text{ដូចនេះ} \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \quad \text{។}$$

$$\text{ឈ.} \int x^2 e^x \, dx \quad \text{តាង} \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = e^x \, dx \end{cases}$$

$$\text{គេបាន} \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \quad \text{តាង} \begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = 2 \, dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ} \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

$$\text{ញ.} \int (\ln x)^2 \, dx \quad \text{តាង} \begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x \, dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + C$$

លំហាត់ទី៤៣

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក.} \int x \tan^2 x dx$$

$$\text{ខ.} \int x \cot^2 x dx$$

$$\text{គ.} \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$\text{ង.} \int \frac{\sin 2x}{(2 - \cos x)^2} dx$$

$$\text{ច.} \int \frac{e^{2x} dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{xe^x dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{ជ.} \int \frac{\ln x dx}{x(1 + \ln x)^2}$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{2x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ញ.} \int \frac{x(x-1)(2x-1)}{(x^2 - x + 2)^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក.} \int x \tan^2 x dx = -\frac{x^2}{2} + x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\text{ខ.} \int x \cot^2 x dx = -\frac{1}{2}x^2 - x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$\text{គ.} \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C$$

$$ង. \int \frac{\sin 2x}{(2 - \cos x)^2} dx = -\frac{4}{2 - \cos x} - 2 \ln(2 - \cos x) + C$$

$$ច. \int \frac{e^{2x} dx}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{e^x + 1} + \ln(e^x + 1) + C$$

$$ឆ. \int \frac{xe^x dx}{(e^x + 1)^2} = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) + C$$

$$ជ. \int \frac{\ln x dx}{x(1 + \ln x)^2} = -\frac{\ln x}{1 + \ln x} + \ln |1 + \ln x| + C$$

$$ឈ. \int \frac{2x^3 dx}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{x^2}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$ញ. \int \frac{x(x-1)(2x-1)}{(x^2 - x + 2)^2} dx = \frac{2}{x^2 - x + 2} + \ln(x^2 - x + 2) + C$$

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int x \cos^2 x dx$ និង $J = \int x \sin^2 x dx$

ក.គណនា $I + J$ និង $I - J$ ។

ខ.ទាញរក I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $I + J$ និង $I - J$

យើងមាន $I = \int x \cos^2 x dx$ និង $J = \int x \sin^2 x dx$

យើងបាន $I + J = \int x \cos^2 x dx + \int x \sin^2 x dx$

$$= \int x(\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

ដូចនេះ $I + J = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $I - J = \int x \cos^2 x dx - \int x \sin^2 x dx$
 $= \int x(\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int x \cos 2x dx$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

គេបាន $I - J = \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$

ដូចនេះ $I - J = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C_2$ ។

ខ. ទាញរក I និង J ៖

គេមាន $I + J = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ (1)

និង $I - J = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C_2$ (2)

បូកសមីការ(1) & (2) គេបាន $2I = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + 2C_3$

គេទាញ $I = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C_3$ ដែល $C_1 + C_2 = 2C_3$ ។

ដកសមីការ(1) & (2) គេបាន $2J = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + 2C_4$

គេទាញ $J = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C_4$ ដែល $C_1 - C_2 = 2C_4$ ។

ដូចនេះ $I = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C_3$

$$J = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C_4 \quad ។$$

លំហាត់ទី៤៥

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int e^x \sin x \, dx$

ខ. $\int e^x \cos x \, dx$

គ. $\int x \sin^3 x \, dx$

ឃ. $\int x \cos^3 x \, dx$

ង. $\int \sin(\ln x) \, dx$

ច. $\int \cos(\ln x) \, dx$

ឆ. $\int x^3 (\ln x)^2 \, dx$

ជ. $\int (\ln x)^3 \, dx$

ឈ. $\int x e^x \sin x \, dx$

ញ. $\int x e^x \cos x \, dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$$

$$\text{ខ. } \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$$

$$\text{គ. } \int x \sin^3 x \, dx = -\frac{\sin 3x - 3x(\cos 3x - 9\cos x) - 27\sin x}{36} + C$$

$$\text{ឃ.} \int x \cos^3 x \, dx = \frac{3x \sin 3x + \cos 3x + 27x \sin x + 27 \cos x}{36} + C$$

$$\text{ង.} \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

$$\text{ច.} \int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$$

$$\text{ឆ.} \int x^3 (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^4 (\ln^2 x - 4 \ln x + 1)}{32} + C$$

$$\text{ជ.} \int (\ln x)^3 \, dx = x (\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + C$$

$$\text{ឈ.} \int x e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} [x \sin x + (1 - x) \cos x] e^x + C$$

$$\text{ញ.} \int x e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} [(x - 1) \sin x + x \cos x] e^x + C$$

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int x^2 \cos^2 x \, dx, \quad J = \int x^2 \sin^2 x \, dx \quad \text{និង} \quad K = \int x^2 \cos 2x \, dx$$

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា K ។

ខ.គណនា $I + J$ ។

គ.បង្ហាញថា $I - J = K$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា K ៖

$$\text{គេមាន } K = \int x^2 \cos 2x \, dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ: } \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } K = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x \, dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x \, dx \end{cases} \quad \text{នោះ: } \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } K = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$\text{ដូចនេះ: } K = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \text{។}$$

ខ.គណនា $I + J$ ៖

$$\text{គេមាន } I = \int x^2 \cos^2 x \, dx \quad \text{និង } J = \int x^2 \sin^2 x \, dx$$

$$\text{យើងបាន } I + J = \int x^2 \cos^2 x \, dx + \int x^2 \sin^2 x \, dx$$

$$= \int x^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C_1$$

$$\text{ដូចនេះ: } I + J = \frac{1}{3} x^3 + C_1 \quad \text{។}$$

គ.បង្ហាញថា $I - J = K$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល I និង J ៖

$$\text{គេមាន } I = \int x^2 \cos^2 x \, dx \quad \text{និង } J = \int x^2 \sin^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } I - J &= \int x^2 \cos^2 x \, dx - \int x^2 \sin^2 x \, dx \\ &= \int x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int x^2 \cos 2x \, dx = K\end{aligned}$$

ដូចនេះ $I - J = K$ ។

យើងមាន $I + J = \frac{1}{3}x^3 + C_1$

និង $I - J = K = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការគេបាន ៖

$$I = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + C_2$$

$$J = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C_3 \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int e^x \cos^2 x \, dx, \quad J = \int e^x \sin^2 x \, dx \quad \text{និង} \quad K = \int e^x \cos 2x \, dx$$

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា K ។

ខ.គណនា $I + J$ ។

គ.បង្ហាញថា $I - J = K$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា K ៖

យើងមាន $K = \int e^x \cos 2x \, dx$

តាង $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = e^x \, dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

គេបាន $K = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x \, dx$

តាង $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin 2x \, dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = e^x \, dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$

គេបាន $K = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x \, dx$

$$K = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} K$$

ដូចនេះ $K = \frac{1}{5} (2 \sin 2x + \cos 2x) e^x + C$ ។

ខ.គណនា $I + J$ ៖

គេមាន $I = \int e^x \cos^2 x \, dx$ និង $J = \int e^x \sin^2 x \, dx$

យើងបាន $I + J = \int e^x \cos^2 x \, dx + \int e^x \sin^2 x \, dx$

$$= \int e^x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int e^x \, dx = e^x + C_1$$

ដូចនេះ $I + J = e^x + C_1$ ។

គ.បង្ហាញថា $I - J = K$ រួចទាញរកអាំងតេក្រាល I និង J ៖

$$\text{គេមានគេមាន } I = \int e^x \cos^2 x \, dx \text{ និង } J = \int e^x \sin^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } I - J &= \int e^x \cos^2 x \, dx - \int e^x \sin^2 x \, dx \\ &= \int e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int e^x \cos 2x \, dx = K \text{ ពិត} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I - J = K \quad \forall$$

$$\text{យើងមាន } I + J = e^x + C_1 \quad (1)$$

$$\text{និង } I - J = K = \frac{1}{5}(2\sin 2x + \cos 2x)e^x + C \quad (2)$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការផ្សំដោយសមីការ(1) & (2) គេបាន

$$I = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{10}(2\sin 2x + \cos 2x)e^x + C_2$$

$$J = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}(2\sin 2x + \cos 2x)e^x + C_3 \quad \forall$$

លំហាត់ទី៤៨

$$\text{គេឲ្យអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} \text{ និង } J = \int \frac{2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\text{ក.កំណត់បីចំនួនពិត } a, b, c \text{ ដើម្បីបាន } \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} \quad \forall$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I \quad \forall$$

$$\text{គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូលគណនាអាំងតេក្រាល } J \quad \forall$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក.កំណត់បីចំនួនពិត } a, b, c$$

យើងមាន $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$ សមមូល $a=1, b=-1, c=0$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ៖

គេមាន $I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

ចំពោះ $a=1, b=-1, c=0$ គេមាន $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

យើងបាន $I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) = \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} dx$

ដូចនេះ $I = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនាអាំងតេក្រាល J ៖

យើងមាន $J = \int \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \int (\ln x) \frac{2x dx}{(x^2+1)^2}$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+1} \end{cases}$

យើងបាន $J = -\frac{\ln x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = -\frac{\ln x}{x^2+1} + I$

ដោយតាមសម្រាយខាងលើគេមាន $I = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

ដូចនេះ $J = -\frac{\ln x}{x^2 + 1} + \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{(x+2)dx}{x(x^2+x+1)} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(2x+1)(x+2\ln x)}{(x^2+x+1)^2} dx$$

ក. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{x+2}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \quad \text{។}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាល J ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ៖

$$\frac{x+2}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $x(x^2+x+1)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$x+2 = a(x^2+x+1) + x(bx+c) = (a+b)x^2 + (a+c)x + a$$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} a = 2 \\ a + c = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \text{ សមមូល } a = 2, b = -2, c = -1 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } a = 2, b = -2, c = -1 \text{ ។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ៖

$$\text{គេមាន } I = \int \frac{x+2}{x(x^2+x+1)} dx$$

$$\text{ចំពោះ: } a = 2, b = -2, c = -1 \text{ គេមាន } \frac{x+2}{x(x^2+x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{យើងបាន } I = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = 2 \ln |x| - \ln |x^2+x+1| + C \text{ ។}$$

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា J ៖

$$\text{យើងមាន } J = \int \frac{(x+2 \ln x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} dx = \int (x+2 \ln x) \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x + 2 \ln x \\ dv = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} du = (1 + \frac{2}{x}) dx = \frac{x+2}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x^2+x+1} \end{cases}$$

$$\text{យើងបាន } J = -\frac{x+2 \ln x}{x^2+x+1} + \int \frac{x+2}{x(x^2+x+1)} dx = -\frac{x+2 \ln x}{x^2+x+1} + I$$

ដោយ $I = 2\ln|x| - \ln|x^2 + x + 1| + C$

ដូចនេះ $J = -\frac{x + 2\ln x}{x^2 + x + 1} + 2\ln|x| - \ln|x^2 + x + 1| + C$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ និង $J = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$ ។

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូស្រាយថា $J = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}I$ ។

ខ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$ គ្រប់ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

គ.គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរក J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកស្រាយថា $J = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}I$

គេមាន $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ និង $J = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$

គេបាន $J = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases} u = \frac{1}{\sin x} \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ v = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$

គេបាន $J = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$ ដោយ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

នោះ $J = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - J + \int \frac{dx}{\sin x}$

គេទាញ $2J = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + I$ នោះ $J = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}I$ ពិតៗ

ដូចនេះ $J = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}I$ ។

ខ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$ គ្រប់ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

គេមាន $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 + \cos x) + \sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\sin^2 x}$

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin x}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$ គ្រប់ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

គ.គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរក J ៖

គេមាន $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ ដោយ $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$

គេបាន $I = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{2} \ln |1 - \cos x| - \frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| + C_1$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $J = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}I$

ដូចនេះ $J = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{4}(\ln |1 - \cos x| - \ln |1 + \cos x|) + C_2$ ។

លំហាត់ទី៥១

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int x \sin x \cos^2 x dx$

ខ. $\int x \cos x \sin^2 x dx$

គ. $\int \frac{x^2 \ln x}{(x^3 + 1)^2} dx$

ឃ. $\int \frac{(x-1)e^{2x}}{(e^x + 1)^3} dx$

ង. $\int \frac{2xe^x dx}{(e^x + 1)^3}$

ច. $\int \frac{x \cos x}{\sin^4 x} dx$

ឆ. $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

ជ. $\int \ln(x^2 + 1) dx$

ឈ. $\int \frac{x^2 \tan x}{\cos^2 x} dx$

ញ. $\int x \tan^4 x dx$

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int x \sin x \cos^2 x dx = -\frac{\sin^3 x - 3 \sin x + 3x \cos^3 x}{9} + C$

ខ. $\int x \cos x \sin^2 x dx = \frac{3x \sin^3 x - \cos^3 x + 3 \cos x}{9} + C$

$$\text{គ.} \int \frac{x^2 \ln x}{(x^3 + 1)^2} dx = -\frac{\ln x}{3(x^3 + 1)} + \frac{3 \ln x - \ln(x^3 + 1)}{9} + C$$

$$\text{ឃ.} \int \frac{(x-1)e^{2x}}{(e^x + 1)^3} dx = \frac{(xe^x + 1)e^x}{2(e^x + 1)^2} - \frac{\ln(e^x + 1)}{2} + C$$

$$\text{ង.} \int \frac{2xe^x dx}{(e^x + 1)^3} = x - \ln(e^x + 1) + \frac{e^x + 1 - x}{(e^x + 1)^2} + C$$

$$\text{ច.} \int \frac{x \cos x}{\sin^4 x} dx = -\frac{x}{3 \sin^3 x} - \frac{\cos x}{6 \sin^2 x} - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right| + C$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C$$

$$\text{ជ.} \int \ln(x^2 + 1) dx = -2x + x \ln(x^2 + 1) + 2 \arctan x + C$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{x^2 \tan x}{\cos^2 x} dx = \frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x - \ln |\cos x| + C$$

$$\text{ញ.} \int x \tan^4 x dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6 \cos^2 x} - \frac{x}{3} \left(4 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \tan x - \frac{4}{3} \ln |\cos x| + C$$

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យអាំងតេក្រាល

$$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{\cos 2x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

ក.ស្រាយថា $I - J = \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $I - J = \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ

យើងមាន $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx$ និង $J = \int \frac{\cos 2x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } I - J &= \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx - \int \frac{\cos 2x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \cos x + \sin x) - \cos 2x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos 2x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x) + \cos 2x - \cos 2x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx \\ &= \int \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx = \int \frac{(1 + \cos x + \sin x)'}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I - J = \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ៖

យើងមាន $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx = \int \frac{(1 + \cos x + \sin x)'}{1 + \cos x + \sin x} dx$

ដូចនេះ $I = \ln |1 + \cos x + \sin x| + C_1$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $I - J = \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} + C$

ដូចនេះគេទាញបាន $J = \ln |1 + \cos x + \sin x| - \frac{\cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} + C_2$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)^2}$ និង $J = \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \cos x)^3}$ ។

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកស្រាយថា $J = \frac{\cos x}{(2 + \cos x)^2} + I$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរក J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកស្រាយថា $J = \frac{\cos x}{(2 + \cos x)^2} + I$

គេមាន $J = \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \cos x)^3} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{(2 + \cos x)^3}$

តាង $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \frac{2 \sin x}{(2 + \cos x)^3} dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = \frac{1}{(2 + \cos x)^2} \end{cases}$

គេបាន $J = \frac{\cos x}{(2 + \cos x)^2} + \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)^2}$ ដោយ $I = \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)^2}$

$$\text{ដូចនេះ } J = \frac{\cos x}{(2 + \cos x)^2} + I$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរក J ៖

$$\text{យើងបាន } I = \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)^2} = -\int \frac{(2 + \cos x)' dx}{(2 + \cos x)^2} = \frac{1}{2 + \cos x} + C$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \frac{1}{2 + \cos x} + C \text{ និង } J = \frac{\cos x}{(2 + \cos x)^2} + \frac{1}{2 + \cos x} + C \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៥០

$$\text{គណនា } I = \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{គណនា } I = \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx = \int \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x^2} dx \quad (1)$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = e^x dx \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{e^x}{x} dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx + C \quad (2)$$

$$\text{យក (2) ជួសក្នុង(1) គេបាន } I = \frac{e^x}{x} + C \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int \frac{4 \sin x \, dx}{2 + \cos x}, J = \int \frac{\sin 2x \, dx}{2 + \cos x} \quad \text{និង} \quad K = \int \frac{\sin x \cos 2x}{(2 + \cos x)^2} dx$$

ក.បង្ហាញថា $I + J = 2 \int \sin x \, dx$ រួចគណនា $I + J$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកគណនា K ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $I + J = 2 \int \sin x \, dx$ រួចគណនា $I + J$ ៖

$$\text{គេមាន } I = \int \frac{4 \sin x \, dx}{2 + \cos x} \quad \& \quad J = \int \frac{\sin 2x \, dx}{2 + \cos x}$$

$$\text{គេបាន } I + J = \int \frac{4 \sin x \, dx}{2 + \cos x} + \int \frac{\sin 2x \, dx}{2 + \cos x} = \int \frac{4 \sin x + \sin 2x}{2 + \cos x} dx$$

$$I + J = \int \frac{4 \sin x + 2 \sin x \cos x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{2 \sin x (2 + \cos x)}{2 + \cos x} dx$$

$$\text{ដូចនេះ } I + J = 2 \int \sin x \, dx \quad \text{ពិត ។}$$

$$\text{យើងបាន } I + J = 2 \int \sin x \, dx = 2(-\cos x) + C = -2\cos x + C \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } I + J = -2\cos x + C \quad \text{។}$$

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ៖

$$\text{យើងមាន } I = \int \frac{4 \sin x}{2 + \cos x} dx = -4 \int \frac{(2 + \cos x)'}{2 + \cos x} dx$$

ដូចនេះ $I = -4 \ln(2 + \cos x) + C_1$ ។

តាម $I + J = -2 \cos x + C$ នោះ $J = -I - 2 \cos x + C$

ដូចនេះ $J = 4 \ln(2 + \cos x) - 2 \cos x + C_2$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកគណនា K ៖

គេមាន $K = \int \frac{\sin x \cos 2x}{(2 + \cos x)^2} dx$

តាង $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)^2} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = -2 \sin 2x \\ v = \frac{1}{2 + \cos x} \end{cases}$

គេបាន $K = \frac{\cos 2x}{2 + \cos x} + 2 \int \frac{\sin 2x}{2 + \cos x} dx = \frac{\cos 2x}{2 + \cos x} + 2J$

ដូចនេះ $K = \frac{\cos 2x}{2 + \cos x} + 8 \ln(2 + \cos x) - 4 \cos x + C_3$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$I = \int \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x + \sin x} dx$ និង $J = \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx$

ក.គណនា $I + J$ និង $I - J$ រួចទាញរក I និង J ។

ខ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនា ៖

$K = \int \frac{(x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx$

$$L = \int \frac{(x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $I + J$ និង $I - J$ រួចទាញរក I និង J

យើងមាន $I = \int \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x + \sin x} dx$ និង $J = \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx$

យើងបាន $I + J = \int \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x + \sin x} dx + \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx$

$$= \int \frac{(1 + \cos x) + (1 + \sin x)}{2 + \cos x + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{2 + \cos x + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx = \int dx = x + C_1$$

ដូចនេះ $I + J = x + C_1$ ។

យើងបាន $I - J = \int \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x + \sin x} dx - \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx$

$$= \int \frac{(1 + \cos x) - (1 + \sin x)}{2 + \cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{(2 + \cos x + \sin x)'}{(2 + \cos x + \sin x)} dx = \ln |2 + \cos x + \sin x| + C_2$$

ដូចនេះ $I - J = \ln |2 + \cos x + \sin x| + C_2$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\begin{cases} I + J = x + C_1 \\ I - J = \ln |2 + \cos x + \sin x| + C_2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេបាន ៖

$$I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln |2 + \cos x + \sin x| + C_3$$

$$J = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln |2 + \cos x + \sin x| + C_4$$

ខ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកគណនា ៖

$$K = \int \frac{(x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx$$

$$\text{តាង} \begin{cases} u = x - \cos x \\ dv = \frac{\cos x - \sin x}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = (1 + \sin x)dx \\ v = -\frac{1}{2 + \cos x + \sin x} \end{cases}$$

$$K = -\frac{x - \cos x}{2 + \cos x + \sin x} + \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} dx = -\frac{x - \cos x}{2 + \cos x + \sin x} + J$$

$$\text{ដូចនេះ} \quad K = -\frac{x - \cos x}{2 + \cos x + \sin x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln |2 + \cos x + \sin x| + C_4 \quad \text{។}$$

$$L = \int \frac{(x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx$$

$$\text{តាង} \begin{cases} u = x + \sin x \\ dv = \frac{\cos x - \sin x}{(2 + \cos x + \sin x)^2} dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \begin{cases} du = (1 + \cos x)dx \\ v = -\frac{1}{2 + \cos x + \sin x} \end{cases}$$

$$L = -\frac{x + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} + \int \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x + \sin x} dx = -\frac{x + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} + I$$

$$\text{ដូចនេះ} \quad L = -\frac{x + \sin x}{2 + \cos x + \sin x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln |2 + \cos x + \sin x| + C_3 \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2\cos x \, dx}{1 + \sin x}$ និង $J = \int \frac{\sin 2x \, dx}{1 + \sin x}$

ក.គណនា $I + J$, I រួចទាញរក J ។

ខ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា ៖

$$K = \int \frac{\sin 2x \, dx}{(1 + \sin x)^2} \quad \text{និង} \quad L = \int \frac{\cos x \cos 2x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $I + J$, I រួចទាញរក J ៖

$$\text{យើងមាន } I = \int \frac{2\cos x \, dx}{1 + \sin x} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{\sin 2x \, dx}{1 + \sin x}$$

$$\text{យើងបាន } I + J = \int \frac{2\cos x}{1 + \sin x} dx + \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{2\cos x + \sin 2x}{1 + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{2\cos x + 2\sin x \cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{2\cos x (1 + \sin x)}{1 + \sin x} dx$$

$$= \int 2\cos x \, dx = 2\sin x + C$$

ដូចនេះ $I + J = 2\sin x + C$

ម្យ៉ាងទៀត $I = \int \frac{2\cos x dx}{1 + \sin x} = 2 \int \frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} dx = 2\ln |1 + \sin x| + C_1$

ដូចនេះ $I = 2\ln |1 + \sin x| + C_1$ ។

តាម $I + J = 2\sin x + C$ គេទាញបាន $J = -I + 2\sin x + C$

ដូចនេះ $J = -2\ln |1 + \sin x| + 2\sin x + C_2$ ។

ខ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា ៖

$$K = \int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \sin x)^2} = \int \frac{2\sin x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

តាង $\begin{cases} u = 2\sin x \\ dv = \frac{\cos x dx}{(1 + \sin x)^2} \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = 2\cos x dx \\ v = -\frac{1}{1 + \sin x} \end{cases}$

គេបាន $K = -\frac{2\sin x}{1 + \sin x} + \int \frac{2\cos x dx}{1 + \sin x} = -\frac{2\sin x}{1 + \sin x} + I$

ដូចនេះ $K = -\frac{2\sin x}{1 + \sin x} + 2\ln |1 + \sin x| + C_3$

$$L = \int \frac{\cos x \cos 2x}{(1 + \sin x)^2} dx = \int (\cos 2x) \frac{\cos x dx}{(1 + \sin x)^2}$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} du = -2 \sin 2x \\ v = -\frac{1}{1 + \sin x} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } L = -\frac{\cos 2x}{1 + \sin x} - 2 \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} dx = -\frac{\cos 2x}{1 + \sin x} - 2J$$

$$\text{ដូចនេះ } L = -\frac{\cos 2x}{1 + \sin x} + 4 \ln |1 + \sin x| - 4 \sin x + C_4 \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៥៨

$$\text{គេឲ្យអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 + 1)^3} dx \quad \text{។}$$

$$\text{ចូរគណនា } I \text{ ដោយតាង } u = x^3 - 3x \text{ និង } dv = \frac{xdx}{(x^2 + 1)^3} \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា I ៖

$$\text{គេមាន } I = \int \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 + 1)^3} dx \quad \text{តាង } \begin{cases} u = x^3 - 3x \\ dv = \frac{xdx}{(x^2 + 1)^3} \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = 3(x^2 - 1)dx \\ v = -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } I = -\frac{x^3 - 3x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{x^3 - 3x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{(1 - \frac{1}{x^2})dx}{(x + \frac{1}{x})^2} \\
 &= -\frac{x^3 - 3x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{(x + \frac{1}{x})' dx}{(x + \frac{1}{x})^2} \\
 &= -\frac{x^3 - 3x}{4(x^2 + 1)^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} + C
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = -\frac{x^3 - 3x}{4(x^2 + 1)^2} - \frac{3x}{4(x^2 + 1)} + C$ ។

WWW.MATHTODAY.WORDPRESS.COM

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(x^2 + 2x)(1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} dx$ ។

ក.ដោយតាង $u = x^2 + 2x$ និង $dv = \frac{1 - e^{-x}}{(x + e^{-x})^2} dx$ និងប្រើអាំងតេក្រាល

តាមផ្នែកចូរស្រាយថា $I = -\frac{x^2 + 2x}{x + e^{-x}} + 2 \int \frac{(x + 1)e^x}{1 + xe^x} dx$ ។

ខ. គេយក $t = 1 + xe^x$ គណនា $\frac{dt}{dx}$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃអាំងតេក្រាល I ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $I = -\frac{x^2 + 2x}{x + e^{-x}} + 2 \int \frac{(x+1)e^x}{1 + xe^x} dx$

គេមាន $I = \int \frac{(x^2 + 2x)(1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} dx$

តាង $\begin{cases} u = x^2 + 2x \\ dv = \frac{1 - e^{-x}}{(x + e^{-x})^2} dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx \\ v = -\frac{1}{x + e^{-x}} = -\frac{e^x}{1 + xe^x} \end{cases}$

គេបាន $I = -\frac{(x^2 + 2x)e^x}{1 + xe^x} + 2 \int \frac{(x+1)e^x}{1 + xe^x} dx$

ដូចនេះ $I = -\frac{x^2 + 2x}{x + e^{-x}} + 2 \int \frac{(x+1)e^x}{1 + xe^x} dx$ ពិត។

ខ. គេយក $t = 1 + xe^x$ គណនា $\frac{dt}{dx}$

គេមាន $t = 1 + xe^x$ នោះ $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(1 + xe^x) = (x + 1)e^x$

ដូចនេះ $\frac{dt}{dx} = (x + 1)e^x$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃអាំងតេក្រាល I ៖

គេមាន $I = -\frac{(x^2 + 2x)e^x}{1 + xe^x} + 2 \int \frac{(x+1)e^x}{1 + xe^x} dx$ (សម្រាយខាងលើ)

តាង $t = 1 + xe^x$ នោះ: $\frac{dt}{dx} = (x+1)e^x$ ឬ $dt = (x+1)e^x dx$

គេបាន $I = -\frac{(x^2 + 2x)e^x}{1 + xe^x} + 2 \int \frac{dt}{t} = -\frac{(x^2 + 2x)e^x}{1 + xe^x} + 2 \ln |t| + C$

ដូចនេះ: $I = -\frac{(x^2 + 2x)e^x}{1 + xe^x} + 2 \ln |1 + xe^x| + C$ ។

លំហាត់ទី៦០

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $I = \int x^n (\ln x)^2 dx$, $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $I = \int x^n (\ln x)^2 dx$, $n \in \mathbb{N}$

តាង $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x^n dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

គេបាន $I = \frac{x^{n+1} (\ln x)^2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int x^n \ln x dx$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^n dx \end{cases}$ នោះ: $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

គេបាន $I = \frac{x^{n+1}(\ln x)^2}{n+1} - \frac{2x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \int x^n dx$

ដូចនេះ $I = \frac{x^{n+1}(\ln x)^2}{n+1} - \frac{2x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3} + C$ ។

លំហាត់ទី៦១

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2} \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right) dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx \quad \text{ដោយ} \quad \begin{cases} 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

$$= \int \frac{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int (2 \sin x) \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

តាង $\begin{cases} u = 2 \sin x \\ dv = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = 2 \cos x dx \\ v = \frac{1}{\sin x + \cos x} \end{cases}$

គេបាន $I = \frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} - \int \frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

ដោយ $\frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x} = 1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ នោះគេបាន ៖

$$I = \frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} - \int dx - \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I = \frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} - x + \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx$$

ដូចនេះ $I = \frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x} - x + \ln |\sin x + \cos x| + C$ ។

មាន $J = \int \frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2} \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right) dx = \int [x - \ln(x+1)] \frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2} dx$

តាង $\begin{cases} u = x - \ln(x+1) \\ dv = \frac{2x+1}{(2x^2+2x+1)^2} dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = (1 - \frac{1}{x+1})dx = \frac{xdx}{x+1} \\ v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2+2x+1} \end{cases}$

គេបាន $J = -\frac{x - \ln(x+1)}{2(2x^2+2x+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{x}{(x+1)(2x^2+2x+1)} dx$

គេមាន $\frac{x}{(x+1)(2x^2+2x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{2x^2+2x+1}$

គេបាន $x = a(2x^2+2x+1) + (x+1)(bx+c)$

$$x = (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + (a+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2a+b=0 \\ a+c=0 \\ 2a+b+c=1 \end{cases}$ សមមូល $a=-1, b=2, c=1$ ។

គេបាន $\frac{x}{(x+1)(2x^2+2x+1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$

នោះ $J = -\frac{x - \ln(x+1)}{2(2x^2+2x+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} dx$

$$J = -\frac{x - \ln(x+1)}{2(2x^2 + 2x + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx + \frac{1}{4} \int \frac{(2x^2 + 2x + 1)'}{(2x^2 + 2x + 1)} dx$$

ដូចនេះ $J = -\frac{x - \ln(x+1)}{2(2x^2 + 2x + 1)} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 2x + 1) + C$ ។

លំហាត់ទី៦២

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{\ln x dx}{(x+2)^2} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{\cos x \sin x}{(2 - \sin x)^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \frac{\ln x dx}{(x+2)^2} \quad \text{តាង} \quad \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \quad \text{នោះ} \quad \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+2} \end{cases}$$

គេបាន $I = -\frac{\ln x}{x+2} + \int \frac{dx}{x(x+2)}$

$$= -\frac{\ln x}{x+2} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x+2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x+2) + C$$

ដូចនេះ $I = -\frac{\ln x}{x+2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x+2) + C$ ។

$$J = \int \frac{\cos x \sin x}{(2 - \sin x)^2} dx = \int \sin x \frac{\cos x dx}{(2 - \sin x)^2}$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = \int \frac{\cos x dx}{(2 - \sin x)^2} \end{cases} \quad \text{នោះ } \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = \frac{1}{2 - \sin x} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = \frac{\sin x}{2 - \sin x} - \int \frac{\cos x dx}{2 - \sin x} = \frac{\sin x}{2 - \sin x} + \int \frac{(2 - \sin x)'}{(2 - \sin x)} dx$$

$$\text{ដូចនេះ } J = \frac{\sin x}{2 - \sin x} + \ln(2 - \sin x) + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៦៣

$$\text{គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{(2x - 3)\ln x}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int \frac{(2x - 3)\ln x}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx \quad \text{តាង } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx \end{cases} \quad \text{នោះ } \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= -\frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} + \int \frac{dx}{x(x^2 - 3x + 2)} \\ &= -\frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{dx}{x(x - 1)(x - 2)} \\ &= -\frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} + \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2(x - 2)} \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = -\frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{2} \ln |x| - \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln |x - 2| + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(x+4)(3x^2+2x+1)}{x(x^2+x+1)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \quad ។$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $x(x^2+x+1)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$2x+4 = a(x^2+x+1) + x(bx+c)$$

$$2x+4 = (a+b)x^2 + (a+c)x + a$$

$$\text{គេទាញបាន} \begin{cases} a = 4 \\ a+b = 0 \\ a+c = 2 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad a = 4, b = -4, c = -2 \quad ។$$

ដូចនេះ $a = 4, b = -4, c = -2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ៖

គេមាន $I = \int \frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a = 4$, $b = -4$, $c = -2$ គេបាន ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} = \frac{4}{x} + \frac{-4x-2}{x^2+x+1} = \frac{4}{x} - \frac{2(2x+1)}{x^2+x+1}$$

យើងបាន $I = 4 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 4 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)} dx$

ដូចនេះ $I = 4 \ln |x| - 2 \ln(x^2+x+1) + C$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្អែកគណនា $J = \int \frac{(x+4)(3x^2+2x+1)}{x(x^2+x+1)^2} dx$

យើងបាន $J = \int \frac{(x+4)(3x^2+2x+1)}{x(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{x(x+4)(3x^2+2x+1)}{x^2(x^2+x+1)^2} dx$

$$J = \int (x^2+4x) \frac{(3x^2+2x+1)dx}{(x^3+x^2+x)^2}$$

តាង $\begin{cases} u = x^2+4x \\ dv = \frac{(3x^2+2x+1)dx}{(x^3+x^2+x)^2} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = (2x+4)dx \\ v = -\frac{1}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{x(x^2+x+1)} \end{cases}$

គេបាន $J = -\frac{x+4}{x^2+x+1} + \int \frac{2x+4}{x(x^2+x+1)} dx = -\frac{x+4}{x^2+x+1} + I$

ដូចនេះ $J = -\frac{x+4}{x^2+x+1} + 4 \ln |x| - 2 \ln(x^2+x+1) + C$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(x+4)(3x^2+4x+2)}{x(x^2+2x+2)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2} \quad ។$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c

$$\frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $x(x^2+2x+2)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$2x+4 = a(x^2+2x+2) + x(bx+c)$$

$$2x+4 = (a+b)x^2 + (2a+c)x + 2a$$

$$\text{គេទាញបាន} \begin{cases} 2a = 4 \\ a+b = 0 \\ 2a+c = 2 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad a = 2, b = -2, c = -2 \quad ។$$

ដូចនេះ $a = 2, b = -2, c = -2$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ៖

$$\text{គេមាន } I = \int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} dx$$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2$, $b=-2$, $c=-2$ គេបាន ៖

$$\frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2} = \frac{2}{x} - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

$$\text{យើងបាន } I = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)} dx$$

$$\text{ដូចនេះ } I = 2 \ln |x| - \ln(x^2+2x+2) + C \quad \forall$$

$$\text{គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្អែកគណនា } J = \int \frac{(x+4)(3x^2+4x+2)}{x(x^2+2x+2)^2} dx$$

$$\text{យើងបាន } J = \int \frac{(x+4)(3x^2+4x+2)}{x(x^2+2x+2)^2} dx = \int \frac{x(x+4)(3x^2+4x+2)}{x^2(x^2+2x+2)^2} dx$$

$$J = \int (x^2+4x) \frac{(3x^2+4x+2)dx}{(x^3+2x^2+2x)^2}$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x^2+4x \\ dv = \frac{(3x^2+4x+2)dx}{(x^3+2x^2+2x)^2} \end{cases} \quad \text{នោះ } \begin{cases} du = (2x+4)dx \\ v = -\frac{1}{x^3+2x^2+2x} = -\frac{1}{x(x^2+2x+2)} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = -\frac{x+4}{x^2+2x+2} + \int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)} dx = -\frac{x+4}{x^2+2x+2} + I$$

$$\text{ដូចនេះ } J = -\frac{x+4}{x^2+2x+2} + 2 \ln |x| - \ln(x^2+2x+2) + C \quad \forall$$

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{x-2}{x(x^2-x+1)} dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(x-2\ln x)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{x-2}{x(x^2-x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ៖

$$\frac{x-2}{x(x^2-x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $x(x^2-x+1)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$x-2 = a(x^2-x+1) + x(bx+c) = (a+b)x^2 + (-a+c)x + a$$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} a = -2 \\ -a+c = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad a = -2, b = 2, c = -1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $a = -2, b = 2, c = -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ៖

គេមាន
$$I = \int \frac{x-2}{x(x^2-x+1)} dx$$

ចំពោះ $a = -2$, $b = 2$, $c = -1$ គេមាន
$$\frac{x-2}{x(x^2-x+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

យើងបាន
$$I = -2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = -2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx$$

ដូចនេះ $I = -2 \ln |x| + \ln |x^2-x+1| + C$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា J ៖

យើងមាន
$$J = \int \frac{(x-2 \ln x)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} dx = \int (x-2 \ln x) \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx$$

តាង
$$\begin{cases} u = x - 2 \ln x \\ dv = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx \end{cases} \quad \text{នាំឲ្យ} \quad \begin{cases} du = (1 - \frac{2}{x}) dx = \frac{x-2}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x^2-x+1} \end{cases}$$

យើងបាន
$$J = -\frac{x-2 \ln x}{x^2-x+1} + \int \frac{x-2}{x(x^2-x+1)} dx = -\frac{x-2 \ln x}{x^2-x+1} + I$$

ដោយ $I = -2 \ln |x| + \ln |x^2-x+1| + C$

ដូចនេះ $J = -\frac{x-2 \ln x}{x^2-x+1} - 2 \ln |x| + \ln |x^2-x+1| + C$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2 + x - 2)} \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{(2x + 1)\ln x}{(x^2 + x - 2)^2} dx$$

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 2} \quad \text{។}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា J ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c

$$\text{យើងមាន} \quad \frac{1}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 2}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$1 = a(x - 1)(x + 2) + bx(x + 2) + cx(x - 1) \quad (1)$$

ចំពោះ $x = 0$ សមភាព(1) ទៅជា $1 = -2a$ នោះគេទាញបាន $a = -\frac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x = 1$ សមភាព(1) ទៅជា $1 = 3b$ នោះគេទាញបាន $b = \frac{1}{3}$ ។

ចំពោះ $x = -2$ សមភាព(1) ទៅជា $1 = 6c$ នោះគេទាញបាន $c = \frac{1}{6}$ ។

ដូចនេះ $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{6}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល I ៖

គេមាន $I = \int \frac{dx}{x(x^2 + x - 2)}$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{6}$ គេបានសមភាព៖

$$\frac{1}{x(x^2 + x - 2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{6(x+2)}$$

យើងបាន $I = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+2}$

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x-1| + \frac{1}{6} \ln |x+2| + C$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា J

គេមាន $J = \int \frac{(2x+1)\ln x}{(x^2 + x - 2)^2} dx = \int (\ln x) \frac{2x+1}{(x^2 + x - 2)^2} dx$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2x+1}{(x^2 + x - 2)^2} dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int \frac{2x+1}{(x^2 + x - 2)^2} dx = -\frac{1}{x^2 + x - 2} \end{cases}$

គេបាន $J = -\frac{\ln x}{x^2 + x - 2} + \int \frac{dx}{x(x^2 + x - 2)} = -\frac{\ln x}{x^2 + x - 2} + I$

ដូចនេះ $J = -\frac{\ln x}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x-1| + \frac{1}{6} \ln |x+2| + C$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x(x+1)}$ និង $J = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ ។

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែក។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$

ដោយតម្រូវភាគបែងរួម $x(x+1)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$1 = \alpha(x+1) + \beta x = (\alpha + \beta)x + \alpha \quad \text{នោះគេទាញ} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\alpha = 1$, $\beta = -1$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែក៖

$$\text{គេមាន } I = \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\text{ចំពោះ } \alpha = 1, \beta = -1 \text{ នោះ } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{យើងបាន } I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

ដូចនេះ $I = \ln |x| - \ln |x+1| + C = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$ ។

$$J = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$

យើងបាន $I = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\ln x}{x+1} + I$

ដូចនេះ $J = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$ ។

WWW.MATHTODAY.WORDPRESS.COM

លំហាត់ទី៦៩

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{a \sin x}{1 - \cos x} + \frac{b \sin x}{1 + \cos x} \quad \text{គ្រប់ } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{។}$$

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា $J = \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{a \sin x}{1 - \cos x} + \frac{b \sin x}{1 + \cos x} \quad \text{គ្រប់ } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{a \sin x(1 + \cos x) + b \sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{(a + b) \sin x + (a - b) \sin x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{សមមូល } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

ចំពោះ $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ គេមាន $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)'} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)'} dx \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \frac{1}{2} \ln |1 - \cos x| - \frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| + C \quad \text{។}$$

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $J = \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \end{cases} \quad \text{នោះ } \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x} + I$$

$$\text{ដូចនេះ } J = -\frac{x}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln |1 - \cos x| - \frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៦៩

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} \quad \text{គ្រប់ } x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{។}$$

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{\cos x}$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរគណនា $J = \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} \quad (1) \quad \text{គ្រប់ } x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} &= \frac{a \cos x(1 + \sin x) + b \cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{(a + b) \cos x + (a - b) \cos x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(a + b) + (a - b) \sin x}{\cos x} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{តាម(1) \& (2) គេទាញបាន } \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{សមមូល } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\text{ចំពោះ } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \text{គេមាន } \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right)$$

$$\text{គេបាន } I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + C
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + C$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $J = \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$

គេបាន $J = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - I$

ដូចនេះ $J = \frac{x}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 - \sin x| + C$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x + 2}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{x^2 - x + 2}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

គ.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $J = \int \frac{(2x^3 + 9x)(2x - 1)}{(x^2 - x + 2)^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{x^2 - x + 2}$

យើងមាន
$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x + 2} = \frac{2(x^2 - x + 2) + (2x - 1)}{x^2 - x + 2}$$

$$f(x) = 2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} \quad \text{ដោយ } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{x^2 - x + 2}$$

ដូចនេះ $a = 2, b = 2, c = -1$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ៖

យើងមាន $f(x) = 2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2}$ (សម្រាយខាងលើ)

យើងបាន
$$I = \int \left(2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} \right) dx = 2 \int dx + \int \frac{(x^2 - x + 2)'}{x^2 - x + 2} dx$$

ដូចនេះ $I = 2x + \ln(x^2 - x + 2) + C$ ។

គ.ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $J = \int \frac{(2x^3 + 9x)(2x - 1)}{(x^2 - x + 2)^2} dx$

តាង
$$\begin{cases} u = 2x^3 + 9x \\ dv = \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 2)^2} dx \end{cases} \quad \text{នោះ} \quad \begin{cases} du = 3(2x^2 + 3)dx \\ v = -\frac{1}{x^2 - x + 2} \end{cases}$$

គេបាន
$$J = -\frac{2x^3 + 9x}{x^2 - x + 2} + 3 \int \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x + 2} dx = -\frac{2x^3 + 9x}{x^2 - x + 2} + 3I$$

ដូចនេះ $J = -\frac{2x^3 + 9x}{x^2 - x + 2} + 6x + 3\ln(x^2 - x + 2) + C$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x^2 - 2x + 1}$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{2x^2 - 2x + 1}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

គ. ប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរទាញរក $J = \int \frac{(x-1)^3(2x-1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{2x^2 - 2x + 1}$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= \frac{2(x-1)^2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x^2 - 2x + 1} \\ &= \frac{(2x^2 - 2x + 1) - (2x - 1)}{2x^2 - 2x + 1} = 1 - \frac{2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

ដោយ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a + \frac{bx + c}{2x^2 - 2x + 1}$ នោះ $a = 1, b = -2, c = 1$ ។

ដូចនេះ $a = 1, b = -2, c = 1$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$

យើងមាន $f(x) = 1 - \frac{2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ (សម្រាយខាងលើ)

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } I &= \int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{2x-1}{2x^2-2x+1} \right) dx \\ &= \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{(2x^2-2x+1)'}{(2x^2-2x+1)} dx \\ &= x - \frac{1}{2} \ln(2x^2-2x+1) + C\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = x - \frac{1}{2} \ln(2x^2-2x+1) + C \quad \text{។}$$

$$\text{គ.ប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកទាញរក } J = \int \frac{(x-1)^3(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2} dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = (x-1)^3 \\ dv = \frac{2x-1}{(2x^2-2x+1)^2} dx \end{cases} \quad \text{នោះ: } \begin{cases} du = 3(x-1)^2 dx \\ v = -\frac{1}{2(2x^2-2x+1)} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = -\frac{(x-1)^3}{2(2x^2-2x+1)} + \frac{3}{2} \int \frac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1} dx$$

$$J = -\frac{(x-1)^3}{2(2x^2-2x+1)} + \frac{3}{4} I$$

$$\text{ដោយ } I = x - \frac{1}{2} \ln(2x^2-2x+1) + C \quad (\text{សម្រាយខាងលើ}) \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = -\frac{(x-1)^3}{2(2x^2-2x+1)} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \ln(2x^2-2x+1) + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៧២

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ

ក-ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3 + C}{1+x^4}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{4x^3 \ln x \cdot dx}{(1+x^4)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់បីចំនួនពិត A, B, C

$$\text{គេបាន } \frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3 + C}{1+x^4}$$

$$\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{A(1+x^4) + x(Bx^3 + C)}{x(1+x^4)}$$

$$1 = A + Ax^4 + Bx^4 + Cx$$

$$1 = (A+B)x^4 + Cx + A$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ } A=1, B=-1, C=0 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $A=1, B=-1, C=0$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) \cdot dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}$$

$$\text{គេបាន } I = \int f(x).dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4} \right).dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 dx}{1+x^4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \ln |x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C \quad \text{។}$$

$$\text{គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល } J = \int \frac{4x^3 \ln x .dx}{(1+x^4)^2}$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{4x^3 .dx}{(1+x^4)^2} \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ } \begin{cases} du = \frac{1}{x} .dx \\ v = \int \frac{4x^3 .dx}{(1+x^4)^2} = -\frac{1}{1+x^4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } J &= -\frac{\ln x}{1+x^4} - \int \left(-\frac{1}{1+x^4} \right) \cdot \frac{1}{x} .dx \\ &= -\frac{\ln x}{1+x^4} + \int \frac{dx}{x(1+x^4)} = -\frac{\ln x}{1+x^4} + I \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } I = \ln |x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = -\frac{\ln x}{1+x^4} + \ln |x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៧៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត។

ក-ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = A + \frac{Be^{2x}}{e^{2x} + 1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{2xe^{2x} dx}{(e^{2x} + 1)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់បីចំនួនពិត A & B

គេបាន $\frac{1}{e^{2x} + 1} = A + \frac{B.e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

$$\frac{1}{e^{2x} + 1} = \frac{A(e^{2x} + 1) + B.e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \frac{(A + B)e^{2x} + A}{e^{2x} + 1}$$

គេទាញ $\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A = 1$, $B = -1$ ។

ដូចនេះ $A = 1$, $B = -1$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A = 1$, $B = -1$ គេមាន $f(x) = 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

គេបាន $I = \int (1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}).dx = \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}.dx}{e^{2x} + 1} = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$

ដូចនេះ $I = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x} + 1)^2}$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x} + 1)^2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x} + 1)^2} = -\frac{1}{e^{2x} + 1} \end{cases}$

គេបាន $J = -\frac{x}{e^{2x} + 1} + \int \frac{dx}{e^{2x} + 1} = -\frac{x}{e^{2x} + 1} + I$ ដោយ $I = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$

ដូចនេះ $J = -\frac{x}{e^{2x} + 1} + x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x \cot x}{\sin^3 x} dx$ និង $J = \int \frac{x \tan x}{\cos^3 x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x \cot x}{\sin^3 x} dx$ និង $J = \int \frac{x \tan x}{\cos^3 x} dx$

យើងមាន $I = \int \frac{x \cot x}{\sin^3 x} dx = \int x \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = -\frac{1}{3\sin^3 x} \end{cases}$

យើងបាន $I = -\frac{x}{3\sin^3 x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sin^3 x}$

យក $I_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases} u = \frac{1}{\sin x} \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$

គេបាន $I_1 = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx$

$I_1 = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - I_1 + \int \frac{dx}{\sin x}$ ឬ $I_1 = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}$

ដោយ $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C_1$

នោះ $I_1 = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C_2$

$$\text{ដោយ } I = -\frac{x}{3\sin^3 x} + \frac{1}{3}I_1 \text{ និង } I_1 = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C_2$$

$$\text{ដូចនេះ } I = -\frac{x}{3\sin^3 x} - \frac{\cos x}{6\sin^2 x} - \frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C \quad \text{។}$$

$$\text{យើងមាន } J = \int \frac{x \tan x}{\cos^3 x} dx = \int x \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = \frac{x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$\text{យក } J_1 = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \frac{1}{\cos x} \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J_1 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$J_1 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - J_1 + \int \frac{dx}{\cos x} \quad \text{ឬ } J_1 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\text{ដោយ } \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C_1$$

$$\text{នោះ } J_1 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C_2$$

$$\text{ដោយ } J = \frac{x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}J_1 \text{ និង } J_1 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C_2$$

$$\text{ដូចនេះ } J = \frac{x}{3\cos^3 x} - \frac{\sin x}{6\cos^2 x} - \frac{1}{12}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៧៥

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{xe^x dx}{(e^x + 1)^2}$ និង $J = \int \frac{\ln(1+x^4)}{x^4} dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{xe^x dx}{(e^x + 1)^2}$ និង $J = \int \frac{\ln(1+x^4)}{x^4} dx$

យើងមាន $I = \int \frac{xe^x dx}{(e^x + 1)^2} = \int x \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2} = -\frac{1}{e^x + 1} \end{cases}$

$$I = -\frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{dx}{e^x + 1} = -\frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}}$$

ដោយ $\int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = -\int \frac{(1 + e^{-x})'}{(1 + e^{-x})} dx = -\ln(1 + e^{-x}) + C$

ដូច្នេះ $I = -\frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + C$ ។

$$J = \int \frac{\ln(1+x^4)}{x^4} dx = \int \ln(1+x^4) \frac{dx}{x^4}$$

តាង $\begin{cases} u = \ln(1+x^4) \\ dv = \frac{dx}{x^4} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = \frac{4x^3}{1+x^4} \\ v = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} \end{cases}$

គេបាន $J = -\frac{\ln(1+x^4)}{3x^3} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x^4 + 1}$

$$\text{យក } K = \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} - \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \right) dx$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + (\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } J = -\frac{\ln(1 + x^4)}{3x^3} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x^4 + 1} = -\frac{\ln(1 + x^4)}{3x^3} + \frac{4}{3} K$$

$$\text{ដូច្នេះ: } J = -\frac{\ln(1 + x^4)}{3x^3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right| + C$$

លំហាត់ទី៧៦

$$\text{គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \sqrt{\sin 2x} \cos x \, dx \text{ និង } J = \int \ln(x^4 + 1) dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int \sqrt{\sin 2x} \cos x \, dx$$

$$\text{គេមាន } \sin 2x = 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 1 - (\sin x - \cos x)^2$$

$$\text{ហើយ } \cos x = \frac{1}{2}[(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)]$$

$$\text{នោះយើងបាន } I = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2$$

$$\text{ដែល } I_1 = \int \sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2} (\sin x + \cos x) dx$$

$$\text{និង } I_2 = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1} (\cos x - \sin x) dx \quad ។$$

$$\text{ចំពោះ } I_1 = \int \sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2} (\sin x + \cos x) dx$$

$$\text{តាង } u = \sin x - \cos x \text{ នៅ: } du = (\sin x + \cos x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I_1 &= \int \sqrt{1 - u^2} du = \frac{u\sqrt{1 - u^2} + \arcsin u}{2} + C_1 \\ &= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\sqrt{\sin 2x} + \frac{1}{2}\arcsin(\sin x - \cos x) + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{ចំពោះ } I_2 = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1} (\cos x - \sin x) dx$$

$$\text{តាង } v = \sin x + \cos x \text{ នៅ: } dv = (\cos x - \sin x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I_2 &= \int \sqrt{v^2 - 1} dv = \frac{v\sqrt{v^2 - 1} - \ln |\sqrt{v^2 - 1} + v|}{2} + C_2 \\ &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\sqrt{\sin 2x} - \frac{1}{2}\ln |\sqrt{\sin 2x} + \sin x + \cos x| + C_2 \end{aligned}$$

$$J = \int \ln(x^4 + 1) dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \ln(x^4 + 1) \\ dv = dx \end{cases} \text{ នៅ: } \begin{cases} du = \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx \\ v = \int dx = x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = x \ln(x^4 + 1) - 4 \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 1} = x \ln(x^4 + 1) - 4 \int \left(1 - \frac{1}{x^4 + 1}\right) dx$$

$$J = x \ln(x^4 + 1) - 4x + 4 \int \frac{dx}{x^4 + 1} \quad \text{តាង } K = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$\text{គេបាន } K = \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} - \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \right) dx$$

$$K = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + (\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C_1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } J = x \ln\left(\frac{x^4 + 1}{e^4}\right) + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right) + C$$

លំហាត់ទី៧៧

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \ln(x^4 - x^2 + 1) dx$$

$$J = \int \frac{(\cos 2x + 2 \sin 2x) \ln(\cos x)}{(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x)^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int \ln(x^4 - x^2 + 1) dx$$

តាង $\begin{cases} u = \ln(x^4 - x^2 + 1) \\ dv = dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} dx \\ v = \int dx = x \end{cases}$

គេបាន $I = x \ln(x^4 - x^2 + 1) - \int \frac{4x^4 - 2x^3}{x^4 - x^2 + 1} dx$

មាន $\frac{4x^4 - 2x^3}{x^4 - x^2 + 1} = 4 - \frac{2x^3}{x^4 - x^2 + 1} + \frac{4(x^2 - 1)}{x^4 - x^2 + 1}$

នោះ $I = x \ln(x^4 - x^2 + 1) - 4x + \int \frac{2x^3 dx}{x^4 - x^2 + 1} - 4 \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$

យក $I_1 = \int \frac{2x^3 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ និង $I_2 = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$

ចំពោះ $I_1 = \int \frac{2x^3 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ តាង $t = x^2$ នោះ $dt = 2x dx$

គេបាន $I_1 = \int \frac{t dt}{t^2 - t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2t - 1) + 1}{t^2 - t + 1} dt$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2t - 1) dt}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - t + 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{d(t - \frac{1}{2})}{(t - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^4 - x^2 + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1
 \end{aligned}$$

ចំពោះ $I_2 = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{(1 - \frac{1}{x^2})dx}{(x + \frac{1}{x})^2 - 3} = \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - (\sqrt{3})^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 - x\sqrt{3} + 1}{x^2 + x\sqrt{3} + 1}\right) + C_2$$

ដូច្នេះ $I = x \ln(x^4 - x^2 + 1) - 4x + I_1 - 4I_2$

$$I = (x + \frac{1}{2}) \ln\left(\frac{x^4 - x^2 + 1}{e^4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{2} \ln\left(\frac{x^2 - x\sqrt{3} + 1}{x^2 + x\sqrt{3} + 1}\right) + C$$

$$J = \int \frac{(\cos 2x + 2 \sin 2x) \ln(\cos x)}{(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x)^2} dx$$

ដោយ $\frac{d}{dx}(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x) = -2(\cos 2x + 2 \sin 2x)$

យើងតាង $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \frac{(\cos 2x + 2 \sin 2x) dx}{(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x)^2} \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} du = -\tan x dx \\ v = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} \end{cases}$ គេបាន ៖

$$J = -\frac{\ln(\cos x)}{2(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x)} - \frac{1}{2} \int \frac{\tan x dx}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$$

$$\text{យក } K = \int \frac{\tan x dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$$

$$K = \int \frac{\tan x}{\tan^2 x - 2\tan x + 5} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{តាង } t = \tan x \quad \text{នោះ } dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{គេបាន } K = \int \frac{t dx}{t^2 - 2t + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 5} + \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 5}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(t^2 - 2t + 5) + \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(t^2 - 2t + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t-1}{2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{2} \ln(\tan^2 x - 2\tan x + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x - 1}{2}\right) + C_1$$

$$\text{ដូចនេះ } J = -\frac{\ln(\cos x)}{2(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 5\cos^2 x)} - \frac{1}{2} K$$

$$\text{ដែល } K = \frac{1}{2} \ln(\tan^2 x - 2\tan x + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x - 1}{2}\right) + C_1 \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៧៨

$$\text{គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x \cot x} dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\text{គេមាន } I = \int \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x \cot x} dx = \int \ln(\sin x + \cos x) \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = \ln(\sin x + \cos x) \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \end{cases} \quad \text{នោះ } \begin{cases} du = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ v = \frac{1}{2\cos^2 x} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } I = \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$I = \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{យក } I_1 = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{តាង } t = \tan x \quad \text{នោះ } dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{គេបាន } I_1 = \int \frac{1-t}{1+t} dt = \int \left(\frac{2}{1+t} - 1 \right) dt = 2\ln|1+t| - t + C_1$$

$$I_1 = -\tan x + 2\ln|1 + \tan x| + C_1$$

$$\text{ដូច្នេះ } I = \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\tan x - \ln|1 + \tan x| + C \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៧៩

$$\text{គេឲ្យអាំងតេក្រាល } I = \int \sqrt{\tan x} dx \quad \text{និង } J = \int \sqrt{\cos x} dx$$

គណនា $I + J$ និង $I - J$ រួចទាញរក I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{គណនា } I + J \quad \text{និង } I - J$$

$$\text{យើងមាន } I = \int \sqrt{\tan x} dx \quad \text{និង } J = \int \sqrt{\cos x} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{យើងបាន } I + J &= \int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx \\
 &= \int \left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} \right) dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx \\
 &= \sqrt{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx = \sqrt{2} \int \frac{(\sin x - \cos x)' dx}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} \\
 &= \sqrt{2} \arcsin(\sin x - \cos x) + C_1
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I + J = \sqrt{2} \arcsin(\sin x - \cos x) + C_1$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{យើងបាន } I - J &= \int (\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x}) dx \\
 &= \int \left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} - \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} \right) dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx \\
 &= \sqrt{2} \int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx = -\sqrt{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)' dx}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}} \\
 &= -\sqrt{2} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + C_2
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I - J = -\sqrt{2} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + C_2$ ។

ទាញរក I និង J

$$\text{យើងមាន } \begin{cases} I + J = \sqrt{2} \arcsin(\sin x - \cos x) + C_1 \\ I - J = -\sqrt{2} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + C_2 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើនេះគេទទួលបាន ៖

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arcsin(\sin x - \cos x) - \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| \right] + C_3$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arcsin(\sin x - \cos x) + \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| \right] + C_4$$

លំហាត់ទី៨០

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^3 e^{-x} dx}{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល

$I = \int \frac{x^3 e^{-x} dx}{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)^2}$ គុណភាគយកនឹងភាគបែងនឹង e^{2x} គេបាន ៖

$$I = \int \frac{x^3 e^x dx}{[(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x]^2}$$

តាង $u = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$ នោះ $du = x^3 e^x dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$ ។

ដូចនេះ $I = -\frac{1}{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x} + C$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៤

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសបន្ថែមសម្រាប់សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង

០១. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int (4x - 3) dx$$

$$\text{ខ. } I = \int (x + 5) dx$$

$$\text{គ. } I = \int (3x + 5) dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int (4x + 7) dx$$

$$\text{ង. } I = \int 12x^2 dx$$

$$\text{ច. } I = \int 8x^3 dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int (3x^2 + 4) dx$$

$$\text{ជ. } I = \int (5x^4 + 8x) dx$$

$$\text{ណ. } I = \int (3x^2 + 8x + 1) dx$$

$$\text{ញ. } I = \int (8x^3 + 6x^2 + 2x) dx$$

០២. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int x^3 (x^2 + 5x) dx$$

$$\text{ខ. } I = \int x^4 (x^2 - x + 2) dx$$

$$\text{គ. } I = \int (x + 2)^2 dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int (x + 2)(2x - 3) dx$$

$$\text{ង. } I = \int (x^2 - x)(2x + 3) dx$$

$$\text{ច. } I = \int x^3 (x - 2)^2 dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int x^2 (x + 1)^3 dx$$

$$\text{ជ. } I = \int (2x^2 - 3x)^2 dx$$

$$\text{ណ. } I = \int x^3 (x^2 + 2)^2 dx$$

$$\text{ញ. } I = \int (x - 4)(x + 2)^2 dx$$

០៣. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{dx}{x^5}$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2 - x + 1}{x} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{(x + 1)^3}{x^2} dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{(x - 2)(x + 1)^2}{x^4} dx$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{(2x^2 + 3)^2}{x^3} dx$$

០៤. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$\text{គ. } I = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}\right) dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int (\sqrt{x} - 3)^2 dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{x + 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{(x - 3)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{(x - \sqrt{x})^2}{x^3} dx$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

០៥. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \sin 2x dx$$

$$\text{ខ. } I = \int (\sin x + \cos x) dx$$

$$\text{គ. } I = \int (2 \cos 2x - \sin x) dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int (\cos 3x + \sin 4x) dx$$

$$\text{ង. } I = \int (3 \sin 3x - \sin x) dx$$

$$\text{ច. } I = \int (\sin x - 4 \cos 4x) dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int (\sin x + \cos x)^2 dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{dx}{\sin^2 3x}$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{dx}{\cos^2 2x}$$

$$\text{ញ. } I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx$$

០៦. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \sin^2 x dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \cos^2 x dx$$

$$\text{គ. } I = \int \sin^3 x dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \cos^3 x dx$$

$$\text{ង. } I = \int \tan^2 x dx$$

$$\text{ច. } I = \int \cot^2 x dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \tan 2x dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \cot 3x dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int (1 + 2 \sin x)^2 dx$$

$$\text{ញ. } I = \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\cos x} \right)^2 dx$$

០៧. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int (1 + \tan x)^2 dx$$

$$\text{ខ. } I = \int (1 + \cot x)^2 dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{2 \cos^3 x - 4 \sin 2x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{4 \sin^3 x - 3 \sin 2x + 1}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \sin x \sin 3x dx$$

$$\text{ច. } I = \int \cos 2x \cos 4x dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \sin 3x \cos 5x dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{1 + 2 \cos x} dx$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{\cos 5x - \cos x}{1 + 2 \cos 3x} dx$$

០៨. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int e^{2x} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int e^{-3x} dx$$

$$\text{គ. } I = \int (e^x + e^{3x}) dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$\text{ង. } I = \int e^{2x} (e^{3x} + 1) dx$$

$$\text{ច. } I = \int e^{3x} (e^x + 1)^2 dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int (e^{2x} - e^{-2x})^2 dx$$

$$\text{ជ. } I = \int (e^x + 1)^3 dx$$

$$\text{ឈ. } I = \int e^{2x} (e^x - e^{-x})^2 dx$$

$$\text{ញ. } I = \int (e^{2x} + e^{-2x})^3 dx$$

០៩. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{x dx}{x+1}$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x-2}{x+2} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{2x+3}{x-1} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{4x-3}{2x+1} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{3x-2}{x+1} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{6x+1}{3x-2} dx$$

១០. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2 dx}{x+1}$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x^2 - x + 1}{x-2} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2 + 1}{x-2} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x^2 + 3x}{x-2} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} dx$$

១១. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x-7}{(x-1)(x-3)} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{2x-3}{(x+1)(x-4)} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{3x+4}{(x-2)(x+3)} dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{3x+4}{x(x+4)} dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{5x-6}{x(2x-3)} dx$$

១២. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{2x^2-7x+3}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2-3x+3}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x^2-5x}{(x-1)(x+3)} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)(x-2)} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2-5x+7}{(x-2)(x-3)} dx$$

១៣. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int \frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{3(x^2-2x+3)}{(x+1)(x-2)^2} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{3x^2+7x-10}{(x-2)(x+2)^2} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x^2-9x+10}{(x-1)(x-3)^2} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{4x^2+9x-7}{(x-2)(x+1)^2} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{2x^2+9x-1}{(x-2)(x+3)^2} dx$$

១៤. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{x-1}{x+1} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{2x-3}{x+2} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{4x-1}{2x+3} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x-1}{x-2} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{2x+3}{x-3} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{12x}{3x-2} dx$$

១៥. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 4} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 3} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x^2 - x + 4}{x + 1} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{2x^2 - 5x + 3}{x + 1} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{(2x - 3)^2}{x - 1} dx$$

១៦. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{5(x + 1)}{(x - 2)(x + 3)} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{3x - 2}{(x + 1)(x - 4)} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{3x - 1}{(x + 1)(x - 3)} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{6x - 2}{(x - 1)(x + 1)} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x - 5}{(x - 2)(x - 3)} dx$$

១៧. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{2x^2 - 2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{x^2 + 4x - 3}{(x + 1)(x - 2)} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 2)(x - 3)} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x^2 - 5x + 2}{(x - 1)(x - 3)} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2 + 5x + 2}{(x - 1)(x + 3)} dx$$

១៨. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x - 1)(x + 1)^2} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{3x^2 + 7x - 10}{(x - 2)(x + 2)^2} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x + 1)(x - 2)^2} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x^2 - 9x + 10}{(x - 1)(x - 3)^2} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{4x^2 + 9x - 7}{(x-2)(x+1)^2} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{2x^2 + 9x - 1}{(x-2)(x+3)^2} dx$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{3x^2 - 5x - 4}{(x+1)(x-1)^2} dx$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x+2)(x-2)^2} dx$$

១៩.គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{4x^2 + x + 3}{(x-1)(x^2 + x + 2)} dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)(x^2 - x + 1)} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{5x^2 - 10x + 8}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} dx$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{4x^2 - 7x + 3}{(x+1)(x^2 - 3x + 3)} dx$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{5x^2 - 2x}{(x-3)(x^2 + x + 1)} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)(x^2 - x + 1)} dx$$

២០.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 8}{(x-1)(x+1)(x-3)}$

ដែល $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$ ។

២១.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} dx$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \sin x}}$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 2}}$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x)^2} dx$$

២២.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx$$

$$\text{គ. } \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot dx$$

$$\text{ង. } \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}} \cdot dx$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} \cdot dx$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} \cdot dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \cdot dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x} \cdot dx$$

$$\text{ច. } \int \frac{\sin 2x \cdot dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$\text{ជ. } \int \frac{\sin 2x \cdot dx}{3 - 4 \sin^2 x}$$

$$\text{ញ. } \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x}} \cdot dx$$

២៣.គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } \int \sin^4 x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\text{គ. } \int \cos^5 x \sin x \cdot dx$$

$$\text{ង. } \int \sin^2 x \cos^3 x$$

$$\text{ឆ. } \int \sin^3 x \cdot dx$$

$$\text{ឈ. } \int \cos^5 x \cdot dx$$

$$\text{ខ. } I = \int \sin x \cos^6 x \cdot dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot dx$$

$$\text{ច. } \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\cos x + \sin x}} \cdot dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} \cdot dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} \cdot dx$$

២៤.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \sin^5 x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\text{គ. } \int \cos^7 x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\text{ង. } \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$$

$$\text{ខ. } \int \sin^n x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\text{ឃ. } \int \sin^n x \cdot \cos^3 x \cdot dx$$

$$\text{ច. } \int \cos^n x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\text{ឆ. } \int \cos^7 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$$

$$\text{ជ. } \int \cos^n x \cdot \sin^3 x \cdot dx$$

$$\text{ឈ. } \int \cos^4 x \cdot \sin^5 x \cdot dx$$

$$\text{ញ. } \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

២៥. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} \cdot dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\sin^8 x}{\cos^{10} x} \cdot dx$$

$$\text{គ. } \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} \cdot dx$$

$$\text{ឃ. } \int \sin^5 x \cdot dx$$

$$\text{ង. } \int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} \cdot dx$$

$$\text{ច. } \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x} \cdot dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{e^{\sqrt{x}} + \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \cdot dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{(x^2 + 1) \cdot dx}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}}$$

២៦. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \cdot dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{x^9}{1 + x^5} \cdot dx$$

$$\text{គ. } \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{x^7 \cdot dx}{\sqrt[3]{(x^4 + 1)^2}}$$

$$\text{ង. } \int \frac{\ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot dx$$

$$\text{ច. } \int \frac{(1 + e^x) \cdot dx}{(x + e^x)^2}$$

$$\text{ឆ. } \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x \cdot dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{e^x \cdot dx}{1 + e^x}$$

$$\text{ឈ. } \int e^{-x^2+2x} \cdot (x-1) \cdot dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{e^x \cdot dx}{(1+e^x)^2}$$

២៧. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{1+\sin x}{\sqrt{x-\cos x}} \cdot dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$\text{គ. } \int \frac{\sin 2x}{e^{\cos^2 x}} \cdot dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{(x+1) \cdot e^x}{1+xe^x} \cdot dx$$

$$\text{ង. } \int \frac{(1-x) \cdot dx}{x+e^x}$$

$$\text{ច. } \int \frac{x \cdot dx}{x^4-1}$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{1+\ln x}{1+x^{-x}} \cdot dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{\cos x \cdot dx}{2-\cos^2 x}$$

$$\text{ឈ. } \int e^{x+e^x} \cdot dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{\sin x \cdot dx}{5-\sin^2 x}$$

២៨. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int x^x \cdot (1+\ln x) \cdot dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\sin 2x \cdot dx}{1+\sin^4 x}$$

$$\text{គ. } \int \frac{\cot x}{\sqrt{1+\ln \sin x}} \cdot dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{ង. } \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{ច. } \int \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot dx$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\text{ជ. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cdot dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} \cdot dx$$

២៩. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} .dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right)}{\sqrt{x^2 + 4}} .dx$$

$$\text{គ. } \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} .dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left[x(x-3)^2 - 4 \right]^2}}$$

$$\text{ង. } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} .dx$$

$$\text{ច. } \int \left(\frac{1}{1+x} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2 dx$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x} .dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} .dx$$

$$\text{ណ. } \int \frac{2x^3 + x^7}{\sqrt[3]{(1+x^4)^2}} .dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} .dx$$

២៨. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int (x-1)e^x dx$$

$$\text{ខ) } I = \int (2x-3)e^{-x} dx$$

$$\text{គ) } I = \int (4x+1)e^{2x} dx$$

$$\text{ឃ) } I = \int x^2 e^x dx$$

$$\text{ង) } I = \int (x^2 + 2x + 2)e^x dx$$

$$\text{ច) } I = \int (x^2 - 2x)e^{-x} dx$$

$$\text{ឆ) } I = \int (4x^2 - 12x)e^{2x} dx$$

$$\text{ជ) } I = \int (x^2 + 4x + 6)e^{-x} dx$$

$$\text{ណ) } I = \int x^3 e^x dx$$

$$\text{ញ) } I = \int (x-2)^2 e^x dx$$

២៩. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int (x+1)\sin x dx$$

$$\text{ខ) } I = \int (2x-3)\cos x dx$$

$$\text{គ) } I = \int (4x-6)\sin 2x dx$$

$$\text{ឃ) } I = \int 12x \cos 3x dx$$

$$\text{ង) } I = \int x^2 \sin x dx$$

$$\text{ច) } I = \int (x^2 - 2x)\cos x dx$$

$$\text{ឆ) } I = \int (x^2 + 2x + 2) \sin x \, dx$$

$$\text{ជ) } I = \int x \sin^2 x \, dx$$

$$\text{ឈ) } I = \int x^3 \cos x \, dx$$

$$\text{ញ. } I = \int x^3 \cos^2 x \, dx$$

៣០. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int x \ln x \, dx$$

$$\text{ខ) } I = \int x^3 \ln x \, dx$$

$$\text{គ) } I = \int (2x - 3) \ln x \, dx$$

$$\text{ឃ) } I = \int \frac{\ln x}{x^4} \, dx$$

$$\text{ង) } I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$\text{ច) } I = \int (\ln x)^2 \, dx$$

$$\text{ឆ) } I = \int x (\ln x)^2 \, dx$$

$$\text{ជ) } I = \int x^3 (\ln x)^2 \, dx$$

$$\text{ឈ) } I = \int \frac{(\ln x)^2}{x^5} \, dx$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{(\ln x)^2}{x^2} \, dx$$

៣១. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក) } I = \int e^x \sin x \, dx$$

$$\text{ខ) } I = \int e^x \cos x \, dx$$

$$\text{គ) } I = \int (\sin x + \cos x) e^x \, dx$$

$$\text{ឃ) } I = \int (\sin x - \cos x) e^x \, dx$$

$$\text{ង) } I = \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

$$\text{ច) } I = \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$$

$$\text{ឆ) } I = \int \frac{2x \ln x}{(1 + x^2)^2} \, dx$$

$$\text{ជ) } I = \int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$$

$$\text{ឈ) } I = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

៣២. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int x \sin^3 x \, dx$$

$$\text{ខ) } I = \int x \cos^3 x \, dx$$

$$\text{គ) } I = \int x e^x \cos x \, dx$$

$$\text{ឃ) } I = \int x e^x \sin x \, dx$$

$$\text{ង) } I = \int e^x \sin^2 x \, dx$$

$$\text{ច) } I = \int e^x \cos^2 x \, dx$$

$$\text{ឆ) } I = \int x e^{\sqrt{x}} \, dx$$

$$\text{ជ) } I = \int x \sin(\sqrt{x}) \, dx$$

$$\text{ឈ) } I = \int x^2 \sin^2 x \, dx$$

$$\text{ញ) } I = \int x \sin^3 x \, dx$$

៣៣. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក) } I = \int x \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$\text{ខ) } I = \int x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$\text{គ) } I = \int \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 - 4x + 3)^2} \, dx$$

$$\text{ឃ) } I = \int \frac{x^5}{e^{x^3}} \, dx$$

$$\text{ង) } I = \int e^{-x} (1 - 2 \sin^2 x) \, dx$$

$$\text{ច) } I = \int x^3 \sin(\ln x) \, dx$$

$$\text{ឆ) } I = \int x^4 \cos(\ln x) \, dx$$

$$\text{ជ) } I = \int \frac{(x^2 + 3x)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 1)^2} \, dx$$

$$\text{ឈ) } I = \int x \tan^2 x \, dx$$

$$\text{ញ) } I = \int x \cot^2 x \, dx$$

៣៤. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{x^2 \cos x}{\sin^3 x} \, dx$$

$$\text{គ. } \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

$$\text{ង. } \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \, dx$$

$$\text{ច. } \int \frac{x^7 \, dx}{(1 + x^4)^2}$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} .dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{x^{19} .dx}{(1+x^{10})}$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} .dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{x^7 .dx}{(4+x^4)^3}$$

៣៥. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int x \tan^2 2x .dx$$

$$\text{ខ. } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .e^{\arcsin x} .dx$$

$$\text{គ. } \int x \cot^2 2x .dx$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .e^{\arccos x} .dx$$

$$\text{ង. } \int \frac{x . \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} .dx$$

$$\text{ច. } \int \frac{x^{n-1} . \ln x}{(1+x^n)^2} .dx$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{x . \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} .dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{x^{2n-1}}{(1+x^n)^2} .dx$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{x \sin x}{(2+\cos x)^2} .dx$$

$$\text{ញ. } \int \frac{(\sin x + \cos x) \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2} .dx$$

៣៦. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int \frac{x .dx}{\sqrt{\tan x} . \cos^2 x}$$

$$\text{ខ. } \int \tan^2 \sqrt{x} .dx$$

$$\text{គ. } \int \frac{x^6 - 3x^4}{(x^4 + 1)^2} .dx$$

$$\text{ឃ. } \int x \sin \sqrt{x} .dx$$

$$\text{ង. } \int \frac{(x^2 - x) .dx}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$\text{ច. } \int \frac{dx}{\sin^2 \sqrt{x}}$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{dx}{\cos^2 \sqrt{x}}$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{dx}{\sin^5 x}$$

$$\text{ញ. } \int \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2} dx$$

៣៧. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int e^x \sin x \sin 2x dx$$

$$\text{ខ. } \int \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) dx$$

$$\text{គ. } \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ឃ. } \int \left(\frac{\tan^2 x}{x} - \frac{\tan x}{x^2} \right) dx$$

$$\text{ង. } \int \cos \sqrt[3]{x} dx$$

$$\text{ច. } \int \tan x (1 + \tan x) e^x dx$$

$$\text{ឆ. } \int x^2 (\tan x + \tan^3 x) dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{2-x}{x^3} \cdot e^x dx$$

$$\text{ឈ. } \int x^n \ln x dx$$

$$\text{ញ. } \int e^x \cdot \cos^2 x dx$$

$$\text{ដ. } \int x^n \ln^2 x dx$$

$$\text{ប. } \int x^3 \sin^2 x dx$$

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៥

ចម្លើយខ្លីៗសម្រាប់សិស្សផ្សេងផ្ទៀងផ្ទាត់លើលំហាត់កិច្ចការផ្ទះ

០១.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x + C$$

$$\text{ខ. } I = \int (x + 5) dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$$

$$\text{គ. } I = \int (3x + 5) dx = \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int (4x + 7) dx = 2x^2 + 7x + C$$

$$\text{ង. } I = \int 12x^2 dx = 4x^3 + C$$

$$\text{ច. } I = \int 8x^3 dx = 2x^4 + C$$

$$\text{ឆ. } I = \int (3x^2 + 4) dx = x^3 + 4x + C$$

$$\text{ជ. } I = \int (5x^4 + 8x) dx = x^5 + 4x^2 + C$$

$$\text{ឈ. } I = \int (3x^2 + 8x + 1) dx = x^3 + 4x^2 + x + C$$

$$\text{ញ. } I = \int (8x^3 + 6x^2 + 2x) dx = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + C$$

០២.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int x^3 (x^2 + 5x) dx = \frac{1}{6}x^6 + x^5 + C$$

$$ខ. I = \int x^4 (x^2 - x + 2) dx = \frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{6} x^6 + \frac{2}{5} x^5 + C$$

$$គ. I = \int (x + 2)^2 dx = \frac{1}{3} (x + 2)^3 + C$$

$$ឃ. I = \int (x + 2)(2x - 3) dx = \frac{x(4x^2 + 3x - 36)}{6} + C$$

$$ង. I = \int (x^2 - x)(2x + 3) dx = \frac{x^2(3x^2 + 2x - 9)}{6} + C$$

$$ច. I = \int x^3 (x - 2)^2 dx = \frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + x^4 + C$$

$$ឆ. I = \int x^2 (x + 1)^3 dx = \frac{(x + 1)^4 (10x^2 - 4x + 1)}{60} + C$$

$$ជ. I = \int (2x^2 - 3x)^2 dx = \frac{4x^5}{5} - 3x^4 + 3x^3 + C$$

$$ឈ. I = \int x^3 (x^2 + 2)^2 dx = \frac{x^8}{8} + \frac{2x^6}{3} + x^4 + C$$

$$ញ. I = \int (x - 4)(x + 2)^2 dx = \frac{(x - 6)(x + 2)^3}{4} + C$$

០៣. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$ក. I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \ln |x| + \frac{2}{x} + C$$

$$ខ. I = \int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$គ. I = \int \frac{x^2 - x + 1}{x} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x| + C$$

$$ឃ. I = \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3} dx = \frac{x^2}{2} + \ln |x| - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$ង. I = \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3} dx = 3 \ln |x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$ច. I = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C$$

$$ឆ. I = \int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$ជ. I = \int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + C$$

$$ណ. I = \int \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^4} dx = \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + \ln |x| + C$$

$$ញ. I = \int \frac{(2x^2 + 3)^2}{x^3} dx = 2x^2 - \frac{9}{2x^2} + 12 \ln |x| + C$$

០៨. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$ក. I = \int \sqrt[3]{x^2} dx = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + C$$

$$ខ. I = \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

$$គ. I = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}\right) dx = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} + C$$

$$ឃ. I = \int (\sqrt{x} - 3)^2 dx = \frac{x^2}{2} - 4x\sqrt{x} + 9x + C$$

$$ង. I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$$

$$ច. I = \int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5} \sqrt{x} (x^2 - 10x + 45) + C$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{(x - \sqrt{x})^2}{x^3} dx = -\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln |x| + C$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{3}{28} \sqrt[3]{x} (4x^2 - 7x + 28) + C$$

០៥. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$\text{ខ. } I = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{គ. } I = \int (2 \cos 2x - \sin x) dx = \sin 2x + \cos x + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int (\cos 3x + \sin 4x) dx = \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \cos 4x + C$$

$$\text{ង. } I = \int (3 \sin 3x - \sin x) dx = -\cos 3x + \cos x + C$$

$$\text{ប. } I = \int (\sin x - 4 \cos 4x) dx = -\cos x - \sin 4x + C$$

$$\text{ឆ. } I = \int (\sin x + \cos x)^2 dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{dx}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3} \cot 3x + C$$

$$\text{ណ. } I = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

$$\text{ញ. } I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx = \tan x - \cot x + C$$

០៦. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$ខ. I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$គ. I = \int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$ឃ. I = \int \cos^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x + C$$

$$ង. I = \int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$$

$$ឝ. I = \int \cot^2 x \, dx = x - \cot x + C$$

$$ឞ. I = \int \tan 2x \, dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$$

$$ជ. I = \int \cot 3x \, dx = \frac{1}{3} \ln |\sin 3x| + C$$

$$ឈ. I = \int (1 + 2 \sin x)^2 \, dx = 3x - \sin 2x - 4 \cos x + C$$

$$ញ. I = \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\cos x} \right)^2 \, dx = \sin 2x + \tan x + 6x + C$$

០៧. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$ក. I = \int (1 + \tan x)^2 \, dx = \tan x - 2 \ln |\cos x| + C$$

$$ខ. I = \int (1 + \cot x)^2 \, dx = 2 \ln |\sin x| - \cot x + C$$

$$គ. I = \int \frac{2 \cos^3 x - 4 \sin 2x + 1}{\cos^2 x} \, dx = 2 \sin x + 8 \ln |\cos x| + \tan x + C$$

$$ឃ. I = \int \frac{4 \sin^3 x - 3 \sin 2x + 1}{\sin^2 x} \, dx = -4 \cos x - 6 \ln |\sin x| - \cot x + C$$

$$ង. I = \int \sin x \sin 3x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

$$\text{ប. } I = \int \cos 2x \cos 4x \, dx = \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\text{ផ. } I = \int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$$

$$\text{ជ. } I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx = \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$\text{ឈ. } I = \int \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{1 + 2 \cos x} \, dx = -\cos^2 x + C$$

$$\text{ញ. } I = \int \frac{\cos 5x - \cos x}{1 + 2 \cos 2x} \, dx = -\frac{4}{3} \sin^3 x + C$$

០៨. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{ខ. } I = \int e^{-3x} \, dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

$$\text{គ. } I = \int (e^x + e^{3x}) \, dx = e^x + \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x + C$$

$$\text{ង. } I = \int e^{2x} (e^{3x} + 1) \, dx = \frac{1}{5} e^{5x} + \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{ប. } I = \int e^{3x} (e^x + 1)^2 \, dx = \frac{1}{5} e^{5x} + \frac{1}{2} e^{4x} + \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\text{ផ. } I = \int (e^{2x} - e^{-2x})^2 \, dx = \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{4} e^{-4x} - 2x + C$$

$$\text{ជ. } I = \int (e^x + 1)^3 \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} e^{2x} + 3e^x + x + C$$

$$\text{ឈ. } I = \int e^{2x} (e^x - e^{-x})^2 \, dx = \frac{1}{4} e^{4x} - e^{2x} + x + C$$

$$\text{ញ. } I = \int (e^{2x} + e^{-2x})^3 dx = \frac{1}{6}e^{6x} + \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} - \frac{1}{6}e^{-6x} + C$$

០៩. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{x dx}{x+1} = x - \ln |x+1| + C$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x-2}{x+2} dx = x - 4 \ln |x+2| + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{2x+3}{x-1} dx = 2x + 5 \ln |x-1| + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{4x-3}{2x+1} dx = 2x - \frac{5}{2} \ln |2x+1| + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{3x-2}{x+1} dx = 3x - 5 \ln |x+1| + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{6x+1}{3x-2} dx = 2x + \frac{5}{3} \ln |3x-2| + C$$

១០. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2 dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x+1| + C$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x^2 - x + 1}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x-2| + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2 + 1}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5 \ln |x-2| + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x^2 + 3x}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 10 \ln |x-2| + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x-2| + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln |x-2| + C$$

១១. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx = \ln |x(x+1)| + C$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} dx = \ln |x+1| + 2\ln |x-1| + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+2)} dx = \ln |x+2| + 2\ln |x-1| + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x-7}{(x-1)(x-3)} dx = 2\ln |x-1| + \ln |x-3| + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{2x-3}{(x+1)(x-4)} dx = \ln |(x+1)(x-4)| + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{3x+4}{(x-2)(x+3)} dx = 2\ln |x-2| + \ln |x+3| + C$$

$$\text{ឆ. } I = \int \frac{3x+4}{x(x+4)} dx = \ln |x| + 2\ln |x+4| + C$$

$$\text{ជ. } I = \int \frac{5x-6}{x(2x-3)} dx = 2\ln |x| + \frac{1}{2}\ln |2x-3|$$

១២. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)} dx = x - 3\ln |x| + 6\ln |x-1| + C$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{2x^2-7x+3}{(x-1)(x+2)} dx = 2x - \frac{25}{3}\ln |x+2| - \frac{2}{3}\ln |x-1| + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x-2)} dx = x - \ln |x-1| + \ln |x-2| + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x^2 - 5x}{(x-1)(x+3)} dx = 3x - \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{21}{2} \ln |x+3| + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)(x-2)} dx = 2x - \frac{5}{3} \ln |x+1| + \frac{5}{3} \ln |x-2| + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2 - 5x + 7}{(x-2)(x-3)} dx = x - \ln |x-2| + \ln |x-3| + C$$

១៣. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } I = \int \frac{3x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx = 2 \ln |x+1| + \ln |x-1| - \frac{3}{x+1} + C$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x-2)^2} dx = \frac{9}{2} \ln |x+1| - \frac{3}{2} \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{3x^2 + 7x - 10}{(x-2)(x+2)^2} dx = 2 \ln |x+2| + \ln |x-2| - \frac{3}{x+2} + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{3x^2 - 9x + 10}{(x-1)(x-3)^2} dx = \ln |x-1| + 2 \ln |x-3| - \frac{5}{x-3} + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{4x^2 + 9x - 7}{(x-2)(x+1)^2} dx = \ln |x+1| + 3 \ln |x-2| - \frac{4}{x+1} + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{2x^2 + 9x - 1}{(x-2)(x+3)^2} dx = \ln |x+3| + \ln |x-2| - \frac{2}{x+3} + C$$

១៤. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{x-1}{x+1} dx = x - 2 \ln |x+1| + C$$

$$ខ. I = \int \frac{2x-3}{x+2} dx = 2x - 7 \ln |x+2| + C$$

$$គ. I = \int \frac{4x-1}{2x+3} dx = 2x - \frac{7}{2} \ln |2x+3| + C$$

$$ឃ. I = \int \frac{3x-1}{x-2} dx = 3x + 5 \ln |x-2| + C$$

$$ង. I = \int \frac{2x+3}{x-3} dx = 2x + 9 \ln |x-3| + C$$

$$ច. I = \int \frac{12x dx}{3x-2} = 4x + \frac{8}{3} \ln |3x-2| + C$$

១៥. គណនាអាំងតេក្រាល

$$ក. I = \int \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x-2| + C$$

$$ខ. I = \int \frac{x^2 - x + 4}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 6 \ln |x+1| + C$$

$$គ. I = \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x-4} dx = \frac{x^2}{2} + 3 \ln |x-4| + C$$

$$ឃ. I = \int \frac{2x^2 - 5x + 3}{x+1} dx = x^2 - 7x + 10 \ln |x+1| + C$$

$$ង. I = \int \frac{3x^2 - 2x - 5}{x-3} dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 16 \ln |x-3| + C$$

$$ច. I = \int \frac{(2x-3)^2}{x-1} dx = 2x(x-4) + \ln |x-1| + C$$

១៦. គណនាអាំងតេក្រាល

$$ក. I = \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx = \ln |(x-1)(x-2)| + C$$

$$ខ. I = \int \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)} dx = \ln |x+1| + 2 \ln |x-3| + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{5(x+1)}{(x-2)(x+3)} dx = 2\ln|x+3| + 3\ln|x-2| + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{6x-2}{(x-1)(x+1)} dx = 4\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{3x-2}{(x+1)(x-4)} dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-4| + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} dx = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-3| + C$$

១៧. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)} dx = x + 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$

$$\text{ខ. } I = \int \frac{x^2-2x-1}{(x-2)(x-3)} dx = x + \ln|x-2| + 2\ln|x-3| + C$$

$$\text{គ. } I = \int \frac{2x^2-2x-1}{(x-1)(x-2)} dx = 2x + \ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

$$\text{ឃ. } I = \int \frac{x^2-5x+2}{(x-1)(x-3)} dx = x + \ln|x-1| - 2\ln|x-3| + C$$

$$\text{ង. } I = \int \frac{x^2+4x-3}{(x+1)(x-2)} dx = x + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2+5x+2}{(x-1)(x+3)} dx = x + \ln|x+3| + 2\ln|x-1| + C$$

១៨. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\text{ក. } I = \int \frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2} dx = 2\ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + C$$

$$\begin{aligned} ខ. I &= \int \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x-2)^2} dx = 2\ln|x+1| + \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C \\ គ. I &= \int \frac{3x^2 + 7x - 10}{(x-2)(x+2)^2} dx = 2\ln|x+2| + \ln|x-2| - \frac{3}{x+2} + C \\ ឃ. I &= \int \frac{3x^2 - 9x + 10}{(x-1)(x-3)^2} dx = \ln|x-1| + 2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + C \\ ង. I &= \int \frac{4x^2 + 9x - 7}{(x-2)(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + 3\ln|x-2| - \frac{4}{x+1} + C \\ ច. I &= \int \frac{2x^2 + 9x - 1}{(x-2)(x+3)^2} dx = \ln|x+3| + \ln|x-2| - \frac{2}{x+3} + C \\ ឆ. I &= \int \frac{3x^2 - 5x - 4}{(x+1)(x-1)^2} dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C \\ ជ. I &= \int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x+2)(x-2)^2} dx = \frac{9}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C \end{aligned}$$

១៩. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} ក. I &= \int \frac{4x^2 + x + 3}{(x-1)(x^2 + x + 2)} dx = 2\ln|x-1| + \ln(x^2 + x + 2) + C \\ ខ. I &= \int \frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)(x^2 - x + 1)} dx = 3\ln|x-2| + \ln(x^2 - x + 1) + C \\ គ. I &= \int \frac{5x^2 - 10x + 8}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} dx = 3\ln|x-1| + \ln(x^2 - 2x + 2) + C \\ ឃ. I &= \int \frac{4x^2 - 7x + 3}{(x+1)(x^2 - 3x + 3)} = 2\ln|x+1| + \ln(x^2 - 3x + 3) + C \\ ង. I &= \int \frac{5x^2 - 2x}{(x-3)(x^2 + x + 1)} dx = 3\ln|x-3| + \ln(x^2 + x + 1) + C \end{aligned}$$

$$\text{ច. } I = \int \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)(x^2 - x + 1)} dx = \ln(x^2 - x + 1) - \ln|x-2| + C$$

២០. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 8}{(x-1)(x+1)(x-3)}$

ដែល $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$

ចម្លើយ $A = -1, B = 3, C = 4$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) dx$

ចម្លើយ $I = -\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + 4\ln|x-3| + C$ ។

២១. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + C$

ខ. $I = \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} dx = \ln(x^2 + 3x + 4) + C$

គ. $I = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \sin x}} = 2\sqrt{2 + \sin x} + C$

ឃ. $I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 2}} = 2\sqrt{e^x + 2} + C$

ង. $I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C$

ច. $I = \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x)^2} dx = -\frac{1}{x^2 + 2x} + C$

២២. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = \ln(1+x^2) + C$

$$ខ. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} .dx = -\ln |\sin x + \cos x| + C$$

$$គ. \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} .dx = -\frac{1}{1+x^2} + C$$

$$ឃ. \int \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x} .dx = \frac{1}{\sin x + \cos x} + C$$

$$ង. \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}} .dx = 2\sqrt{x^2+2x+4} + C$$

$$ច. \int \frac{\sin 2x .dx}{1 + \cos^2 x} = -\ln(1 + \cos^2 x) + C$$

$$ឆ. \int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} .dx = \ln |x^2+3x+1| + C$$

$$ជ. \int \frac{\sin 2x .dx}{3-4\sin^2 x} = -\ln |3-4\sin^2 x| + C$$

$$ឈ. \int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} .dx = -\frac{1}{1+x^4} + C$$

$$ញ. \int \frac{\sin x .\cos x}{\sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}} .dx = -\frac{\sqrt{a+(b-a)\cos^2 x}}{b-a} + C \text{ បើ } a \neq b \text{ ។}$$

២៣. គណនាអាំងតេក្រាល

$$ក. \int \sin^4 x .\cos x .dx = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$ខ. I = \int \sin x \cos^6 x dx = -\frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

$$គ. \int \cos^5 x \sin x .dx = -\frac{1}{6} \cos^6 x + C$$

$$ឃ. \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

$$ង. \int \sin^2 x \cos^3 x = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$ប៊. \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\cos x + \sin x}}.dx = 2\sqrt{\cos x + \sin x} + C$$

$$ឆ. \int \sin^3 x.d x = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$ជ. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}.dx = \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$

$$ឈ. \int \cos^5 x.d x = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + C$$

$$ញ. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}.dx = -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

២៩.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$ក. \int \sin^5 x . \cos x . dx = \frac{1}{6} \sin^6 x + C$$

$$ខ. \int \sin^n x . \cos x . dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C , n \neq -1$$

$$គ. \int \cos^7 x . \sin x . dx = -\frac{1}{8} \cos^8 x + C$$

$$ឃ. \int \sin^n x . \cos^3 x . dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} - \frac{\sin^{n+3} x}{n+3} + C$$

$$ង. \int \sin^2 x . \cos^3 x . dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$ប៊. \int \cos^n x . \sin x . dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + C$$

$$ឆ. \int \cos^7 x . \sin^3 x . dx = \frac{1}{10} \cos^{10} x - \frac{1}{8} \cos^8 x + C$$

$$ជ. \int \cos^n x . \sin^3 x . dx = \frac{\cos^{n+3} x}{n+3} - \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$\text{ឈ. } \int \cos^4 x \cdot \sin^5 x \cdot dx = -\frac{\cos^5 x (35 \cos^4 x - 90 \cos^2 x + 63)}{315} + C$$

$$\text{ញ. } \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = -\frac{3 \sin 4x + 4 \sin^3 2x - 12x}{192} + C$$

២៥. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} \cdot dx = \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\sin^8 x}{\cos^{10} x} \cdot dx = \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} \cdot dx = -\frac{1}{5} \cot^5 x + C$$

$$\text{ឃ. } \int \sin^5 x \cdot dx = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} \cdot dx = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \cdot dx = e^{\tan x} + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x} \cdot dx = -\frac{1}{n+1} \cot^{n+1} x + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{e^{\sqrt{x}} + \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2(e^{\sqrt{x}} + \sin \sqrt{x}) + C$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \cdot dx = 2\sqrt{\sin x} + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{(x^2 + 1) \cdot dx}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} = \frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$$

២៦. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \cdot dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{x^9}{1+x^5} \cdot dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{5} \ln |1+x^5| + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln |\ln x| + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{x^7 \cdot dx}{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}} = \frac{3}{16} (x^4-3) \sqrt[3]{x^4+1} + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{\ln^2(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \cdot dx = \frac{1}{3} \ln^3(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{(1+e^x) \cdot dx}{(x+e^x)^2} = -\frac{1}{x+e^x} + C$$

$$\text{ឆ. } \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x \cdot dx = e^{\sin^2 x} + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{e^x \cdot dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$$

$$\text{ឈ. } \int e^{-x^2+2x} \cdot (x-1) \cdot dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2+2x} + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{e^x \cdot dx}{(1+e^x)^2} = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

២៧. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{1+\sin x}{\sqrt{x-\cos x}} \cdot dx = 2\sqrt{x-\cos x} + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{dx}{1+e^x} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{\sin 2x}{e^{\cos^2 x}}.dx = e^{-\cos^2 x} + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{(x+1).e^x}{1+xe^x}.dx = \ln |1+xe^x| + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{(1-x).dx}{x+e^x} = -x + \ln |x+e^x| + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{x.dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}(\ln |x^2-1| - \ln(x^2+1)) + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{1+\ln x}{1+x^{-x}}.dx = \ln(x^x+1) + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{\cos x.dx}{2-\cos^2 x} = \arctan(\sin x) + C$$

$$\text{ឈ. } \int e^{x+e^x}.dx = e^{e^x} + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{\sin x.dx}{5-\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C$$

២៨. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int x^x.(1+\ln x).dx = x^x + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\sin 2x.dx}{1+\sin^4 x} = \arctan(\sin^2 x) + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{\cot x}{\sqrt{1+\ln \sin x}}.dx = 2\sqrt{1+\ln(\sin x)} + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \arctan(e^x) + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot dx = -\frac{3}{8} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 - \sin x) + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} = -\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} + C$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cdot dx = 3\sqrt[3]{\sin x} + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} \cdot dx = \frac{2(x+1)^{\frac{5}{4}}}{5(1-x)^{\frac{5}{4}}} + C$$

២៩. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot dx = \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 4})}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot dx = \frac{1}{2} \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} \cdot dx = -\frac{1}{4 \sin^4 x} + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{[x(x-3)^2 - 4]^2}} = \frac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[3]{x-1}} + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} \cdot dx = \frac{7 \sin^2 x - 5}{35 \sin^7 x} + C$$

$$\text{ច. } \int \left(\frac{1}{1+x} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2 dx = \frac{3}{10} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{5}{3}} + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x} \cdot dx = \frac{7 - 9 \cos^2 x}{63 \cos^9 x} + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} \cdot dx = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{2x^3 + x^7}{\sqrt[3]{(1 + x^4)^2}} \cdot dx = \frac{3}{16} (x^4 + 5) \sqrt[3]{1 + x^4} + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C$$

២៨. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int (x - 1)e^x dx = (x - 2)e^x + C$$

$$\text{ខ) } I = \int (2x - 3)e^{-x} dx = \frac{1 - 2x}{e^x} + C$$

$$\text{គ) } I = \int (4x + 1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(4x - 1)e^{2x} + C$$

$$\text{ឃ) } I = \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$\text{ង) } I = \int (x^2 + 2x + 2)e^x dx = (x^2 + 2)e^x + C$$

$$\text{ច) } I = \int (x^2 - 2x)e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + C$$

$$\text{ឆ) } I = \int (4x^2 - 12x)e^{2x} dx = 2(x^2 - 4x + 2)e^{2x} + C$$

$$\text{ជ) } I = \int (x^2 + 4x + 6)e^{-x} dx = -(x^2 + 6x + 12)e^{-x} + C$$

$$\text{ឈ) } I = \int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$$

$$\text{ញ) } I = \int (x - 2)^2 e^x dx = (x^2 - 6x + 10)e^x + C$$

២៩.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int (x+1) \sin x \, dx = \sin x - (x+1) \cos x + C$$

$$\text{ខ) } I = \int (2x-3) \cos x \, dx = (2x-3) \sin x + 2 \cos x + C$$

$$\text{គ) } I = \int (4x-6) \sin 2x \, dx = \sin 2x + (3-2x) \cos 2x + C$$

$$\text{ឃ) } I = \int 12x \cos 3x \, dx = 4x \sin 3x + \frac{4}{3} \cos 3x + C$$

$$\text{ង) } I = \int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x + C$$

$$\text{ច) } I = \int (x^2-2x) \cos x \, dx = (x^2-2x-2) \sin x + 2(x-1) \cos x + C$$

$$\text{ឆ) } I = \int (x^2+2x+2) \sin x \, dx = 2(x+1) \sin x - x(x+2) \cos x + C$$

$$\text{ជ) } I = \int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$\text{ណ) } I = \int x^3 \cos x \, dx = (x^3-6x) \sin x + 3(x^2-2) \cos x + C$$

$$\text{ញ) } I = \int x^3 \cos^2 x \, dx = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{8} (2x^3-3x) \sin 2x + \frac{3}{16} (2x^2-1) \cos 2x + C$$

៣០.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int x \ln x \, dx = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + C$$

$$\text{ខ) } I = \int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

$$\text{គ) } I = \int (2x-3) \ln x \, dx = (x^2-3x) \ln x - \frac{x^2-6x}{2} + C$$

$$\text{ឃ) } I = \int \frac{\ln x}{x^4} \, dx = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + C$$

$$\text{ង) } I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$$

$$\text{ច) } I = \int (\ln x)^2 dx = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$$

$$\text{ឆ) } I = \int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{4} + C$$

$$\text{ជ) } I = \int x^3(\ln x)^2 dx = \frac{x^4(8\ln^2 x - 4\ln x + 1)}{32} + C$$

$$\text{ណ) } I = \int \frac{(\ln x)^2}{x^5} dx = -\frac{8\ln^2 x + 4\ln x + 1}{32x^4} + C$$

$$\text{ញ) } I = \int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + C$$

៣.១. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក) } I = \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$$

$$\text{ខ) } I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$$

$$\text{គ) } I = \int (\sin x + \cos x)e^x dx = e^x \sin x + C$$

$$\text{ឃ) } I = \int (\sin x - \cos x)e^x dx = -e^x \cos x + C$$

$$\text{ង) } I = \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\tan x + C$$

$$\text{ច) } I = \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\cot x + C$$

$$\text{ឆ) } I = \int \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C$$

$$\text{ជ) } I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$\text{ឈ) } I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C$$

$$\text{ញ) } I = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C$$

៣២.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក) } I = \int x \sin^3 x dx = -\frac{\sin 3x - 3x \cos 3x - 27 \sin x + 27x \cos x}{36} + C$$

$$\text{ខ) } I = \int x \cos^3 x dx = \frac{3x \sin 3x + \cos 3x + 27x \sin x + 27 \cos x}{36} + C$$

$$\text{គ) } I = \int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} [(x-1) \sin x + x \cos x] e^x + C$$

$$\text{ឃ) } I = \int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} [x \sin x + (1-x) \cos x] e^x + C$$

$$\text{ង) } I = \int e^x \sin^2 x dx = -\frac{2 \sin 2x + \cos 2x - 5}{10} e^x + C$$

$$\text{ច) } I = \int e^x \cos^2 x dx = \frac{(2 \sin 2x + \cos 2x + 5) e^x}{10} + C$$

$$\text{ឆ) } I = \int x e^{\sqrt{x}} dx = 2 [\sqrt{x} (x+6) - 3(x+2)] e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\text{ជ) } I = \int x \sin(\sqrt{x}) dx = 6(x-2) \sin \sqrt{x} - 2(x-6) \cos \sqrt{x} + C$$

$$\text{ឈ) } I = \int x^2 \sin^2 x dx = \frac{x^3}{6} - \frac{2x^2-1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C$$

$$\text{ញ) } I = \int x \sin^3 x dx = \frac{27 \sin x - 27x \cos x + 3x \cos 3x - \sin 3x}{36} + C$$

៣៣.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក) } I = \int x \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{x \sin^3 x}{3} - \frac{\cos^3 x}{9} + \frac{\cos x}{3} + C$$

$$\text{ខ) } I = \int x \cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{1}{3}x \cos^3 x - \frac{1}{9}\sin^3 x + \frac{1}{3}\sin x + C$$

$$\text{គ) } I = \int \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 - 4x + 3)^2} dx = -\frac{x}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$$

$$\text{ឃ) } I = \int \frac{x^5}{e^{x^3}} dx = -\frac{x^3 + 1}{3e^{x^3}} + C$$

$$\text{ង) } I = \int e^{-x} (1 - 2 \sin^2 x) dx = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{5e^x} + C$$

$$\text{ច) } I = \int x^3 \sin(\ln x) dx = \frac{1}{17} x^4 [4 \sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

$$\text{ឆ) } I = \int x^4 \cos(\ln x) dx = \frac{1}{26} x^5 [\sin(\ln x) + 5 \cos(\ln x)] + C$$

$$\text{ជ) } I = \int \frac{(x^2 + 3x)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 1)^2} dx = \frac{1}{x^2 + 3x + 1} + \ln |x^2 + 3x + 1| + C$$

$$\text{ណ) } I = \int x \tan^2 x \, dx = -\frac{x^2}{2} + x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\text{ញ) } I = \int x \cot^2 x dx = -\frac{x^2}{2} - x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

៣៩. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{x^2 \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x^2}{2 \sin^2 x} - \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} .dx = \frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x - \ln |\cos x| + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} .dx = -\frac{x}{\sin x} - \ln \left| \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right| + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{x^7 .dx}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + \frac{1}{4(1+x^4)} + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} .dx = \frac{x}{\cos x} - \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{x^{19} .dx}{(1+x^{10})} = \frac{x^{10} - \ln(1+x^{10})}{10} + C$$

$$\text{ណ. } \int \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} .dx = -\frac{x}{e^x + 1} - \ln \left(\frac{1+e^x}{e^x} \right) + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{x^7 .dx}{(4+x^4)^3} = -\frac{x^4 + 2}{4(x^4 + 4)^2} + C$$

៣៥. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int x \tan^2 2x .dx = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} x \tan 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C$$

$$\text{ខ. } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .e^{\arcsin x} .dx = -\frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} - x) e^{\arcsin x} + C$$

$$\text{គ. } \int x \cot^2 2x .dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} x \cot 2x + \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + C$$

$$\text{ឃ. } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .e^{\arccos x} .dx = -\frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} + x) e^{\arccos x} + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{x .\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} .dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{x^{n-1} \cdot \ln x}{(1+x^n)^2} dx = -\frac{\ln x}{n(1+x^n)} - \frac{1}{n^2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \arccos x - x + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{x^{2n-1}}{(1+x^n)^2} dx = \frac{\ln |1+x^n|}{n} + \frac{1}{n(1+x^n)} + C$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{x \sin x}{(1+\cos x)^2} dx = \frac{x}{1+\cos x} - \tan \frac{x}{2} + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{(\sin x + \cos x) \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2} dx = \frac{2 \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)}{\tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} - 1} + C$$

៣៦. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int \frac{x dx}{\sqrt{\tan x} \cdot \cos^2 x} = 2x \sqrt{\tan x} - 2 \int \sqrt{\tan x} dx$$

$$\text{ខ. } \int \tan^2 \sqrt{x} dx = -x + 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + C$$

$$\text{គ. } \int \frac{x^6 - 3x^4}{(x^4 + 1)^2} dx = -\frac{x(x^2 - 3)}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) + C$$

$$\text{ឃ. } \int x \sin \sqrt{x} dx = 6(x-2) \sin \sqrt{x} - 2(x-6) \cos \sqrt{x} + C$$

$$\text{ង. } \int \frac{(x^2 - x) dx}{(x^2 - 2x - 3)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 2x - 3)} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$$

$$\text{ច. } \int \frac{dx}{\sin^2 \sqrt{x}} = -2\sqrt{x} \cot(\sqrt{x}) + 2 \ln |\sin(\sqrt{x})| + C$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx = -\frac{x}{1 + \sin x} - \frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{dx}{\cos^2 \sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos(\sqrt{x})| + C$$

$$\text{ឈ. } \int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{3 \cos^3 x - 5 \cos x}{8 \cos^4 x - 16 \cos^2 x + 8} + \frac{3}{16} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C$$

$$\text{ញ. } \int \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2} dx = \frac{e^x}{x} + C$$

៣៧. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int e^x \sin x \sin 2x dx = \frac{1}{4} (\sin x + \cos x) e^x - \frac{1}{20} (3 \sin 3x + \cos 3x) e^x + C$$

$$\text{ខ. } \int \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) dx = e^x \ln x + C$$

$$\text{គ. } \int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\text{ឃ. } \int \left(\frac{\tan^2 x}{x} - \frac{\tan x}{x^2} \right) dx = \frac{\tan x}{x} - \ln |x| + C$$

$$\text{ង. } \int \cos \sqrt[3]{x} dx = 3 \left[2\sqrt[3]{x} \cos \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x^2} - 2) \sin \sqrt[3]{x} \right] + C$$

$$\text{ប. } \int \tan x (1 + \tan x) e^x dx = e^x (\tan x - 1) + C$$

$$\text{ឆ. } \int x^2 (\tan x + \tan^3 x) dx = \frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x - \ln |\cos x| + C$$

$$\text{ជ. } \int \frac{2-x}{x^3} \cdot e^x dx = -\frac{e^x}{x^2} + C$$

$$\text{ឈ. } \int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1} [(n+1) \ln x - 1]}{(n+1)^2} + C$$

$$\text{ញ. } \int e^x \cdot \cos^2 x dx$$

$$\text{ដ. } \int x^n \ln^2 x dx = \frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^3} + C$$

$$\text{ប. } \int x^3 \sin^2 x .dx = \frac{2x^4 - (4x^3 - 6x) \sin 2x - (6x^2 - 3) \cos 2x}{16} + C$$

www.mathtoday.wordpress.com