៣ វិសមីការ

១. វិសមភាព

ក. សញ្ញាណវិសភាព

ការប្រៀបធៀបចំនួនពីរដែលពីរចំនួននោះមិនស្មើគ្នាគេប្រើនិមិត្តសញ្ញា $>$, $<$, $\geq$ និង $\leq$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១. $5 > -2$, $-3 < 7$, $4 \geq 4$, $a < b$ សំណេរទាំងអស់នេះហៅថា **វិសមភាព** ។

ខ. លក្ខណៈវិសមភាព

ជាទូទៅ ១.១

ចំពោះ a, b និង c ជាចំនួនពិត

១. បើ $a > b$ នោះគេបាន $a + c > b + c$ ឬ $a - c > b - c$
បើគេបូក ឬដកចំនួនតែមួយលើអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាព គេបានវិសមភាពថ្មី មានទិសដៅដូចវិសមភាពដើម ។

២. បើ $a > b$ និង $c > 0$ នោះ $ac > bc$
បើគេគុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនេះនឹងចំនួនវិជ្ជមាន នោះគេបានវិសមភាពមានទិសដៅដូចវិសមភាពដើម

៣. បើ $a > b$ និង $c < 0$ នោះ $ac < bc$
បើគេគុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនេះនឹងចំនួនអវិជ្ជមាន នោះគេបានវិសមភាពមានទិសដៅផ្ទុយពីវិសមភាពដើម

ឧទាហរណ៍ ១.២. ចូរបំពេញសញ្ញា $>$ ឬ $<$ ក្នុងប្រអប់ខាងក្រោម៖

១. បើ $-4 < -1$ នោះ $-4 + 2 \square -1 + 2$

២. បើ $2 > -3$ នោះ $2 - 3 \square -3 - 3$

៣. បើ $-5 < 4$ នោះ $(-5) \times (-2) \square 4 \times (-2)$

៤. បើ $2 > -6$ នោះ $2 \div 4 \square (-6) \div 4$

២. វិសមីការដឺក្រេទី១ មានមួយអញ្ញាត

ក. សញ្ញាណវិសមីការ

$2x+3\geq 0$, $y<-3$ និង $2(x+3)\leq 5-7x$ ជាសមីការដឺក្រេទី 1 មានមួយអញ្ញាត ។

ជាទូទៅ ២.១

វិសមីការដឺក្រេទី១ មានមួយអញ្ញាតមានរាង $Ax+B>0$ ដែល A, B ជាចំនួនពិត ហើយ $A\neq 0$ ។

! ម្យ៉ាងទៀត ចម្លើយរបស់វិសមីការ គឺគ្រប់តម្លៃនៃអញ្ញាតដែលធ្វើឱ្យវិសមីការពិត ។ ដោះស្រាយវិសមីការគឺរកគ្រប់សំណុំ ឫសនៃវិសីការ សំណុំនៃគ្រប់ចម្លើយរបស់វិសមីការ ។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

វិធាន ៖

ដើម្បីដោះស្រាយនូវវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត យើងត្រូវ៖

- ត្រូវលើកតួមានអញ្ញាតទៅអង្គម្ខាង តួគ្មានអញ្ញាតទៅអង្គម្ខាង
- ទាញរកចម្លើយនៃវិសមីការ ប៉ុន្តែប្រយ័ត្នចំពោះសញ្ញាគុណ

ឧទាហរណ៍ ២.១. គេមានទ្វេធាដឺក្រេទី១ $f(x)=-2x+4$

ក. ចូរដោះស្រាយសមីការ $f(x)=0$

ខ. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x>2$ គេបាន $f(x)<0$

គ. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x<2$ គេបាន $f(x)>0$

ឃ. ចូរសង់តារាងសញ្ញារបស់ទ្វេធា $f(x)=-2x+4$

ដំណោះស្រាយ.

■

គ. សញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទី ១

ជាទូទៅ ២.២

$f(x) = ax + b$ ដែល $a \neq 0$ មានឫស $x = -\frac{b}{a}$

គេកំណត់ សញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទីមួយទៅតាមសញ្ញារបស់ a តាមតារាងសញ្ញានៃ $f(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a

ឧទាហរណ៍ ២.២. សិក្សាសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទីមួយខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = -3x + 21$

ខ. $g(x) = \frac{x}{4} + 1$

ដំណោះស្រាយ.

■

ឃ. ដោះស្រាយវិសមីការតាមសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទី ១

ឧទាហរណ៍ ២.៣. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោមតាមសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទីមួយ៖

ក. $4x - 6 > 0$

ខ. $-4x + \frac{5}{4} \leq 0$

គ. $3y + 2 - 5 > -y + 7 + 2y$

ឃ. $-2 - \frac{3}{2}y \geq 0$

ដំណោះស្រាយ.

៣. ប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី ១ មានមួយអញ្ញាត

ក. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១

ឧទាហរណ៍ ៣.១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\begin{cases} 2x+5 \geq 5x-4 \\ x-7 \geq 2x-3 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} 2x-7 \leq 6x+5 \\ 4x-11 \leq 4+x \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} 5-x > 7 \\ 2x+3 \geq 13 \end{cases}$

ឃ. $\begin{cases} 5 < 4\left(y+2\right)-5y \\ \dfrac{1}{2}y+3 > 2 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ.

■

៩. ដោះស្រាយវិសមីការដែលមានតម្លៃដាច់ខាត

ជាទូទៅ ៣.១

ចំពោះសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១ ដែលមានតម្លៃដាច់ខាត ហើយ $C > 0$ គេបាន ៖

១. $|Ax + B| = C$ មានន័យថា $Ax + B = C$ ឬ $Ax + B = -C$ ។

២. $|Ax + B| < C$ មានន័យថា $Ax + B > -C$ និង $Ax + B < C$ ឬ $-C < Ax + B < C$

៣. $|Ax + B| > C$ មានន័យថា $Ax + B < -C$ ឬ $Ax + B > C$

ឧទាហរណ៍ ៣.២. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម រួចបកស្រាយលើបន្ទាត់ចំនួន

ក. $|2x - 3| < 4$

ខ. $|2x - 1| - 3 \geq 2$

គ. $\left|\dfrac{x-8}{2}\right| \leq 4$

ឃ. $|8x - 7| > 1$

ដំណោះស្រាយ.

■

៤. វិសមីការដឺក្រេទី ២ មានមួយអញ្ញាត

ក. សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី២

ជាទូទៅ ៤.១

វិសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $ax^2+bx+c>0$ ឬ $ax^2+bx+c<0$ ដែល $a\neq 0$

ឧទាហរណ៍ ៤.១. $2x^2+3x<0$, $x^2\leq 4$, $x^2+5x+6>0$ ជា **វិសមីការដឺក្រេទី**2 **មានមួយអញ្ញាត** ។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការតាមសញ្ញាត្រីធាដឺក្រេទី ២

ជាទូទៅ ៤.២ ករណី $\Delta>0$

បើសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មាន $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ α និង β គេអាចដាក់ជាផលគុណកត្តា $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ។
គេនឹង សិក្សាសញ្ញានៃត្រីធា ax^2+bx+c ដោយគ្រាន់តែសិក្សាសញ្ញាផលគុណ a និង $(x-\alpha)(x-\beta)$ ។
ចំពោះ $a>0$ គេបានតារាងសញ្ញាខាងក្រោម៖

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$x-\alpha$	$-$	0 $+$	$+$	
$x-\beta$	$-$	$-$	0 $+$	
$(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	សញ្ញាផ្ទុយ a	សញ្ញាដូច a	

នោះគេទាញបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម៖

ចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី 2

ចំពោះ $\Delta>0$ និង $a>0$ សមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β ដែល $\alpha<\beta$ នោះ៖

១. ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c>0$ គឺ $x<\alpha$, $\beta<x$ ឬ $x\in(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$ ។

២. ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c<0$ គឺ $\alpha<x<\beta$ ឬ $x\in(\alpha,\beta)$ ។

៣. ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c\geq 0$ គឺ $x\leq\alpha$, $\beta\leq x$ ឬ $x\in(-\infty,\alpha]\cup[\beta,+\infty)$ ។

៤. ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c\leq 0$ គឺ $\alpha\leq x\leq\beta$ ឬ $x\in[\alpha,\beta]$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $x^2-2x-2>0$

ខ. $2x^2-3x-2<0$

គ. $-5x^2-3x+2<0$

ឃ. $3x^2-7x+10\geq 2x^2$

ង. $(x+1)(x+4)>18$

ច. $\dfrac{5x^2}{2}-\dfrac{x}{6}\geq\dfrac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ.

■

ជាទូទៅ ៤.៣ ករណី $\Delta = 0$

បើសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មាន $\Delta = 0$ និង $a > 0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$
គេអាចដាក់ជាផលគុណកត្តា $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$
គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាដូច a

ចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី 2
ចំពោះ $\Delta = 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសឌុប

១. ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់លើកលែងតែ α គេអាចសរសេរ $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$

២. $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ គេអាចសរសេរ $x \in \emptyset$។

៣. ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺឫសពិតទាំងអស់ គេអាចសរសេរ $x \in \mathbb{R}$។

៤. ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \leq 0$ គឺ $x = \alpha$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៣. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $x^2 - 4x + 4 > 0$

ខ. $4x^2 + 4x + 1 < 0$

គ. $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

ឃ. $64 \leq 16x - x^2$

ដំណោះស្រាយ.

■

ជាទូទៅ ៤.៤ ករណី $\Delta < 0$

សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតទេ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។
$\Delta = b^2 - 4ac$ គេបានត្រីធា

$$
\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

ដោយ $\Delta < 0$ នោះ $b^2 - 4ac < 0$ និង $4a^2 > 0$ នាំឱ្យ $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ សមមូល $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$
ម្យ៉ាងទៀត $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ នោះកន្សោម $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] > 0$
ដូចនេះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច ។
គេបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម៖

ចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី

ចំពោះ $\Delta < 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា នោះ

១. ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

២. $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ គេអាចសរសេរ $x \in \emptyset$។

៣. ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺចំនួនពិតទាំងអស់ ។

៤. $ax^2 + bx + c \leq 0$ គ្មានចម្លើយ គេអាចសរសេរ $x \in \emptyset$។

ឧទាហរណ៍ ៤.៤. ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $2x^2 + 3x + 4 > 0$

ខ. $x^2 + 2x + 5 < 0$

គ. $2x^2 - 4x + 4 \geq 0$

ឃ. $5x^2 \geq x^2 + 9$

ដំណោះស្រាយ.

៤. ទិសមីការដឺក្រេទី ២ មានមួយអញ្ញាត

ឆ. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី ២ មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍ ៤.៥. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\begin{cases} x^2-6x+5\leq 0 \\ x^2-9x+14<0 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x^2+x-3>0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} -x^2+3x+4\geq 0 \\ \left(2x^2+3\right)\left(x^2-3x\right) \end{cases}$

ឃ. $\begin{cases} x^2+x-20\leq 0 \\ 2x^2+7x+3<0 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ.

■

ឃ. អនុវត្តវិសមីការ

ជាទូទៅ ៤.៥

សមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $P=x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

✍ $\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $0<x_1<x_2$ មានន័យថាសមីការមានឫសពិតពីរជាចំនួនវិជ្ជមាន

✍ $\begin{cases}\Delta>0\\ S<0\\ P>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $x_1<x_2<0$ មានន័យថាសមីការមានឫសពិតពីរជាចំនួនអវិជ្ជមាន

✍ $\begin{cases}\Delta>0\\ S<0\\ P>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $x_1<0<x_2$ មានន័យថាសមីការមានឫសពិតពីរផ្ទុយគ្នា

ឧទាហរណ៍ ៤.៦. គេមានសមីការ $x^2+(2m-1)x-m+1=0$ ដែល $m\in\mathbb{R}$ ។
កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

ក. $x_1<0<x_2$ ខ. $x_1<x_2<0$ គ. $0<x_1<x_2$

ដំណោះស្រាយ.

៥. ការបង្ហាញវិសមភាព

នៅក្នុងការបង្ហាញវិសមភាព គេអាចមានវិធីសាស្ត្រ ច្រើនបែបខុសៗគ្នាហើយខាងក្រោមនេះ ជាវិធីសាស្ត្រមួយចំនួនដែលយើងនឹងសិក្សា ។

ក. វិសមភាពគោល

ជាទូទៅ ៥.១

✍ ចំពោះ $a > 0$ និង $b > 0$ នោះ $a > b$ សមមូល $a^2 > b^2$

✍ ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}$ គេបាន $(a+b)^2 \geq 0$ ឬ $a^2 + b^2 \geq -2ab$

✍ ចំពោះគ្រប់ $a, b \in \mathbb{R}$ គេបាន $(a-b)^2 \geq 0$ ឬ $a^2 + b^2 \geq 2ab$

ខ. ការប្រើតាមឌីសគ្រីមីណង់

ជាទូទៅ ៥.២

បើយើងមាន $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ហើយ $a, b, c \in \mathbb{R}$ នោះយើងបានលក្ខណៈ:

✍ $f(x) \geq 0$ លុះត្រាតែ $\Delta \leq 0$, $a > 0$

✍ $f(x) \leq 0$ លុះត្រាតែ $\Delta \leq 0$, $a < 0$

✍ $f(x) > 0$ លុះត្រាតែ $\Delta < 0$, $a > 0$

✍ $f(x) < 0$ លុះត្រាតែ $\Delta < 0$, $a < 0$

ឧទាហរណ៍ ៥.១. ចូរបង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម៖

ក. $x^2 - 6x + 10 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ខ. $-2x^2 + 4x - 6 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

គ. $2xy \leq x^2 + 4y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

ឃ. $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$

ដំណោះស្រាយ.

ឆ. វិសមភាព Cauchy (AM-GM)

ជាទូទៅ ៥.៣

ចំពោះ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n > 0$ គេបាន $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n}$
ហើយ សមភាពពិតពេល $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n$

! **វិសមភាព Cauchy (AM-GM)** ពីរតួ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ឬ ហៅថា មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ
ហើយសមភាពនេះពិត លុះត្រាតែ $a = b$ ។
វិសមភាព Cauchy (AM-GM) បីតួ $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
ហើយសមភាពនេះពិត លុះត្រាតែ $a = b = c$ ។

ឧទាហរណ៍ ៥.២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពដូចខាងក្រោម៖

ក. $\left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) \geq 4$ គ្រប់ $a, b, x, y > 0$

ខ. $\left(x + \dfrac{1}{y}\right)\left(y + \dfrac{1}{z}\right)\left(z + \dfrac{1}{t}\right)\left(t + \dfrac{1}{x}\right) \geq 16$ គ្រប់ $x, y, z, t > 0$

គ. $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$ គ្រប់ $x, y, z > 0$

ដំណោះស្រាយ.

ឃ. វិសមភាពកូស៊ីស្វាស Cauchy-Schwarz

ជាទូទៅ ៥.៤

ចំពោះ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ នោះគេទាញបាន

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2 + b_n^2\right)$$

សមភាពកើតឡើងនៅពេលដែល $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \dfrac{a_n}{b_n}$

! វិសមភាពកូស៊ីស្វាស Cauchy-Schwarz ពីរតួ គេទាញបាន $(ax + by)^2 \leq \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$

ឧទាហរណ៍ ៥.៧. គេមានពីរចំនួនពិត x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 = 5$ ។
ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $M = x + 2y + 3$ ។

ដំណោះស្រាយ.