Star Polygons: все созвездия геометрии в одном приложении

Боткина М.Н., Бындю А.П., Косачев Е.С, Фомкин И.П., Починкова И.С., Головина Д.А., Левашов М.А.

July 2024

Оглавление

О ПРОЕКТЕ

Суть нашего исследования в том, что мы, используя знания, полученные в общеобразовательной школе, выводим формулы получения периметра, стороны для любого звездчатого многоугольника, угла и площади, чтобы любой школьник, изучающий геометрию, был способен прийти к ним самостоятельно и изучать звездчатые многоугольники, если захочет.

При этом мы не считаем, что звездчатые многоугольники необходимо внести в школьную программу. Тему можно рассматривать на дополнительных и внеурочных занятиях. Мы провели опрос и выяснили, что преподавателям было бы интересно дать звездчатые многоугольники на дополнительных занятиях. В дополнительных занятиях важно научиться применять легкое на чем-то новом и необычном.

Чтобы рассматривать данную тему в кружке, необходимо найти материалы по ней, что довольно тяжело. На русском языке практически нет каких-либо результатов, но на английском ее намного больше. Наши сайт и приложение облегчают поиск. Мы систематизировали всю информацию и разместили в приложении и на сайте. Преподаватель может зайти на сайт, скачать приложение и/или теорию, а также задачи на звездчатые многоугольники.

Все формулы по звездчатым многоугольникам мы выводили сами. В заметке представлена вся теория по звездчатым многоугольникам, часть программы и задачи на звездчатые многоугольники.

ЦЕЛЕВАЯ АУДИТОРИЯ

Целевая аудитория приложения: преподаватели специализированных структурных образовательных подразделений.
Преподаватели могут использовать это приложение на дополнительных занятиях для визуализации свойств звездчатых многоугольников и создании более сложных и необычных задач. Это может помочь учащимся лучше понять абстрактные концепции, научиться решать нестандартные задачи, которые позволят подготовиться к олимпиадам.

ПРО САЙТ И ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы решили сделать и сайт, и приложение, хотя в названии проекта указано только приложение. И у сайта, и у приложения есть свои плюсы и минусы. Создавая и сайт, и приложение, мы минимизируем проблемы, которые могут возникнуть у человека при желании воспользоваться продуктом.
Минусы сайта: не всегда есть доступ к интернету, ограниченный функционал.
Плюсы сайта: не нужно тратить место для приложения. Если пользователь хочет воспользоваться только один раз, приложение ему не нужно.
Минусы приложения: не всем оно необходимо, занимает место, у кого-то может не загрузиться.
Плюсы приложения: обширный функционал, не требуется доступ к интернету
Помимо этого, сайт - тестовая версия приложения и он выполняет функцию рекламы приложения. Узнать о приложении можно будет через сайт, а в последствии скачать его, если будет такое желание.

Функционал сайта и приложения.
Сайт дает базовый функционал: базовая теория и инструмент для построения звездчатого многоугольника по следующим параметрам: коли-

чество вершин, шаг и радиус описанной окружности.
Приложение обладает более обширными возможностями. В нем тоже есть инструмент для построения звездчатого многоугольника, вся теория и задачи разной степени сложности на звездчатые многоугольники.

К приложению будет публичный доступ через сайт. Также можно будет получить доступ отдельно к коду, если кто-то захочет воспользоваться им. Наш продукт полезен не только для изучения звездчатых многоугольников и повторения материала по геометрии, но и для использования кода. Загрузить можно будет сразу и с сайта, и с GitHub.

Выбор языков программирования.
Приложение написано на python, сайт на html. Мы выбрали python, потому что его знают все члены команды. Так намного проще взаимодействовать с другими.

ТЕОРИЯ

Звездчатый многоугольник {n/m} - это форма, образованная путем соединения вершин правильного n-угольника через m пустых расстояний. Далее звездчатый многоугольник будем обозначать ЗМ.
Начнем с конкретного примера. Возьмем окружность, на ней обозначим 7 точек на равном расстоянии друг от друга.

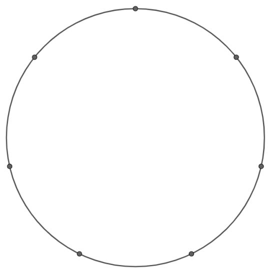
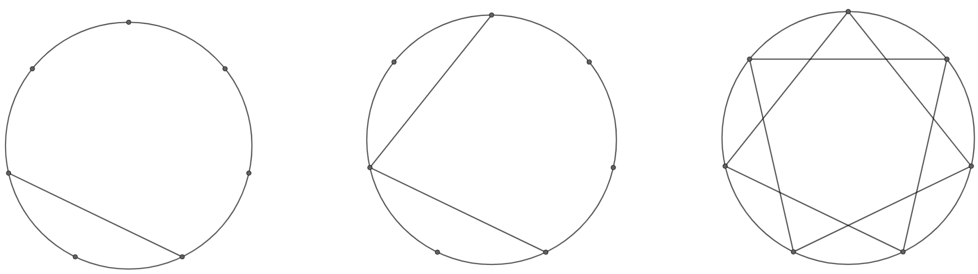


Рис. 2.1: Окружность с 7 равными дугами

За начало можно взять любую точку. От нее строим отрезок, пропуская следующую точку. Таким образом двигаемся далее и получаем ЗМ{7;2}.



(a) (b) (c)

Рис. 2.2: Пошаговое построение ЗМ{7;2}

Всегда ли {n;m} будет звездой? Если мы возьмем $m = 1$, то мы получим обычный правильный n-угольник.

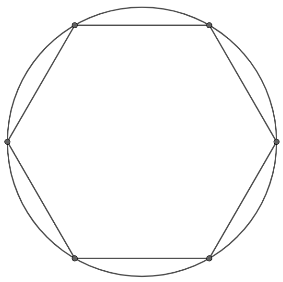


Рис. 2.3: {6;1}

Если же мы возьмем m $= \frac{n}{2}$, мы получим нечто похожее на звезду, но звездчатым многоугольником являться это не будет. При {6;3} мы получим следующее изображение:

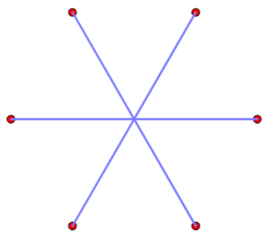


Рис. 2.4: {6;3}

Исходя из этого, мы можем вывести условие: $[1 < m < \frac{n}{2})$

Стоит заметить, что не всегда ЗМ можно получить последовательным соединением точек. Отметим на окружности 6 точек на равных расстояниях друг от друга.

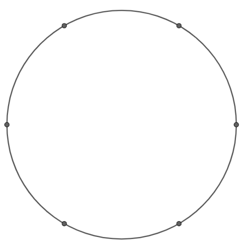
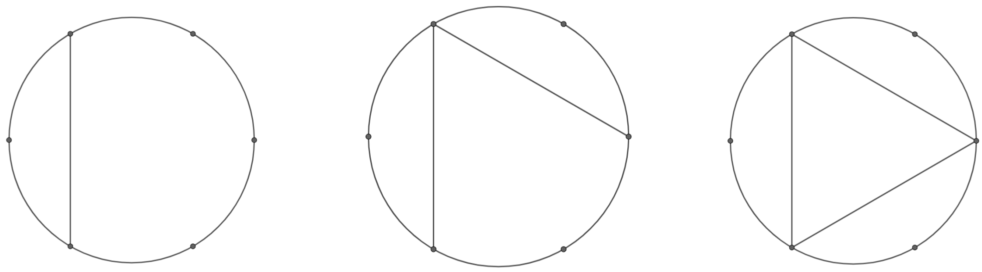


Рис. 2.5: Окружность с 6 равными дугами

Попробуем построить ЗМ по той же схеме.



(a) (b) (c)

Рис. 2.6: Пошаговое построение ЗМ{6;2}

Мы получили треугольник, при этом точки на окружности еще остались. В таких случаях нужно переместиться на любую точку и продолжить построение по заданному шагу.

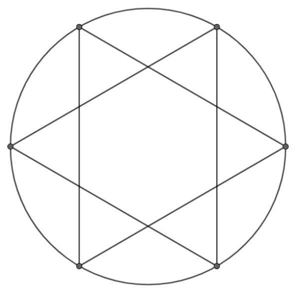


Рис. 2.7: ЗМ{6;2}

Мы можем ввести два новых определения - связный и несвязный ЗМ.

2.1 Связность и несвязность

Связный звездчатый многоугольник - это такой многоугольник, который представляет собой замкнутый контур. Его можно нарисовать, не отрывая руки от листа.

Несвязный звездчатый многоугольник - это такой многоугольник, который не является связным. Его невозможно нарисовать, не отрывая руки от листа и не проходя по одним и тем же линиям несколько раз.

ЗМ связные тогда и только тогда, когда НОД (n, m) = 1.
Следствие: если n - простое, то все ЗМ для этого n связны.

Несвязный ЗМ состоит из нескольких частей. Их количество равно НОД(n, m), а количество вершин у этих частей $\frac{n}{HOD(n,m)}$. Также несвязный ЗМ можно получить из обычного многоугольника, поворачивая его на определенный угол поверх предыдущего шага. Угол составляет $\frac{2\pi}{kn}$, где n - количество вершин ЗМ, k - счетчик поворотов. В итоге мы из $\{n;m\}$ можем получить $\{kn;km\}$ (меняется только k).

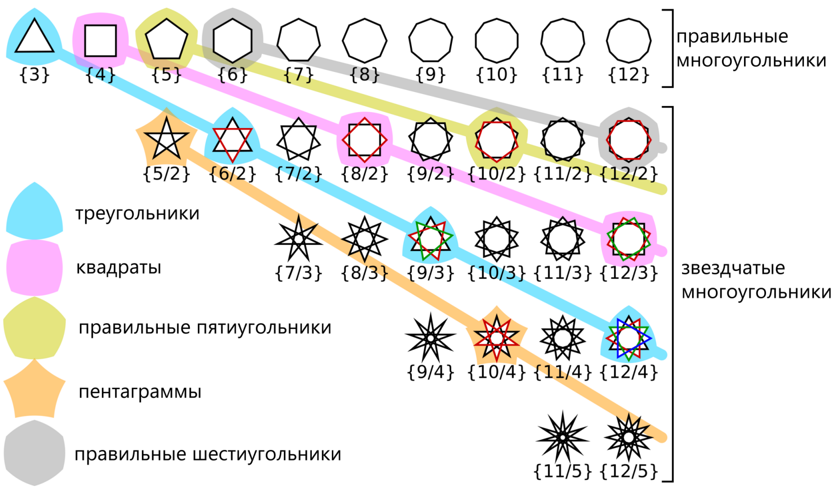


Рис. 2.8: Связность и несвязность ЗМ

Слева направо идет увеличение количества углов, сверху вниз - увели-

чение шага. В первой строке шаг считается равным 1.
Голубым цветом обозначены несвязные ЗМ, состоящие из нескольких правильных треугольников.
Розовым цветом обозначены несвязные ЗМ, состоящие из нескольких квадратов.
Желтым цветом обозначены несвязные ЗМ, состоящие из нескольких правильных пятиугольников.
Оранжевым цветом обозначены несвязные ЗМ, состоящие из 5-угольных ЗМ (пентаграмм).
Серым цветом обозначены несвязные ЗМ, состоящие из нескольких правильных шестиугольников.

По формуле $[\frac{n}{2}] - 2 + n\%2$ мы можем вычислить количество С (связных) и НС (несвязных) ЗМ в n-угольнике.

n	ЗМ	С	НС
5	1	1	0
6	1	0	1
7	2	2	0
8	2	1	1
9	3	2	1
10	3	1	2
11	4	4	0
12	4	1	3

Таблицу можно продолжать и дальше до бесконечности.

2.2 Формулы звездчатых многоугольников

Периметр

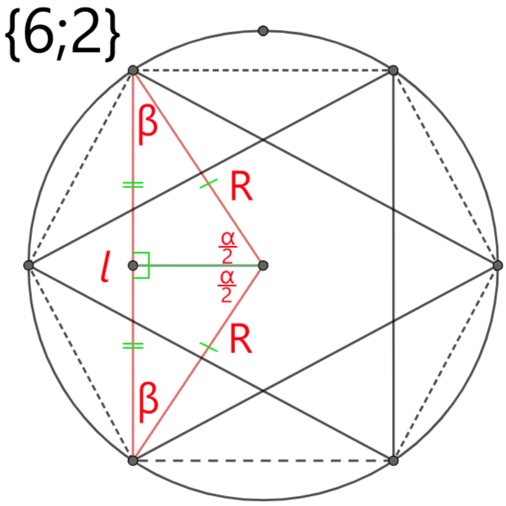


Рис. 2.9: Поиск формулы периметра

1) $\frac{(\frac{l}{2})}{R} = sin(\frac{\alpha}{2})$; $\frac{l}{2R} = sin(\frac{\alpha}{2}) \mid \cdot 2$

2) $\frac{l}{R} = 2 \cdot sin(\frac{\alpha}{2})$; $l = 2 \cdot R \cdot sin(\frac{\alpha}{2})$ - длина диагонали.

3) Тогда периметр: l · n, где n - количество вершин ЗМ.

4) Также: $\alpha = \frac{360}{n} \cdot m$, где m - шаг; $\beta = \frac{180-\alpha}{2}$

$$P_{\text{ЗМ}} = l \cdot n \tag{2.1}$$

Площадь

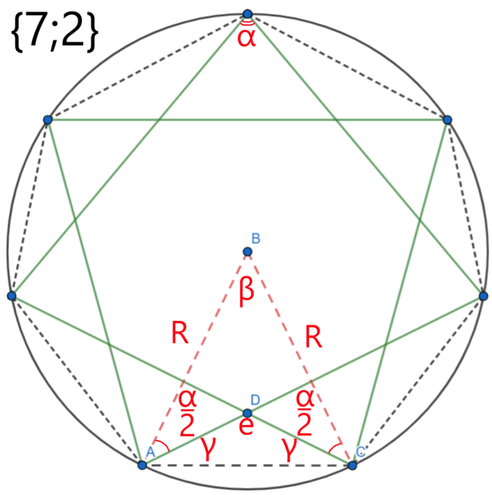


Рис. 2.10: Поиск формулы площади

1) $\alpha = \frac{2\pi}{2n}(n - 2m)$

2) $\beta = \frac{2\pi}{n}$ (центральный угол)

3) Проведем радиусы в вершины A и C. Радиусы делят вершины ЗМ пополам $=> \angle BAD = \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$

4) В $\triangle ABC$: $\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \gamma + \gamma = 180°$ (где $\gamma = \angle DAC = \angle DCA$, так как $\triangle ABC$ - р/б(AB = BC = R), следовательно $\angle BAC = \angle BCA$, так как $\angle BAD = \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle BCD + \angle ACD => \angle DAC = \angle DCA = \gamma$), тогда $\beta + \alpha + 2\gamma = 180° => \gamma = \frac{\pi - \beta - \alpha}{2}$

5) В $\triangle ADC$: $e + \gamma + \gamma = 180°$ (где e - $\angle ADC$) $=> e = \pi - 2\gamma$

6) В $\triangle ABC$: по т. cos : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot cos(\beta) => AC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 cos(\beta)(AB = BC = R) => AC^2 = 2R^2(1 - cos(\beta))$

7) В $\triangle ADC$: по т. cos $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot cos(e)$
Так как $\angle DAC = \angle DCA = \gamma => \triangle ADC$ - р/б $=> AD = DC = Q, =>$
$AC^2 = 2Q^2(1 - cos(e) => Q^2 \frac{AC^2}{2 \cdot (1 - cos(e))}$

8) $S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot sin(e) => S_{ADC} = \frac{Q^2 \cdot sin(e)}{2}$

9) $S_{\text{правильный мног.}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot n \cdot sin(\beta) = S_{\triangle ABC} \cdot n$

10) $S_{\text{ЗМ}} = S_{\text{всего мног.}} - S_{ADC} \cdot n$

11) $S_{\triangle ADC} = \frac{Q^2 \cdot sin(e)}{2} = \frac{AC^2 \cdot sin(e)}{((1 - cos(e)) \cdot 4} = \frac{2R^2 (1 - cos(\beta)) \cdot sin(e)}{(1 - cos(e)) \cdot 4} = \frac{R^2 (1 - cos(\beta)) \cdot sin(\pi - 2\gamma)}{(1 - cos(\pi - 2\gamma)) \cdot 2}$

Т.к. $sin(\pi - 2\gamma) = sin(2\gamma) = sin(2 \frac{\pi - \beta - \alpha}{2}) = sin(\pi - \beta - \alpha) = sin(\alpha + \beta);$

$cos(\pi - 2\gamma) = -cos(-2 \frac{\pi - \beta - \alpha}{2}) = -cos(-\pi + \beta + \alpha) = cos(\beta + \alpha)$

Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{R^2 (1 - cos(\beta) \cdot sin(\alpha + \beta)}{(1 - cos(\alpha + \beta) \cdot 2}$

12) т.к. $\text{S}_{\text{ЗМ}} = S_{BM} - S_{ADC} \cdot n => \text{S}_{\text{ЗМ}} = \frac{R^2 \cdot n \cdot sin(\beta)}{2} - \frac{R^2 (1 - cos(\beta)) \cdot sin(\alpha + \beta)}{(1 - cos(\alpha + \beta))} \cdot n =>$

$$S_{\text{ЗМ}} = \frac{R^2 \cdot n}{2} (sin(\beta) - \frac{(1 - cos(\beta)) \cdot sin(\alpha + \beta)}{(1 - cos(\alpha + \beta)}) \tag{2.2}$$

Радиусы вписанной и описанной окружностей

Радиус вписанной окружности: $r = Rcos(\frac{\alpha}{2})$, где $\alpha = \frac{2\pi m}{n}$
Радиус описанной окружности: $R = \frac{r}{cos(\frac{\alpha}{2})}$

2.3 Углы

Центральный угол звездчатого многоугольника

Звездчатые многоугольники образуются при помощи правильных многоугольников, поэтому несложно догадаться, что центральный угол ($\angle\alpha$) можно найти, разделив $360°$ на количество сторон правильного многоугольника (рис. 2.11),

$$\alpha = \frac{360}{n} \tag{2.3}$$

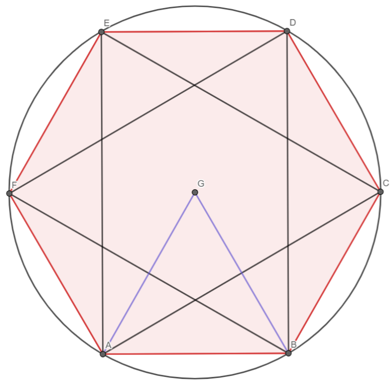


Рис. 2.11: Центральный угол правильного шестиугольника

где n - количество сторон у многоугольника. Центральный $\angle$G опирается на ту же дугу, что и центральный угол правильного шестиугольника.

Внутренний угол

Внутренний угол ЗМ будет опираться на дугу, заключенную между смежными сторонами многоугольника. Этот внутренний угол равен половине центрального угла. Дуги связаны между одинаковыми сторонами n-угольника, тогда вся дуга делится на n сторон. Величина дуги, на которую опирается внутренний угол будет равен количеству дуг, которые охватят две диагонали при построении ЗМ. На рис. 2.11 $\angle$ECA опирается на $\smile$EFA. В свою очередь $\smile$FED стягивается отрезком FD и т.д.

$\alpha = \frac{180(n-2m)}{n}$

Сумма углов: $180(n-2m)$

Угол между радиусом и стороной

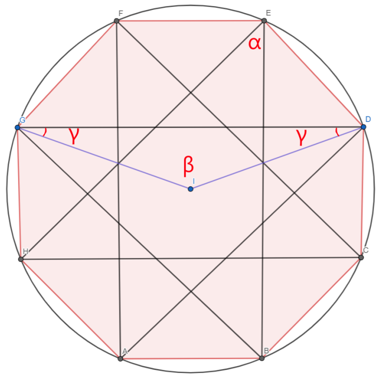


Рис. 2.12: р/б $\triangle$GID

Найдем угол между радиусом, проведенным к вершине ЗМ, и стороной ЗМ. Проведем два радиуса к вершинам ЗМ (GI, ID) (рис. 2.12). Рассмотрим $\triangle$GID. Найдем градусную меру $\angle\beta$:

$$\beta = \frac{360m}{n}$$

$\triangle$GID р/б, т.к. GI = ID = R. Из этого следует, что $\angle\gamma$ равен:

$$\gamma = \frac{180 - (\beta)}{2} \tag{2.4}$$

$$\gamma = 90 - \frac{\beta}{2}$$

$$\gamma = 90 - \frac{360m}{2n}$$

$$\gamma = 90 - \frac{180m}{n}$$

Теперь рассмотрим $\angle\alpha$, который мы находили ранее:

$$\alpha = \frac{180(n - 2m)}{n}$$

Заметим, что $\angle\gamma$ в два раза меньше $\angle\alpha$, а следовательно $\angle\gamma$= $\frac{\alpha}{2}$

2.4 Интересные факты

Подобие внутреннего многоугольника

ABCDEFGH - внешний n-угольник, PIJKLMNQ - внутренний n-угольник (Рис. 2.13)
Проведем радиусы OA и OB из центра описанной вокруг внешнего n-угольника окружности. Проведем радиусы OP и OQ из центра описанной вокруг внутреннего n-угольника окружности. Найдем коэффициент подобия k как отношение PQ $\triangle OPQ$ к AB $\triangle AOB$:
По т. косинусов: $PQ^2 = 2OP^2$ - $2OP^2\cos(\alpha)$ (тк. OP==OQ)
По т. косинусов: $AB^2 = 2AO^2$ - $2AO^2\cos(\alpha)$ (тк. AO==OB)
$K = \frac{PQ}{AB} = \frac{OP\left(\sqrt{2-\cos(\alpha)}\right)}{AO\left(\sqrt{2-\cos(\alpha)}\right)} = \frac{OP}{AO} = \frac{r}{R}$
$\angle\alpha = \angle\alpha_1 = \frac{360°}{n}, \angle\gamma = \frac{90(n-2m)}{n}, \angle\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ (по предыдущим док-вам)
По т. синусов: $\frac{OL}{\sin(\gamma)} = \frac{OD}{\sin(\beta)} => OL = r = \frac{\sin(\gamma)\cdot OD}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\gamma)\cdot R}{\sin(\beta)}$
Подставим полученный радиус в формулу подобия:

$$K = \frac{\sin(\frac{90(n-2m)}{n})}{\sin(\frac{360-90n-2m)}{n})} \tag{2.5}$$

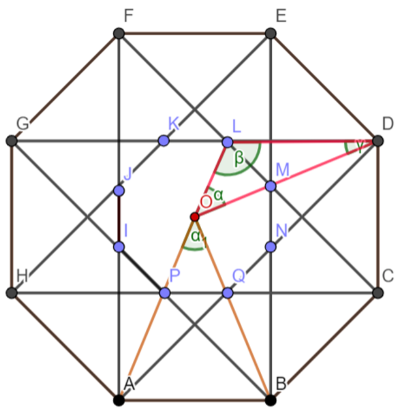


Рис. 2.13: Доказательство подобия внешнего и внутреннего многоугольников

Фракталы в ЗМ

Теперь, когда мы доказали подобие внутреннего многоугольника к внешнему, разберем еще одно свойство многоугольнков - фракталы.

Фракталы — это фигуры, которые рекурсивно воспроизводят сами себя, создавая причудливые узоры в двух- и трехмерном пространствах. А так как мы доказали подобие n-угольников, к тому же мы пришли к n-угольнику с одинаковым количеством углов, мы можем посторить во внутреннем многоугольнике такой же ЗМ. Получается, что звездчатые многоугольники - это фракталы.

ЗМ, как и фракталы, содержат копии самих себя в различных масштабах. Это означает, что при увеличении или уменьшении масштаба, фигура по-прежнему будет выглядеть похожей на исходную. Звездчатые многоугольники также демонстрируют эту характеристику. Когда мы внутри одного звездчатого многоугольника строим еще один, сохраняющий те же пропорции и углы, мы видим самоподобие.

Процесс построения фракталов часто включает рекурсивное повторение одного и того же шаблона на различных уровнях масштаба. Звездчатые многоугольники можно рассматривать как результат рекурсивного применения процесса звездообразования к внутренним многоугольникам

Даже простые фрактальные структуры могут обладать бесконечной сложностью, когда они рассматриваются на все более и более мелких уровнях. Хотя звездчатые многоугольники могут не всегда быть бесконечно сложными, их построение через рекурсию приводит к созданию узоров, которые обладают высокой степенью сложности и детализированности.

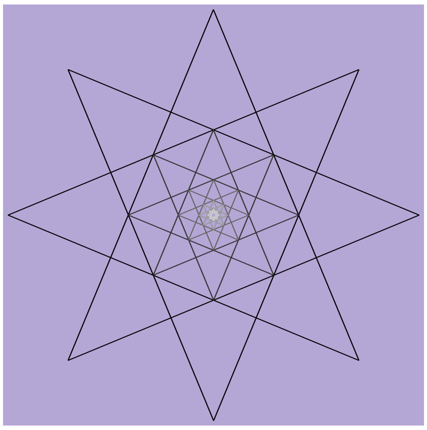


Рис. 2.14: Фрактал из ЗМ

Звездчатые многоугольники, являясь самоподобными структурами, которые могут быть построены рекурсивно, демонстрируют основные характеристики фракталов. Это позволяет рассматривать их как примеры фрактальных фигур, создающих причудливые и сложные узоры в двухмерном пространстве.

ОБЪЯСНЕНИЕ КОДА

3.1 Построение звездчатого многоугольника

Вычисление координат вершин

Для построения изображения звездчатого многоугольника сначала необходимо получить координаты вершин с помощью следующих уравнений (далее предполагается, что центр координат находится в центре звездчатого многоугольника)

$$\begin{cases} 0 \leq k < n \\ k \in \mathbb{Z} \\ x_k = cos(\frac{2\pi k}{n}) \\ y_k = sin(\frac{2\pi k}{n}) \end{cases} \tag{3.1}$$

В коде это выглядит так:

```
points = []
for k in range(n):
    points.append((
        cos(2 * pi * k / n),
        sin(2 * pi * k / n)
    ))
```

Внешние точки пересечения сторон могут быть вычислены следующим способом благодаря теореме синусов:

R – радиус описанной вокруг звездчатого многоугольника окружности

r – расстояние от центра звездчатого многоугольника до внешней точки пересечения сторон

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(\frac{\tau}{4}(n-2m))}{n} \\ \beta = \frac{\tau}{n} \\ \gamma = \pi - \alpha - \beta \\ r = \frac{sin(\alpha)}{sin(\gamma)} \\ k \in \mathbb{Z} \cap [2; \frac{n}{2}) \\ x_k = r \cdot cos(\frac{\tau(k+0.5)}{2n}) \\ y_k = r \cdot sin(\frac{\tau(k+0.5)}{2n}) \end{cases} \tag{3.2}$$

Имея координаты вершин и внешних точек пересечения сторон, можно с помощью ориентированной площади найти площадь звездчатого многоугольника.

$$S = |\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + \ldots + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})| \tag{3.3}$$

ЗАДАЧИ

Лёгкие задачи

1. Как выглядит ЗМ{n;1}?

2. Как выглядит ЗМ{n;n-1}?

3. Сколько звездчатых многоугольников можно нарисовать на окружности с помощью n равномерно расположенных точек? Заполните информацию в таблице ниже.

Точки	Кол-во ЗМ
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	

4. Не рисуя, определите связность для каждого {n;m}, указанного ниже. Если ЗМ несвязный, определите из каких частей он состоит и их количество.

{5;2}, {8;2}, {19;3}, {21;7}

5. Найдите величину угла для каждого звездчатого многоугольника, перечисленного ниже.

ЗМ {n;m}	Угол
{5;2}	36
{8;3}	45
{9;4}	20
{12;5}	30
{18;7}	40

6. Если вы разложите ЗМ{25;10}, из каких звезд меньшего размера он будет состоять и к какому типу они относятся (связность)?

7. Какой {n;m} ЗМ имеет угол ровно в 18 градусов? Сколько таких может быть?