Расчётно графическая Работа №1

Выполнил: Андрюшин Лев М80-312Б-22

Задание

• Определить число итераций, необходимое для поиска неподвижной точки этого отображения с некоторой точностью ϵ

• Доказать, что отображение сжимающее и найти коэффициент сжатия

• Построить график функции, являющейся неподвижной точкой отображения.

• Продемонстрировать несколько графиков, получающихся при промежуточных вычислениях.

Задание № 1 Андрюшин Лев Дмитриевич
Вариант №2 М8О-312Б-22
$k=12, l=15$

$$T(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+k}x(3t)-\frac{l}{2}, & 0\le t\le\frac{1}{3}\\ f(t), & \frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}, \text{ где } f(t) \text{ - аффинная функция такая что } T(x) - \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2), & \frac{2}{3}\le t\le 1\end{cases}$$

— непрерывная функция

○ Доказать, что отображение сжимающее и найти коэффициент сжатия

Доказательство.

Рассмотрим отображение $T: C[0,1]\to C[0,1]$ заданное выше.
Мы хотим доказать, что T является сжимающим, то есть существует такое число $\alpha\in(0,1)$ и при этом $\max\limits_{t\in[0,1]}|T(x(t))-T(y(t))|\le\alpha\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$ для любых $x,y\in C[0,1]$

1. Проверим неравенство для каждого случая.
1) Пусть $3t=s$, тогда $s\in[0;1]$ т.к. $t\in[0;\frac{1}{3}]$
При $0\le t\le\frac{1}{3}$

$$|T(x(t))-T(y(t))|=\left|\frac{1}{13}x(3t)-\frac{15}{2}-\left(\frac{1}{13}y(3t)-\frac{15}{2}\right)\right|=\frac{1}{13}|x(s)-y(s)|$$

Т.к. ~~$x(t)$ и $y(t)$~~ $x(3t)$ и $y(3t)\in C[0,1]$, то $|x(3t)-y(3t)|\le\max\limits_{s\in[0,1]}|x(s)-y(s)|$
Тогда $|T(x(t))-T(y(t))|\le\frac{1}{13}\max\limits_{s\in[0,1]}|x(s)-y(s)|$

2) При $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$
$|T(x(t))-T(y(t))|=0$ т.к. на этом участке функция не зависит от x и y

3) При $\frac{2}{3}\le t\le 1$
Пусть $3t-2=s$, тогда $s\in[0;1]$ т.к $t\in[\frac{2}{3};1]$, но мы отличаемся от этого два.
Аналогично первому случаю мы получим:
$|T(x(t))-T(y(t))|\le\frac{1}{13}\max\limits_{s\in[0,1]}|x(s)-y(s)|$

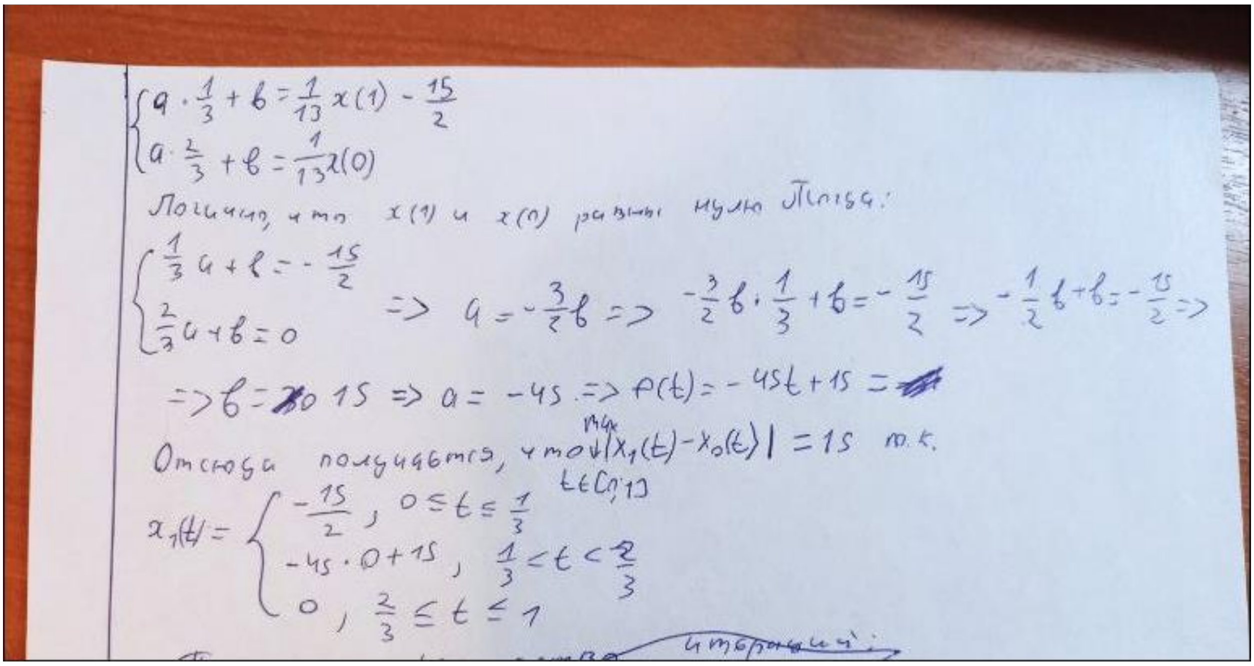
2. Из рассмотрения этих 3 случаев следует, что сжимающим коэффициентом является число $\alpha=\frac{1}{13}$. Т.к. $\frac{1}{13}\in(0;1)$, то отображение T является сжимающим, что и следовало доказать

3. Выберем начальное приближение $x_0(t)=0$. Тогда $x_1=T(x_0)$. Теперь вычислим x_1

$$x_1(t)=\begin{cases}-\frac{15}{2} & 0\le t\le\frac{1}{3}\\ f(t) & \frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}\\ 0, & \frac{2}{3}\le t\le 1\end{cases}$$

Теперь мы должны найти $f(~~x~~t)$. Мы знаем, что $f(t)$ непрерывная ф-ия (задано в условии), поэтому мы должны найти ее с помощью граничных условий. Так же мы знаем, что $f(t)$ - ~~аффинная~~ аффинная => она имеет вот такой вид: $at+b=f(t)$

Таким образом, у нас получится вот такая система уравнений:



$$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{3} + b = \frac{1}{13} x(1) - \frac{15}{2} \\ a \cdot \frac{2}{3} + b = \frac{1}{13} x(0) \end{cases}$$

Получим, что $x(1)$ и $x(0)$ равны нулю. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} a + b = -\frac{15}{2} \\ \frac{2}{3} a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2} b \Rightarrow -\frac{3}{2} b \cdot \frac{1}{3} + b = -\frac{15}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} b + b = -\frac{15}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \cancel{30}\ 15 \Rightarrow a = -45 \Rightarrow \varphi(t) = -45t + 15 = \cancel{\ }$$

Отсюда получается, что $\max_{t \in [0,1]} |x_1(t) - x_0(t)| = 15$ т.к.

$$x_1(t) = \begin{cases} -\frac{15}{2}, & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ -45 \cdot 0 + 15, & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ 0, & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

итерации

Вот полный код моей программы:

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def T(current_values, time_points, time):
    """ Определение отображения T(x). """
    if 0 <= time <= 1/3:
        idx = np.searchsorted(time_points, 3 * time, side="right") - 1
        return 1/13 * current_values[idx] - 15/2
    elif 1/3 < time < 2/3:
        return -45 * time + 15
    elif 2/3 <= time <= 1:
        idx = np.searchsorted(time_points, 3 * time - 2, side="right") - 1
        return 1/13 * current_values[idx]

def find_fixed_point(T, initial_values, time_points, epsilon=0.01,
max_iterations=1000):
    """ Метод сжимающих отображений с выводом промежуточных результатов. """
    current_values = initial_values
    iteration_counter = 0
    iteration_results = []  # Список для сохранения результатов на каждой
итерации

    for i in range(max_iterations):
        updated_values = []
        for time in time_points:
            new_value = T(current_values, time_points, time)
            updated_values.append(new_value)
        updated_values_array = np.array(updated_values)
```

```
        difference = np.max(np.abs(updated_values_array - current_values))

        # Сохраняем все итерации
        iteration_results.append(updated_values_array)

        if difference < epsilon:
            print(f"Точность: {epsilon}, итерация: {i}")
            return iteration_results, i

        current_values = updated_values_array
        iteration_counter += 1

    print("Ошибка")
    return iteration_results, iteration_counter

# задаем линейную функцию
time_points = np.linspace(0, 1, 1000)
initial_values = np.zeros_like(time_points)  # Начальное приближение x(t) = 0

epsilons = [0.1, 0.01, 0.001]

for epsilon in epsilons:
    iteration_results, iteration_counter = find_fixed_point(T, initial_values,
time_points, epsilon)

    # Построение графиков для всех итераций
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    for i, values in enumerate(iteration_results):
        plt.plot(time_points, values, label=f'Итерация {i}')

    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x(t)')
    plt.legend()
    plt.title(f'Процесс нахождения неподвижной точки для ε={epsilon},
итераций={iteration_counter}')
    plt.grid()
    plt.show()  # Выводим один график для всех итераций
```

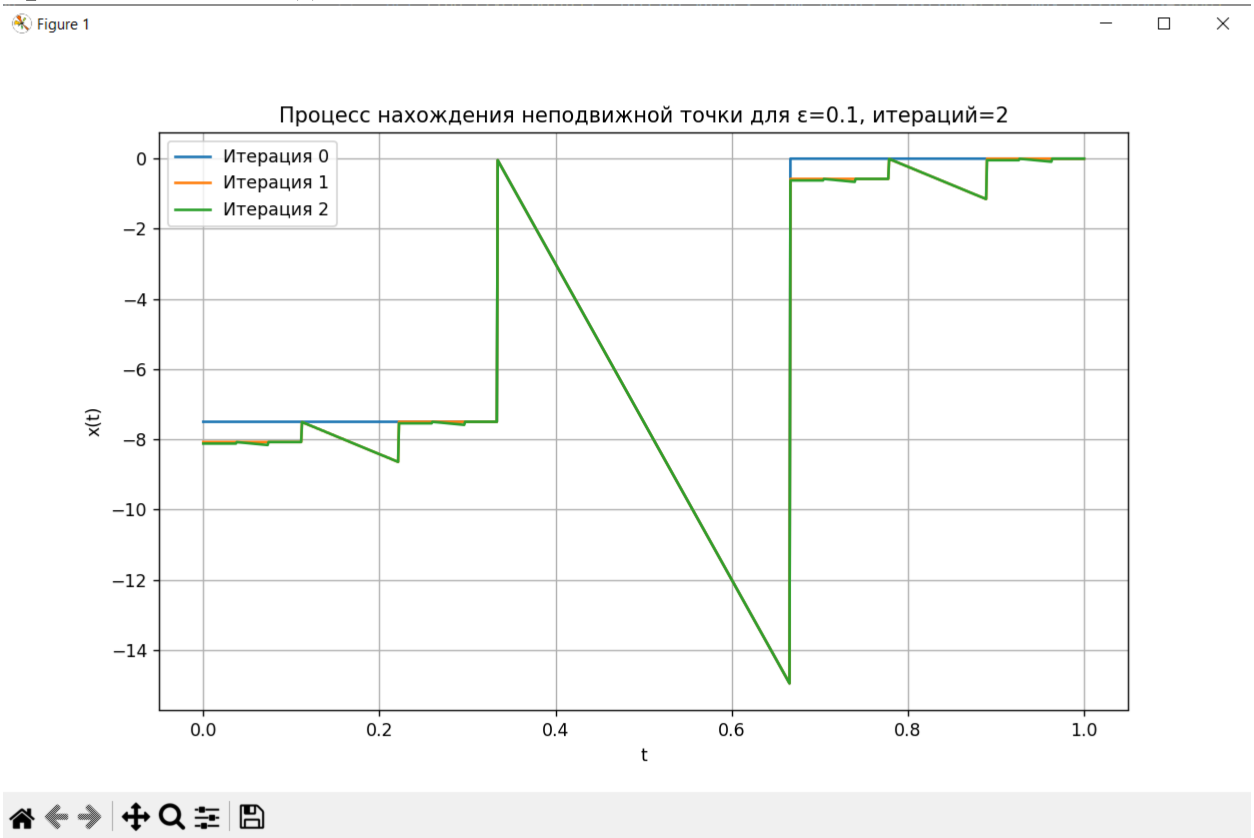
Вот количество итераций при различных значениях эпсилон:

```
Точность: 0.1, итерация: 2
Точность: 0.01, итерация: 3
Точность: 0.001, итерация: 4
```

Мы вычисляем их по этой формуле:

$$n < \ln \frac{\dfrac{\epsilon(1-\alpha)}{\rho(x_1, x_0)}}{\ln \alpha}$$

Вот 3 графика для различных эпсилонов при начальной приближении x(t) = 0:



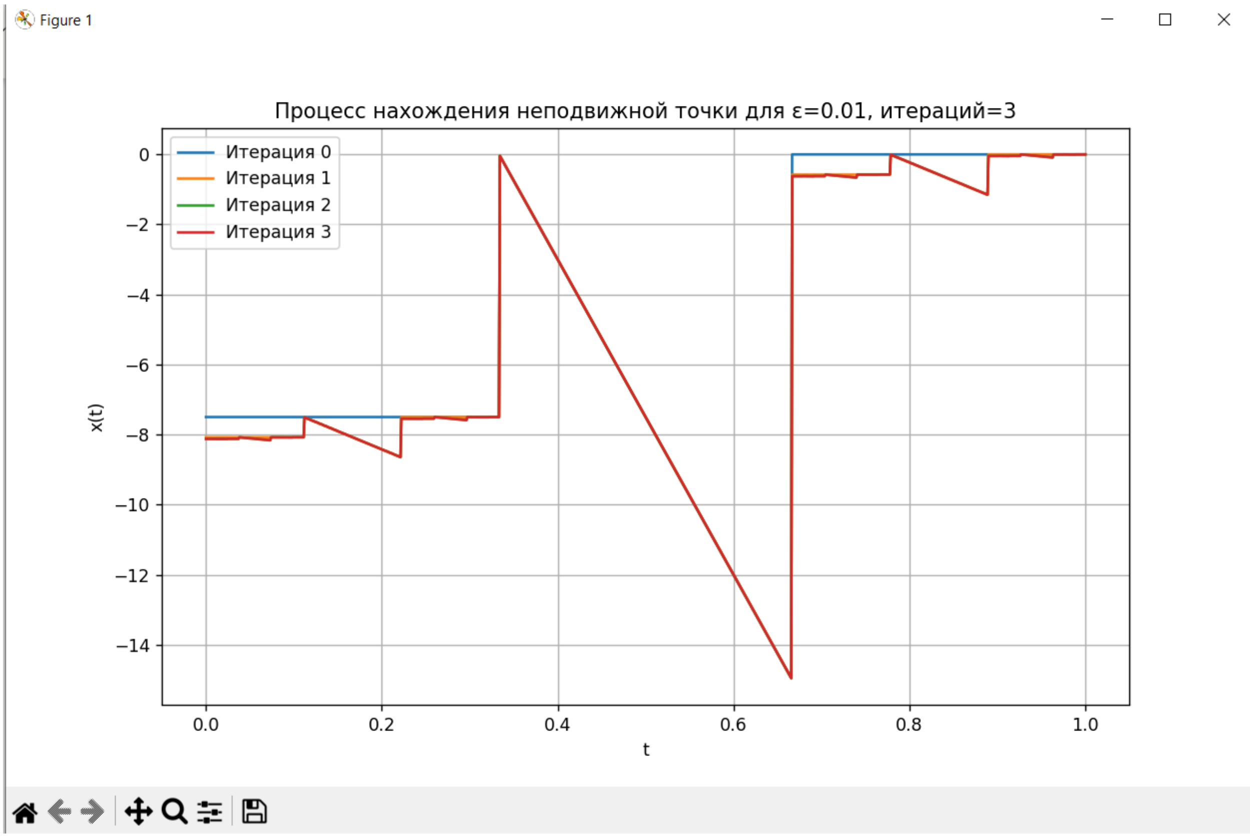


Figure 1
Процесс нахождения неподвижной точки для ε=0.01, итераций=3
Итерация 0
Итерация 1
Итерация 2
Итерация 3
x(t)
t


Figure 1
Процесс нахождения неподвижной точки для ε=0.001, итераций=4
Итерация 0
Итерация 1
Итерация 2
Итерация 3
Итерация 4
x(t)
t

Вот пример графика при начальном приближении x(t) = t:

Вот пример графика при начально приближении x(t)=t^2:

Как можно заметить при любых начальных приближениях наш график не меняется