Гр №3

Вариант №2

$k = 12,\ \ell = 15$

$[a, b] = [-k, 5\ell] = [-12, 75]$

$f(x) = 2\cos kx + 2\chi(3x - \frac{\ell}{5}) = 2\cos 12x + 2\chi(3x-3) - x^2$

$F(x) = e^x + 2\chi(x+1) + 2\chi(4x - k) + x^3 = e^x + 2\chi(x+1) + 2\chi(4x-12) + x^3$

1) Функция Хевисайда

- В $f(x)$ $\chi(3x-3) \Rightarrow 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \int\limits_{-12}^{75} f(x)\,dF(x) = \int\limits_{-12}^{1} f(x)\,dF(x) + \int\limits_{1}^{75} f(x)\,dF(x)$
- В $F(x)$ $\chi(x+1) \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$ разрыв в $x = -1$

  $\chi(4x-12) \Rightarrow x \geq 3 =$ разрыв в 3

  В этих точках $F(x)$ делает скачки на 2

2) ~~f~~ $\int f(x)\,dF(x) = \int f(x) \cdot F'(x)\,dx + \sum f(c) \cdot \Delta F(c)$, где

- $\Delta F(c) = F(c^+) - F(c^-)$ – скачок в точке c,
- $f(c)$ – значение ф-и в точке скачка

Получаем такую формулу:

$$\int\limits_{-12}^{75} f(x)\,dF(x) = \underbrace{\int\limits_{-12}^{1} f(x) \cdot F'(x)\,dx}_{\text{первый участок}} + \underbrace{\int\limits_{1}^{75} f(X) \cdot F'(x)\,dx}_{\text{второй участок}} + \underbrace{f(-1) \cdot \Delta F(-1)}_{\text{скачок в -1}} + \underbrace{f(3) \cdot \Delta F(3)}_{\text{скачок в 3}}$$

3) $F(x) = e^x + 2\chi(x+1) + 2\chi(4x-12) + x^3 \Rightarrow F'(x) = e^x + 3x2$

Теперь распишем $f(x)$

- От -12 до 1, $x < 1 \Rightarrow \chi(3x-3) = 0 \Rightarrow f(x) = 2\cos(12x) - x2$
- От 1 до 75, здесь $x \geq 1 \Rightarrow \chi(3x-3) = 1 \Rightarrow f(x) = 2\cos(12x) + 2 - x2$

4) Теперь подставим всё в формулу:

$$\int\limits_{-12}^{75} f(x)\,dF(x) = \int\limits_{-12}^{1} (2\cos 12x - x^2)(e^x + 3x^2)\,dx + \int\limits_{1}^{75} (2\cos 12x + 2 - x^2)(e^x + 3x^2)\,dx + 2(2\cos(-12) -$$

$-1) + 2(2\cos(36) - 7$

(забыл выше написать):

$f(-1) = 2\cos(-12) - 1$

$f(3) = 2\cos(36) + 2 - 9 = 2\cos(36) - 7$

5) Для начала посчитаем всё, что находится вне интеграла:

$$2(\overset{0,8436}{2\cos(-12)}) - 1 + 2(\overset{-0,128}{2\cos(36)}) - 7 = 3,3744 - 1 \cancel{1} - 7 + 0,512 = -5,1376$$

Теперь возьмём первый интеграл:

$$I_1 = \int_{-12}^{1}(2\cos 12x - x^2)(e^x + 3x^3)dx = \int_{-12}^{1}(2\cos 12x\, e^x + 6x^2\cos 12x - x^2e^x - 3x^4)dx =$$

$$= \int_{-12}^{1} 2\cos 12x\, e^x dx + \int_{-12}^{1} 6x^2\cos 12x\, dx - \int_{-12}^{1} x^2 e^x dx - \int_{-12}^{1} 3x^4 dx$$

- $\int_{-12}^{1} 2\cos(12x)e^x dx = \left(\frac{24e^x\sin 12x}{145} + \frac{2e^x\cos 12x}{145}\right)\Bigg|_{-12}^{1} = \frac{24\sin(144) - 2\cos(14}{145e^{12}}$
$\frac{+24e^{13}\sin(12) + 2e^{13}\cos(12)}{} = -0,209733$

- $\int_{-12}^{1} 6x^2\cos 12x\, dx = \sin 12x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{144}\right) + \frac{x\cos 12x}{12}\Bigg|_{-12}^{1} = 10367\sin(144) + 144$
$\cdot\cos(144) + 71\sin(12) + 12\cos(12)) \cdot \frac{1}{144} = -34,673237$

- $\int x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x\Big|_{-12}^{1} = \frac{e^{13} - 170}{e^{12}} = 2,717233$

- $\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5}\Big|_{-12}^{1} = \frac{746499}{5} = 149299,8$

Теперь посчитаем I_1: $-0,209733 + (-34,673237) - 2,717233 - 149299,8 =$
$\approx -149337,4$

Аналогично посчитаем второй интеграл:

$$I_2 = \int_{1}^{75}(2\cos 12x + 2 - x^2)(e^x - 3x^2)dx = \int_{1}^{75} 2\cos 12x\, e^x dx + \int_{1}^{75} 6x^2\cos 12x\, dx - \int_{1}^{75} x^2e^x dx -$$

$$- \int_{1}^{75} 3x^4 dx + \int_{1}^{75} 2e^x dx + \int_{1}^{75} 6x^2 dx$$

- $\int_{1}^{75} 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5}\Big|_{1}^{75} = \frac{7119140622}{5} = 1,424 \cdot 10^9$

- $\int_{1}^{75} 6x^2 dx = 2x^3\Big|_{1}^{75} = 843748 = 8,43748 \cdot 10^5$

- $\int_{1}^{75} 2e^x dx = 2e^x\Big|_{1}^{75} = 2 \cdot e^{75} - 2e \approx 7,4665 \cdot 10^{32}$

- $\int_{1}^{75} x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x\Big|_{1}^{75} = 5477e^{75} - e \approx 2,047 \cdot 10^{36}$

- $\int_{1}^{75} 6x^2\cos 12x\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{144}\right)\sin 12x + \frac{x\cos 12x}{12}\Bigg|_{1}^{75} = 404999\sin(900 +$
$+900\cos(900) - 71\sin(12) - 12\cos(12)) \cdot \frac{1}{144} = 2806,92 = 2,807 \cdot 10^3$

- $\int_1^{25} 2\cos(12x)e^x dx = \frac{24e^x\sin 12x}{145} + \frac{2e^x\cos 12x}{145} = 24e^{25}\sin 300 + 2e^{25}\cos 300 -$

$- 24e\sin 12 - 2e\cos 12 \cdot \frac{1}{145} \approx 6,\overset{2}{\cancel{199}} \cdot 10^{37}$

Теперь посчитаем итоговый ответ:

$-5,1396 + (-149337,4) - 3,424 \cdot 10^9 + 8,43918 \cdot 10^5 + 4,4665 \cdot 10^{32} - 2,047 \cdot 10^{36} +$
$+ 3,809 \cdot 10^3 + 6,2 \cdot 10^{37} \approx -2,047 \cdot 10^{36}$

Ответ: $\underline{-2,047 \cdot 10^{36}}$