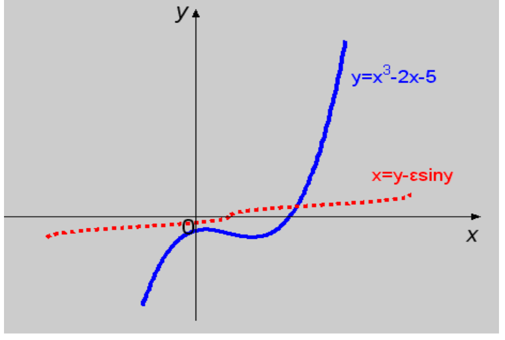
第四讲 插值法

一、引言

- 插值法：广泛应用于理论研究和生产实践的重要数值方法,
  - 用简单函数(特别是多项式或分段多项式)为各种离散数组建立连续模型；
  - 为各种非有理函数提供好的逼近方法。
- 反映自然规律数量关系的函数的三种表示方法：
  - 解析表达式
  - 图象法
  - 表格法

$$f(x)=x^3-2x-5 \qquad x=y-\varepsilon\sin y$$



x	y
0.924	-0.008513725
0.928	-0.003822324
0.932	0.000343434
0.936	0.005532443
0.940	0.012976643

- **许多数据都是用表格法给出的**(如观测和实验而得到的函数数据表格)
  - 从一个只提供离散的函数值去进行理论分析和进行设计极不方便甚至不可能
  - 需要寻找与已知函数值相符，形式简单的插值函数(或近似函数)。
- 另一种情况：**函数表达式完全给定，但其形式不适宜计算机使用**，
  - 计算机只能执行算术和逻辑操作，涉及连续变量问题的计算都需要经过离散化以后才能进行。
  - 如数值积分方法、数值微分方法、差分方程以及有限元法等，都必须直接或间接地应用到插值理论和方法。

二、多项式插值

当精确函数 $y = f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0 \ldots x_n$ 处测得函数值

$$y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n),$$

由此构造一个简单易算的近似函数

$p(x) \approx f(x)$，满足条件: $p(x_i) = f(x_i)\ \ (i = 0, \ldots n)$。

这里的 $p(x)$ 称为$f(x)$ 的插值函数。

最常用的插值函数是 …?

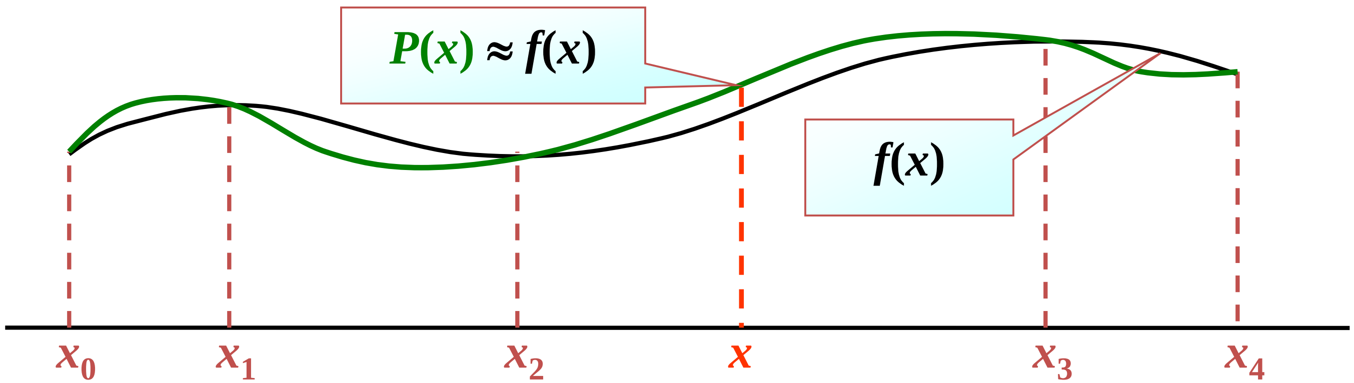
代数多项式、三角多项式、有理分式…

插值函数 $p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似，可以选自不同类型的函数, 如 $p(x)$ 为代数多项式、三角多项式、有理分式；其函数性态可以是光滑的、亦可以是分段光滑的。其中，代数多项式类的插值函数占有重要地位：

(a) 结构简单、计算机容易处理、任何多项式的导数和积分也易确定，并且仍是多项式。

(b) 著名的Weierstrass逼近定理(定义在闭区间上的任何连续函数 $f(x)$，存在代数多项式$p(x)$一致逼近$f(x)$，并达到所要求的精度)。

因此，我们主要考虑代数多项式的插值问题。



$$y=f(x)\approx P(x)\,,$$

使得 $P(x_i)= f(x_i) = y_i \quad (i=0,1,\ldots,n)$

其它点 $P(x)\approx f(x) = y$

$x_0\,, x_1, \ldots\,, x_n$ 插值节点,

函数 $P(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的插值函数，

区间 $[a, b]$ 称为插值区间。

插值问题

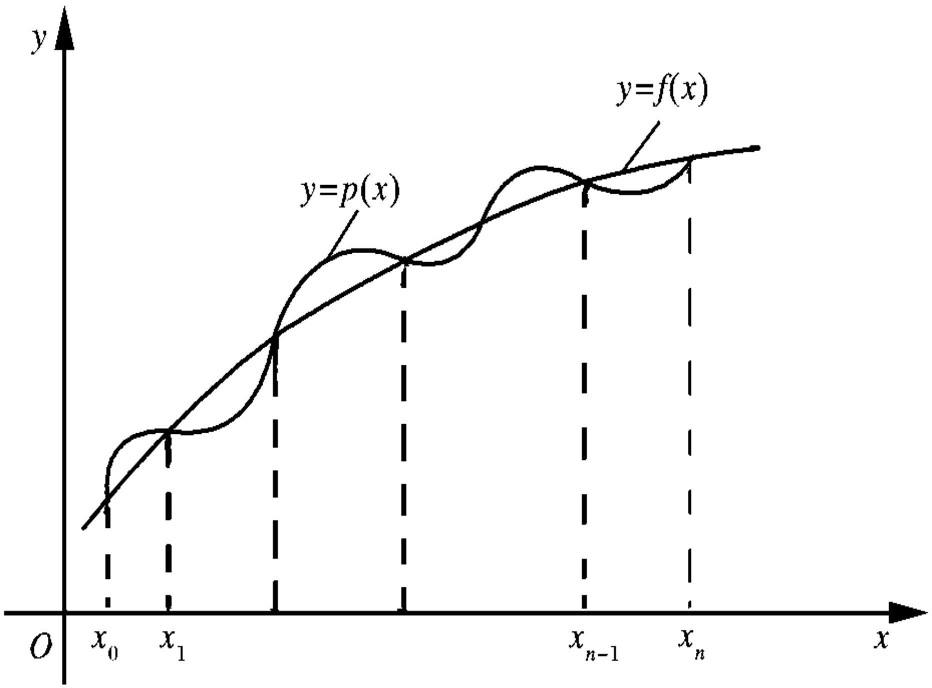
设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个实函数，$x_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ 是 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异实数，已知 $y=f(x)$ 在 x_i 的值 $y_i=f(x_i)\ (i=0,1,\ldots,n)$，求一个次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 使其满足

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\ldots,n) \qquad (1)$$

这就是多项式插值问题.

其中$P_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的n次插值多项式, $f(x)$ 称为被插函数, $x_i(i=0,1,\ldots,n)$称为插值节点, (x_i, y_i) $(i=0,1,\ldots,n)$ 称为插值点, $[a,b]$ 称为插值区间, 式(1)称为插值条件。

从几何意义来看,上述问题就是要求一条多项式曲线 $y=P_n(x)$, 使它通过已知的$n+1$个点(x_i,y_i) $(i=0,1,\ldots,n)$,并用$P_n(x)$近似表示$f(x)$.



即 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

其中a_i为实数，就称$P(x)$ 为 插值多项式，相应的插值法称为多项式插值，若$P(x)$为分段的多项式，就称为分段插值，若$P(x)$为三角多项式,就称为三角插值，本章只讨论插值多项式与分段插值。

本章主要研究如何求出插值多项式，分段插值函数，样条插值函数；讨论插值多项式$P(x)$的存在唯一性、收敛些及误差估计等。

插值法的研究问题

（1）满足插值条件的$P(x)$是否存在唯一？

（2）若满足插值条件的$P(x)$存在，如何构造$P(x)$？

（3）如何估计用$P(x)$近似替代$f(x)$产生的误差？

插值多项式的存在性和唯一性

定理1 设节点 $x_i\,(i=0,1,\ldots,n)$互异, 则满足插值条件 $P_n(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\ldots,n)$的次数不超过$n$的多项式存在且唯一.

证 设所求的插值多项式为

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \qquad (2)$$

则由插值条件式$P_n(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\ldots,n)$ 可得关于系数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$的线性代数方程组

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\
\qquad\qquad \cdots \\
a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n
\end{cases}
\qquad (3)
$$

此方程组有n+1个方程, n+1个未知数, 其系数行列式是**范德蒙(Vandermonde)行列式：**

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 \cdots x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^n \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^n
\end{vmatrix}
= \prod_{j>i} (x_j - x_i) \neq 0
$$

由克莱姆法则知方程组 (3) 的解存在唯一. 证毕。

三、拉格朗日插值

基函数

考虑最简单、最基本的插值问题.

求n次插值多项式 $l_i(x)$ (i=0,1, …,n),

使其满足插值条件

Lagrange

法1736-1813

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i\\ 1, & j=i\end{cases}\quad (j=0,1,\cdots,n)$$

可知, 除 x_i点外, 其余都是 $l_i(x)$的零点, 故可设

$$l_i(x)=A(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

$$l_i(x)=A(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

其中A为常数, 由$l_i(x_i)=1$可得

$$A=\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

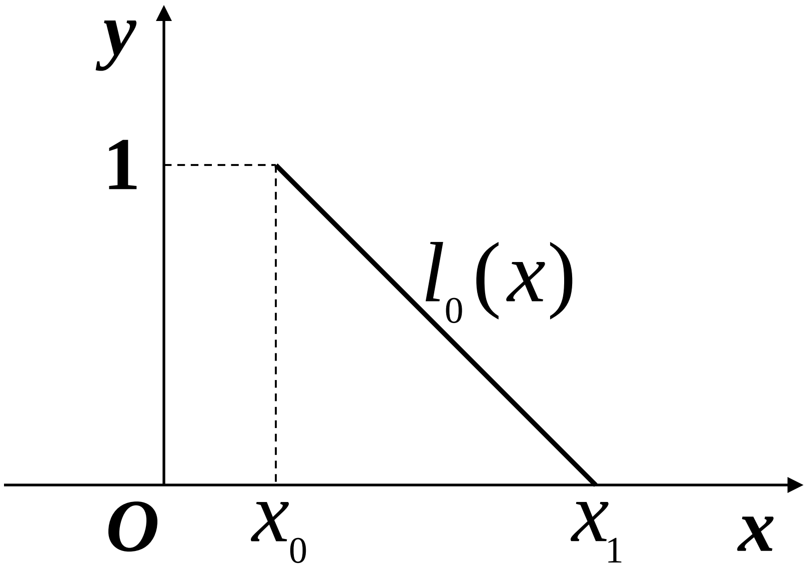
$$(i=0,1,\cdots,n)$$

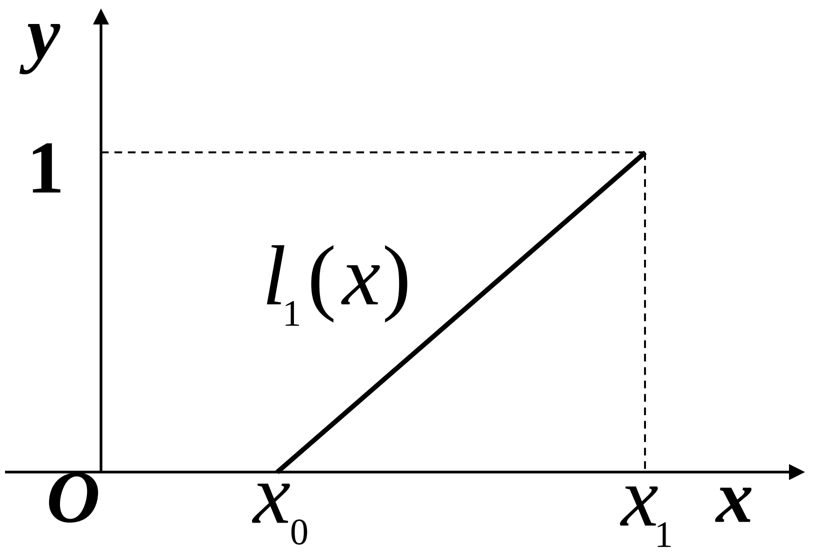
$$=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

称之为<u>拉格朗日基函数</u>, 都是n次多项式 。

n=1时的**一次基函数**为:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$



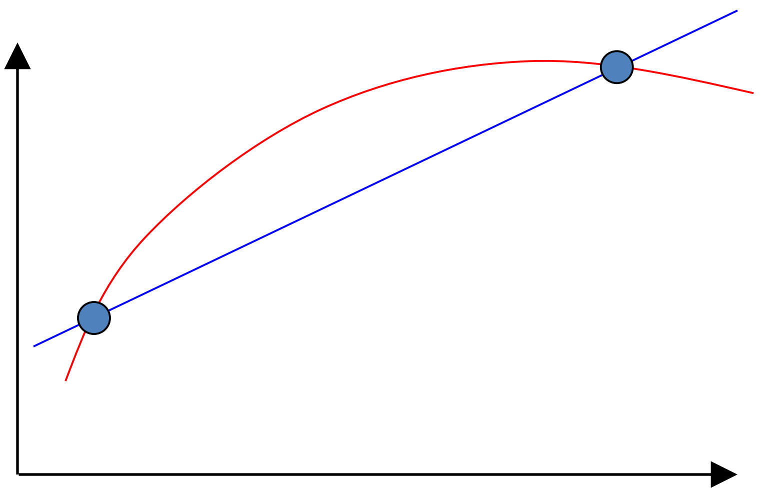


此为两点线性插值问题

即已知函数 $f(x)$在点x_0和x_1点的函数值

$y_0=f(x_0)$，$y_1=f(x_1)$.

求线性函数



$L(x)=a_0+ a_1x$

使满足条件：

$L(x_0)=y_0$，$L(x_1)=y_1$.

$$L(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

或用直线的两点式表示为：

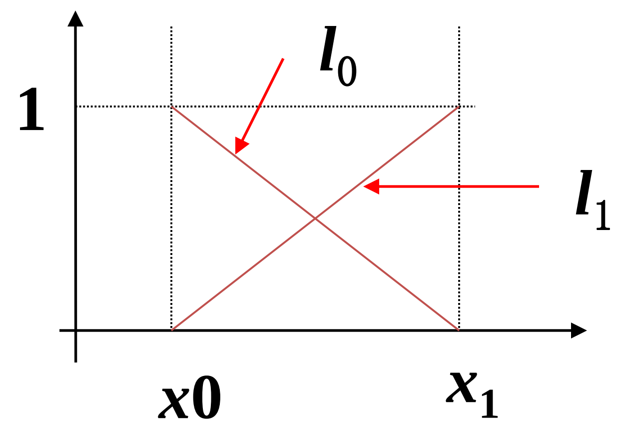
$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

记 $$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

则称： $l_0(x)$ 叫做点 x_0 的一次插值基函数 $l_1(x)$ 为点 x_1 的一次插值基函数

插值基函数的特点：

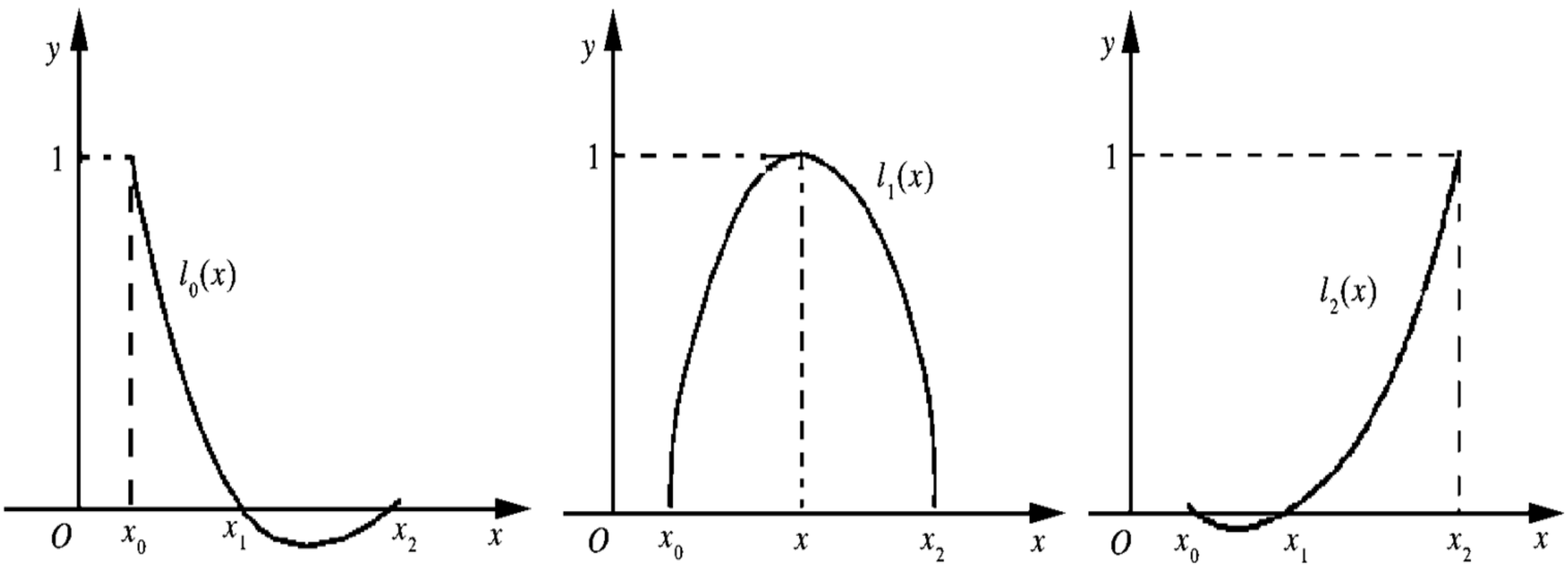
	x_0	x_1
l_0	1	0
l_1	0	1



n=2时的**二次基函数**为 ：

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\quad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$



拉格朗日插值多项式

利用拉格朗日基函数$l_i(x)$, 构造次数不超过n的多项式

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

可知其满足

$$L_n(x_j) = y_j \quad j = 0,1,\cdots,n$$

称为拉格朗日插值多项式,再由插值多项式的唯一性,得

$$P_n(x) \equiv L_n(x)$$

特别地, 当 n =1时又叫线性插值,其几何意义为过两点的直线. 当 n =2时又叫抛物（线）插值, 其几何意义为过三点的抛物线.

注意：

(1) 对于插值节点,只要求它们互异,与大小次序无关;

(2) 插值基函数 $l_i(x)$ 仅由插值节点 $x_i\ (i=0,1,\ldots,n)$ 确定,与被插函数 $f(x)$ 无关;

(3) 插值基函数 $l_i(x)$ 的顺序与插值节点 $x_i\ (i=0,1,\ldots,n)$ 的顺序一致.

以 $x_i\ (i=0,1,\ldots,n)$ 为插值节点, 函数 $f(x)\equiv 1$ 作插值多项式, 由插值多项式的唯一性即得基函数的一个性质

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$$

这是因为若取$f(x)=x^k$ $(k=0,1,\ldots,n)$,由插值多项式的唯一性有

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) x_i^k = x^k, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

特别当k=0时,就得到 $$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$$

构造插值多项式的方法：

(1) 先求插值基函数.

(2) 构造插值多项式.

总结：*Lagrange*插值多项式

设 $y=f(x)$**函数表**

$$(x_i, f(x_i))(i=0,1,\ldots,n)\ (x_i \neq x_j,\ i \neq j),$$

则满足插值条件的多项式

$$L_n(x_i) = f(x_i),(i=0,1\ldots n)$$

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)}$$

其中,

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\ (k=0,1,\ldots n)$$

例1 已知 $y=\sqrt{x}, x_0=4, x_1=9$，用线性插值(即一次插值多项式)求 $\sqrt{7}$ 的近似值。

解 $y_0=2, y_1=3$, 基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{x-9}{4-9}=-\frac{1}{5}(x-9), l_1(x)=\frac{x-4}{9-4}=\frac{1}{5}(x-4)$$

插值多项式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=2\times\frac{-1}{5}(x-9)+3\times\frac{1}{5}(x-4)$$

$$=-\frac{2}{5}(x-9)+\frac{3}{5}(x-4)\left(=\frac{1}{5}(x+6)\right)$$

所以

$$\sqrt{7}\approx L_1(7)=\frac{13}{5}=2.6$$

例2 **求过点(-1,-2), (1,0), (3,-6), (4,3)的抛物线插值(即三次插值多项式).**

解 **以** $x_0=-1, x_1=1, x_2=3, x_3=4$ **以为节点的基函数分别为:**

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1-1)(-1-3)(-1-4)}=-\frac{1}{40}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(1+1)(1-3)(1-4)}=\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(3+1)(3-1)(3-4)}=-\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$l_3(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(4+1)(4-1)(4-3)}=\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

则拉格朗日的三次插值多项式为

$$L_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$= (-2) \times \frac{-1}{40}(x-1)(x-3)(x-4) + 0 \times \frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$+ (-6) \times \frac{-1}{8}(x+1)(x-1)(x-4) + 3 \times \frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{1}{20}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{3}{4}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$+ \frac{1}{5}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$(= x^3 - 4x^2 + 3)$$

插值余项

截断误差$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$也称为n次Lagrange插值多项式的余项。以下为拉格朗日余项定理。

定理2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上存在 $n+1$ 阶导数, $x_i\in[a,b]$ $(i=0,1,\ldots,n)$ 为 $n+1$个互异节点, 则对任何 $x\in[a,b]$, 有

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 　　$(\xi\in(a,b)$且与x有关)

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

证　由插值条件和$\omega_{n+1}(x)$ 的定义, 当$x=x_k$ 时 , 式子显然成立, 并且有 $\omega_{n+1}(x_k)=0$ ($k=0,1,\ldots,n$), 这表明x_0 , x_1, … , x_n 都是函数$\omega_{n+1}(x)$ 的零点, 从而 $\omega_{n+1}(x)$ 可表示为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

其中$K(x)$是待定函数。

对于任意固定的$x\in[a,b]$, $x\neq x_k$,构造自变量 t 的辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)$$

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t)$$

由式 $\omega_{n+1}(x_k)=0$ 和式 $L_n(x_k)=y_k$ ($k=0,1,\ldots,n$),以及

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x)$$

可知：$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 和 x 是$\varphi(t)$ 在区间$[a,b]$上的 $n+2$个互异零点, 因此根据罗尔 (Rolle) 定理, 至少存在一点$\xi=\xi(x) \in(a,b)$,使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

即 $$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

所以

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

在估计误差时下列不等式很有用：

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|,\quad x\in(a,b)$$

或

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|,\quad x\in(a,b)$$

其中： $M_{n+1}=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$。

注意：

一般来说,外推比内插效果差

当 $f(x)$ 为任一个次数$\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，可知，

$$R_n(x)\equiv 0$$

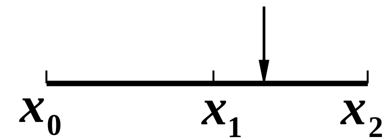
即插值多项式对于次数$\le n$ 的多项式是精确的。

例：已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ **的1次、2次 Lagrange 插值计算** $\sin 50°$ **并估计误差。**

$50^0=\frac{5\pi}{18}$

解： $n=1$ **分别利用**x_0, x_1 **以及** x_1, x_2 **计算**



利用 $x_0=\frac{\pi}{6},\ x_1=\frac{\pi}{4}$ ➡ $L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 50^0 \approx L_1(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.77614$ 这里 $f(x)=\sin x$, $f^{(2)}(\xi_x)=-\sin\xi_x$, $\xi_x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

而 $R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})$

➡ $-0.01319 < R_1(\frac{5\pi}{18}) < -0.00762$

内插通常优于外推。选择要计算的 x **所在的区间的端点，插值效果较好。**

$\sin 50° = 0.7660444\ldots$

外推 /* extrapolation */ 的实际误差 ≈ -0.01001

利用 $x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{\pi}{3}$ ➡ $\sin 50° \approx 0.76008$, $0.00538 < \tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00660$

内插 /* interpolation */ 的实际误差 ≈ 0.00596

$n=2$

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

$$R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\,; \qquad \frac{1}{2}<\cos\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0.00044 < R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00077 \qquad \sin 50° = 0.7660444\ldots$$

2次插值的实际误差 ≈ 0.00061

高次插值通常优于低次插值

例3 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,节点 $x_0=2, x_1=2.5, x_2=4$，求 $f(x)$ 的抛物插值多项式,且计算$f(3)$的近似值并估计误差。

解 $y_0=f(2)=0.5, y_1=f(2.5)=0.4, y_2=f(4)=0.25$

插值多项式为

$$L_2(x)=0.5\times\frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)}+0.4\times\frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)}$$

$$+0.25\times\frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}$$

$$=0.05x^2-0.425x+1.15$$

于是 $$f(3) \approx L_2(3) = 0.325$$

因为 $$f'''(x) = -\frac{6}{x^4},\ M_3 = \max_{x \in [2,4]} |f'''(x)| = |f'''(2)| = \frac{3}{8}$$

故 $$|R_3(x)| \le \frac{M_3}{3!} |(x-2)(x-2.5)(x-4)|$$

$$\le \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} |(x-2)(x-2.5)(x-4)|$$

$$|R(3)| = |f(3) - L_2(3)| \le \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} |(3-2)(3-2.5)(3-4)|$$

$$= 0.03125$$

例4　给定函数表

x	10	11	12	13
lnx	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

用二次插值计算ln11.25的近似值，并估计误差.

解　取节点$x_0=10$, $x_1=11$, $x_2=12$, 作二次插值有

$$\ln 11.25 \approx L_2(11.25)=\frac{(11.25-11)(11.25-12)}{(10-11)(10-12)}\times 2.302585$$

$$+\frac{(11.25-10)(11.25-12)}{(11-10)(11-12)}\times 2.397895+\frac{(11.25-10)(11.25-11)}{(12-10)(12-11)}\times 2.484907$$

$$=2.420426$$

在区间[10, 12]上lnx 的三阶导数的上限M_3=0.002,

可得误差估计式

$$\left|R_2(11.25)\right| \leq \frac{M_3}{3!}|(11.25-10)(11.25-11)(11.25-12)| < 0.00007$$

实际上, ln11.25=2.420368,

$$\left|R_2(11.25)\right| = 0.000058.$$

四、牛顿插值

➤ Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，**全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新算过。**

英1642-1727

由线性代数的知识可知：任何一个n次多项式都可以表示成

$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\cdots,\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

共 $n+1$ 个线性无关的多项式的线性组合。

那么，是否可以将这 $n+1$ 个多项式作为插值基函数呢？

➤ 寻求如下形式的插值多项式：

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中的 a_i 为待定系数，由插值条件确定.

设插值多项式*P(x)*具有如下形式：

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

***P(x)*应满足插值条件：** $P(x_i) = f_i\ , i = 0,1,\cdots,n$

有： $P(x_0) = f_0 = a_0$

$$a_0 = f_0$$

$$P(x_1) = f_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$P(x_2) = f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

再继续下去,待定系数的形式将更复杂,为此引入：

差商和差分的概念.

均差及其基本性质

定义1 称

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$$

为 $f(x)$在x_0、x_1点的**一阶均差**.一阶均差的均差(差商)

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

称为函数$f(x)$在x_0、x_1、x_2点的**二阶均差**.

一般地，n-1阶均差的均差

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}]-f[x_1,\cdots,x_{n-1},x_n]}{x_0-x_n}$$

称为$f(x)$在$x_0, x_1, \ldots, x_n$点的 n 阶均差。

一般$f(x_i)$ 称为$f(x)$ 在x_i点的零阶均差，记作$f[x_i]$。

差商的计算步骤与结果可列成均差表，如下

表1（均差表）

x_k	函数值	一阶均差	二阶均差	三阶均差	…
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	…
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		…	
x_3	$f(x_3)$		…		
…	…	…			

性质1　均差可以表示为函数值的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

这一性质可以用数学归纳法证明，它表明均差与节点的排列次序无关，即

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]=f[x_1,x_0,x_2,\ldots,x_n]=\ldots$$

$$=f[x_1,x_2,\ldots,x_n,x_0]$$

称之为均差的对称性（也称为对称性质）。

性质2 由性质1立刻得到

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = f[x_1, x_2, \cdots, x_n, x_0]$$

$$= \frac{f[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] - f[x_2, \cdots, x_n, x_0]}{x_1 - x_0}$$

或

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$$

性质3　n次多项式$f(x)$的k阶差商,当$k\le n$时是一个$n-k$次多项式;当$k>n$时恒等于0.

性质4　若$f(x)$在$[a,b]$上存在n阶导数, 且节点x_0 , x_1 ,…, $x_n\in[a,b]$,则至少存在一点 $\xi\in[a, b]$ 满足下式

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

例1 $f(x)=-6x^8+7x^5-10$, 求$f[1,2,\ldots,9]$及$f[1,2,\ldots,10]$.

解　$f^{(8)}(x)=-6\cdot 8!$,　　$f[1,2,\ldots,9]=-6$,

$f^{(9)}(x)=0$,　　$f[1,2,\ldots,10]=0$.

牛顿插值多项式

设x是$[a，b]$上一点，由一阶均差定义得

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

得

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

同理，由二阶均差定义

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

得

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$$

如此继续下去，可得一系列等式

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_n)$$

依次把后式代入前式，最后得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

$$=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=\cdots=N_n(x)+R_n(x)$$

其中

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\omega_k(x)$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$=f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots\ (x-x_n)$$

$R_n(x)$称为**牛顿型插值余项**。

可见, $N_n(x)$为次数不超过n 的多项式,且易知

$R_n(x_i)= 0$ 即 $N_n(x_i)= y_i$, $(i=0,1, \ldots,n)$

满足插值条件, 故其为插值问题的解, $N_n(x)$称为**牛顿插值多项式**。

由插值多项式的唯一性知，它与拉格朗日插值多项式是等价的,即 $L_n(x) \equiv N_n(x)$

且有如下递推形式

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

和余项公式

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

由此即得性质4。且

$$R_n(x) \approx f[x_{n+1}, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

$$= f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

例1　已知$f(x)=\mathrm{sh}x$的数表,求二次牛顿插值多项式,并由此计算$f(0.596)$的近似值。

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
0.40	0.41075				
		1.1160			
0.55	0.57815		0.2800		
		1.1860		0.1970	
0.65	0.69675		0.3588		0.0344
		1.2757		0.2137	
0.80	0.88811		0.4336		
		1.3841			
0.90	1.02652				

解　由上表可得过前三点的二次牛顿插值多项式为

$$N_2(x)=0.41075+1.1160(x-0.40)$$

$$+0.2800(x-0.40)(x-0.55)$$

$$N_2(x)=0.41075+1.1160(x-0.40)$$
$$+0.2800(x-0.40)(x-0.55)$$

故 $$f(0.596)\approx N_2(0.596)=0.632010$$

又 $$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=0.1970$$

可得过前四点的三次牛顿插值多项式

$$N_3(x)=N_2(x)+0.1970(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)$$

故 $$f(0.596)\approx N_3(0.596)=0.6319145$$

$f[x_0,\cdots,x_4]=0.0344$ 可得$N_3(x)$的截断误差

$$|R_3(x)|\approx|0.0344(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)|$$

$$|R_3(0.596)|\approx 0.34\times 10^{-6}$$

五、等距节点插值

差分及其性质

设函数$y=f(x)$在**等距节点**$x_i=x_0+ih\ (i=0,1,\ldots,n)$上的函数值为$f_i=f(x_i)$（$h$为**步长**）

定义2 $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$ 和 $\nabla f_i=f_i-f_{i-1}$

分别称为函数$f(x)$在点x_i处的**一阶向前差分**和**一阶向后差分**。

一般地, $f(x)$ 在点 x_i 处的 **m 阶向前差分**和 **m 阶向后差分**分别为

$$\Delta^m f_i=\Delta^{m-1}f_{i+1}-\Delta^{m-1}f_i \quad 和 \quad \nabla^m f_i=\nabla^{m-1}f_i-\nabla^{m-1}f_{i-1}$$

构造差分表2

函数值	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分	…
$f(x_0)$					
	$\Delta f_0\ (\nabla f_1)$				
$f(x_1)$		$\Delta^2 f_0\ (\nabla^2 f_2)$			
	$\Delta f_1\ (\nabla f_2)$		$\Delta^3 f_0\ (\nabla^3 f_3)$		
$f(x_2)$		$\Delta^2 f_1\ (\nabla^2 f_3)$		$\Delta^4 f_0\ (\nabla^4 f_4)$	…
	$\Delta f_2\ (\nabla f_3)$		$\Delta^3 f_1\ (\nabla^3 f_4)$	…	
$f(x_3)$		$\Delta^2 f_2\ (\nabla^2 f_4)$	…		
		…			
	$\Delta f_3\ (\nabla f_4)$				
$f(x_4)$					
	…				
…					

容易证明，差分有如下**基本性质**

性质1 各阶差分均可用函数值表示. 即

$$\Delta^n f_i = f_{n+i} - c_n^1 f_{n+i-1} + \cdots + (-1)^n c_n^n f_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_n^j f_{n+i-j}$$

$$\nabla^n f_i = f_i - c_n^1 f_{i-1} + \cdots + (-1)^n c_n^n f_{i-n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_n^j f_{i-j}$$

且有等式 $\Delta^n f_i = \nabla^n f_{i+n}$.

性质2 函数值均可用各阶差分表示. 即

$$f_{n+i} = f_i + c_n^1 \Delta f_i + \cdots + c_n^n \Delta^n f_i = \sum_{j=0}^{n} c_n^j \Delta^j f_i$$

性质3 均差与差分的关系式为

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}] = \frac{1}{m!h^m} \Delta^m f_i$$

$$f[x_{i-m}, x_{i-m+1}, \cdots, x_i] = \frac{1}{m!h^m} \nabla^m f_i$$

且有差分与微商的关系式为

$$\Delta^n f_n = h^n f^{(n)}(\xi) \quad \xi \in (x_k, x_{k+n})$$

等距节点差值公式

插值节点为 $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$, 如果要计算 x_0附近点 x 处的函数值$f(x)$, 可令 $x=x_0+th$ $(0\le t\le n)$

代入牛顿插值公式 ,可得

$$N_n(x)=N_n(x_0+th)=f_0+\Delta f_0 t+\frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1)$$

$$+\cdots+\frac{\Delta^n f_0}{n!}t(t-1)\cdots(t-n+1)$$

称为牛顿向前插值公式，其余项为

$$R_n(x)=R_n(x_0+th)$$

$$=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\quad \xi\in(x_0,x_n)$$

类似地, 若计算 x_n 附近的函数值 $f(x)$, 可令 $x=x_n+th$ $(-n \le t \le 0)$ ，可得**牛顿向后插值公式**

$$N_n(x) = N_n(x_n + th) = f_n + \nabla f_n t + \frac{\nabla^2 f_n}{2!} t(t+1)$$

$$+ \cdots + \frac{\nabla^n f_n}{n!} t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

及其**余项**

$$R_n(x) = R_n(x_n + th)$$

$$= \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \xi \in (x_0, x_n)$$

例2 设 $y=f(x)=e^x$, $x_i=1, 1.5, 2, 2.5, 3$, 用三次插值多项式求$f(1.2)$ 及$f(2.8)$的近似值.

解 相应的函数值及差分表如下:

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
1	2.71828				
		1.76341			
1.5	4.48169		1.14396		
		2.90347		0.74210	
2	7.28906		1.88606		0.48146
		4.79343		1.22356	
2.5	12.18249		3.10962		
		7.90305			
3	20.08554				

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
1	2.71828				
		1.76341			
1.5	4.48169		1.14396		
		2.90347		0.74210	
2	7.28906		1.88606		0.48146
		4.79343		1.22356	
2.5	12.18249		3.10962		
		7.90305			
3	20.08554				

求$f(1.2)$用**牛顿前插公式**, 且由 $1.2=1+0.5t$, 得$t=0.4$

$$f(1.2) \approx N_3(1.2) = 2.71828 + 1.76341 \times 0.4 + \frac{1.14396}{2!} 0.4 \times (0.4-1)$$

$$+ \frac{0.74210}{3!} 0.4 \times (0.4-1)(0.4-2) = 3.3338632$$

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
1	2.71828				
		1.76341			
1.5	4.48169		1.14396		
		2.90347		0.74210	
2	7.28906		1.88606		0.48146
		4.79343		1.22356	
2.5	12.18249		3.10962		
		7.90305			
3	20.08554				

求$f(2.8)$用**牛顿后插公式**,且由 $2.8=3+0.5t$, 得$t= -0.4$

$$f(2.8)\approx N_3(2.8)$$

求$f(1.8)$呢?

$$=20.08554+7.90305\times(-0.4)+\frac{3.10962}{2!}(-0.4)\times(-0.4+1)$$

$$+\frac{1.22356}{3!}(-0.4)\times(-0.4+1)(-0.4+2)=15.7680872$$

牛顿插值公式和Lagrange插值公式比较

$L_n(x)$和 $N_n(x)$ 均是 n 次多项式,且均满足插值条件:

$$L_n(x_i) = N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n$$

由多项式的唯一性, $L_n(x) \equiv N_n(x)$, 因而,两个公式的余项是相等的,即

$$f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n]\omega_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

当插值多项式从 n-1 次增加到 n 次时,

拉格朗日型插值必须重新计算所有的基本插值多项式;

而对于牛顿型插值,只需用表格再计算一个 n 阶差商,

然后加上一项即可。

六、埃尔米特插值

Hermite插值

法1822 -1901

- 拉格朗日和牛顿均只保证函数插值；
- 实际问题有时需要导数也插值；
- 满足这种需要的插值称为埃尔米特插值.

埃尔米特插值的一般提法

设函数在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的函数值与导数值为：

$$f(x_i) = f_i \ ,f\,'(x_i) = f_i';\cdots, f^{(m_i-1)}(x_i) = f_i^{(m_i-1)},$$
$$i = 0,1,\cdots,n$$

其中 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 是正整数，寻求一个次数尽可能低的多项式 $H(x)$ ，满足：

$$H^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)},\ k = 0,1,\cdots,m_i - 1;\quad i = 0,1,\cdots,n$$

算例 以如下数据构建埃尔米特插值

x	y	y'
x_0	y_0	y'_0
x_1	y_1	y'_1
x_2	y_2	y'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	y'_n

共有 $2n+2$ 个条件，可唯一确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)$，其形式为：

$$H_{2n+1}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$$

目标：求出所有的 a_i，

方法：基函数法.

x	y	y'
x_0	y_0	y_0'
x_1	y_1	y_1'
x_2	y_2	y_2'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	y_n'

可如下构造：$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n} y_i'\beta_i(x)$

$\alpha_i(x),\beta_i(x)$ **均为 2 n+1 次插值基函数.**

✓ $\alpha_i(x_k)=\delta_{ik},\quad \alpha_i'(x_k)=0$

$\beta_i(x_k)=0,\quad \beta_i'(x_k)=\delta_{ik}$

✓ **这样** $H_{2n+1}(x)$ **可表示为：**

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}[y_i\,\alpha_i(x)+y_i'\,\beta_i(x)]$$

✓ **显然有：**

$$H_{2n+1}(x_k)=y_k \qquad H_{2n+1}'(x_k)=y_k'$$

现在求 $\alpha_i(x)$ 及 $\beta_i(x)$

令 $$\alpha_i(x) = (ax+b)l_i^2(x)$$

其中 $$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

从而有：

$$\alpha_i(x_i)=1 \Rightarrow (ax_i+b)l_i^2(x_i)=1 \Rightarrow (ax_i+b)=1$$

$$\alpha_i'(x_i)=0 \Rightarrow l_i(x_i)[al_i(x_i)+2(ax_i+b)l_i'(x_i)]=0$$

$$\Rightarrow a+2l_i'(x_i)=0 \Rightarrow a=-2l_i'(x_i), b=1+2x_il_i'(x_i)$$

由 $l_i(x)$ 的表达式两边取对数再求导可得：

$$l_i'(x_i)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}$$

于是得到：

$$\alpha_i(x)=(ax+b)l_i^2(x)=\left(1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\right)l_i^2(x)$$

同理可得 $$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

这样对于**Hermite**插值就有

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \alpha_i(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i' \beta_i(x)$$

其中

$$\alpha_i(x) = (ax+b)l_i^2(x) = \left(1 - 2(x - x_i)\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}\right) l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$i = 0, 1, 2, \cdots, n.$

三次埃尔米特插值多项式

设 $y=f(x)$是区间$[a, b]$上的实函数, x_0, x_1 是$[a, b]$上相异两点, 且 $x_0 < x_1$, $y=f(x)$ 在x_i上的函数值和一阶导数值分别为 $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1)$和$m_i = f'(x_i)$ $(i=0,1)$, 求三次多项式 $H_3(x)$, 使其满足：

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i \\ H_3'(x_i) = m_i \end{cases} \qquad (i = 0,1)$$

$H_3(x)$称为三次埃尔米特插值多项式。

定理3 满足条件式 $H_3(x_i)=y_i, H_3'(x_i)=m_i\ (i=0,1)$ 的三次埃尔米特插值多项式存在且唯一。

构造三次埃尔米特插值多项式如下:

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$$

条件 \ 函数	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0	0	0
$\alpha_1(x)$	0	1	0	0
$\beta_0(x)$	0	0	1	0
$\beta_1(x)$	0	0	0	1

由 $\alpha_0(x_1)=\alpha_0'(x_1)=0$

可将它写成 $\alpha_0(x)=[a+b(x-x_0)](x-x_1)^2$

由 $\alpha_0(x_0)=1$，得 $a=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}$

再由 $\alpha_0'(x_0)=0$，得 $b=-\dfrac{2}{(x_0-x_1)^3}$，所以

$$\alpha_0(x)=[1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}](\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

同理（将 $x_0\leftrightarrow x_1$）

$$\alpha_1(x)=[1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}](\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

同样由$\beta_0(x_0)=\beta_0(x_1)=\beta_0'(x_1)=0$，可令

$$\beta_0(x)=c(x-x_0)(x-x_1)^2$$

再由$\beta_0'(x_0)=1$，　得 $c=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\alpha_0(x)=[1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}](\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\quad \beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$\alpha_1(x)=[1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}](\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,\quad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

即

$$\alpha_0(x)=[1+2l_1(x)]l_0^2(x)\qquad \beta_0(x)=(x-x_0)l_0^2(x)$$
$$\alpha_1(x)=[1+2l_0(x)]l_1^2(x)\qquad \beta_1(x)=(x-x_1)l_1^2(x)$$

$l_0(x), l_1(x)$ 为以$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ **插值点的Lagrange**

一次基函数.

可得满足条件的三次埃尔米特插值多项式为

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + m_0\beta_0(x) + m_1\beta_1(x)$$

$$= y_0[1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}](\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 + y_1[1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}](\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

$$+m_0(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 + m_1(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

误差估计

定理4 设$f(x)$在包含x_0、x_1的区间$[a,b]$内存在四阶导数，则当$x\in[a,b]$时有**余项**

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

$(\xi\in(a,b)$且与x有关$)$

设 $M_4=\max\limits_{x_0\le x\le x_1}\left|f^{(4)}(x)\right|$ 则当$x\in(x_0,x_1)$时,

余项有如下估计式（**误差限**）

$$\left|R_3(x)\right|\le\frac{M_4}{384}h^4$$

例2 已知$f(x)=x^{1/2}$及其一阶导数的数据见下表,用埃尔米特插值公式计算$125^{1/2}$的近似值,并估计其截断误差.

解

x	121	144
$f(x)$	11	12
$f'(x)$	1/22	1/24

$$H_3(x)=11\times\left(1+2\frac{x-121}{144-121}\right)\left(\frac{x-144}{121-144}\right)^2$$

$$+12\times\left(1+2\frac{x-144}{121-144}\right)\left(\frac{x-121}{144-121}\right)^2$$

$$+\frac{1}{22}\times\left(\frac{x-121}{144-121}\right)\left(\frac{x-144}{121-144}\right)^2$$

$$+\frac{1}{24}\times\left(\frac{x-144}{121-144}\right)\left(\frac{x-121}{144-121}\right)^2$$

$$H_3(x)=\frac{11}{23^3}(2x-219)(x-144)^2+\frac{12}{23^3}(265-2x)(x-121)^2$$

$$+\frac{1}{22\cdot 23^2}(x-121)(x-144)^2+\frac{1}{24\cdot 23^2}(x-144)(x-121)^2$$

得 $\sqrt{125}\approx H_3(125)=11.18035$

由 $$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16x^{7/2}}$$

可求得 $$\left|R_3(125)\right|=\frac{15}{384\cdot 16}\frac{1}{\xi^3\sqrt{\xi}}4^2\cdot 19^2$$

$$\le\frac{15}{384}\cdot\frac{19^2}{121^3\cdot 11}\approx 0.000012$$

七、分段低次插值

- **在区间 $[a, b]$ 上用插值多项式 P 逼近函数 f 时，f 和 P 在每个节点上的差异(理论上)应该为零。**
- **自然，我们期望在一切中间点上也能很好地逼近 f ，并且当插值点增加时这种逼近效果应该越来越好。**
- **但上述的期望不可能实现的。当认识到这一点时，在数学界曾引起强烈的震动。**

20 世纪初，Runge就给出了一个等距节点插值多项式 $L_n(x)$ 不收敛到 $f(x)$ 的例子。

Runge 现象

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$ ，

在该区间 $[-5,5]$ 上取 $n+1$ 个等距节点, 构造 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式为

$$x_i=-5+10\frac{i}{n}\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{1}{1+x_j^2}\cdot\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\right]\qquad n=2,4,6,8,20$$

其matlab的lagrange.m文件及相关图形如下.

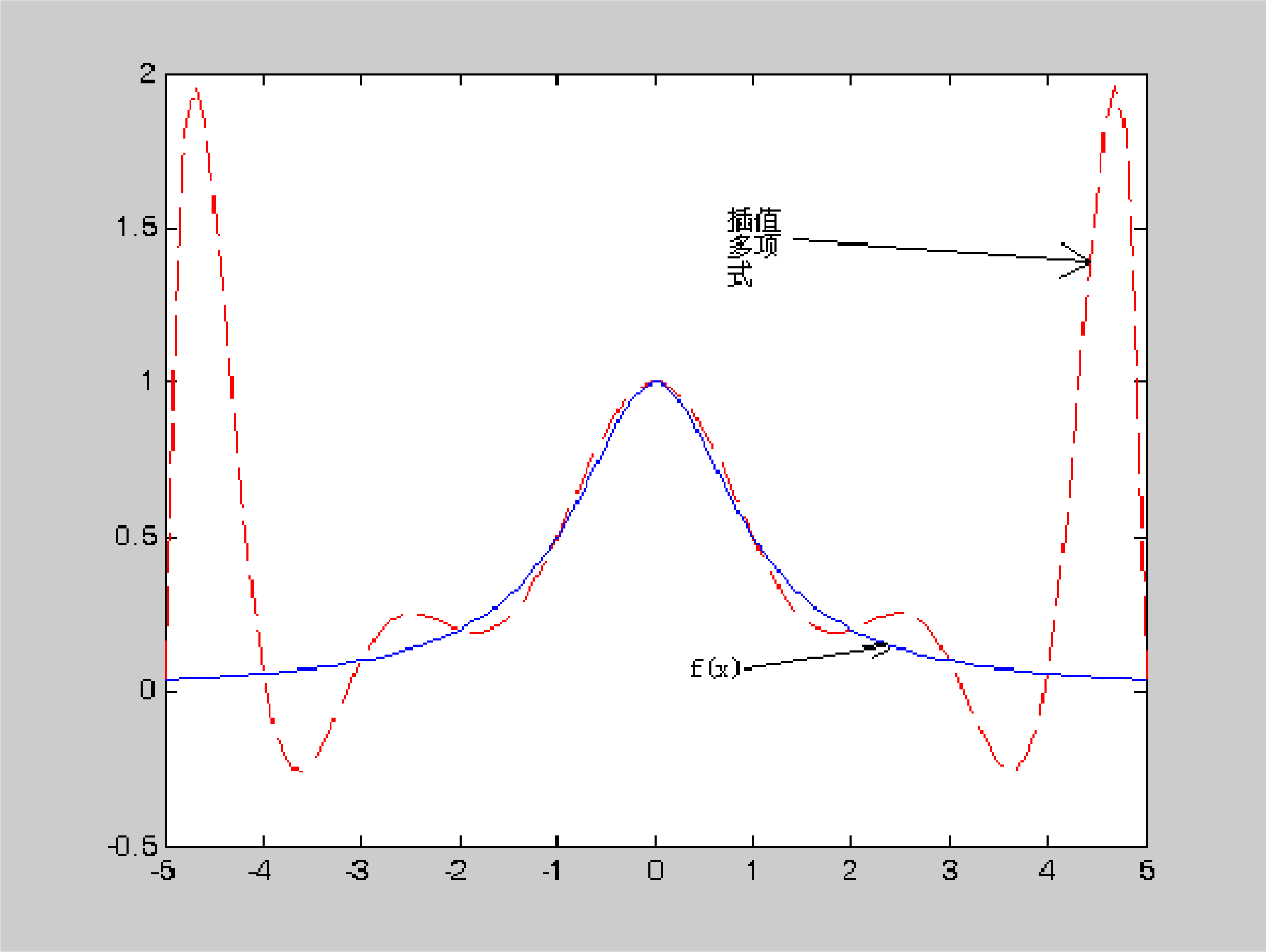
```
% lagrange.m
function y=lagrange (x0,y0,x)
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
   z=x(i);s=0;
   for k=1:n
      L=1;
      for j=1:n
         if j~=k
            L=L*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
         end
      end
      s=s+L*y0(k);
   end
   y(i)=s;
end
y;
```

Lagrange插值多项式求插值的Matlab程序.

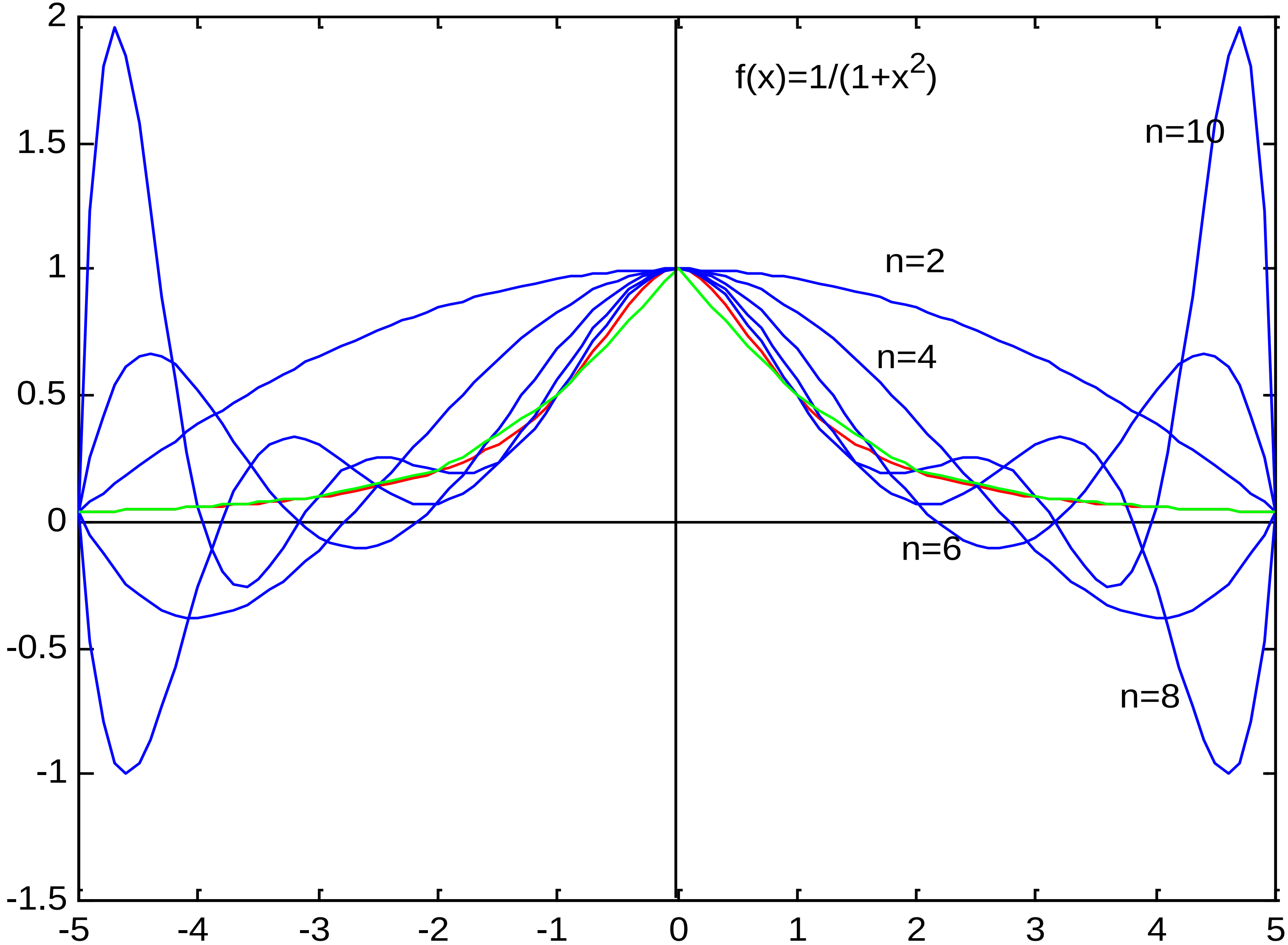
比较不同的插值多项式次数对插值的影响

```
%Compare_Runge.m
x=-5:0.1:5;z=0*x;y=1./(1+x.^2);
plot(x,z,'k',x,y,'r')
axis([-5 5 -1.5 2]);pause,hold on
for n=2:2:20
   x0=linspace(-5,5,n+1);   y0=1./(1+x0.^2);
   x=-5:0.1:5; y1=lagrange(x0,y0,x);
   plot(x,y1), pause
end
y2=1./(1+x0.^2);y=interp1(x0,y2,x);
plot (x,y,'k'),hold off
gtext('n=2'),gtext('n=4'),gtext('n=6')
gtext('n=8'),gtext('n=10')
gtext('f(x)=1/(1+x^2)')
```

N=10时的图形



不同次数的Lagrange插值多项式的比较图



Runge现象

令 $x_{n-1/2}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)$ ，则 $x_{n-1/2}=5-\frac{5}{n}$ ，$n=2,4,\cdots,20$

下表列出了 $L_n(x_{n-1/2})$ 和 $R(x_{n-1/2})$ 的值。

n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	$R(x_{n-1/2})$
2	0.137931	0.759615	−0.621684
4	0.066390	−0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	−0.553416
8	0.049651	−0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	−1.531662
12	0.045440	−2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	−5.288409
16	0.043530	−10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	−20.080751
20	0.042440	−39.952449	39.994889

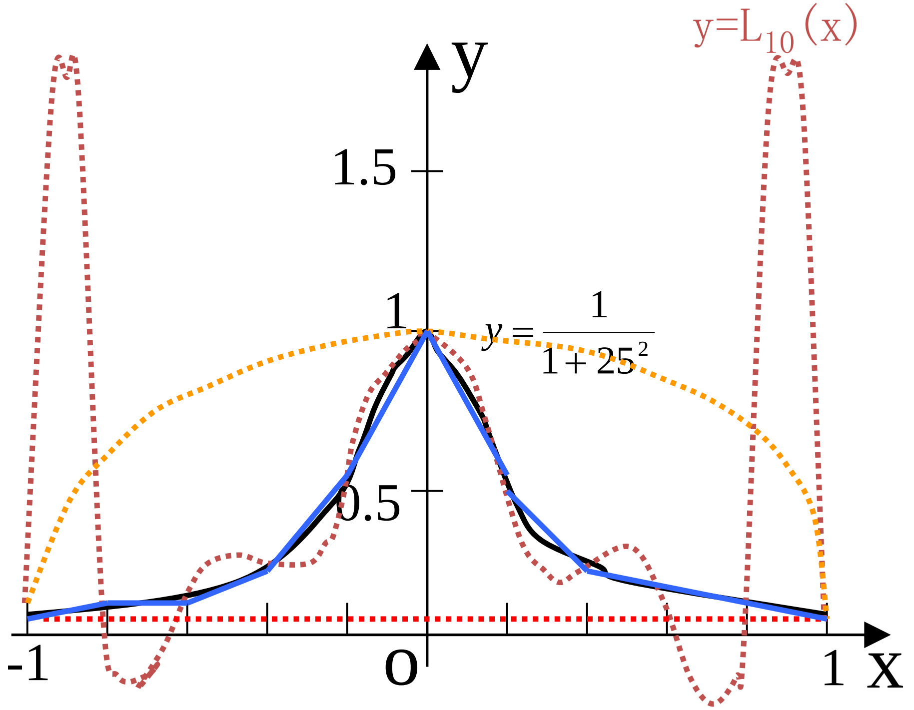
n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	$R(x_{n-1/2})$
2	0.137931	0.759615	−0.621684
4	0.066390	−0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	−0.553416
8	0.049651	−0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	−1.531662
12	0.045440	−2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	−5.288409
16	0.043530	−10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	−20.080751
20	0.042440	−39.952449	39.994889

结果表明,随着n 的增加，$R(x_{n-1/2})$的绝对值几乎成倍地增加，这说明当 $n\to\infty$时 L_n在 $[-5,5]$上不收敛。

Runge证明了，存在一个常数 $c\approx 3.63$，使得当 $|x|\le c$ 时，$\lim_{n\to\infty} L_n(x)=f(x)$; 而当 $|x|>c$时 $\{L_n(x)\}$ 发散。

说明: 并不是插值多项式的次数越高, 插值效果越好, 精度也不一定是随次数的提高而升高, 这种现象在上个世纪初由Runge发现，故称为Runge现象.

对$f(x)=(1+25x^2)^{-1}$,在区间[-1,1]上取等距节点 $x_i=-1+ih$, $i=0,1,\ldots,10$, $h=0.2$,作$f(x)$关于节点$x_i(i=0,1,\ldots,10)$的10次插值多项式$L_{10}(x)$, 如图所示



Runge现象. 表明高次插值的不稳定性.

实际上, 很少采用高于7次的插值多项式.

分段线性插值

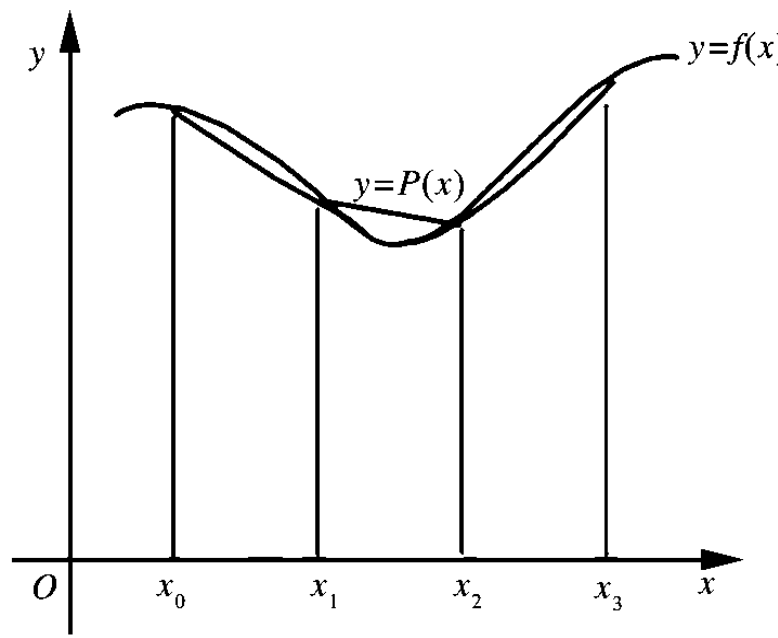
$$y_i = f(x_i)(i = 0,1,\ldots,n), a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

求一个分段函数$P(x)$, 使其满足:

(1) $P(x_i)=y_i$ $(i=0,1, \ldots, n)$;

(2) 在每个子区间$[x_i , x_{i+1}]$ 上是线性函数.

称满足上述条件的函数$P(x)$为**分段线性插值函数**.



已知 $y_i = f(x_i)(i = 0,1,\ldots,n)$,在每个子区间$[x_i\,,\ x_{i+1}]$ 分别作线性插值得

$$P(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$(i = 0,1,\cdots,n-1)$$

或

$$P(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,\cdots,n-1)$$

$P(x)$ 是个折线函数，在 [a,b] 上连续，但其一阶导数不连续.

由线性插值的误差即得分段线性插值在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的余项估计式为

$$|f(x)-P(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

$$\le \frac{h_i^2}{8}\max_{x_i \le x \le x_{i+1}}|f''(x)| \le \frac{h^2}{8}\max_{a \le x \le b}|f''(x)|$$

因此,在插值区间$[a,b]$上有余项

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{h^2}{8}M_2, \quad \forall x \in [a,b]$$

$$h = \max_{0 \le i \le n-1} h_i, \; M_2 = \max_{a \le x \le b}|f''(x)|$$

分段线性插值的基函数

当 $i=0$ 时，

$$l_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} & x\in[x_0,x_1]\\ 0 & x\notin[x_0,x_1]\end{cases}$$

当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时，

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in(x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

当 $i=n$ 时，

$$l_n(x)=\begin{cases}0 & x\notin[x_{n-1},x_n]\\ \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

显然$P(x)$ 是 $l_i(x)$ 的线性组合：

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i(x)$$

在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的值为：

$$P(x)=f_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+f_i\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \qquad x_{i-1}\le x\le x_i$$

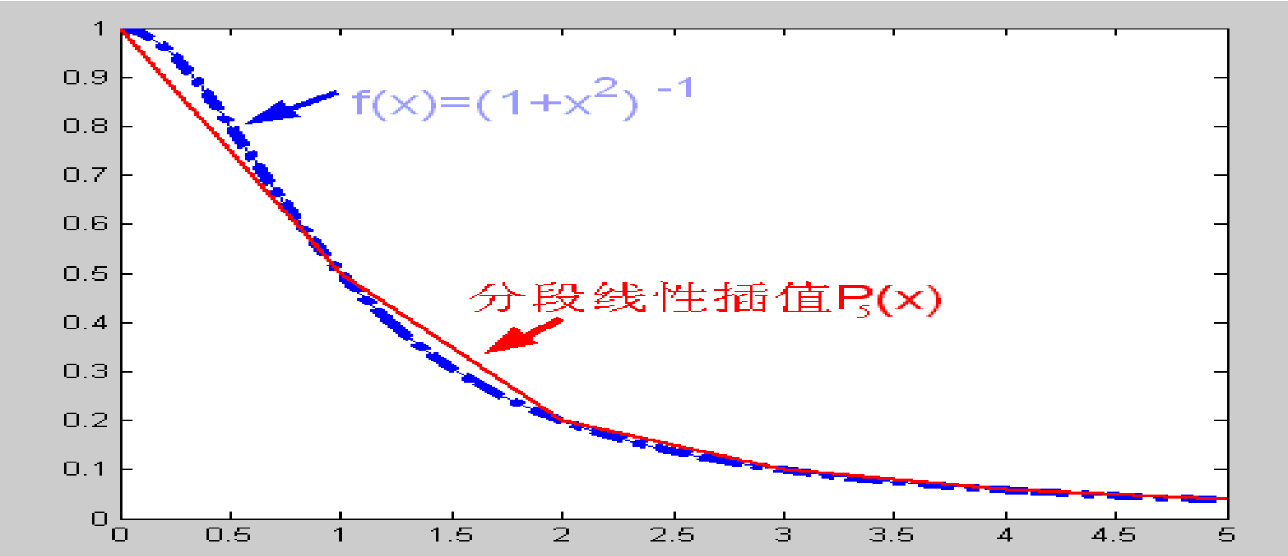
注意 表达式 $P(x)$ 在区间$[x_{i-1},x_i]$上，只有 $l_{i-1}(x)$， $l_i(x)$ 是非零的，其它基函数均为零。即

$$P(x)=f_{i-1}\,l_{i-1}(x)+f_i\,l_i(x)$$

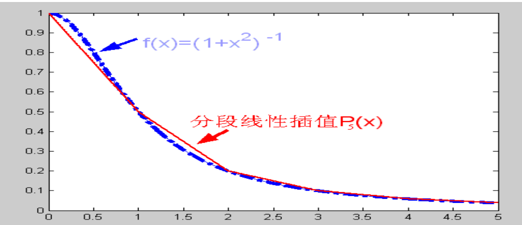
算例

已知函数 $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 [0,5] 上取等距插值节点（如下表），求区间上分段线性插值函数，并利用它求出 $f(4.5)$ 近似值。

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846



x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846



解：在每个分段区间 $[k, k+1]$

$$P(x)=\frac{x-(k+1)}{k-(k+1)}y_k+\frac{x-k}{(k+1)-k}y_{k+1}$$

$$=-y_k(x-k-1)+y_{k+1}(x-k)$$

$$P(x)=\begin{cases}-(x-1)+0.5x, & x\in[0,1]\\ -0.5(x-2)+0.2(x-1), & x\in[1,2]\\ -0.2(x-3)+0.1(x-2), & x\in[2,3]\\ -0.1(x-4)+0.05882(x-3), & x\in[3,4]\\ -0.05882(x-5)+0.03846(x-4), & x\in[4,5]\end{cases}$$

于是， $P(4.5)=-0.05882\times(4.5-5)+0.03846\times(4.5-4)=0.04864$

实际值: $f(4.5)=0.04705882352941$

当n=7 时， $P(4.5)$=0.04762270321996 **；当n=10时，** $P(4.5)$=0.04705882352941

由此可见，对于光滑性要求不高的插值问题，分段线性插值的效果非常好！计算也简单!

分段抛物线插值

对 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

即将区间[a, b]分为小区间$[x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i=1,2, \ldots,n)$

求一个分段函数$L(x)$, 使其满足:

(1) $L(x_i)=y_i$ $(i=0,1, ..., n)$;

(2) 在每个子区间$[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上，$L(x)$是次数不超过2的多项式.

称满足上述条件的函数$L(x)$为分段抛物线插值函数.

分段三次Hermite插值

已知 $y_i = f(x_i), m_i = f'(x_i)(i = 0,1,\cdots,n),$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

求一个分段函数$H(x)$, 使其满足:

(1) $H(x_i) = y_i, H'(x_i) = m_i \quad (i = 0,1,\cdots,n),$

(2) 在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上，$H(x)$是次数不超过3的多项式.

称满足上述条件的函数$H(x)$为**分段三次Hermite插值函数**.

由 $y_i = f(x_i), m_i = f'(x_i)(i = 0,1,\cdots,n)$,

得在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$上

$$H(x) = y_i[1+2\frac{x-x_i}{h_i}](\frac{x-x_{i+1}}{-h_i})^2 + y_{i+1}[1+2\frac{x-x_{i+1}}{-h_i}](\frac{x-x_i}{h_i})^2$$

$$+m_i(x-x_i)(\frac{x-x_{i+1}}{-h_i})^2 + m_{i+1}(x-x_{i+1})(\frac{x-x_i}{h_i})^2$$

或

$$H(x) = \frac{y_i}{h_i^3}[1+2(x-x_i)](x-x_{i+1})^2 + \frac{y_{i+1}}{h_i^3}[1+2(x-x_{i+1})](x-x_i)^2$$

$$+\frac{m_i}{h_i^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 + \frac{m_{i+1}}{h_i^2}(x-x_{i+1})(x-x_i)^2$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,\cdots,n-1)$$

分段三次埃尔米特插值在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的余项估计式为

$$\left|f(x)-H(x)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|$$

$$\le \frac{h_i^4}{384}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f^{(4)}(x)\right|,\ x\in[x_i, x_{i+1}]$$

因此，在插值区间$[a, b]$上有余项

$$\left|f(x)-H(x)\right| \le \frac{h^4}{384}M_4, \quad x\in[a,b]$$

$$h=\max_{0\le i\le n-1} h_i,\ M_4=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

例3 **构造函数$f(x)=\ln x$在$1\le x\le 10$上的数表, 应如何选取步长h,才能使利用数表进行分段插值时误差不超过0.5×10^{-4}。**

解 $$f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ M_2=\max_{1\le x\le 10}|f''(x)|=1.$$

欲使

$$|f(x)-P(x)|\le\frac{h^2}{8}\max_{1\le x\le 10}|f''(x)|=\frac{h^2}{8}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

得 $$h\le 2\times10^{-2}$$

即进行分段线性插值时，应取$h\le2\times10^{-2}$，误差不超过0.5×10^{-4}。

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, M_4 = \max_{1\le x\le 10}\left|f^{(4)}(x)\right| = 6.$$

欲使

$$\left|f(x) - H(x)\right| \le \frac{h^4}{384}\max_{1\le x\le 10}\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{h^4}{64} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

得 $h \le 2\sqrt[4]{2}\times 10^{-1}$

即进行分段三次埃尔米特插值时,应取误 $h \le 2\sqrt[4]{2}\times 10^{-1}$ **差不超过**0.5×10^{-4}**。**

八、三次样条插值

问题的提出

定义 给定区间$[a,b]$的一个划分 $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$，$y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\dots,n)$,如果函数$S(x)$满足：

(1) $S(x_i)=y_i$ $(i=0,1,\dots,n)$;

(2) 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$上是次数不超过3的多项式;

(3) 在每个内节点x_i $(i=1,2,\dots,n-1)$上具有二阶连续导数,

则称 $S(x)$ 为关于上述划分的一个三次多项式样条函数，简称三次样条。

$S(x)$在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上是一个次数不超过3的多项式, 因此需确定**四个待定常数**, 一共有n个小区间,故应**确定4n个系数**, $S(x)$在n-1个内节点上**具有二阶连续导数，应满足条件**

$$\begin{cases} S(x_i-0)=S(x_i+0) \\ S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \\ S''(x_i-0)=S''(x_i+0) \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

即有3n-3个连续条件，再加上$S(x)$ 满足的插值条件n+1个，共计4n-2个，因此还需要2个条件才能确定$S(x)$，通常补充两个**边界条件**。

1）固支条件，已知两端的一阶导数值

$$S'(x_0)=f'_0, \qquad S'(x_n)=f'_n$$

2）两端的二阶导数值已知

$$S''(x_0)=f''_0, \qquad S''(x_n)=f''_n$$

$S''(x_0)=S''(x_n)=0$ 称为自然边界条件。

3）周期性条件

$$S(x_0+0)=S(x_n-0)$$

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$$

$$S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$$

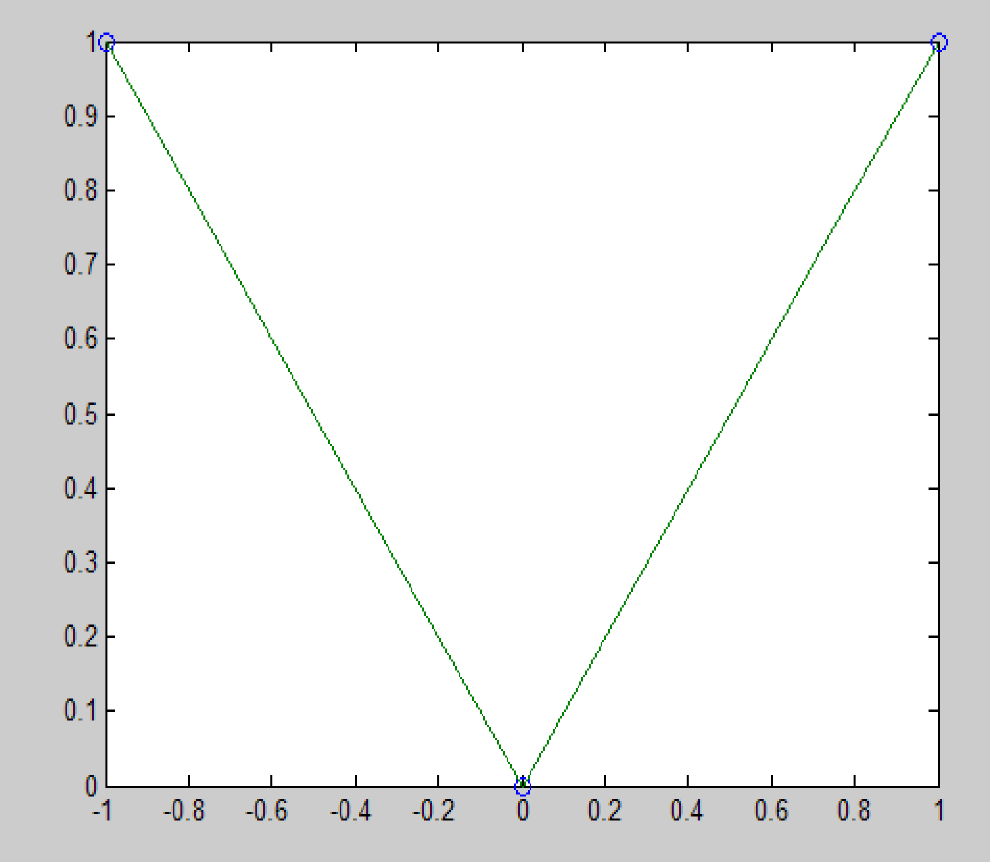
这时 $y_0=y_n$ 称为周期样条函数

例如我们已知函数$f(x)$在三个点处的值为

$$f(-1)=1, \qquad f(0)=0, \qquad f(1)=1$$

则其分段线性插值是：

$$\begin{cases} p_0(x)=-x, & x\in[-1,0] \\ p_1(x)=x, & x\in[0,1] \end{cases}$$



例 已知函数 $f(x)$ 的三个点处的值为

$f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1$

在区间[-1，1]，求 $f(x)$ 在自然边界条件下的三次样条插值多项式。

解 这里 $n=2$，区间[-1，1]分成两个子区间，故设

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_{0,} x\in[-1,0] \\ S_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_{1,} x\in[0,1] \end{cases}$$

由插值和函数连续条件

$S_0(-1)=1, S_0(0)=0, S_1(0)=0, S_1(1)=1$，

得 $\begin{cases} -a_0+b_0-c_0=1, & d_0=0 \\ d_1=0, & a_1+b_1+c_1=1 \end{cases}$

由内节点处一、二阶导数的连续条件

$S_0'(0)=S_1'(0), S_0''(0)=S_1''(0)$ 得 $c_0=c_1, b_0=b_1$

最后由自然边界条件

$S_0''(-1)=0, S_1''(1)=0$，得

$$-6a_0+2b_0=0,\qquad 6a_1+2b_1=0$$

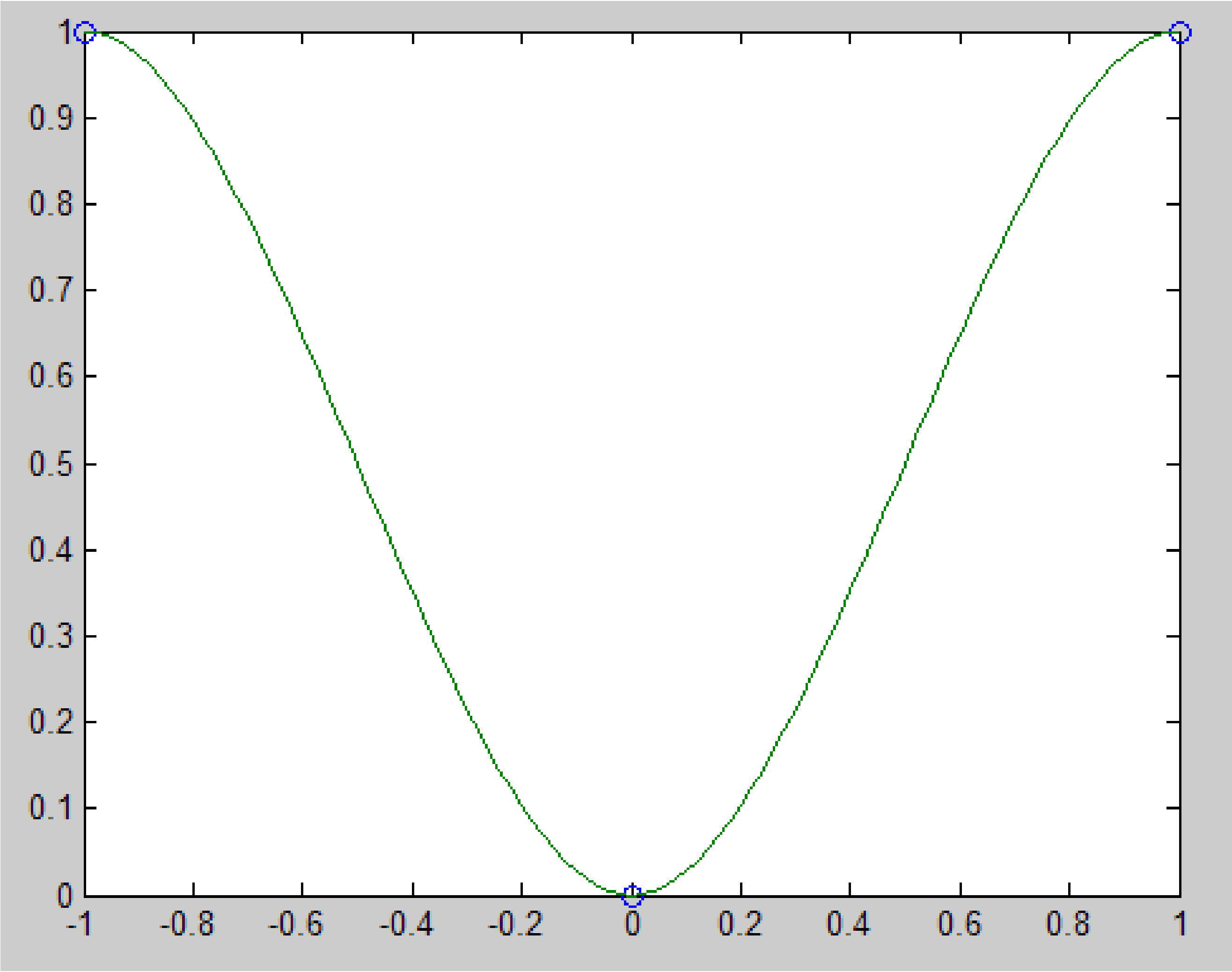
联立以上方程组得

$$a_0=-a_1=1/2,\qquad b_0=b_1=3/2,\qquad c_0=c_1=d_0=d_1=0$$

从而问题的解为

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2, & x\in[-1,0]\\ -\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2, & x\in[0,1]\end{cases}$$

这种解法称为待定系数法。


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

三转角方程

设 $S'(x_i)=m_i(i=0,1,\cdots,n)$为参数，这种通过确定$m_i$来求$S(x)$的方法叫三转角法。

用分段埃尔米特插值，得到$S(x)$在 $[x_{i-1},x_i]$ 上$S(x)$的表达式为

$$S(x)=\left(1+2\frac{(x-x_{i-1})}{h_{i-1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_{i-1}}\right)^2 y_{i-1}+\left(1-2\frac{(x-x_i)}{h_{i-1}}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)^2 y_i+(x-x_{i-1})\left(\frac{x-x_i}{h_{i-1}}\right)^2 m_{i-1}+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)^2 m_i$$

$$S''(x)=$$

$$\left[\frac{2}{h_{i-1}}-\frac{6}{h_{i-1}{}^2}(x_i-x)\right]m_{i-1}-\left[\frac{2}{h_{i-1}}-\frac{6}{h_{i-1}{}^2}(x-x_{i-1})\right]m_i$$

$$+\left[\frac{6}{h_{i-1}{}^2}-\frac{12}{h_{i-1}{}^3}(x_i-x)\right]y_{i-1}+\left[\frac{6}{h_{i-1}{}^2}-\frac{12}{h_{i-1}{}^3}(x-x_{i-1})\right]y_i$$

所以 $S''(x_i^{-})=\frac{6}{h_{i-1}{}^2}y_{i-1}-\frac{6}{h_{i-1}{}^2}y_i+\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{4}{h_{i-1}}m_i$

同理 $S''(x_i^{+})=-\frac{6}{h_i{}^2}y_i+\frac{6}{h_i{}^2}y_{i+1}-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1}$

由$S(x)$二阶连续可微，即 $S''(x_i^-)=S''(x_i^+)$,得：

$$\mu_i m_{i-1}+2m_i+\lambda_i m_{i+1}=g_i(i=1,2,\cdots,n-1)$$

其中：$\lambda_i=\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\mu_i=1-\lambda_i=\dfrac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$

$$g_{i+1}=3\left(\mu_i f\left[x_{i-1},x_i\right]+\lambda_i f\left[x_i,x_{i+1}\right]\right)\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

有三种条件：

1、已知 $f'(x_0)=m_0, f'(x_n)=m_n,$

则方程组化为：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \mu_1 m_0 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \lambda_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

2、已知 $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

由 $S''(x_0) = 0$ 可得 $2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1]$

由 $S''(x_n) = 0$ 可得 $m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n]$

于是有

$$2m_0 + m_1 = 3f\left[x_0, x_1\right]$$

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = g_i \qquad (i = 1,2,\cdots n-1)$$

$$m_{n-1} + 2m_n = 3f\left[x_{n-1}, x_n\right]$$

即矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

3、已知

$$S(x_0)=S(x_n),\ S'(x_0)=S'(x_n),\ S''(x_0)=S''(x_n)$$

则有： $m_0=m_n$

$$\frac{3}{h_0^{\ 2}}\left(y_1-y_0\right)-\frac{1}{h_0}\left(2m_0+m_1\right)$$

$$=\frac{3}{h_{n-1}^{\ 2}}\left(y_{n-1}-y_n\right)+\frac{1}{h_{n-1}}\left(m_{n-1}+2m_n\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

设$f(x)$在$[a，b]$上有直到四阶的连续导数，

则其 I 型和 II 型三次样条插值函数以及导数的

误差有如下估计式

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-S(x)\right|\le\frac{5}{384}h^4\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$\max_{a\le x\le b}\left|f'(x)-S'(x)\right|\le\frac{1}{24}h^3\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)-S''(x)\right|\le\frac{3}{8}h^2\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$(h=\max_{0\le i\le n-1}\{h_i\})$$

三弯矩方程

设 $S''(x_i)=M_i(i=0,1,\ldots,n)$为参数,这种通过确定$M_i$来求$S(x)$的方法称为三弯矩法。

$S''(x)$ 在$[x_i , x_{i+1}]$上是一次多项式, 且可表示为

$$S''(x)=M_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+M_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i}$$

对$S''(x)$积分两次并利用$S(x_i)=y_i$和$S(x_{i+1})=y_{i+1}$定出积分常数得

$$S(x)=M_i\frac{(x_{i+1}-x)}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6})\frac{x_{i+1}-x}{h_i}$$

$$+(y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6})\frac{x-x_i}{h}\quad x\in[x_i,x_{i+1}]\quad (i=0,1,\cdots,n-1)$$

$$S(x)=M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6})\frac{x_{i+1}-x}{h_i}$$

$$+(y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6})\frac{x-x_i}{h}\quad x\in[x_i,x_{i+1}]\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$$

对$S(x)$求导得

$$S'(x)=-M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}$$

$$+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{M_{i+1}-M_i}{6}h_i$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$$

$$S'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}$$

$$+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{M_{i+1}-M_i}{6} h_i$$

所以

$$S'(x_i+0) = -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$S'(x_{i+1}-0) = \frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i}{3}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

由 $S'(x_i+0) = S'(x_i-0)$ (i=1,2,...,n-1)

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} = -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}=-\frac{h_i}{3}M_i-\frac{h_i}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

得

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

其中

$$\lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} \qquad \mu_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}=1-\lambda_i$$

$$d_i=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right]=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

1. 边界条件为

$$S'(x_0)=m_0, S'(x_n)=m_n$$

由公式

$$S'(x_i+0)=-\frac{h_i}{3}M_i-\frac{h_i}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$S'(x_{i+1}-0)=\frac{h_i}{6}M_i+\frac{h_i}{3}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

得

$$m_0=S'(x_0)=-\frac{h_0}{3}M_0-\frac{h_0}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_0}$$

$$m_n=S'(x_n)=\frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}+\frac{h_{n-1}}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

$$m_0 = S'(x_0) = -\frac{h_0}{3}M_0 - \frac{h_0}{6}M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_0}$$

$$m_n = S'(x_n) = \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

即

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

其中$d_0 = \frac{6}{h_0}(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - m_0)$ $\quad d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}})$

$$2M_0 + M_1 = d_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

从中解出M_i $(i=0,1,\ldots,n)$ 得三次样条$S(x)$.

2、边界条件为 $S''(x_0)=M_0, S''(x_n)=M_n$已知

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i \ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1-\mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1}M_n \end{bmatrix}$$

从中解出$M_i(i=1,2,\ldots,n-1)$得 三次样条$S(x)$。

3、周期函数 $M_0 = M_n$

$$S'(x_0+0) = S'(x_n-0)$$

$$S'(x_i+0) = -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$S'(x_{i+1}-0) = \frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i}{3}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$-\frac{h_0}{3}M_0 - \frac{h_0}{6}M_1 + \frac{y_1-y_0}{h_0} = \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

$$-\frac{h_0}{3}M_0-\frac{h_0}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_0}=\frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}+\frac{h_{n-1}}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

整理得 $$\lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n$$

其中 $$\begin{cases}\lambda_n=\dfrac{h_0}{h_0+h_{n-1}} \qquad \mu_n=\dfrac{h_{n-1}}{h_o+h_{n-1}}=1-\lambda_n \\ d_n=\dfrac{6}{h_0+h_{n-1}}\left[\dfrac{y_1-y_0}{h_0}-\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right]\end{cases}$$

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

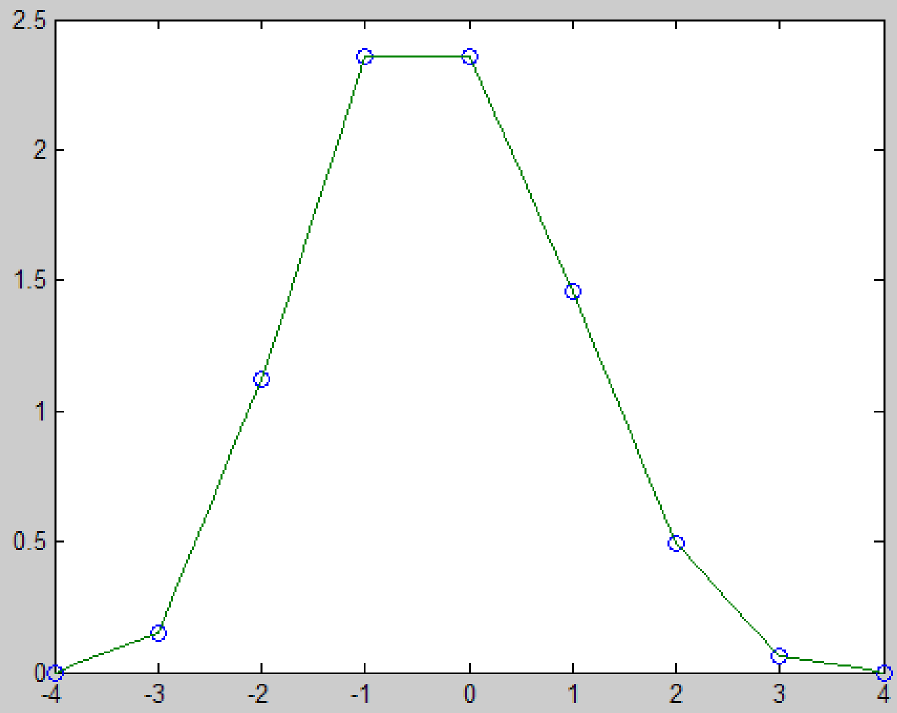
$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

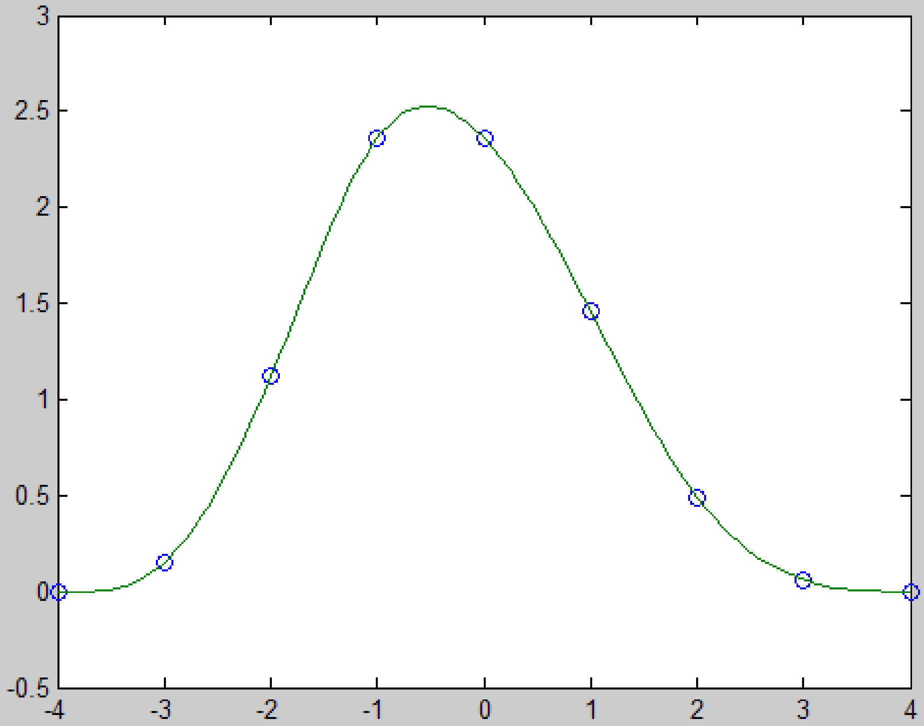
从中解出$M_i(i=1,2,\ldots,n)$,得三次样条$S(x)$.

例：　　x=-4:4;

y=[0 .15 1.12 2.36 2.36 1.46 .49 .06 0]



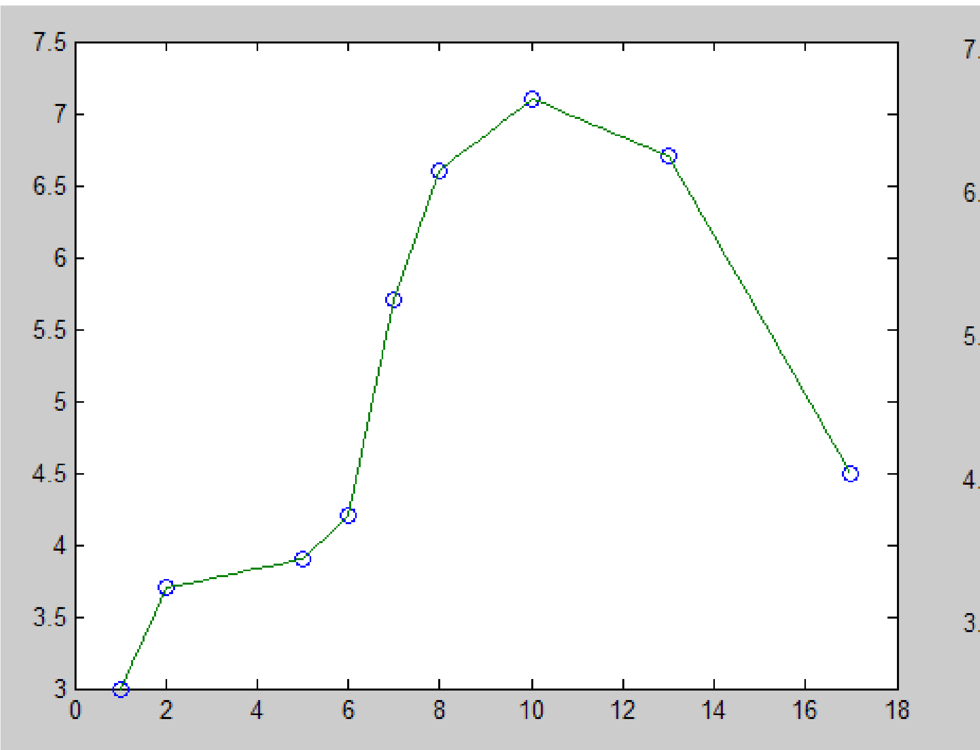
分段线性插值



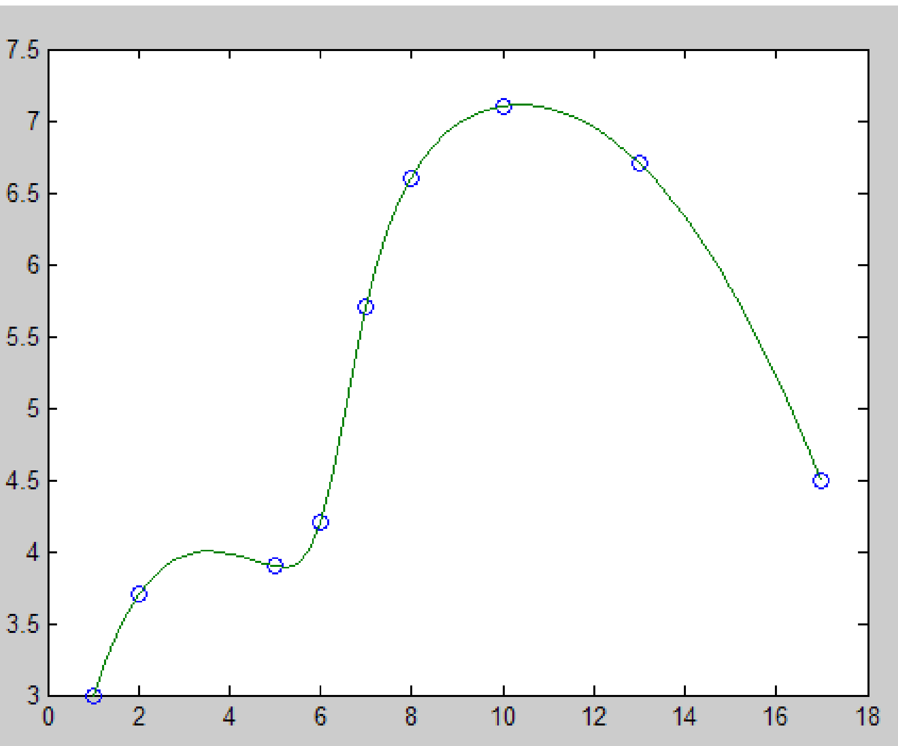
三次样条插值

例： 已知函数f(x)的数据如下表，求f(x) 在区间[1,17]上的三次样条插值多项式$s(x)$的有关参数，并作出s(x)的图形.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	2	5	6	7	8	10	13	17
$f(x_i)$	3.0	3.7	3.9	4.2	5.7	6.6	7.1	6.7	4.5



分段线性插值



分段三次样条插值

第二章 习题

P. 42　第2题　第2题改用Newton二次插值计算

P.42　 第3题（线性插值用x=0.5, 0.6两点；二次插值用x=0.5, 0.6, 0.7三点）

P.42　第4题　第6题　第8题

p.43　 第19题