第三讲　解线性方程组的迭代法

- **引言**
- **基本迭代法**
  - Jacobi迭代法
  - 高斯—赛德尔迭代法
  - 逐次超松弛法
- **迭代法的收敛性**

一、 引 言

对线性方程组

$$Ax=b, \tag{1.1}$$

其中A为非奇异矩阵

- 当A为低阶稠密矩阵时, 选主元消去法是有效的.
- 对于大型稀疏矩阵方程组(A的阶数n很大，但零元素较多), 利用迭代法求解是合适的.
- 迭代法缺点：要求A具有某种特殊性质，以保证迭代过程的收敛性
  - 发散的迭代过程是没有实用价值的。

本章将介绍：迭代法基本理论、雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、超松弛迭代法、怎样构造迭代法、收敛性分析、收敛的判别条件。

方程组迭代法的构造原则

先将方程组$Ax=b$改写为等价的形式：$x=Bx+f$

然后得到迭代格式：$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+ f$

B称为**迭代矩阵**

- 方程组的不同等价形式可得到不同的迭代格式
- 相应的迭代矩阵也不同。

例1 求解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20, \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33, \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36. \end{cases} \qquad (1.2)$$

记为Ax=b，其中

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

方程组的精确解是$x^*=(3,2,1)^T$. 现将其改写为：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(\qquad\qquad 3x_2 - 2x_3 + 20), \\ x_2 = \frac{1}{11}(-4x_1 \qquad\qquad + x_3 + 33), \\ x_3 = \frac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 \qquad\qquad + 36). \end{cases} \tag{1.3}$$

或写为$x=B_0x+f$，其中

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \frac{20}{8} \\ \frac{33}{11} \\ \frac{36}{12} \end{pmatrix}.$$

任取x的初始值，例如取$x^{(0)}=(0, 0, 0)^T$.

1. 将这些值代入(1.3)式右边(若(1.3)式为等式即求得方程组的解，但一般不满足)，得到新的值 $x^{(1)}=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^T =(3.5, 3, 3)^T$
2. 再将$x^{(1)}$分量代入(1.3)式右边得到 $x^{(2)}$
3. 反复利用这个计算程序，得到一向量序列和一般的计算公式(迭代公式)

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix},\ x^{(1)}=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix},\cdots,x^{(k)}=\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix},\cdots$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (\qquad\qquad 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20)/8, \\ x_2^{(k+1)} = (-4x_1^{(k)} \qquad\qquad + x_3^{(k)} + 33)/11, \\ x_3^{(k+1)} = (-6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} \qquad\qquad + 36)/12. \end{cases} \tag{1.4}$$

简写为： $x^{(k+1)}=B_0x^{(k)}+f$,

其中k表示迭代次数($k=0,1,2,\cdots$).

迭代到第10次有

$$x^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.999813)^T;$$

$$\left\|\varepsilon^{(10)}\right\|_\infty = 0.000187 \ \ (\varepsilon^{(10)} = x^{(10)} - x^*).$$

从此例看出：由迭代法产生的向量序列$x^{(k)}$逐步逼近方程组的精确解$x^*=(3,2,1)^T$. 即有

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

？？对于任何一个方程组$x=Bx+f$(由$Ax=b$变形得到的等价方程组)，由迭代法产生的向量序列$x^{(k)}$是否一定逐步逼近方程组的解x^*呢？回答是不一定.

——考虑用迭代法解下述方程组

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5, \\ x_2 = 3x_1 + 5. \end{cases}$$

$x^{(k)}$并不是所有的都收敛到解x^*！

对于给定方程组$x=Bx+f$，设有唯一解x^*，则

$$x^*=Bx^*+f. \qquad (1.5)$$

又设$x^{(0)}$为任取的初始向量, 按下述公式构造向量序列

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f, \quad k=0,1,2,\cdots. \qquad (1.6)$$

其中k表示迭代次数.

定义1：

(1)对于给定的方程组$x=Bx+f$，用公式(1.6)逐步代入求近似解的方法称为迭代法(或称为一阶定常迭代法，这里B与k无关). B称为迭代矩阵.

(2) 如果$\lim x^{(k)}$ $(k\to\infty)$存在(记为x^*), 称此迭代法收敛, 显然x^*就是方程组的解, 否则称此迭代法发散.

由上述讨论，需要研究$\{x^{(k)}\}$的收敛性：

引进误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{*},$$

由(1.6)减去(1.5)式，得$\varepsilon^{(k+1)}=B\varepsilon^{(k)}(k=0,1,2,\cdots)$

递推得：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \cdots = \boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}.$$

要考察$\{x^{(k)}\}$的收敛性，

- 研究B在什么条件下有$\lim\varepsilon^{(k)}=0\ (k\to\infty)$，
- 亦即要研究B满足什么条件时有$B^k\to 0$(零向量) $(k\to\infty)$.

二、　基本迭代法

设线性方程组

$$Ax=b, \qquad (2.1)$$

其中，$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为非奇异矩阵，下面研究任何建立$Ax=b$的各种迭代法.

将A分裂为

$$A=M-N. \qquad (2.2)$$

其中，M为可选择的非奇异矩阵，且使$Mx=d$容易求解，一般选择A的某种近似，称M为分裂矩阵.

于是，求解Ax=b转化为求解Mx=Nx+b ，即：

$$\text{求解} Ax = b \Leftrightarrow \text{求解}\ x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

可构造一阶定常迭代法

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(0)}(\text{初始向量}), \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \quad (\boldsymbol{k} = 0, 1, \cdots,), \end{cases} \qquad (2.3)$$

其中 $B=M^{-1}N=M^{-1}(M-A)=I-M^{-1}A$ ， $f=M^{-1}b$.

- 称 $B=I-M^{-1}A$为迭代法的迭代矩阵
- 选取不同的M矩阵，就得到解Ax=b的各种迭代法.

设$a_{ii} \neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，并将$A$写成三部分

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$=D-L-U.$$

即　A=D−L−U

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$-L=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad -U=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 雅可比迭代法

设$a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

- 选取M为A的对角元素部分,即选取M=D(对角阵)，
- A=D-N
- 由(2.3)式得到解方程组Ax=b的雅可比(Jacobi)迭代法. 又称简单迭代法.

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad (k=0,1,\cdots,), \end{cases} \qquad (2.5)$$

其中$B=I-D^{-1}A=D^{-1}(L+U)=J$, $f=D^{-1}b$.

■ 称J为解Ax=b的雅可比迭代法的迭代矩阵.

于是雅可比迭代法可写为矩阵形式

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

其Jacobi迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

下面给出雅可比迭代法(2.5)的分量计算公式, 记

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_i^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T,$$

由雅可比迭代法(2.5)有

$$Dx^{(k+1)} = (L+U)x^{(k)} + b,$$

每一个分量写出来为

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

即当$a_{ii} \neq 0$时，有

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i) \ (i = 1,2,\cdots,n).$$

即由方程组Ax=b得到的

等价方程组

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}[\qquad -a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}[-a_{21}x_1 - \qquad - \cdots - a_{2n}x_n + b_2] \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}[-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots \qquad + b_n] \end{cases}$$

其中 $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

建立的雅可比迭代格式为

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(\qquad -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} \qquad - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\quad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(k)} \qquad + b_n)
\end{cases}
$$

于是，解Ax=b的雅可比迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \\ (i = 1,2,\cdots,n) \ \ (k = 0,1,\cdots \text{表示迭代次数}). \end{cases} \quad (2.6)$$

由(2.6)式可知:

- 雅可比迭代法计算公式简单
- 每迭代一次只需计算一次矩阵和向量的乘法
- 计算过程中原始矩阵A始终不变.

例：

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

准确解 x= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

从第k个方程中解出x_k，得到等价的方程组：

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.1x_3 + 1.5 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.4x_2 + 2 \end{cases}$$

构造迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases} \qquad (*1)$$

在(*1)中，令k=0, 取 $x_1^{(0)}=0,\ x_2^{(0)}=0,\ x_3^{(0)}=0$ 代入，

得到：$x_1^{(1)}=0.3,\quad x_2^{(1)}=1.5,\quad x_3^{(1)}=2$

再令k=1, 代入，得：$x_1^{(2)}=0.8,\quad x_2^{(2)}=1.76,\quad x_3^{(2)}=2.66$

再令k=2, 代入，得：$x_1^{(3)}=0.918,\quad x_2^{(3)}=1.921,\quad x_3^{(3)}=2.864$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} \qquad\qquad + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} \qquad\qquad + 2 \end{cases} \qquad (*1)$$

在(*1)中，令k=0, 取 $x_1^{(0)}=0,\ x_2^{(0)}=0,\ x_3^{(0)}=0$ 代入，

得到： $x_1^{(1)}=0.3,\ \ x_2^{(1)}=1.5,\ \ x_3^{(1)}=2$

再令k=1, 代入，得： $x_1^{(2)}=0.8,\ \ x_2^{(2)}=1.76,\ \ x_3^{(2)}=2.66$

再令k=2, 代入，得： $x_1^{(3)}=0.918,\ \ x_2^{(3)}=1.921,\ \ x_3^{(3)}=2.864$

k	$x_1^{(k+1)}$	$x_2^{(k+1)}$	$x_3^{(k+1)}$
3	0.9716	1.97	2.954
4	0.9894	1.98972	2.98232
5	0.996176	1.996112	2.993768
…	……	……	……
8	0.999814032	1.999814544	2.999693216
9	0.999932230	1.999932128	2.999888624
10	0.999975288	1.999975308	2.999959297

迭代格式（*1）：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \quad\quad\quad 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} \quad\quad\quad + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} \quad\quad\quad + 2 \end{cases}$$

Jacobi迭代格式

写为矩阵向量形式：$\vec{x}^{(k+1)} = B \cdot \vec{x}^{(k)} + \vec{f}$

其中：

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B称为迭代矩阵

2.2　高斯-赛德尔迭代法

在 Jacobi 迭代中，计算 $x_i^{(k+1)}(2\le i\le n)$时，使用 $x_j^{(k+1)}$代替$x_j^{(k)}$ $(1\le j\le i-1)$，即有

建立迭代格式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(\qquad -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} \qquad - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\quad\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \qquad + b_n)
\end{cases}
$$

Gauss-Seidel迭代：

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 \quad - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \quad \cdots \quad - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} \quad - a_{23}x_3^{(k)} \quad \cdots \quad - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \quad - a_{34}x_4^{(k)} \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} \quad \cdots \quad - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} \quad)
\end{cases}
$$

old

new

或写为:

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right) \quad (i = 1,2,\cdots,n).
$$

称为高斯—塞德尔(Gauss — Seidel)迭代法.

将Gauss-Seidel迭代表示为矩阵向量形式.

$A=D-L-U$, 方程组$Ax=b$ 可以写为: $(D-L-U)x=b$

$$\longrightarrow \quad Dx=(Lx+Ux)+b$$

写为迭代格式： $Dx^{(k+1)}=(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)})+b$

$$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$$

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$$

或 $$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$$

其中: $G=(D-L)^{-1}U$, $f=(D-L)^{-1}b$

G称为Gauss-Seidel迭代的迭代矩阵

$$B_G=(D-L)^{-1}U$$

这就是说，选取分裂矩阵M为A的下三角部分， 即选取M= D-L(下三角阵)，A=M-N，由(2.3)式得到解Ax=b的高斯—塞德尔(Gauss — Seidel)迭代法.

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad (k = 0,1,\cdots,), \end{cases} \tag{2.7}$$

其中B=I-$(D-L)^{-1}$A= $(D-L)^{-1}$U=G, f=$(D-L)^{-1}$b. 称矩阵G=$(D-L)^{-1}$U为解Ax=b的高斯—塞德尔迭代法的迭代矩阵.

由高斯—塞德尔迭代法(2.7)有

$$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b,$$

或

$$Dx^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b,$$

每一个分量写出来为

$$a_{ii}x_i^{(k+1)}=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

即当$a_{ii}\neq 0$时，有(与前面一样的式子)

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

于是，解Ax=b的高斯—塞德尔迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \quad (\text{初始向量}), \\ x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \\ (i = 1,2,\cdots,n) \ (k = 0,1,\cdots \text{表示迭代次数}). \end{cases} \tag{2.8}$$

或

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i, \\ \Delta x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \\ (i = 1,2,\cdots,n) \ (k = 0,1,\cdots). \end{cases} \tag{2.9}$$

雅可比迭代法不使用变量的最新信息计算$x_i^{(k+1)}$，而由高斯—塞德尔迭代公式(2.8)可知，计算$x^{(k+1)}$的第 i 个分量$x_i^{(k+1)}$时，利用了已经计算出的最新分量$x_j^{(k+1)}$ $(j=1,2,\cdots,i-1)$. 可看作雅可比迭代法的一种改进. 由(2.8)可知，高斯—塞德尔迭代公式每迭代一次只需计算一次矩阵与向量的乘法.

例　用雅可比迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

精确解 $x^* = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}$.

解：Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 4.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(\qquad\quad x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(x_1^{(k)} \qquad\quad + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} \qquad\quad + 4.2) \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 计算结果如下：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.72	0.83	0.84
2	0.971	1.07	1.15
…	…	…	…
11	1.099993	1.199993	1.299991
12	1.099998	1.199998	1.299997

用Gauss—Seidel 迭代法解上题.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

解：Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 4.2) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(\qquad\qquad x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(x_1^{(k+1)} \qquad\qquad + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} \qquad\qquad + 4.2)
\end{cases}
$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 计算结果如下：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.72	0.902	1.1644
…	…	…	…
8	1.099998	1.199999	1.3

由此例可知，用高斯—塞德尔迭代法，雅可比迭代法解线性方程组(且取$x^{(0)}=0$)均收敛，而高斯—塞德尔迭代法比雅可比迭代法收敛较快(即取相同的$x^{(0)}$，达到同样精度所需迭代次数较少)，但这结论只当A满足一定条件时才是对的.

2.3　逐次超松弛法

解大型稀疏线性方程组的逐次超松弛法(SOR方法)

为加快迭代法的收敛速度，考察Gauss-Seidel迭代：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

第k+1次的迭代值可以看成是第k次迭代值加修正项.

为加速收敛，对修正项乘以调节因子ω：

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ω称为松弛因子，可通过改变ω的值加速收敛。

该方法称为逐次超松弛迭代法，简称SOR迭代法.

ω<1，为低松弛迭代法；ω>1, 为超松弛迭代法。

ω＝1为 Gauss-Seidel迭代。

算法：
$$\begin{cases} y_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right), i = 1, 2, \cdots, n \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(y_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) \end{cases}$$

$$\because x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(y_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega y_i^{(k+1)}$$

$\therefore x_i^{(k+1)}$是 $x_i^{(k)}$与$y_i^{(k+1)}$的加权平均。

下面用矩阵方法推导：

选取分裂矩阵M为带参数的下三角矩阵

$$M=\frac{1}{\omega}(D-\omega L).$$

其中ω>0为可选择的松弛因子.

于是，由(2.3)可构造一个迭代法，其迭代矩阵为

$$\begin{aligned} L_{\omega} &= I-\omega(D-\omega L)^{-1}A \\ &= (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]. \end{aligned}$$

从而得到解Ax=b的逐次超松弛迭代法（Successive Over Relaxation Method，简称SOR方法).

解Ax=b的SOR方法为.

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)} = L_\omega x^{(k)} + f \quad (k = 0,1,\cdots,), \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $L_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U], f = \omega(D - \omega L)^{-1} b.$

下面给出解Ax=b的SOR方法的分量计算公式. 记

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_i^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T,$$

由(2.10)式可得

$$(D - \omega L)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D + \omega U]x^{(k)} + \omega b,$$

$$Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} + \omega(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)}).$$

由此，得到解Ax=b的SOR方法的计算公式

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \\ (i = 1,2,\cdots,n;\ k = 0,1,2,\cdots),\ \omega\text{为松弛因子} \end{cases} \quad (2.11)$$

或

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i, \\ \Delta x_i = \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \\ (i = 1,2,\cdots,n;\ k = 0,1,2,\cdots),\ \omega\text{为松弛因子} \end{cases} \quad (2.12)$$

(1) 显然，当ω=1时即为Gauss—Seidel 迭代法.

(2) SOR方法每迭代一次主要运算量是计算一次矩阵与向量的乘法.

(3) 当ω>1时，称为超松弛法；当ω<1时，称为低松弛法.

(4) 在计算机实现时可用

$$\max_{1\le i\le n}|\Delta x_i| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$$

控制迭代终止，或用

$$\left\|r^{(k)}\right\|_\infty = \left\|b - Ax^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon$$

控制迭代终止.

SOR迭代法是Gauss—Seidel 迭代法的一种修正，可由下述思想得到.

设已知$x^{(k)}$及已计算$x^{(k+1)}$的分量$x_j^{(k+1)}$ $(j=1,2,\cdots,i-1)$.

(1) 首先用Gauss—Seidel 迭代法定义辅助量 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$，

$$\tilde{x}_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}. \qquad (2.13)$$

(2) 再由 $x_i^{(k)}$ 与 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 加权平均定义 $x_i^{(k+1)}$ ，即

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\omega\,\tilde{x}_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega(\tilde{x}_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}). \qquad (2.14)$$

将(2.13)代入(2.14)得到解$Ax=b$的SOR迭代(2.11)式.

对于方程组Ax=b $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

同样的精度，用Jacobi迭代法, 需要1154次.（ $\rho(B_J)=0.9877$ ）

用G-S迭代法, 需要578次。

用SOR方法

ω	1	1.7	1.72	1.737	1.74
次数	578	78	66	54	57

三、 迭代法的收敛性

3.1 一阶定常迭代法的基本定理

一阶定常迭代法的基本定理

设线性方程组　　$Ax=b$，　　　　　　　　(3.1)

其中，$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为非奇异矩阵，记$x^*$为(3.1)精确解，且设有等价的方程组

$$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+f.$$

于是

$$x^*=Bx^*+f. \tag{3.2}$$

设有解$Ax=b$的一阶定常迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f. \tag{3.3}$$

设方程组Ax=b的准确解为x^*，迭代格式为：

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$$ B为迭代矩阵

若迭代产生的序列 $\{x^{(k)}\}$收敛，设 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \tilde{x}$

对$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 两边求极限，得 $\tilde{x} = B\tilde{x} + f$

而 $x=Bx+f$ 是Ax=b的等价方程组，所以有 $A\tilde{x} = b$ ，

即 $\tilde{x}$ 是方程组Ax=b的准确解。

因此，只要迭代格式收敛，一定收敛到方程组的准确解。

有意义的问题是：迭代矩阵B满足什么条件时，由迭代法产生的向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛到x^*.

引进误差向量

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^* \quad (k = 0,1,2,\cdots).$$

由(3.3)式减(3.2)得到误差向量的递推公式

$$\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)}, \quad \varepsilon^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)} \quad (k = 0,1,2,\cdots).$$

研究迭代法(3.3)收敛性问题就是要研究迭代矩阵B满足什么条件时，有.

$$B^k \to 0(\text{零矩阵})(k \to \infty).$$

定义2　设有矩阵序列 $A_k=(a_{ij}^{(k)})\in R^{n\times n}$ 及 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果$n^2$个数列极限存在且有

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

则$\{A_k\}$称收敛于A，记为$\lim$ ($k\to\infty$).

例4　设有矩阵序列$\{A_k\}$, 其中$A_k=B^k$,而

$$B=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B^2=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \cdots, B^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}, \cdots$$

且设$|\lambda|<1$，考查矩阵序列极限.

解　显然, 当$|\lambda|<1$时, 则有 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

矩阵序列极限概念可以用矩阵算子范数来描述.

定理1 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0$,其中$\|\cdot\|$为矩阵的任意一种算子范数.

证明 显然有

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|A_k - A\|_\infty = 0.$$

再由矩阵范数的等价性，则定理对其它算子范数亦对.

定理2 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow$ 对$\forall x \in R^n$都有$\lim\limits_{k\to\infty} A_k x = Ax$.

定理3　设$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，则$\lim B^k=0\ (k\to\infty)$(零矩阵)的充分必要条件是矩阵B的谱半径$\rho(B)<1$.（自习）

证明　由矩阵B的若当标准形,存在非奇异矩阵P使

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}\equiv J,$$

其中若当(Jordan)块

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},$$

且 $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ ，显然有

$$B = PJP^{-1}, \quad B^k = PJ^kP^{-1},$$

其中

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^k \end{pmatrix}.$$

于是$\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} J^k = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} J_i^k = 0, (i = 1, 2, \cdots, r).$

下面考查J_i^k的情况. 引进记号

$$E_{t,k}=\begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{t-k}\in R^{t\times t}\quad (t=n_i).$$

显然有, $E_{t,0}=I$, $E_{t,k}=0$(当$k\geqslant t$), $(E_{t,1})^k=E_{t,k}$. 由于 $J_i=\lambda I+E_{t,1}$, 因此

$$J_i^k=(\lambda_i I+E_{t,1})^k=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\lambda_i^{k-j}(E_{t,1})^j$$

$$=\sum_{j=0}^{t-1}C_k^j\lambda_i^{k-j}(E_{t,1})^j$$

$$
=\begin{pmatrix}
\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & C_k^2\lambda_i^{k-2} & & C_k^{t-1}\lambda_i^{k-(t-1)} \\
 & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & & C_k^{t-2}\lambda_i^{k-(t-2)} \\
 & & & & \\
 & & & & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\
 & & & & \lambda_i^k
\end{pmatrix}_{t\times t}
$$

$$(i=1,2,\cdots,r).$$

其中 $C_k^j=\dfrac{k!}{j!(k-j)!}=\dfrac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}.$

利用极限 $\lim\limits_{k\to\infty}k^r c^k=0(0<c<1,r\geq 0)$, 得到

$$\lim_{k\to\infty}C_k^j\lambda^{k-j}=0\Leftrightarrow|\lambda|<1.$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}J_i^k=0\Leftrightarrow|\lambda_i|<1(i=1,2,\cdots,r)$, 即 $\rho(B)<1.$

定理4(迭代法基本定理)　设有方程组

$$x=Bx+f. \qquad (3.4)$$

及一阶定常迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f. \qquad (3.5)$$

对任意选择初始向量$x^{(0)}$，迭代法(3.5)收敛的充要条件是矩阵B的谱半径$\rho(B)<1$.（自习）

证明　充分性. 设$\rho(B)<1$，易知$Ax=f$(其中$A=I-B$)有唯一解，记为x^*，则

$$x^*=Bx^*+f.$$

误差向量

$$\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*=B^k\varepsilon^{(0)},\ \varepsilon^{(0)}=x^{(0)}-x^*.$$

由设ρ(B)<1，应用定理3，有$\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$. 于是对任意$x^{(0)}$有 $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon^k = 0$ ，即$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$.

必要性. 设对任何$x^{(0)}$有

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*,$$

其中$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$. 显然，极限x^*是方程组(3.4)的解，且对任意$x^{(0)}$有

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^* = B^k \varepsilon^{(0)} \to 0 (k \to \infty).$$

由定理2知

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

再由定理3，即得ρ(B)<1.

定理4是一阶定常迭代法的基本理论.

定理3和定理4的结论和起来即为

（1）迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛$\Leftrightarrow \lim B^k=O$；

（2）迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛$\Leftrightarrow \rho(B)<1$.

推论 设$Ax=b$，其中$A=D-L-U$为非奇异矩阵且D非奇异矩阵，则有

（1）Jacobi迭代法收敛$\Leftrightarrow \rho(J)<1$, 其中$J=D^{-1}(L+U)$.

（2）G-S迭代法收敛$\Leftrightarrow \rho(G)<1$, 其中$G=(D-L)^{-1}U$.

（3）SOR迭代法收敛$\Leftrightarrow \rho(L_\omega)<1$, 其中

$$L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U].$$

例5 考察用Jacobi方法解方程组(1.2)的收敛性.

解 因为方程组(1.2)的矩阵A及迭代矩阵J为

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix},\ J=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix} 0 & 3/8 & -2/8 \\ -4/11 & 0 & 1/11 \\ -6/12 & -3/12 & 0 \end{pmatrix}.$$

得迭代矩阵J的特征方程为

$$\det(\lambda I-J)=\lambda^3+\tfrac{3}{88}\lambda+\tfrac{3}{176}$$

$$=\lambda^3+0.034090909\lambda+0.039772727=0,$$

解得

$$\lambda_1=-0.3082,\lambda_2=0.1841+0.3445i,\lambda_3=0.1841-0.3445i,$$

$$|\lambda_1|=0.3082<1,\ |\lambda_2|=|\lambda_3|=0.3592<1.$$

即$\rho(J)<1$. 所以用Jacobi方法解方程组(1.2)是收敛的.

例6 考察用迭代法解方程组的收敛性. 其中

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

解 方程组的迭代矩阵B的特征方程为

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6,$$

矩阵B的特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$, 即ρ(B)>1.
这说明用迭代法解此方程组不收敛.

迭代法的基本定理在理论上是重要的，根据谱半径的性质ρ(B)⩽||B||，下面利用矩阵B的范数建立判别迭代法收敛的充分条件.

设A为n阶方阵,则对任意算子范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\rho(A) \le \|A\|$$

推论　迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 所得序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充分条件是B的任何一种范数$\|B\|<1$。

证明：若B的某种矩阵范数$\|B\|<1$,

$\rho(B) \le \|B\| < 1$，从而迭代格式收敛。

迭代格式的收敛速度问题

设迭代矩阵B有n个线性无关特征向量$u_1,u_2,\ldots u_n$ 相应特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。线性无关向量$u_1,u_2,\ldots u_n$ 可以作为R^n空间的一组基，任意向量可用$u_1,u_2,\ldots u_n$ 展开。

$$\therefore\ \varepsilon^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}c_i u_i$$

$$\therefore\ \varepsilon^{(k)}=B^k\varepsilon^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}c_i B^k u_i=\sum_{i=1}^{n}c_i\lambda_i^k u_i$$

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|=\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\lambda_i^k u_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot|\lambda_i|^k\cdot\|u_i\|\le\rho^k(B)\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot\|u_i\|$$

$\therefore$ 若$\rho(\mathrm{B})<1$，则$\left\|\varepsilon^{(\mathrm{k})}\right\|\to 0$, 迭代收敛

$\rho(\mathrm{B})<1$越小，$\left\|\varepsilon^{(\mathrm{k})}\right\|$趋于0的速度越快，因此，可用$\rho(\mathrm{B})$衡量收敛速度。

迭代格式的收敛性判别

定理4　迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 所得序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充要条件是B的谱半径小于1。

推论　迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 所得序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充分条件是B的任何一种范数$||B||<1$。

因为$\rho(B)=\max\limits_i\left|\lambda_B^{(i)}\right|$，计算困难, 一般先用推论, 由$||B||<1$判别收敛性.

注：只能用推论判别迭代格式的收敛，

不能用推论判别迭代格式的发散.

例：两种迭代的迭代矩阵

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

令A=D-L-U

$$\text{则}: D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意L，U
元素的符号

Jacobi迭代:

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel迭代:

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.04 & 0.12 \\ 0 & 0.056 & 0.068 \end{pmatrix}$$

Jacobi迭代矩阵为B

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because \|B\|_1=0.6<1$， $\therefore$ Jacobi迭代收敛。

Gauss-Seidel迭代矩阵为G

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.04 & 0.12 \\ 0 & 0.056 & 0.068 \end{pmatrix}$$

$\because \|G\|_1=0.296<1$， $\therefore$ Gauss-Seidel迭代收敛。

实际上，可以求出：$\rho(B)=0.3646$， $\rho(G)=0.137$

$\rho(G)$较小，收敛速度快。这与算例中，Gauss－Seidel迭代收敛较快相一致。

例3. 方程组 $Ax=b$, $A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 解$x=\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}$

将方程组写为等价的形式，$x=(I-A)x+b$,

构造迭代格式：$x^{(k+1)} = (I-A)x^{(k)} + b$

迭代矩阵 $B=I-A=\begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$,

求出：$\|B\|_\infty = 1.1 > 1$, $\|B\|_1 = 1.2 > 1$, $\|B\|_F = 1.241 > 1$,

但是不能得出迭代发散的结论。

实际上，B的特征值为0.9，0.8，$\rho(B)=0.9<1$，

迭代是收敛的。但 $\rho(B)=0.9$较大，收敛较慢。

$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x_{10} = \begin{bmatrix} 6.51322 \\ 15.07652 \end{bmatrix}$ $x_{25} = \begin{bmatrix} 9.2821 \\ 22.8652 \end{bmatrix}$ $x_{50} = \begin{bmatrix} 9.94846 \\ 24.84546 \end{bmatrix}$ $x_{100} = \begin{bmatrix} 9.99973 \\ 24.9992 \end{bmatrix}$

定理5(迭代法收敛的充分条件)　设有方程组

$$x=Bx+f,\quad B=(b_{ij})\in R^{n\times n},$$

及一阶定常迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f.$$

如果有B的某种算子范数$\|B\|=q<1$，则

(1) 迭代法收敛，即对任取$x^{(0)}$有

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x^*,\quad 且\quad x^*=Bx^*+f.$$

(2) $\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le q^k\left\|x^*-x^{(0)}\right\|.$

(3) $\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le \dfrac{q}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|.$

(4) $\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le \dfrac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|.$

证明 (1)由基本定理4结论(1)是显然的.

(2) 显然有关系式$x^*-x^{(k+1)}=B(x^*-x^{(k)})$ 及

$$x^{(k+1)}-x^{(k)}=B(x^{(k)}-x^{(k-1)}).$$

于是有 (a) $||x^{(k+1)}-x^{(k)}||\leqslant q||x^{(k)}-x^{(k-1)}||$;

(b) $||x^*-x^{(k+1)}||\leqslant q||x^*-x^{(k)}||$.

反复利用(b)即得(2).

(3) 考查 $||x^{(k+1)}-x^{(k)}||=||x^*-x^{(k)}-(x^*-x^{(k+1)})||$

$$\geqslant ||x^*-x^{(k)}||-||x^*-x^{(k+1)}||$$

$$\geqslant (1-q)||x^*-x^{(k)}||,$$

即得

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\frac{1}{1-q}\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le\frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|.$$

(4) 利用(3)的结果反复利用(a)，则得到(4). 即

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\le\cdots\le\frac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|.$$

由迭代矩阵||B||<1不但可判别收敛性，还可估计迭代的精度。

注1：定理5表示，当$x^{(k)}$与$x^{(k-1)}$充分接近时，

一般，$x^{(k)}$与x^{*}也充分接近。

因此，可用 $\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|<\varepsilon$ 作为迭代的停止准则。

注2：当$\|B\|<1$且充分接近1时，$\dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}$很大，

尽管 $\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$ 很小，但 $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|$ 仍然较大，
迭代收敛可能很慢。

例如：方程组 $\begin{cases} 10^6 x_1 - 999999 x_2 = 1 \\ -999999 x_1 + 10^6 x_2 = 1 \end{cases}$ 解 $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jacobi迭代： $\vec{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.999999 \\ 0.999999 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.100001 \\ 0.100001 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.100002 \\ 0.100002 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.100003 \\ 0.100003 \end{pmatrix}, \cdots$

此时，$x^{(k)}$ 与 $x^{(k+1)}$ 很接近，$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty < 10^{-6}$，

但 $x^{(k)}$ 与 x^* 相差很远。原因 $\left\| B \right\|_1 = 0.999999$，很接近1

用 $\left\| x^{(k-1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$ 作为迭代的停止准则要注意这一点。

3.2 特殊方程组迭代法的收敛性

关于解某些特殊方程组迭代法的收敛性

在科学及工程计算中，要求解方程组$Ax=b$，其矩阵A常常具有某些特性．例如，A具有对角占优性质或A为不可约阵，或A是对称正定阵，下面讨论用基本迭代法解这些方程组的收敛性.

定义3(对角占优阵)　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$.

（1）如果A的元素满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

称A为严格(按行)对角占优阵.

（2）如果A的元素满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

且上式至少有一个不等式成立，称A为弱(按行)对角占优阵.

定义4(可约与不可约矩阵)　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ $(n\geqslant 2)$，如果存在置换阵P使

$$P^T AP=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.6)$$

其中A_{11}为r阶方阵，A_{22}为$n-r$阶方阵$(1\leqslant r\leqslant n)$，则称$A$为可约矩阵．否则，如果不存在这样置换阵$P$使(3.6)式成立，则称$A$为不可约矩阵.

A为可约矩阵意即A可经过若干行列重排化为(3.6)或$Ax=b$可化为两个低阶方程组求解(如果A经过两行交换的同时进行相应两列的交换，称对A进行一次行列重排).

事实上，由$Ax=b$可化为

$$P^TAP(P^Tx)=P^Tb.$$

且记 $y=P^Tx=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, d=P^Tb=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$,其中$y_i$, d_i为r维向量.

于是，求解$Ax=b$化为求解

$$\begin{cases} A_{11}y_1+A_{12}y_2=d_1, \\ \qquad\qquad A_{22}y_2=d_2. \end{cases}$$

由上式第2个方程组求出y_2,再代入第1个方程组求出y_1.

显然，如果A所有元素都非零，则A为不可约阵.

A是可约矩阵的充要条件是存在一个下标的非空子集

$$J \text{ Ì } \{1,2,\cdots,n\}$$

使得

$$a_{kj} = 0, k \text{ Î } J, j \notin J.$$

等价的定义：

A = $\{a_{ij}\}_{nxn}$ ，设N＝{1,2,…,n}, 若存在集合N的子集I，J 满足 $I \cup J = N$, $I \cap J = \Phi$, 使得对$i \in$I，$j \in$J的一切a_{ij}＝0，则称A为可约矩阵，否则称A为不可约。

例：

$$A=\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^T AP=\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

或： N = {1,2,3,4}，取 I = {2,3}，J = {1,4}，

对任意 $i \in$I，$j \in$J，有$a_{ij}=0$.

因此A是可约矩阵。

例 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & & & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$(a_i, b_i, c_i$都不为零$)$

则A, B都是不可约矩阵.

定理6(对角占优定理)　如果$A=(a_{ij})_{n\times n}$为严格对角占优矩阵或A为不可约弱对角占优矩阵，则A为非奇异矩阵.

证明　只就A为严格对角占优矩阵证明此定理.　采用反证法，如果det(A)=0，则Ax=b有非零解，记为$x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)^T$，则 $|x_k| = \max\limits_{1\le x\le n}|x_i| \ne 0$　.

由齐次方程组第k个方程　$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,$

则有$|a_{kk}x_k| = |\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n} a_{kj}x_j| \le \sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \le |x_k|\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}|a_{kj}|$, 即 $|a_{kk}| \le \sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}|a_{kj}|$,

这与假设矛盾，故$\det(A)\ne 0$.

定理7 设方程组Ax=b，如果

(1) A为严格对角占优阵，则解Ax=b的Jacobi迭代法, Gauss-Seidel 迭代法均收敛.

(2) A为弱对角占优阵，且A为不可约矩阵，则解Ax=b的Jacobi迭代法, Gauss-Seidel 迭代法均收敛.

证明 只证(1)，(2)作为思考题.

因为A是严格对角占优阵，所以$a_{ii}\neq 0(i=1,\cdots,n)$.

Jacobi迭代阵

$$J=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则$||J||_\infty<1$，所以 Jacobi 迭代法收敛.

下面证明Gauss—Seidel 迭代法收敛.

由G=(D-L)$^{-1}$U，得

$$\det(\lambda I - G) = \det[\lambda I - (D-L)^{-1}U]$$

$$= \det[(D-L)^{-1}]\det[\lambda(D-L) - U] = 0.$$

由于 $\det[(D-L)^{-1}] \neq 0.$

所以 $\det[\lambda(D-L) - U] = 0.$ (*)

下面证明$|\lambda|<1$. 若不然，即$|\lambda|\geq 1$，则

$$|\lambda a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |\lambda a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

$$|\lambda a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |\lambda a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

即矩阵

$$\lambda(D-L)-U = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

是严格对角占优矩阵，故可逆，这与(*) 式矛盾，所以$|\lambda|<1$, 从而 $\rho(G)<1$，即Gauss—Seidel迭代法收敛.

定理 若A为正定矩阵，则方程组 Ax=b的Gauss-Seidel 迭代法收敛.（自习）

证 因为$A=D-L-L^T$，$G=(D-L)^{-1}L^T$，设λ为G 的特征值，y为对应的特征(复)向量，即

$$(D-L)^{-1}L^Ty=\lambda y，L^Ty=\lambda(D-L)y，$$

则内积 $(L^Ty, y)=\lambda((D-L)y, y)$.

从而

$$\lambda=\frac{(L^T y, y)}{(Dy, y)-(Ly, y)}.$$

因为A正定，所以D正定，故$(Dy, y)=\sigma>0$.

令 $-(Ly, y)=a+ib$，则由复向量内积的性质有

$$(L^T y, y) = (y, Ly) = \overline{(Ly, y)} = -(a - ib).$$

$$\lambda = \frac{(L^T y, y)}{(Dy, y) - (Ly, y)} = \frac{-a + ib}{(\sigma + a) + ib}.$$

$$|\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{(\sigma + a)^2 + b^2} < 1$$

所以$|\lambda|<1$, 从而$\rho(G)<1$, 故Gauss-Seidel迭代法收敛.

下面研究对于解方程组$Ax=b$的SOR方法中松弛因子ω在什么范围内取值，SOR方法才可能收敛.

定理8(SOR方法收敛的必要条件) 设解方程组 $Ax=b$ 的SOR迭代法收敛，则$0<\omega<2$.

证 $A=D-L-U$，$L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$, 由于SOR迭代法收敛，则$\rho(L_\omega)<1$. 设迭代矩阵$L_\omega$的特征值为$\lambda_i$ $(i=1,\cdots,n)$，则有$\det(L_\omega)<|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|<[\rho(B_\omega)]^n<1$.

于是

$$\det(L_\omega)=\det[(D-\omega L)^{-1}]\cdot\det[(1-\omega)D+\omega U]$$

$$=(\prod_{i=1}^{n}a_{ii})^{-1}[\prod_{i=1}^{n}(1-\omega)a_{ii}]=(1-\omega)^n<1.$$

所以$|1-\omega|<1$，即 $0<\omega<2$.

定理8说明解$Ax=b$的SOR迭代法，只有在$(0, 2)$范围内取松弛因子ω，才可能收敛.

定理9(SOR方法收敛的充分条件)　设有方程组 $Ax=b$，如果：

(1) A为对称正定矩阵，$A=D-L-L^T$;

(2) $0<\omega<2$.

则解方程组 $Ax=b$的SOR迭代法收敛.（自习）

证　在上述假定下，设迭代矩阵L_ω的任一特征值为λ，只要证明$|\lambda|<1$即可.

事实上，设y为对应λ的L_ω的特征向量，即

$$L_\omega y = \lambda y,\ \ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \neq 0,$$

$$(D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega L^T)y = \lambda y,$$

亦即 $$((1-\omega)D + \omega L^T)y = \lambda(D - \omega L)y.$$

有内积 $$(((1-\omega)D + \omega L^T)y, y) = \lambda((D - \omega L)y, y),$$

则 $$\lambda = \frac{(Dy, y) - \omega(Dy, y) + \omega(L^T y, y)}{(Dy, y) - \omega(Ly, y)},$$

因为A正定，所以D正定，记$(Dy, y)=\sigma>0$.

令 $-(Ly, y)=a+ib$，则由复向量内积的性质有

$$(L^T y, y) = (y, Ly) = \overline{(Ly, y)} = -(a - ib).$$

$$\lambda = \frac{(Dy,y) - \omega(Dy,y) + \omega(L^T y,y)}{(Dy,y) - \omega(Ly,y)},$$

$$= \frac{(\sigma - \omega\sigma - a\omega) + i\omega b}{(\sigma + a\omega) + i\omega b}.$$

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \omega\sigma - a\omega)^2 + \omega^2 b^2}{(\sigma + a\omega)^2 + \omega^2 b^2}.$$

因为 $0 < (Ay,y) = ((D - L - L^T)y,y) = \sigma + 2a,$

当0<ω<2时，有(分子减分母)

$$(\sigma - \omega\sigma - a\omega)^2 - (\sigma + a\omega)^2 = \omega\sigma(\sigma + 2a)(\omega - 2) < 0.$$

即L_ω的任一特征值满足|λ|<1, 故SOR迭代法收敛.

注1：对不满足定理7的矩阵A，J迭代和G-S迭代的收敛可能不一致。

如，$A_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, J迭代收敛，G-S迭代不收敛。

$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$，G-S迭代收敛，J迭代不收敛。

注2：两者都收敛时，并不总是G-S迭代的收敛速度快于J迭代的收敛速度.

注3（定理）：若A是对称正定矩阵，则SOR方法收敛的充要条件是$0<\omega<2$.

注4：当A为n阶对称正定矩阵时，可用共轭斜量法(conjugate gradient method, CG)来解$Ax=b$。（自学）

程序简单、存储需要量小、特别适合求解大型稀疏问题

例　　下面是一个14*14的矩阵

a1 =

3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000
-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0
0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0	0
0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0.5000	0	0	0
0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0.5000	0	0	0	0
0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0.5000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.5000	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0.5000	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0
0	0	0	0.5000	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0
0	0	0.5000	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0
0	0.5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000
0.5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000

LU分解得到的下三角矩阵L

L =

1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3333	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.3750	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.3810	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.3818	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.3819	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-0.3820	1.0000	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.3820	1.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.1910	0.0729	-0.3541	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.1910	0.0729	0.0279	0.0106	-0.4027	1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0.1909	0.0729	0.0279	0.0106	0.0041	-0.0048	-0.4237	1.0000	0	0	0
0	0	0.1905	0.0727	0.0278	0.0106	0.0041	0.0015	-0.0018	-0.0073	-0.4297	1.0000	0	0
0	0.1875	0.0714	0.0273	0.0104	0.0040	0.0015	0.0006	-0.0007	-0.0027	-0.0077	-0.4308	1.0000	0
0.1667	0.0625	0.0238	0.0091	0.0035	0.0013	0.0005	0.0002	-0.0002	-0.0009	-0.0026	-0.0068	-0.4281	1.0000

LU分解得到的上三角矩阵U

U =

3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000
0	2.6667	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0.1667
0	0	2.6250	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0.1875	0.0625
0	0	0	2.6190	-1.0000	0	0	0	0	0	0.5000	0.1905	0.0714	0.0238
0	0	0	0	2.6182	-1.0000	0	0	0	0.5000	0.1909	0.0727	0.0273	0.0091
0	0	0	0	0	2.6181	-1.0000	0	0.5000	0.1910	0.0729	0.0278	0.0104	0.0035
0	0	0	0	0	0	2.6180	-1.0000	0.1910	0.0729	0.0279	0.0106	0.0040	0.0013
0	0	0	0	0	0	0	2.6180	-0.9271	0.0279	0.0106	0.0041	0.0015	0.0005
0	0	0	0	0	0	0	0	2.5623	-1.0319	-0.0122	-0.0046	-0.0017	-0.0006
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4727	-1.0476	-0.0181	-0.0068	-0.0023
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4444	-1.0503	-0.0189	-0.0063
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4371	-1.0499	-0.0166
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4381	-1.0437
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4576

将上述形式的矩阵扩展到高阶的矩阵，用*Matlab*的*LU*分解软件进行*LU*分解，用*CPU*时间如下（秒）：

500阶	1000阶	1500阶	2000阶	2008阶	2500阶	3000阶
0.0470	0.3130	1.1250	5.9840	6.0940	14.8750	27.9220

取精确解X的分量都为1，取初始值为0，用共轭斜量法进行计算：

3000阶，精确度为10^{-16}，cpu时间0.0620秒

100万阶，精确度为10^{-16}，cpu时间15.8910秒

300万阶，精确度为10^{-16}，cpu时间28.4380秒

习题

P.216　第1题、第5题；
P.217　第9题；
P.218　第14题