Tên : Vòng Vĩnh Phú
MSSV: 19110413

Định lý 2 : Prove $\|A\|_\infty = \max_{1<i<n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$

Proof : Giả sử tổng hàng lớn nhất thu được từ hàng k của ma trận A. Sau đó chọn vectơ x được xác định bởi $x_j = 1$ (khi $a_{kj} \geq 0$) và $x_j = -1$ (khi $a_{kj} \leq 0$). Khi đó $\|x\|_\infty = 1$

$\|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1<i<n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$

Ngược lại, cho $\|x\|_\infty = 1$ thì $|x_i| \leq 1$ và $|x_p| = 1$ với p bất kỳ khi đó.

$\|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty = \max_{1<i<n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \leq \max_{1<i<n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$

Vậy $\|A\|_\infty = \max_{1<i<n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$

Bài Tập 3.1 Prove that if W is an arbitrary nonsingular matrix, the function $\|\cdot\|_W$ defined by (3.3) is a vector norm

Proof : Đặt W là ma trận khả nghịch suy ra $Wx = 0$ khi $x = 0$
ta có $\|x\|_W = \|Wx\|$
Nếu $\|\cdot\|_W$ là một chuẩn Vector (Vector Norm) :

(i) $\|x\|_W = \|Wx\| \geq 0$ và $\|Wx\| = 0$ khi và chỉ khi $Wx = 0$, i.e, $x = 0$ (khi W là một ma trận khả nghịch)

(ii)

$$\begin{aligned} \|x+y\|_W &= \|W(x+y)\| \\ &= \|Wx + Wy\| \\ &\leq \|Wx\| + \|Wy\|_W \\ &= \|x\|_W + \|y\|_W \end{aligned} \tag{1}$$

$\|Wx + Wy\| \leq \|Wx\| + \|Wy\|_W$ xảy ra khi $\|\cdot\|_W$ là một chuẩn

(iii) $\|\alpha x\|_W = \|\alpha Wx\| = |\alpha|\|wx\| = |\alpha|\|x\|_W$

$\|\alpha Wx\| = |\alpha|\|wx\|$ xảy ra khi $\|\cdot\|_W$ là một chuẩn

$\Rightarrow \|\cdot\|_W$ là một chuẩn Vector

Bài Tập 3.2 Let $\|\cdot\|$ denote any norm on C^m and also the induced matrix norm on C^{mXn}. Show that $p(A) \leq \|A\|$, where $p(A)$ is the spectral radius of A, i.e, the largest absolute value $|\lambda|$ of an eigenvalue λ of A

Proof :

Ta có $p(A)$ là một spectral radius của A nghĩa là $p(A) = max$ { $|\lambda|$: λ là một vector riêng của A }

Với λ bất kỳ có vector riêng x tương ứng ta có:

$$\begin{aligned} &Ax = \lambda x \\ &\Rightarrow |\lambda| = \|Ax\| \\ &\Rightarrow |\lambda| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_y \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \end{aligned} \tag{2}$$

Với $\sup_y \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$ là kết quả của một chuẩn ma trận