Tên : Vòng Vĩnh Phú
MSSV: 19110413

Định lý 5.2 : Prove $range(A) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ and $null(A) = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$.

Proof :

Ta có range(A) là không gian sinh bởi cột của ma trận A

Mặt khác theo định lý 5.1 ta có rank(A) = rank(Σ) = r

Mà Σ là ma trận chéo nên số chiều của Σ = r $\Rightarrow dim(A) = r$

$\Rightarrow range(\Sigma) = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ vậy ta cũng có $range(A) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$

Chứng minh tương tự ta cũng có $null(\Sigma) = \langle e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle \Rightarrow null(A) = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$.

Bài Tập 4.1 Determine SVDs of the following matrices

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} 9-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 9, 4$

$\Rightarrow$ singular values = 3,2

$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Với $\lambda = 9$ ta có

$(A^T A - \lambda I) - \vec{x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -5x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ chọn $x_1 = 1 \Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

Với $\lambda = 4$ ta có

$(A^T A - \lambda I) - \vec{x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ chọn $x_2 = 1 \Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow V = AU\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 4, 9$

$\Rightarrow$ singular values = 2,3

$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Với $\lambda = 4$ ta có

$(A^T A - \lambda I) - \vec{x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ chọn $x_1 = 1 \Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

Với $\lambda = 9$ ta có

$(A^T A - \lambda I) - \vec{x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ chọn $x_2 = 1 \Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow V = AU\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 4, 0$

$\Rightarrow$ singular values = 2,0

$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Với $\lambda = 4$ ta có

$$(A^TA - \lambda I) - \vec{x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (1)

Với $\lambda = 0$ ta có

$$(A^TA - \lambda I) - \vec{x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (2)

$\vec{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

chọn $\vec{x_1}$ $\vec{x_2}$ $\vec{x_3}$ sao cho U là ma trận unitary (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \Sigma V = AU \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ chọn $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 2, 0$

$\Rightarrow$ singular values $= \sqrt{2}$,0

$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Với $\lambda = 2$ ta có

$(A^T A - \lambda I) - \vec{x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (1)

Với $\lambda = 0$ ta có

$(A^T A - \lambda I) - \vec{x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ chọn $x_2 = 1 \Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2)

chọn $\vec{x_1}$ sao cho U là ma trận unitary (3) Từ (1)(2) $\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \Sigma V = AU \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ chọn $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 4, 0$

$\Rightarrow$ singular values = 2,0

$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bài Tập 4.5 theorem 4.1 asserts that every $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ has an SVD $A = U\Sigma V^*$ show that if A is real, then it has a real SVD ($U \in \mathbb{R}^{m \times n}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Proof :

A = $\mathbb{R}^{m \times n}$

Ta có:
$A^* A = A^T A = \mathbb{R}^{n \times m}$ là real và đối xứng

Vậy : $A^* A = V D V^T$, với D là ma trận real diagonal, với V là ma trận real orthogonal

Nếu m > n, ta thêm m-n hàng 0 cho ma trận V để lấy được một real matrix, U