Tên : Vòng Vĩnh Phú
MSSV: 19110413

Định lý 5.7 : Prove A is the sum of r rank-one matrices

Proof :

Giả sử ma trận A $\in \mathbb{C}^{n\times m}$ vậy ta A sẽ có một phân rã SVD

Ta có ma trận có hạng bằng 1 được tạo bởi tích ngoài của 2 vector (u, v^*)

$$A = uv^*$$

Nếu nhân với một vector vô hướng σ thì ma trận A vẫn là một ma trận có hạng bằng 1

$$A = \sigma uv^*$$

Nếu ta tổng 2 ma trận có hạng bằng 1 σuv^* ta được một ma trận bậc 2

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^*$$

Vậy từ đó ta có một ma trận A có hạng r là tổng các r các ma trận có hạng bằng 1 :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^*$$

Bài Tập 5.1 In Example 3.1 we considered the matrix (3.7) and asserted, among other things, that its 2-norm is approximately 2.9208. Using the SVD, work out (on paper) the exact values of $\sigma_{min}(A)$ and $\sigma_{max}(A)$ for this matrix

Ta có :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^*A - \lambda I| = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 4) - 16 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

$\Rightarrow \sigma_{min} = \sqrt{\frac{9-\sqrt{65}}{2}}$ $\qquad \sigma_{max} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2}}$

Bài Tập 5.2 Using the SVD, prove that any matrix in $\mathbb{C}^{n\times m}$ is the limit of a sequence of matrices of full rank. In other words, prove that the set of full-rank matrices is a dense subset of $\mathbb{C}^{n\times m}$. Use the 2-norm for your proof. (The norm doesn't matter, since all norms on a finite-dimensional space are equivalent.)

Proof :

A là một dense subset của $\mathbb{C}^{n\times m}$ khi $\|A - A_\epsilon\|_2 \to 0$ khi $\epsilon \to 0$

cho A là một phân rã SVD

$A_\epsilon = U(\Sigma + \epsilon I_{m\times n})V^*$

Biết rằng nếu Q là một ma trận unitary $\|QA\|_2 = \|A\|_2$
Vậy $\|A - A_\epsilon\|_2 = \|U\epsilon I_{m\times n}V^*\|_2 = \|\epsilon I_{m\times n}\|_2 = \epsilon$

$\lim_{\epsilon\to 0} \|A - A_\epsilon\|_2 = 0$

Bài Tập 5.3 Consider the matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$

(a) Determine, on paper, a real SVD of A in the form A $=U\Sigma V^*$. The SVD is not unique, so find the one that has the minimal number of minus signs in U and V

Ta có : $A = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & -72 \\ -72 & 146 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Từ (2) $\Rightarrow |A^TA - I\lambda| = \begin{vmatrix} 104-\lambda & -72 \\ -72 & 146-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 50 \qquad \lambda_2 = 200$

$\Rightarrow \sigma_1 = 5\sqrt{2} \qquad \sigma_2 = 10\sqrt{2}$

$\Sigma = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{2} \end{bmatrix}$
với $\lambda = 50$ ta có

$(A^TA - I\lambda)\vec{x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 54 & -72 \\ -72 & 960 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

chọn $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$

Tính vector đơn vị $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{5}{4}$

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

với $\lambda = 200$ ta có

$(A^TA - I\lambda)\vec{x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -96 & -72 \\ -72 & -540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

chọn $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{-3}{4}$

Tính vector đơn vị $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{5}{4}$

$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

$V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A = U\Sigma V^T \Leftrightarrow AV\Sigma^{-1} = U \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) List the singular values, left singular vectors, and right singular vectors of A. Draw a careful, labeled picture of the unit ball in $\mathbb{R}^2$ and its image under A, together with the singular vectors, with the coordinates of their vertices marked

left singular vectors : $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \pm \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \pm \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Right singular vectors : $V = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \pm \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \qquad \pm \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

(c) What are the 1-, 2-, oo-, and Frobenius norms of A?

$\|A\|_2 = \sigma_{max} = 10\sqrt{2}$

$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 5\sqrt{10}$

$\|A\|_1 = \max\{$tổng giá trị theo cột ma trận A $\} = max(12, 16) = 16$

$\|A\|_\infty = \max\{$tổng giá trị theo hàng ma trận A $\} = max(13, 15) = 15$

(d) Find A' not directly, but via the SVD

$$\begin{aligned} A^{-1} &= V\Sigma^{-1}U^* \\ &= \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-11}{10} \\ 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

(e) Find the eigenvalues λ_1, λ_2 of A

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) = 0 &\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 5) + 110 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 100 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm i\sqrt{391}}{2} \end{aligned} \tag{4}$$