Tên: Vương Vĩnh Phú MSSV: 1910413

20.1

(⇒) Nếu A có phân rã LU ⇒ đường chéo chính trên U không phải 0

$A = LU \Rightarrow A_{1:k,1:k} = L_{1:k,1:k} U_{1:k,1:k}$

và $A_{1:k,1:k}$ là ma trận khả nghịch

(⇐) Cho $k = 1$, ta có $A_{11} = L_{11} U_{11}$, $L_{11} = 1$, $U_{11} = A_{11} \neq 0$

Giả thiết vậy cho $k \leq m$ ta cm

$$A_{1:m+1,1:m+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_{1:m,1:m} & 0 \\ x_m & 1 \end{pmatrix}}_{L_{1:m+1,1:m+1}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{1:m,1:m} & y_m \\ 0 & u_{m+1} \end{pmatrix}}_{U_{1:m+1,1:m+1}}$$

$$x_m = [a_{m+1,1} \dots a_{m+1,m}] \, U^{-1}_{1:m,1:m}$$

$$y_m = L^{-1}_{1:m,1:m} \begin{bmatrix} a_{1,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{bmatrix}$$

$$u_{m+1} = -x_m y_m$$

$\Rightarrow u_{m+1} \neq 0$ khi $\det(A_{1:m+1,1:m+1}) = \det(U_{1:m,1:m}) \neq 0$

Khi đó $A = LU$ và L là ma trận ~~trên~~ Δ dưới

U là ma trận Δ dưới

20.2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p+1} & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ a_{p+1,1} & & \ddots & & a_{m-p,m} \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & a_{m,m-p} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{m1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_{mm} \end{bmatrix}}_{U}$$

Khi đó, $i-j > p$ cho ma trận tam giác trên nên

$$a_{ij} = \sum_{i=1} l_{ik} u_{kj} = 0, \quad j = 1, \dots, m-p-1$$

ta có được $l_{ij} = 0$ khi $i-j > p$

tương tự $j-i > p$ cho ma trận tam giác dưới

ta cũng thu được $u_{ij} = 0$ khi $j-i > p$