Tên : Vòng Vĩnh Phú
MSSV: 19110413

Bài Tập 2.2 The Pythagorean theorem asserts that for a set of n orthogonal vectors $\{x_i\}$,

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \tag{1}$$

(a) Prove this in the case $n = 2$ by an explicit computation of $\|x_1 + x_2\|^2$
(b) Show that this computation also establishes the general case, by induction.

Prove (a):
Với n=2 ta có:

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|^2 &= (x_1 + x_2)^*(x_1 + x_2) \\ &= (x_1^* + x_2^*)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^*x_1 + x_1^*x_2 + x_2^*x_1 + x_2^*x_2 \\ &= x_1^*x_1 + 0 + 0 + x_2^*x_2 \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Prove (b):

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\|^2 &= \|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\|^2 \\ &= (x_1^* + x_2^*)(x_1 + x_2) + ... + (x_n^* + x_{n+1}^*)(x_n + x_{n+1}) \\ &= x_1^*x_1 + x_1^*x_2 + x_2^*x_1 + x_2^*x_2 + ... + x_n^*x_n + x_n^*x_{n+1} + x_{n+1}^*x_n + x_{n+1}^*x_{n+1} \\ &= x_1^*x_1 + 0 + 0 + x_2^*x_2 + ... + x_n^*x_n + 0 + 0 + x_{n+1}^*x_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \|x_{i+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Bài Tập 2.3 let $A \in C^{mXm}$ be hermitian. An eigenvector of A is a nonzero vector $x \in C^m$ such that $Ax = \lambda x$ for some $\lambda \in C$, the corresponding eigenvalue

(a) Prove that all eigenvalues of A are real
(b) Prove that if x and y are eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues, then x and y are orthogonal

Prove (a):

Ta có $A \in C^{mXm}$ là ma trận hermitian ($A = A^*$)

$\Rightarrow Ax = \lambda x$ với $\lambda \in C$

Để mọi trị riêng của A là thực thì $\lambda = \lambda^*$

$$\begin{aligned}
\lambda\|x\|^2 = \lambda(x^*x) &= x^*(\lambda x) \\
&= x^*(Ax) \\
&= x^*A^*x \\
&= (Ax)^*x \\
&= (\lambda x)^*x \\
&= \lambda^*x^*x = \lambda^*\|x\|^2
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^*$$

Prove (b):

Cho $Ax = \lambda_x x$ và $Ay = \lambda_y y$ với $\lambda_x \neq \lambda_y$. Giả sử x và y là 2 trực giao, nghĩa là $x^*y = 0$

$$\begin{aligned}
((Ax)^* - (\lambda_x x)^*)(Ay - \lambda_y y) = 0 &\Rightarrow (x^*A^* - \lambda_x x^*)(Ay - \lambda_y y)) = 0 \\
&\Rightarrow \|A\|^2 x^*y - A\lambda_x x^*y - A\lambda_y x^*y + \lambda_x\lambda_y x^*y = 0 \\
&\Rightarrow (\|A\|^2 - A\lambda_x - A\lambda_y + \lambda_x\lambda_y)x^*y = 0 \\
&\Rightarrow x^*y = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Bài Tập 2.4 What can be said about the eigenvalues of a unitary matrix?

Prove:

Cho 1 ma trận unitary Q, ta có $Q^* = Q^{-1}$. giả sử λ là một trị riêng của Q với vector riêng tương ứng x

$$\begin{aligned}
x^*x &= x^*(Q^{-1}Q)x \\
&= x^*Q^*Qx \\
&= (Qx)^*Qx \\
&= x^*\lambda^*\lambda x \\
&= \|\lambda\|^2 x^*x
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \|\lambda\|^2 = 1$$