Ngày:..........................

Tên: vòng vĩnh phú mssv: 19110013

6.1

ta có

p là hình chiếu trực giao (orthogonal projector), nghĩa là

$p^* = p, \; p^2 = p$

mặt khác, lại có

$(I-2p)^*(I-2p)$

$= I - 2p - 2p^* - 2p^*.2p$

$\cancel{= I - 2p - 2p^* - 4p^2}$

$= I - 4p - 4p^2$

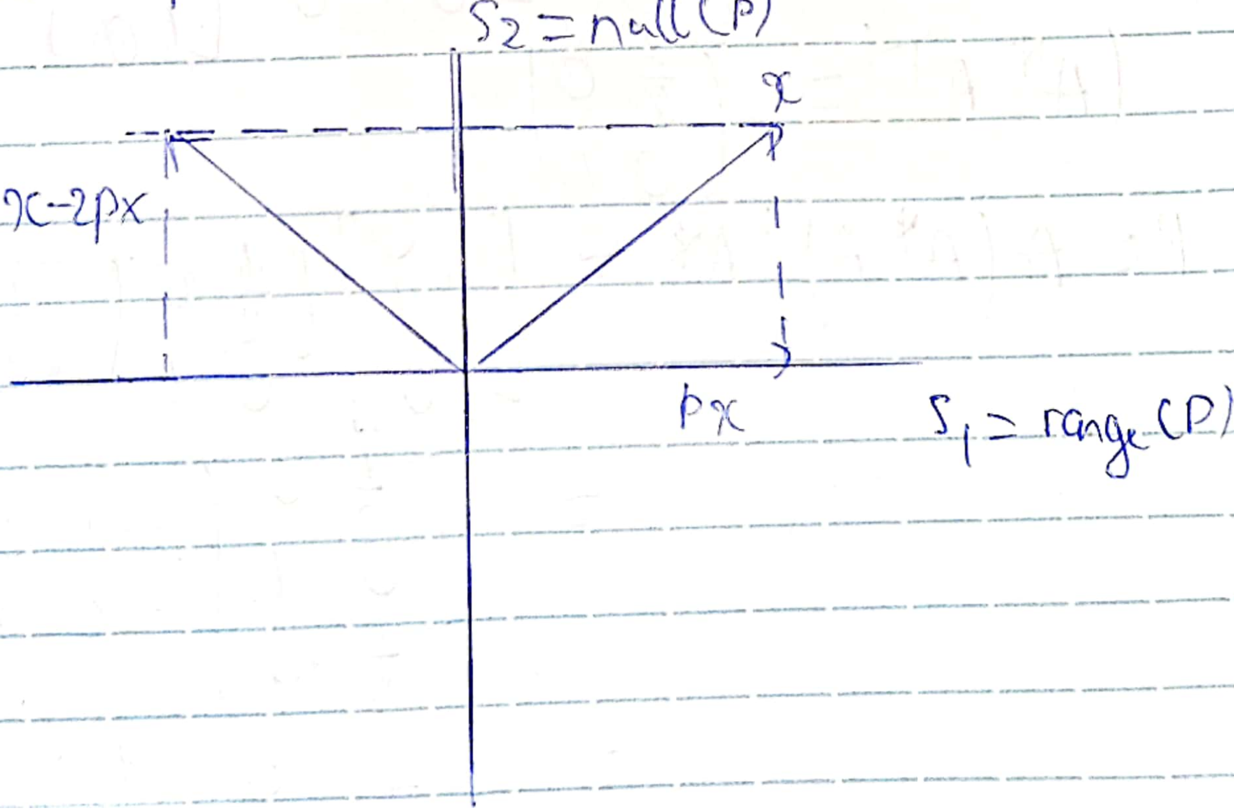
$= I - 4p - 4p \quad = I$

Vậy $(I-2p)^*(I-2p) = I$

$I-2p$ là ma trận unitary

geometric interpretation

$(I-2p)x = x - 2Px$



Ngày..................

6.3

Cho A là ma trận hạng đầy đủ
với ~~thì~~ $A = U\Sigma V^*$, khi đó Σ là ma trận có hạng đầy đủ (1)

với

$A^*A = V\Sigma^*\Sigma V^*$? dễ dàng nhận thấy A^*A là một ma trận có khả nghịch khi và chỉ khi Σ là hạng đầy đủ (2)

từ (1), (2) khi A^*A là ma trận có khả nghịch (non-singular) khi và chỉ khi A là ma trận hạng đầy đủ

6.4

(a) gọi P là hình chiếu trực giao (orthogonal projector) của range(A) ta có thể viết biểu thức

$$P = A(A^*A)^{-1}A^*$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^*A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A(A^*A)^{-1}A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

image under $P = Px = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

b,

$$P = B(B^*B)^{-1}B^*$$

$$B^*B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(B^*B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$P = B(B^*B)^{-1}B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Under image P: $Px = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$