Tên: vòng vĩnh phú

Định lý 24.3 chứng minh nếu X là nonsingular

A và $X^{-1}AX$ có cùng đa thức đặc trưng, trị riêng, bội đại số

* characteristic polynomial

$$
\begin{aligned}
P_{X^{-1}AX}(z) &= \det(zI - X^{-1}AX) \\
&= \det(X^{-1}(zI - A)X) \\
&= \det(X^{-1}) \det(zI - A) \det(X) \\
&= \det(zI - A) \\
&= P_A(z)
\end{aligned}
$$

* eigenvalues

vì $P_{X^{-1}AX}(z) = P_A(z)$

nếu tồn tại trị riêng λ sao cho $P_A(\lambda) = 0$

$\Rightarrow P_{X^{-1}AX}(\lambda) = 0$

do $\det(zI - X^{-1}AX) = \det(zI - A)$

* algebraic multiplicity

Do các trị riêng λ của A và $X^{-1}AX$ bằng nhau nên ta có

$$P_A(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_n) = P_{X^{-1}AX}(z)$$

* geometric multiplicity

Cho λ là trị riêng của A thì $A E_\lambda \subseteq E_\lambda$

Mà khi A và $X^{-1}AX$ có cùng trị riêng nên
$(X^{-1}AX) E_\lambda \subseteq E_\lambda$

Định lý 24.4: bội đại số của trị riêng λ là ít nhất như số bội hình học của nó

Cho n là số bội hình học λ. Tạo thành mọi ma trận $\hat{V}$ cấp $m \times n$ mà n cột của nó tạo thành cơ sở trực giao kg riêng $\{x : Ax = \lambda x\}$ khi đó ta có ma trận unita vuông V

$$B = V^* A V = \begin{bmatrix} \lambda I & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Với D là ma trận $(m-n) \times (m-n)$

$$\det(zI - B) = \det(zI - \lambda I) \det(zI - D)$$

$$= (z - \lambda)^n \det(zI - D)$$

Vậy bội đại số của λ ít nhất là n

Định lý 24.5 một ma trận $m \times m$ A là non defective khi và chỉ khi là một eigenvalue phân rã $A = X \Lambda X^{-1}$

ta có $A = X^{-1} A X = X^{-1} \Lambda X^{-1}$

$\Rightarrow \Lambda = A$ ~~với cùng~~ theo đó ta có Λ có cùng số trị riêng và cùng số bội. Khi Λ là ma trận chéo và non defected điều đó cũng đúng cho A