CHƯƠNG 1

Các khái niệm cơ bản về đồ thị

Các khái niệm cơ bản về đồ thị

- Định nghĩa đồ thị
- Bậc của đỉnh
- Một số dạng đồ thị đặc biệt
- Đồ thị con, đồ thị bộ phận
- Đồ thị đẳng cấu
- Biểu diễn đồ thị

Giới thiệu

- LTĐT là lĩnh vực nghiên cứu đã có từ lâu và có nhiều ứng dụng trong CNTT. Nó được đề xuất vào những năm đầu của thế kỷ 18 bởi nhà toán học lỗi lạc người Thụy Sỹ: Leonhard Euler
- Những ứng dụng cơ bản của đồ thị:
  - Xác định tính liên thông trong một mạng máy tính
  - Tìm đường đi ngắn nhất
  - Giải các bài toán tối ưu
  - Giải bài toán tô màu trên bản đồ, …

Định nghĩa đồ thị

- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh. Tuỳ vào kiểu và số lượng cạnh, ta có các loại đồ thị khác nhau.
  - Đồ thị có hướng
  - Đồ thị vô hướng

Đồ thị có hướng

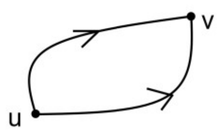
- ĐN1: Đồ thị có hướng G=(V,E) là đồ thị gồm:
  - V: tập hợp hữu hạn gồm các đỉnh của đồ thị.
  - E: tập hợp các cặp có thứ tự (u,v) với u, v $\in$ V. Mỗi phần tử của E được gọi là 1 cung của G.
  - Cung (u,v) $\neq$ cung (v,u) có thể kí hiệu là uv

Đồ thị có hướng (tt)

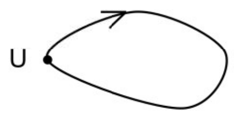
- Cho (u,v) là cung của G:
  - Cung uv đi từ u → v
  - Đỉnh u là gốc (đỉnh đầu) của cung.
  - Đỉnh v là ngọn (đỉnh cuối) của cung.
  - u, v là 2 đỉnh kề nhau
  - u là đỉnh trước của v
  - v là đỉnh sau của u

Đồ thị có hướng (tt)

- Hai cung uv, uv được gọi là 2 cung song song cùng chiều.

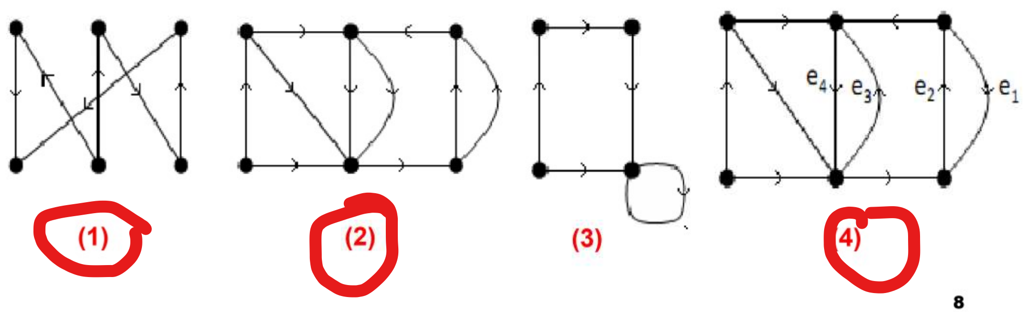


- Cung uu, được gọi là khuyên



Đồ thị có hướng (tt)

- ĐN2: Đồ thị có hướng, không có cung song song cùng chiều và không có khuyên gọi là đơn đồ thị có hướng.
- Ví dụ: đơn đồ thị có hướng?

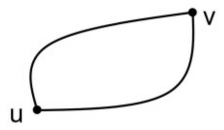


Đồ thị vô hướng

- ĐN1: Đồ thị vô hướng G=(V,E) là đồ thị gồm:
  - V: tập hợp hữu hạn gồm các đỉnh của đồ thị.
  - E: tập hợp các cặp không kể thứ tự của 2 đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là 1 cạnh của G.
  - Cạnh (u,v) có thể kí hiệu là uv. Cạnh uv và vu là như nhau.

Đồ thị vô hướng (tt)

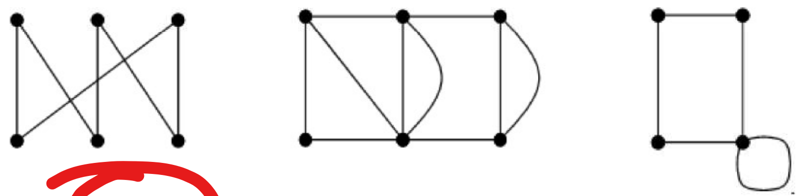
- Hai cạnh uv, uv được gọi là 2 cạnh song song.



- Cạnh uu được gọi là khuyên

Đồ thị vô hướng (tt)

- ĐN2: Đồ thị vô hướng, không có cạnh song song và không có khuyên gọi là đơn đồ thị vô hướng.
- Ví dụ: đơn đồ thị vô hướng?



(1) (2) (3)

Định nghĩa (tt)

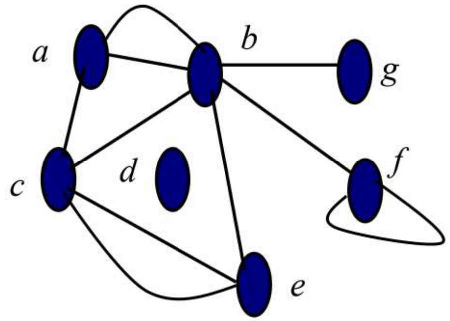
Loại đồ thị	*Cạnh*	*cạnh/cung song song*	*Khuyên*
Đơn đồ thị vô hướng			
Đa đồ thị vô hướng			
Giả đồ thị vô hướng			
Đồ thị có hướng			
Đa đồ thị có hướng			

Bậc của đỉnh

- ĐN1: Cho G=(V,E), vô hướng, $v \in V$.
  - Nếu e = (u,v) là một cạnh của G thì:
    - Hai đỉnh u, v được gọi là hai đỉnh kề nhau
    - Cạnh e được gọi là cạnh kề với đỉnh u và đỉnh v
    - u, v được gọi là đỉnh đầu của cạnh e
  - deg(v)=số cạnh kề với v.
- Mỗi khuyên tại v được tính 2 lần cho v

Ví dụ:

- deg(a) =
  deg(b) =
  deg(c) =
  deg(d) =
  deg(e) =
  deg(f) =
  deg(g) =

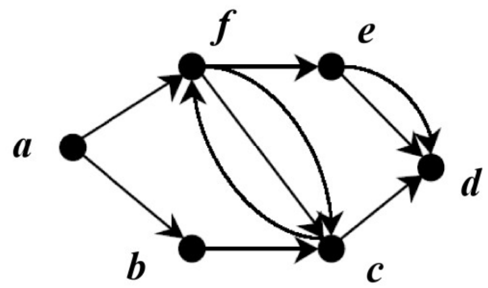


- Chú ý:
  - Đỉnh bậc 0 gọi là đỉnh cô lập
  - Đỉnh bậc 1 gọi là đỉnh treo

Bậc của đỉnh (tt)

- ĐN2: Cho G=(V,E), có hướng, $v \in V$.
  - Bán bậc vào: $deg^-(v)$
    - $deg^-(v)$ = số cung nhận v là ngọn (đỉnh cuối)
  - Bán bậc ra: $deg^+(v)$
    - $deg^+(v)$ = số cung nhận v là gốc (đỉnh đầu)
  - $deg(v) = deg^+(v) + deg^-(v)$

Ví dụ:



$deg^-(a)=0$, $deg^-(b)=1$, $deg^-(c)=3$, $deg^-(d)=$**?**, $deg^-(e)=$**?**, $deg^-(f)=$**?**
$deg^+(a)=2$, $deg^+(b)=1$, $deg^+(c)=1$, $deg^+(d)=$**?**, $deg^+(e)=$**?**, $deg^-(f)=$**?**

Bậc của đỉnh (tt)

- Định lý 1: Cho G=(V,E) có m cạnh (cung)

  1. $$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2m$$

  2. Nếu G là đồ thị có hướng

  $$\sum_{v\in V}\deg^-(v) = \sum_{v\in V}\deg^+(v) = m$$

Bậc của đỉnh (tt)

- **Định lý 2:** Số đỉnh bậc lẻ trong G phải là số chẳn
- **Định lý 3:** Trong 1 đồ thị với n đỉnh (n>=2) có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc
- **Định lý 4:** Nếu đồ thị có n đỉnh (n>2) có đúng 2 đỉnh cùng bậc thì 2 đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc n-1

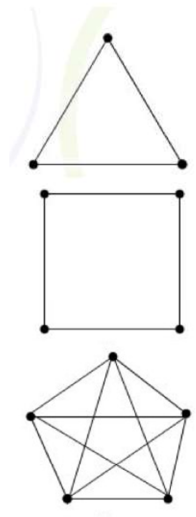
Một số dạng đồ thị đặc biệt

- Đồ thị đầy đủ (đồ thị đủ)
- Đồ thị vòng
- Đồ thị bánh xe
- Đồ thị lưỡng phân (đồ thị hai phía)

Đồ thị đầy đủ

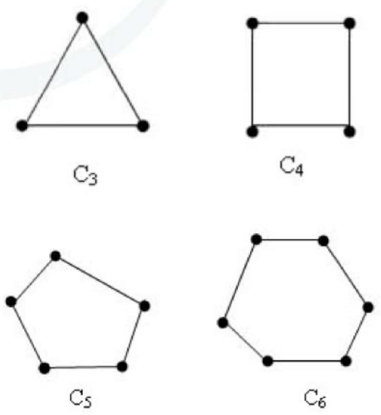
- Kí hiệu: K_n
- Đặc điểm: là đơn đồ thị vô hướng, n đỉnh, 2 đỉnh bất kì đều kề nhau.
- Tính chất:
  - Số cạnh $\frac{n(n-1)}{2}$
  - Bậc của đỉnh

  $$\deg(v) = n-1 \quad \forall v$$



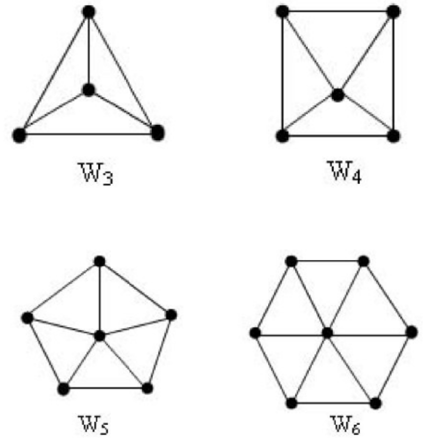
Đồ thị vòng

- Kí hiệu: C_n
- Đặc điểm
  - Đồ thị vô hướng n đỉnh
  - Các đỉnh nối với nhau theo vòng tròn
- Tính chất
  - Các đỉnh đều có bậc 2
  - Số cạnh: n



Đồ thị bánh xe

- Kí hiệu: W_n
- Đặc điểm
  - Đồ thị vô hướng
  - Hai đỉnh bất kỳ luôn kề nhau
- Tính chất
  - n+1 đỉnh
  - n đỉnh bậc 3
  - 1 đỉnh bậc n
  - Số cạnh: 2n



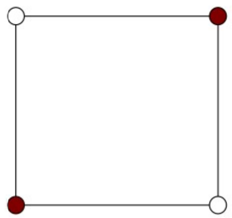
Đồ thị lưỡng phân

- Cho G=(V,E)

  $V = V_1 \cup V_2$

  $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

  Mỗi cạnh có 1 đỉnh $\in V_1$ và đỉnh kia $\in V_2$.
- **<u>Định lý</u>:** Đơn đồ thị là đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.



Giải thuật xác định đồ thị lưỡng phân

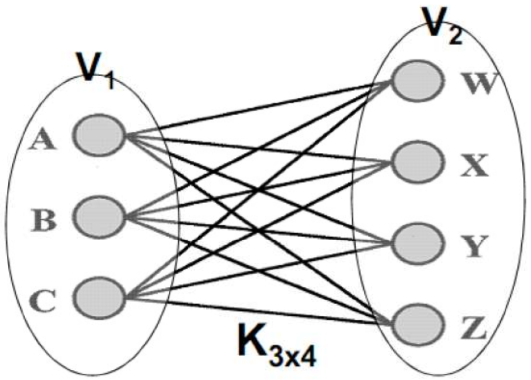
- Đặt X= {**v**}   với **v** là đỉnh bất kỳ của đồ thị
- Y= {**tập các đỉnh kề** của các đỉnh trong **X**}
- T= {**tập các đỉnh kề** của các đỉnh trong **Y**}

➯ Nếu **$T \cap Y \neq \varnothing$** → không là đồ thị lưỡng phân

➯ Ngược lại **$X = X \cup T$**, tiếp tục giải thuật

Đồ thị lưỡng phân đủ

- Kí hiệu: $K_{m,n}$
- Đặc điểm
  - Đồ thị lưỡng phân
  - Mọi cặp đỉnh giữa hai tập V1 và V2 đều nối với nhau.
- Tính chất
  - m + n đỉnh
  - m x n cạnh.
  - m đỉnh bậc n
  - n đỉnh bậc m



Đẳng cấu đồ thị

- Dùng để chỉ các đồ thị có cùng cấu trúc
- Định nghĩa
  - Cho 2 đồ thị G1=(V1,E1) và G2=(V2,E2) là 2 đồ thị cùng có hướng hoặc cùng vô hướng. Ta nói G1 ≅ G2 nếu tồn tại song ánh

    f: V1 → V2 sao cho:

    uv là cạnh của G1 ⇔ f(u)f(v) là cạnh của G2

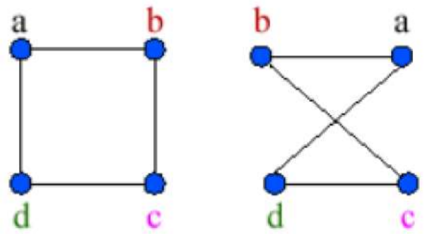
    uv là cung của G1 ⇔ f(u)f(v) là cung của G2

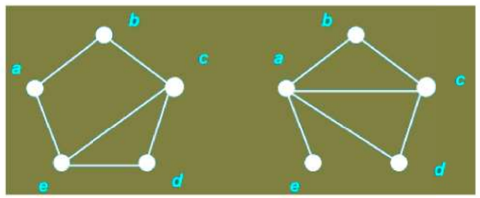
Đẳng cấu đồ thị (tt)

Chú ý:

- Nếu G1 ≅ G2 thì chúng có:
  - Cùng số đỉnh
  - Cùng số cạnh
  - Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn
  - deg v = deg f(v)

VD: Đẳng cấu đồ thị

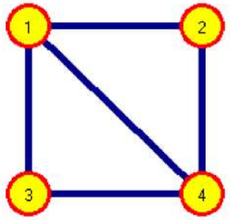




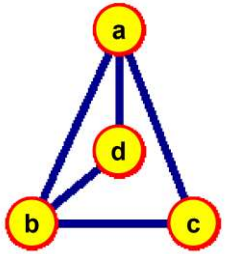
VD: Đẳng cấu đồ thị (tt)

- Xét xem 2 đồ thị G1, G2 có đẳng cấu không?

Cùng số đỉnh
và SS tương cặp
cạnh qua đỉnh



G1



G2

Đồ thị con, đồ thị bộ phận

- ĐN1: Cho G=(V,E) và G'=(V',E') là hai đồ thị cùng có hướng hoặc cùng vô hướng. Nếu $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ thì G' là đồ thị con của G. Kí hiệu $G' \leq G$.
- ĐN2: Cho $G' \leq G$, nếu V'=V thì G' được gọi là đồ thị bộ phận của G.
- VD: Mạng giao thông đường bộ cả nước
  - Mạng xe buýt cả nước: đồ thị bộ phận
  - Mạng giao thông kv phía nam: đồ thị con

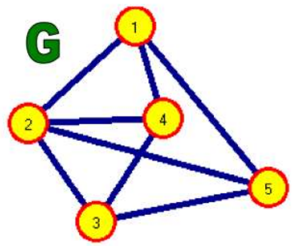
Đồ thị con sinh bởi tập đỉnh

- Cho G=(V,E) và $A \subseteq V$, đồ thị con sinh bởi tập A, ký hiệu là $\langle A \rangle_G$ được định nghĩa là $\langle A \rangle_G =(A,U)$ trong đó:
  - Tập cạnh $U \subseteq E$
  - Gọi $e=(i,j) \in E$ là 1 cạnh của G, nếu $i,j \in A$ thì $e \in A$

VD:

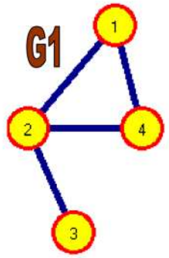
- Cho biết đâu là đồ thị con; đồ thị bộ phận; đồ thị con sinh bởi tập đỉnh {1,3,4,5} của G?

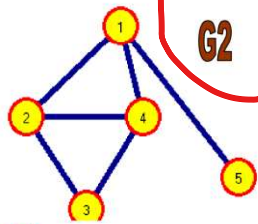
G



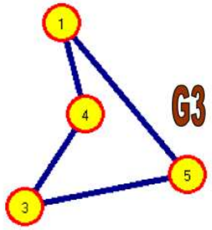
1

G1





G2



G3

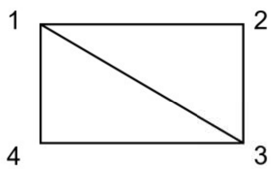
Biểu diễn đồ thị trên máy tính

- Ma trận kề, ma trận trọng số
- Ma trận đỉnh – cạnh, đỉnh – cung
- Danh sách cạnh – cung
- Danh sách kề

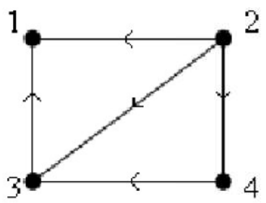
Ma trận kề

- Cho đơn đồ thị G=(V,E). Lập ma trận $A=(a_{ij})_n$, với:
  - a_{ij} = 1 nếu có cạnh nối từ i → j
  - a_{ij} = 0 nếu ngược lại
- Đa đồ thị:
  - a[i,j] = số cạnh (cung) nối hai đỉnh i, j.

Ma trận kề (tt)

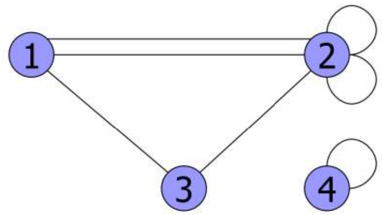


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

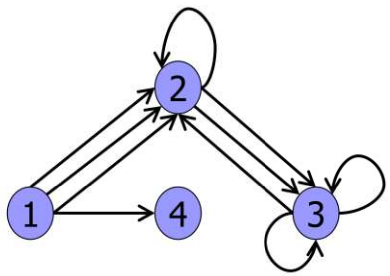


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận kề (tt)



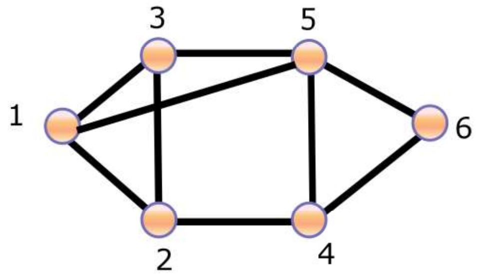
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

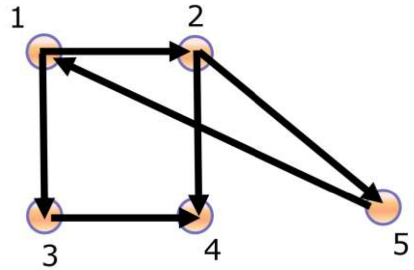
Ma trận kề (tt)

- **Tính chất của ma trận kề của đồ thị vô hướng**:
  - Đối xứng
  - Tổng các phần tử trên dòng i (cột j) bằng bậc của đỉnh i (đỉnh j)



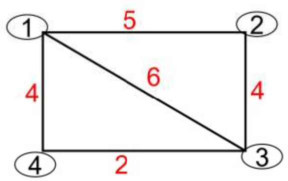
Ma trận kề (tt)

- **Tính chất của ma trận kề của đồ thị có hướng:**
  - Không đối xứng
  - Tổng các phần tử trên dòng i bằng bán bậc ra của đỉnh i và tổng các phần tử trên cột j bằng bán bậc vào của đỉnh j.



Ma trận trọng số

- Lập ma trận trọng số $C=(c_{ij})_n$, với:
  - $c_{ij} = c(i,j)$ nếu $(i,j) \in E$
  - $c_{ij} = \theta$ nếu $(i,j) \notin E$
    - θ có thể được đặt bằng một trong các giá trị sau: 0, $+\infty$, $-\infty$



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

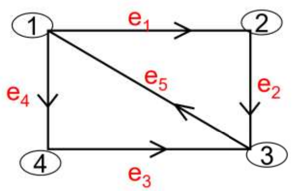
Ma trận đỉnh – cạnh, đỉnh - cung

Dòng ↔ đỉnh

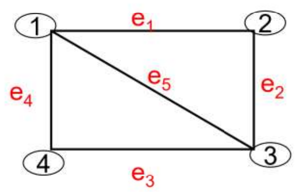
Cột ↔ cạnh (cung)

- Xét G=(V, E) có hướng. Ma trận $A=(a_{ij})$ được định nghĩa như sau:
  - Với cung $e(i,j) \in E$ thì $a_{ie}=1$, $a_{je}= -1$
  - Ngược lại =0
- Xét G=(V, E) vô hướng. Ma trận $A=(a_{ij})$ được định nghĩa như sau:
  - Với cạnh $e(i,j) \in E$ thì $a_{ie}= a_{je}= 1$,
  - Ngược lại =0

Ma trận đỉnh – cạnh, đỉnh – cung (tt)



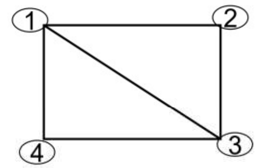
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

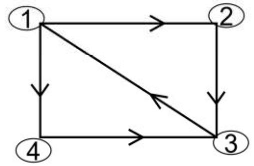


$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Danh sách cạnh - cung

- Mỗi cạnh (cung) e(x,y) tương ứng với 2 biến : dau[e], cuoi[e]



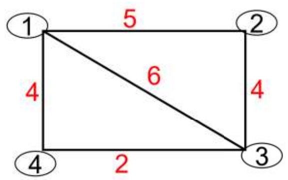


Dau	Cuoi
1	2
1	4
2	3
3	1
4	3

Dau	Cuoi
1	2
1	3
1	4
2	3
3	4

Danh sách cạnh – cung (tt)

- Nếu đồ thị có trọng số

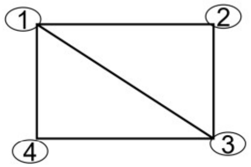


Dau	Cuoi	Trong so
1	2	5
1	3	6
1	4	4
2	3	4
3	4	2

Danh sách kề

- Với mỗi đỉnh v của đồ thị, ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó.
- Để lưu trữ danh sách các đỉnh kề của v, ta có thể dùng mảng hoặc dslk.

Danh sách kề (tt)



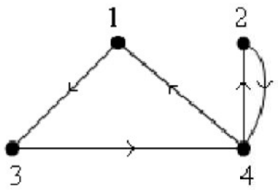
ke = {2, 3, 4, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 3}

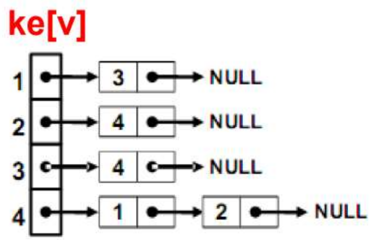
tro = {1, 4, 6, 9, 11}

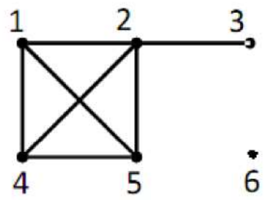
Vị trí bắt đầu của ds các đỉnh kề của i

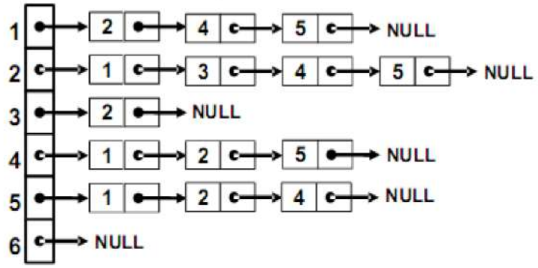
ke[tro[i]] → ke[tro[i+1]-1] ~ ds các đỉnh kề với i

Danh sách kề (tt)









Cài đặt danh sách kề

//Định nghĩa 1 nút

```
struct node
    {int i;
     struct node * p;
    } nut;
```

// Số đỉnh tối đa

```
const max=100;
```

// Mảng lưu các con trỏ của các đỉnh đầu

```
nut * ke[max];
```


Câu hỏi???