CHƯƠNG 6
ĐỒ THỊ EULER VÀ HAMILTON

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu hai dạng đồ thị đặc biệt là đồ thị Euler và đồ thị Hamilton. Dưới đây, nếu không có giải thích bổ sung, thuật ngữ đồ thị được dùng để chỉ chung đa đồ thị vô hướng và có hướng, và thuật ngữ cạnh sẽ dùng để chỉ chung cạnh của đồ thị vô hướng cũng như cung của đồ thị có hướng

6.1. ĐỒ THỊ EULER

Năm 1736 có thể được xem là năm khai sinh cho ngành lý thuyết đồ thị, với việc công bố lời giải cho "bài toán về các cây cầu ở Konigsberg" của nhà toán học và nhà vật lý học lỗi lạc người Thụy Sĩ - Leonhard Euler (1707-1783). Lời giải của ông cho bài toán bảy cây cầu ở Königsberg được coi là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

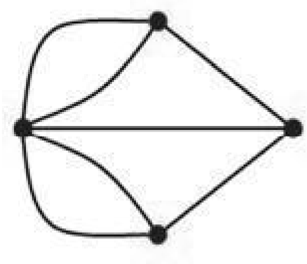
Thành phố Konigsberg thuộc nước Đức (nay gọi là Kaliningrad thuộc Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel, các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ 18, người ta xây bảy chiếc cầu nối các vùng này với nhau.

Hình 6.1. Bài toán 7 cây cầu

Người dân trong thành phố từng thắc mắc: "Có thể nào đi dạo qua tất cả bảy cầu, mỗi cây cầu chỉ đi một lần và trở về chỗ ban đầu hay không?".

Euler đã phát biểu bài toán bằng các thuật ngữ của lý thuyết đồ thị. Ông loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và các cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm, gọi là đỉnh hoặc nút, và thay mỗi cây cầu bằng một đoạn nối, gọi là cạnh. Cấu trúc toán học thu được được gọi là một đồ thị.

Vậy ta có sơ đồ của thành phố Konigsberg là một đa đồ thị như hình 6.2.



Hình 6.2. Đồ thị biểu diễn bài toán 7 cây cầu

Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu chỉ qua một lần có thể được phát biểu lại như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị G chứa tất cả các cạnh của đồ thị?

6.1.1. Định nghĩa

Chu trình đơn trong đồ thị G đi qua mỗi cạnh của nó một lần được gọi là chu trình Euler. Đường đi đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần được gọi là đường đi Euler.

Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler, và gọi là đồ thị nửa Euler nếu nó có đường đi Euler.

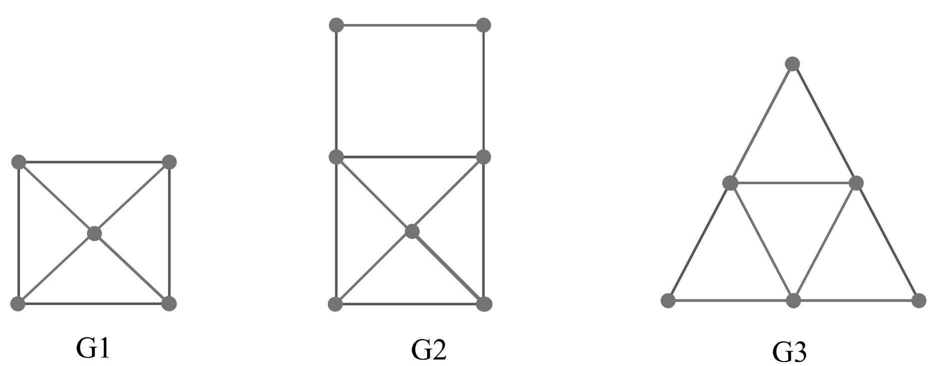
Rõ ràng mọi đồ thị Euler luôn là nửa Euler, nhưng điều ngược lại không luôn luôn đúng.

Ví dụ 1:

Đồ thị G1 không có chu trình Euler và không có đường đi Euler.

Đồ thị G2 có đường đi Euler

Đồ thị G3 có chu trình Euler

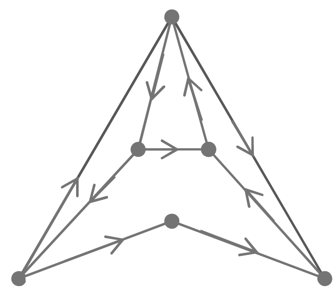


Hình 6.3. Đồ thị G1, G2 và G3

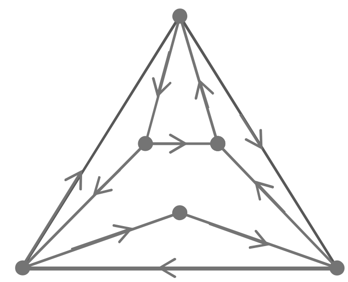
Ví dụ 2:

Đồ thị G4 không có chu trình Euler và không có đường đi Euler.

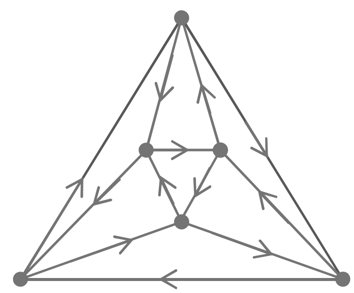
Đồ thị G5 có đường đi Euler. Đồ thị G6 có chu trình Euler



G4



G5



G6

Hình 6.4. Đồ thị G4, G5 và G6

6.1.2. Các định lý, bổ đề và hệ quả

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Euler đã được chính Euler tìm ra vào năm 1736 khi ông giải quyết bài toán hóc búa nổi tiếng thời đó về bảy cây cầu ở Konigsberg.

- **Định lý 1**: Đồ thị vô hướng liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Chứng minh:

- *Điều kiện cần*: Một đồ thị liên thông có chu trình Euler thì mỗi bậc của nó đều có bậc chẵn.

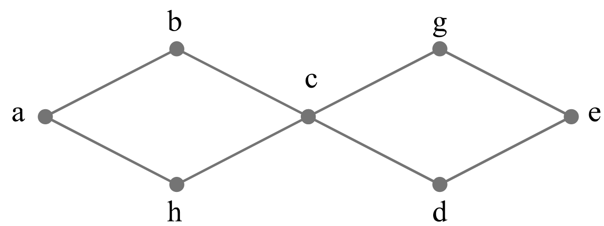
Giả sử chu trình Euler của đồ thị bắt đầu từ đỉnh v_1 và tiếp theo là cạnh kề với v_1, tức là cạnh (v_1,v_2). Cạnh (v_1,v_2) góp 1 vào $deg(v_1)$. Mỗi lần chu trình đi qua một đỉnh v_k của đồ thị, nó tăng thêm 2 đơn vị cho $deg(v_k)$. Vì chu trình đi vào một đỉnh bằng một cạnh kề với đỉnh đó và đi ra bằng một cạnh kề khác, điều đó có nghĩa các đỉnh v_k $(k \neq 1)$ đều có bậc là một số chẵn.

Cuối cùng chu trình kết thúc ở đỉnh mà nó xuất phát v_1, vì vậy nó tăng thêm 1 vào $deg(v_1)$. Do đó $deg(v_1)$ cũng phải là một số chẵn. Vậy ta kết luận nếu đồ thị liên thông có chu trình Euler thì mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

- *Điều kiện đủ*: Một đồ thị liên thông mà các đỉnh đều có bậc chẵn thì tồn tại chu trình Euler trong đồ thị đó.

Giả sử G là một đồ thị liên thông với các đỉnh đều có bậc là một số chẵn. Ta đi xây dựng một chu trình đơn bắt đầu từ đỉnh v1 tuỳ ý của đồ thị G. Trước tiên ta chọn cạnh (v_1,v_2), sau đó là (v_2, v_3),... càng chọn được nhiều càng tốt. Đến một lúc nào đó phải kết thúc tại v_1 với cạnh (v_k, v_1) vì đồ thị là hữu hạn và các đỉnh đều có bậc là một số chẵn. Điều này là chắc chắn xảy ra vì mỗi lần đường đi qua một đỉnh bậc chẵn nó chỉ đi vào bằng một cạnh nên ít nhất vẫn còn một cạnh để đi ra.

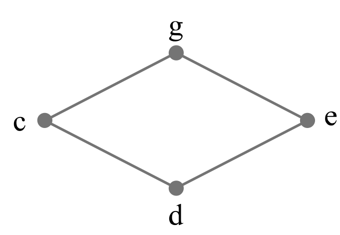
Ví dụ trong đồ thị G cho bởi hình 6.5 ta bắt đầu ở đỉnh a và chọn tiếp các cạnh (a, b), (b, c), (c, h) và (h, a).



Hình 6.5. Đồ thị G ban đầu

Chu trình mà ta xây dựng như trên có thể dùng hết tất cả các cạnh hoặc không. Nếu tất cả các cạnh đã được dùng hết thì chu trình của ta là chu trình Euler. Trường hợp ngược lại, ta gọi H là đồ thị con nhận được từ đồ thị G bằng cách xoá các cạnh đã dùng và các đỉnh không kề với các đỉnh còn lại.

Chẳng hạn ở đồ thị G hình 6.5, ta xoá đi chu trình đơn a, b, c, h, a khỏi đồ thị và nhận được đồ thị con H như hình 6.6. Vì G là liên thông nên H phải có ít nhất một đỉnh chung với chu trình mà ta đã xoá, gọi w là đỉnh chung đó (trong hình 6.5 đỉnh chung là c). Mỗi đỉnh của H cũng có bậc chẵn bởi vì mỗi đỉnh nếu có xoá cạnh thì đều xoá từng cặp cạnh kề với nó.



Hình 6.6. Đồ thị con H sau khi xoá một chu trình đơn

Bắt đầu từ đỉnh w ta lại đi xây dựng đường đi đơn trong H như đã làm đối với G bằng cách chọn được càng nhiều cạnh càng tốt. Đường đi phải kết thúc tại w. chẳng hạn trong ví dụ của ta là c, d, e, g, c là một chu trình mới trong H. Tiếp theo ta tạo một chu trình mới trong G bằng cách ghép chu trình trong H với chu trình ban đầu trong G, điều này làm được vì hai chu trình này có đỉnh chung là w.

Quá trình cứ tiếp tục như vậy cho tới khi tất cả các cạnh của đồ thị đã được sử dụng (quá trình này đến một lúc nào đó phải kết thúc vì đồ thị là hữu hạn) Như vậy ta đã xây dựng được một chu trình Euler trong đồ thị.

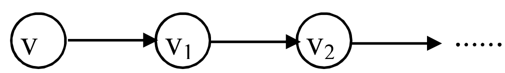
Trong ví dụ của ta chu trình Euler tìm được là a, b, c, d, e, g, c, h, a.

Điều này chứng tỏ nếu đồ thị liên thông mà các đỉnh đều có bậc chẵn thì đồ thị có chu trình Euler. (Định lý được chứng minh).

- **Bổ đề 1**: Nếu bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G không nhỏ hơn 2 thì G chứa chu trình

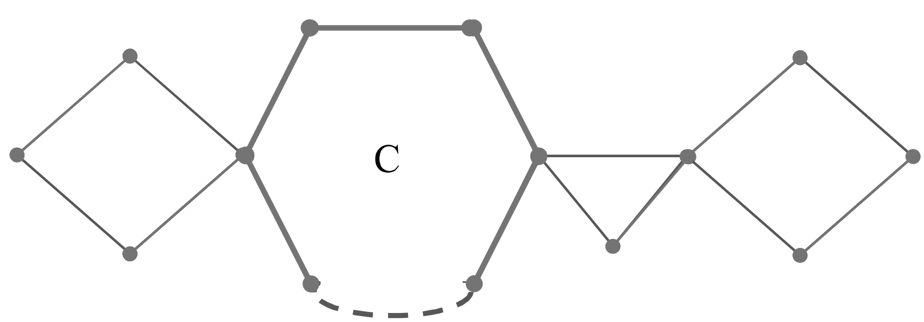
Chứng minh:

Nếu G có cạnh lặp hoặc có khuyên thì khẳng định của bổ đề là hiển nhiên. Vì vậy giả sử G là một đơn đồ thị. Gọi v là một đỉnh nào đó của G. Ta sẽ xây dựng theo quy nạp đường đi



trong đó v_1 là đỉnh kề với v, còn với $i \geq 1$, chọn v_{i+1} là đỉnh kề với v_i và $v_{i+1} \neq v_{i-1}$ (có thể chọn như vậy vì $deg(v_i) \geq 2$), $v_0 = v$. Do tập đỉnh của G là hữu hạn, nên sau một số hữu hạn bước ta phải quay lại một đỉnh đã xuất hiện trước đó. Gọi k là số nguyên dương đầu tiên để $v_k=v_i$ $(0 \leq i<k)$. Khi đó, đường đi $v_i, v_{i+1}, ..., v_{k-1}, v_k$ $(= v_i)$ là một chu trình đơn cần tìm.

Quy nạp theo số cạnh của G. Do G liên thông và bậc của mọi đỉnh là chẵn nên mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn 2. Từ đó theo Bổ đề 1, G phải chứa một chu trình đơn C. Nếu C đi qua tất cả các cạnh của G thì nó chính là chu trình Euler. Giả sử C không đi qua tất cả các cạnh của G. Khi đó loại bỏ khỏi G các cạnh thuộc C, ta thu được một đồ thị mới H (không nhất thiết là liên thông). Số cạnh trong H nhỏ hơn trong G và rõ ràng mỗi đỉnh của H vẫn có bậc là chẵn. Theo giả thiết quy nạp, trong mỗi thành phần liên thông của H đều tìm được chu trình Euler. Do G liên thông nên mỗi thành phần trong H có ít nhất một đỉnh chung với chu trình C.



Hình 6.7. Chứng minh bổ đề 1

Vì vậy, ta có thể xây dựng chu trình Euler trong G như sau: Bắt đầu từ một đỉnh nào đó của chu trình C, đi theo các cạnh của C chừng nào chưa gặp phải đỉnh không cô lập của H. Nếu gặp phải đỉnh như vậy thì ta đi theo chu trình Euler của thành phần liên thông của H chứa đỉnh đó. Sau đó lại tiếp tục đi theo cạnh của C cho đến khi gặp phải đỉnh không cô lập của H thì lại theo chu trình Euler của thành phần liên thông tương ứng trong H, ... Quá trình sẽ kết thúc khi ta trở về đỉnh xuất phát, tức là thu được chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.

- **Hệ quả 1:** Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi có không quá hai đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh:

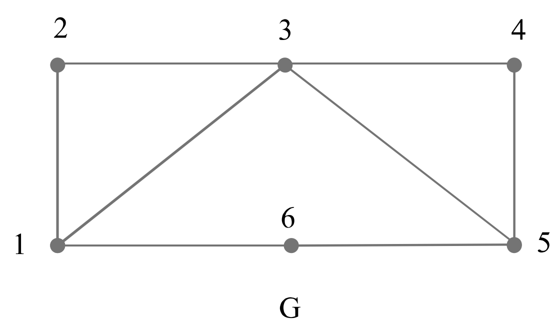
Nếu G là nửa Euler thì tồn tại một đường đi Euler trong G từ đỉnh u đến đỉnh v. Gọi G’ là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào cạnh (u,v). Khi đó G’ là đồ thị Euler nên mọi đỉnh trong G’ đều có bậc chẵn (kể cả u và v). Vì vậy u và v là hai đỉnh duy nhất trong G có bậc lẻ.

Nếu có đúng hai đỉnh bậc lẻ là u và v thì gọi G’ là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào cạnh (u,v). Khi đó mọi đỉnh của G’ đều có bậc chẵn hay G’ là đồ thị Euler. Bỏ cạnh (u,v) đã thêm vào ra khỏi chu trình Euler trong G’ ta có được đường đi Euler từ u đến v trong G hay G là nửa Euler.

Nếu G không có đỉnh bậc lẻ thì theo định lý 1 nó là đồ thị Euler, do đó nó cũng là đồ thị nửa Euler.

Ví dụ:

Cho đồ thị G như hình 6.8. Tìm đường đi Euler trong đồ thị đã cho.



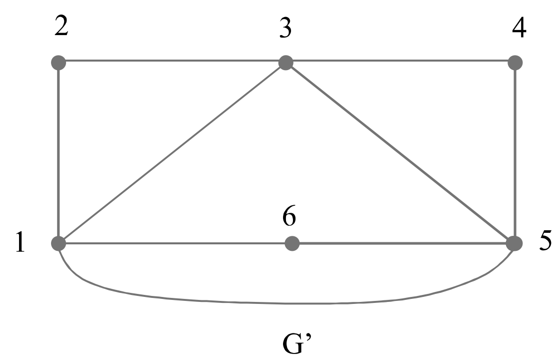
Hình 6.8. Ví dụ tìm đường đi Euler

Giải:

Bảng 6.1. Tính bậc các đỉnh của G

v	1	2	3	4	5	6
deg(v)	3	2	4	2	3	2

Đồ thị G liên thông và có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là 1 và 5, bổ sung thêm cạnh mới (1, 5) vào đồ thị G. Ta thu được đồ thị G’=(V’,E’) như hình 6.9.



Hình 6.9. Đồ thị sau khi thêm 1 cạnh từ G

Đồ thị G’ là đồ thị liên thông có các đỉnh đều bậc chẵn, do đó theo định lý 1 thì tồn tại chu trình Euler: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 1, 6, 5, 1

Bỏ đi cạnh (1, 5) khỏi đồ thị G’, ta được đường đi Euler trong đồ thị G là: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 1, 6, 5.

- **Định lý 2:** Đồ thị có hướng liên thông mạnh G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bán bậc vào bằng bán bậc ra.

Chứng minh:

Chứng minh tương tự định lý 1.

- **Bổ đề 2:** Nếu bán bậc vào và bán bậc ra của mỗi đỉnh của đồ thị có hướng G không nhỏ hơn 1 thì G chứa chu trình đơn.

Chứng minh:

Chứng minh tương tự bổ đề 1.

- **Hệ quả 2:** Đồ thị có hướng liên thông yếu G là nửa Euler khi và chỉ khi tồn tại hai đỉnh x và y sao cho: $deg^-(x) = deg^+(x)+1$, $deg^+(y) = deg^-(y)+1$, $deg^+(v) = deg^-(v)$, $\forall v \in V$, $v \neq x$, $v \neq y$.

Chứng minh:

Chứng minh tương tự hệ quả 1.

❖ **Chú ý:** Giả sử G là đồ thị Euler, ta có thể tìm chu trình Euler bằng tay như sau:

Xuất phát từ một đỉnh u bất kỳ của G và tuân theo hai quy tắc:

- Mỗi khi đi qua một cạnh thì xoá nó đi và xoá đỉnh cô lập (nếu có).

- Không bao giờ đi qua một cầu, trừ khi không còn cách đi nào khác.

Chứng minh:

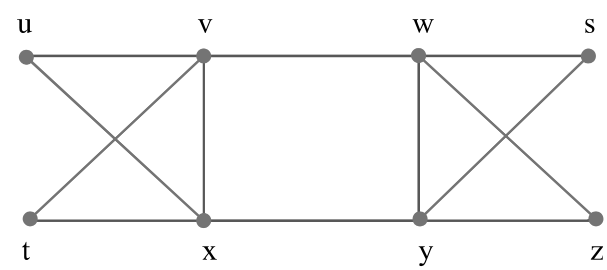
Trước tiên ta chỉ ra rằng thuật toán trên có thể thực hiện ở mỗi bước. Giả sử ta đi đến một đỉnh v nào đó, khi đó nếu v ≠ u thì đồ thị con còn lại H là liên thông và chứa đúng hai đỉnh bậc lẻ là v và u.

Theo hệ quả, trong H có đường đi Euler P từ v tới u. Do việc xoá bỏ cạnh đầu tiên của đường đi P không làm mất tính liên thông của H, từ đó suy ra thủ tục có thể thực hiện ở mỗi bước. Nếu v = u thì lập luận ở trên sẽ vẫn đúng chừng nào vẫn còn cạnh kề với u.

Như vậy chỉ còn phải chỉ ra thuật toán trên dẫn đến đường đi Euler. Thực vậy trong G không thể còn cạnh chưa đi qua khi mà ta sử dụng cạnh cuối cùng kề với u (trong trường hợp ngược lại, việc loại bỏ một cạnh nào đó kề với một trong số những cạnh còn lại chưa đi qua sẽ dẫn đến một đồ thị không liên thông, và điều đó là mâu thuẫn với giả thiết.

Ví dụ:

Tìm một chu trình Euler trong đồ thị cho ở hình 6.10



Hình 6.10. Đồ thị minh họa tìm chu trình Euler bằng tay

Giải:

Xuất phát từ u, ta có thể đi theo cạnh (u,v) hoặc (u,x), giả sử là (u,v) (xoá (u,v)).

Từ v có thể đi qua một trong các cạnh (v,w), (v,x), (v,t), giả sử (v,w) (xoá (v,w)).

Tiếp tục, có thể đi theo một trong các cạnh (w,s), (w,y), (w,z), giả sử là (w,s) (xoá (w,s)).

Đi theo cạnh (s,y) (xoá (s,y) và s). Vì (y,x) là cầu nên có thể đi theo một trong hai cạnh (y,w), (y,z), giả sử (y,w) (xoá (y,w)).

Đi theo (w,z) (xoá (w,z) và w) và theo (z,y) (xoá (z,y) và z).

Tiếp tục đi theo cạnh (y,x) (xoá (y,x) và y).

Vì (x,u) là cầu nên đi theo cạnh (x,v) hoặc (x,t), giả sử (x,v) (xoá (x,v)).

Tiếp tục đi theo cạnh (v,t) (xoá (v,t) và v).

Đi theo cạnh (t,x) (xoá cạnh (t,x) và t).

Cuối cùng đi theo cạnh (x,u) (xoá (x,u), x và u).

Vậy, chu trình Euler tìm được là: u v w s y w z y x v t x u

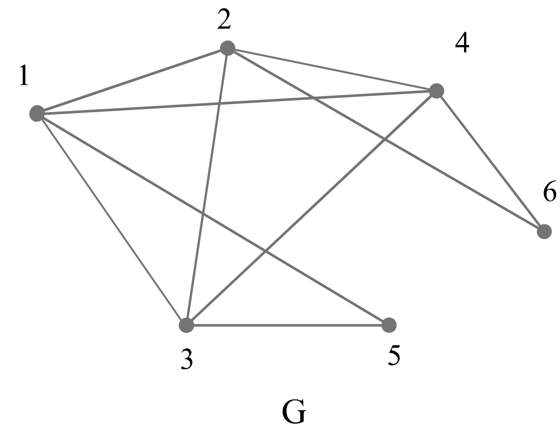
6.1.3. Thuật toán tìm chu trình Euler

- ***Mô tả giải thuật***

```
void Euler()
{
    // Khởi tạo giá trị
    STACK=∅ ;
    CE=∅ ;
    // Chon u la mot dinh nao do cua do thi
    STACK⇐ u;
    while ( STACK != ∅ )
    {
        x=top(STACK);
        if (Ke(x) != ∅ )
        {
            y=dinh dau tien trong danh sach Ke(x);
            STACK⇐ y;
            // Loại bỏ cạnh (x,y) ra khỏi đồ thị
            Ke(x)=Ke(x)\{ y} ;
            Ke(y)=Ke(y)\{ x} ;
        }
        else
        {
            x⇐ STACK;
            CE⇐ x;
        }
    }
}
```

Ví dụ:

Đồ thị G ở hình 6.11 có phải là đồ thị Euler hay không? Tìm chu trình Euler của đồ thị nếu có.



Hình 6.11. Đồ thị minh họa thuật toán tìm chu trình Euler

Giải:

Bảng 6.2. Bảng tính bậc của các đỉnh

v	1	2	3	4	5	6
deg(v)	4	4	4	4	2	2

Vì tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn nên đồ thị G đã cho ở hình 6.11 là đồ thị Euler, do đó tồn tại chu trình Euler.

Tìm chu trình Euler theo thuật toán:

- Bắt đầu từ đỉnh bất kỳ của đồ thị, ở đây ta chọn đỉnh 1 đưa vào stack, tiếp theo tìm đỉnh kề của 1 để đưa vào stack đồng thời xóa cạnh kề với đỉnh 1 vừa đi qua.

- Sau đó, xét đỉnh x trên đỉnh stack, nếu còn đỉnh y kề với x thì đưa đỉnh y vào stack và xóa cạnh (x, y), nhưng nếu x là đỉnh cô lập thì lấy ra khỏi stack và đưa vào kết quả chu trình, tiếp tục như vậy cho đến khi nào stack rỗng.

Thuật toán được minh họa từng bước như sau:

Chọn đỉnh đầu tiên là đỉnh 1 và đưa 1 vào stack

Bảng 6.3. Bước 1

1

Sau đó tìm đỉnh kề với 1, ta gặp đỉnh 2, đưa 2 vào stack và xóa cạnh (1,2).

Bảng 6.4. Bước 2

2
1

Xét đỉnh 2, tìm được đỉnh kề là 3, đưa đỉnh 3 vào stack và xóa cạnh (2,3).

Bảng 6.5. Bước 3

3
2
1

Xét đỉnh 3, tìm được đỉnh kề là 1, đưa đỉnh 1 vào stack và xóa cạnh (3,1).

Bảng 6.6. Bước 4

1
3
2
1

Xét đỉnh 1, tìm được đỉnh kề là 4, đưa đỉnh 4 vào stack và xóa cạnh (1,4).

Bảng 6.7. Bước 5

4
1
3
2
1

Xét đỉnh 4, tìm được đỉnh kề là 2, đưa đỉnh 2 vào stack và xóa cạnh (4,2).

Bảng 6.8. Bước 6

2
4
1
3
2
1

Thuật toán tiếp tục như vậy cho đến khi xóa hết các cạnh của đồ thị, khi đó trạng thái của stack là:

Bảng 6.9. Bước thứ n

1
5
3
4
6
2
4
1
3
2
1

Lúc này không còn đỉnh kề nào tìm thấy, các đỉnh đều ở trạng thái cô lập. Lấy các đỉnh lần lượt ra khỏi stack và đưa vào kết quả chu trình.

Vậy: Chu trình Euler tìm được là: 1, 5, 3, 4, 6, 2, 4, 1, 3, 2, 1.

- ***Chương trình minh họa thuật toán tìm chu trình Euler***

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#define MAX 50
#define TRUE 1
#define FALSE 0
int A[MAX][MAX];
int n;
void DocFile(char *dd)
{
      FILE *fp=fopen(dd,"rt");
      if (fp==NULL)
      {
            printf("File Error !!!");
            getch();
            exit(0);
      }
      fscanf (fp,"%d",&n);
      for (int i=1; i<=n; i++)
```

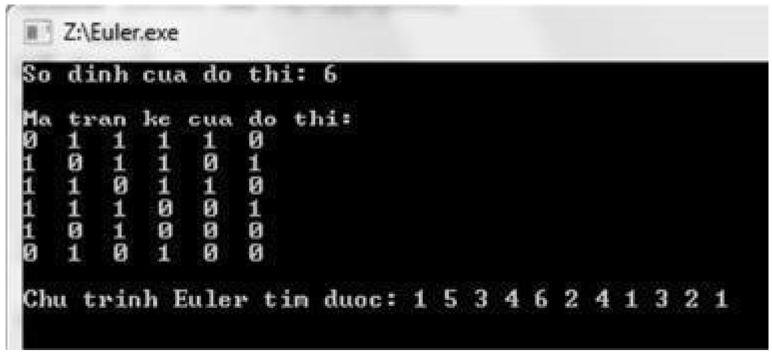
```
            for (int j=1; j<=n; j++)
                  fscanf (fp,"%d",&A[i][j]);
      fclose(fp);
      printf("So dinh cua do thi: %d\n\n",n);
      printf("Ma tran ke cua do thi:\n");
      for (int i=1; i<=n; i++)
      {
            for(int j=1; j<=n; j++)
                  printf("%d  ",A[i][j]);
            printf("\n");
      }
}
// Kiểm tra có là đồ thị euler?
int Kiemtra()
{
      int s, d;
      d=0;
      for(int i=1; i<=n; i++)
      {
            s=0;
            for(int j=1; j<=n; j++)
                   s += A[i][j];
             if (s%2==1)
                  return 0;
      }
      return 1;
 }
void TimChuTrinhEuler()
{
      int v, x, top, dCE;
      int stack[MAX];
      int CE[MAX];
      top=1;
      stack[top]=u;
      dCE=0;
      do
      {
            v = stack[top];
```

```
            for (x=1; x<=n; x++)
                  if(A[v][x]==1)
                        break;
            // Lưu vào chu trình
            if (x>n)
            {
                  dCE++;
                  CE[dCE]=v;
                  top--;
            }
             else
            {
                  top++;
                  stack[top]=x;
                  A[v][x]=0;
                  A[x][v]=0;
            }
       } while (top != 0);
       printf("\nChu trinh Euler tim duoc: ");
       for (x=1; x<=dCE; x++)
             printf("%d ",CE[x]);
}
int main()
{
       DocFile("Z:\\dulieu.txt");
       if (Kiemtra())
            TimChuTrinhEuler();
      else
            printf("\n Khong co chu trinh Euler");
      getch();
      return 1;
}
```

Ví dụ: Nội dung file *dulieu.txt* như sau:

```
6
0 1 1 1 1 0
1 0 1 1 0 1
1 1 0 1 1 0
1 1 1 0 0 1
1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0
```

Kết quả của chương trình là:



Hình 6.12. Kết quả chương trình

6.1.4. Bài toán người phát thư Trung Hoa

Một nhân viên đi từ Sở Bưu Điện, qua một số đường phố để phát thư, rồi quay về Sở. Người ấy phải đi qua các đường theo trình tự nào để đường đi là ngắn nhất?

Bài toán được nhà toán học Trung Hoa Guan nêu lên đầu tiên (1960), vì vậy thường được gọi là "bài toán người phát thư Trung Hoa". Ta xét bài toán ở một dạng đơn giản như sau.

Cho đồ thị liên thông G. Một chu trình qua mọi cạnh của G gọi là một hành trình trong G. Trong các hành trình đó, hãy tìm hành trình ngắn nhất, tức là qua ít cạnh nhất.

Rõ ràng rằng nếu G là đồ thị Euler (mọi đỉnh đều có bậc chẵn) thì chu trình Euler trong G (qua mỗi cạnh của G đúng một lần) là hành trình ngắn nhất cần tìm.

Chỉ còn phải xét trường hợp G có một số đỉnh bậc lẻ (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn). Khi đó, mọi hành trình trong G phải đi qua ít nhất hai lần một số cạnh nào đó.

Dễ thấy rằng một hành trình qua một cạnh (u,v) nào đó quá hai lần thì không phải là hành trình ngắn nhất trong G. Vì vậy, ta chỉ cần xét những hành trình T đi qua hai lần một số cạnh nào đó của G.

Ta quy ước xem mỗi hành trình T trong G là một hành trình trong đồ thị Euler G_T, có được từ G bằng cách vẽ thêm một cạnh song song đối với những cạnh mà T đi qua hai lần. Bài toán đặt ra được đưa về bài toán sau:

Trong các đồ thị Euler G_T, tìm đồ thị có số cạnh ít nhất (khi đó chu trình Euler trong đồ thị này là hành trình ngắn nhất).

Để giải bài toán trên, cần tìm hiểu thêm về định lý **Gooodman và Hedetniemi.**

> ✎ **Định lý:** Nếu G là một đồ thị liên thông có q cạnh thì hành trình ngắn nhất trong G có chiều dài q + m(G). Trong đó m(G) là số cạnh mà hành trình đi qua hai lần và được xác định như sau:

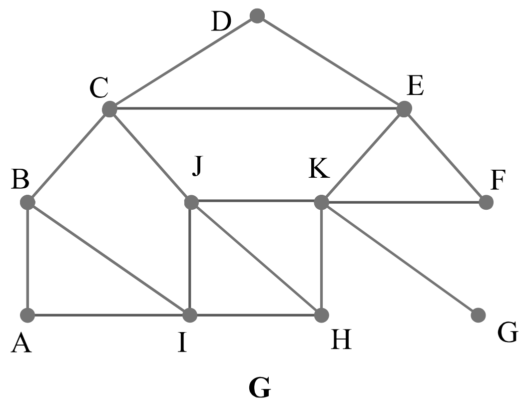
- Gọi $V_0(G)$ là tập hợp các đỉnh bậc lẻ (2k đỉnh) của G. Ta phân 2k phần tử của G thành k cặp, mỗi tập hợp k cặp gọi là một phân hoạch cặp của $V_0(G)$.

- Ta gọi độ dài đường đi ngắn nhất từ u đến v là khoảng cách d(u,v). Đối với mọi phân hoạch cặp P_i, ta tính khoảng cách giữa hai đỉnh trong từng cặp, rồi tính tổng $d(P_i)$.

- Số m(G) bằng cực tiểu của các $d(P_i)$: $m(G)=\min d(P_i)$.

Ví dụ:

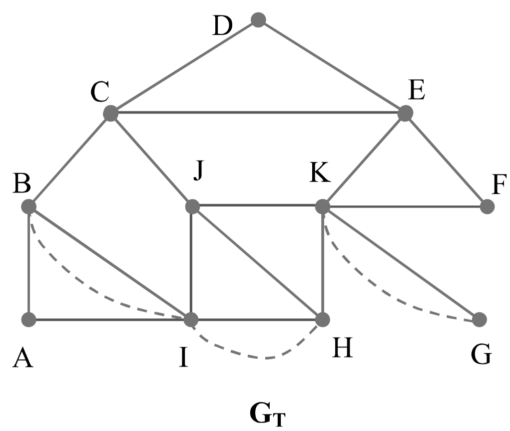
Bài toán người phát thư Trung Hoa được như đồ thị G ở hình 6.13:



Hình 6.13. Đồ thị G minh họa bài toán người phát thư Trung Hoa

Giải:

Lập đồ thị G_T như hình 6.14



Hình 6.14. Đồ thị tìm hành trình của người phát thư

Tập hợp các đỉnh bậc lẻ $V_O(G)=\{B, G, H, K\}$ và tập hợp các phân hoạch cặp là $P=\{P_1, P_2, P_3\}$, trong đó

$$P_1 = \{(B, G), (H, K)\} \rightarrow d(P_1) = d(B, G)+d(H, K) = 4+1 = 5,$$

$P_2 = \{(B, H), (G, K)\} \rightarrow d(P_2) = d(B, H)+d(G, K) = 2+1 = 3,$

$P_3 = \{(B, K), (G, H)\} \rightarrow d(P_3) = d(B, K)+d(G, H) = 3+2 = 5.$

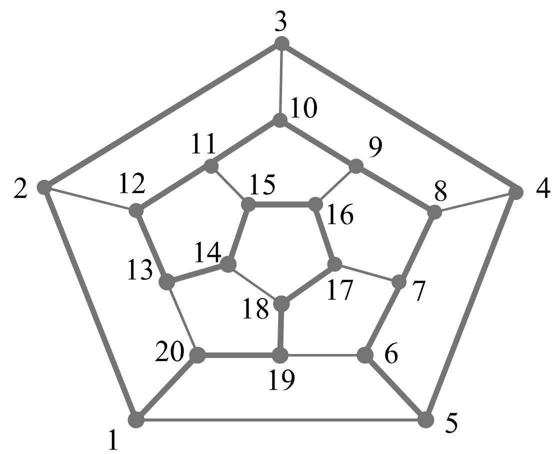
$m(G) = \min(d(P_1), d(P_2), d(P_3)) = 3.$

Do đó G_T có được từ G bằng cách thêm vào 3 cạnh: (B, I), (I, H), (G, K) và G_T là đồ thị Euler. Vậy hành trình ngắn nhất cần tìm là đi theo chu trình Euler trong G_T:

A, B, C, D, E, F, K, G, K, E, C, J, K, H, J, I, H, I, B, I, A.

6.2. ĐỒ THỊ HAMILTON

Năm 1857, nhà toán học người Ailen là Hamilton (1805-1865) đưa ra trò chơi "đi vòng quanh thế giới" như sau:



Hình 6.15. Hình thập nhị diện đều biểu diễn trong mặt phẳng

Cho một hình thập nhị diện đều (đa diện đều có 12 mặt, 20 đỉnh và 30 cạnh), mỗi đỉnh của hình mang tên một thành phố nổi tiếng, mỗi cạnh của hình (nối hai đỉnh) là đường đi lại giữa hai thành phố tương ứng. Xuất phát từ một thành phố, hãy tìm đường đi thăm tất cả các thành phố khác, mỗi thành phố chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ (Hình 6.15).

Trước Hamilton, có thể là từ thời Euler, người ta đã biết đến một câu đố hóc búa về "đường đi của con mã trên bàn cờ". Trên bàn cờ, con mã chỉ có thể đi theo đường chéo của hình chữ nhật 2 x 3 hoặc 3 x 2 ô vuông. Giả sử bàn cờ có 8 x 8 ô vuông. Hãy tìm đường đi của con mã qua được tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô chỉ đi qua một lần rồi trở lại ô xuất phát. Bài toán này được nhiều nhà toán học chú ý, đặc biệt là Euler, De Moivre, Vandermonde, ...

Hiện nay đã có nhiều lời giải và phương pháp giải cũng có rất nhiều, trong đó có quy tắc: mỗi lần bố trí con mã ta chọn vị trí mà tại vị trí này số ô chưa dùng tới do nó khống chế là ít nhất. Một phương pháp khác dựa trên tính đối xứng của hai nửa bàn cờ. Ta tìm hành trình của con mã trên một nửa bàn cờ, rồi lấy đối xứng cho nửa bàn cờ còn lại, sau đó nối hành trình của hai nửa đã tìm lại với nhau.

Trò chơi và câu đố trên dẫn tới việc khảo sát một lớp đồ thị đặc biệt, đó là đồ thị Hamilton.

6.2.1. Định nghĩa

Chu trình sơ cấp chứa tất cả các đỉnh của đồ thị được gọi là chu trình Hamilton. Đường đi sơ cấp chứa tất cả các đỉnh của đồ thị được gọi là đường đi Hamilton.

Đồ thị có chứa chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton. Đồ thị có chứa đường đi Hamilton được gọi là đồ thị nửa Hamilton.

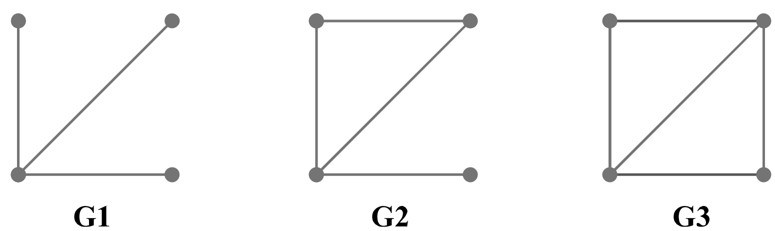
Mọi đồ thị Hamilton luôn là nửa Hamilton, nhưng điều ngược lại không luôn luôn đúng

Ví dụ:

G1 không là đồ thị Hamilton hay nửa Hamilton.

G2 là đồ thị nửa Hamilton.

G3 là đồ thị Hamilton.



Hình 6.16. Các ví dụ cho đồ thị Hamilton

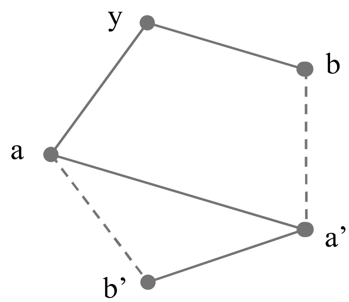
6.2.2. Các định lý và hệ quả

- **Định lý 1 (Định lí Dirac):** Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh ($n \geq 3$) và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì G là một đồ thị Hamilton.

Chứng minh:

Định lý được chứng minh bằng phản chứng. Giả sử G không có chu trình Hamilton. Ta thêm vào G một số đỉnh mới và nối mỗi đỉnh mới này với mọi đỉnh của G, ta được đồ thị G'.

Giả sử k (>0) là số tối thiểu các đỉnh cần thiết để G' chứa một chu trình Hamilton. Như vậy, G' có n+k đỉnh.



Hình 6.17. Đồ thị G’

Gọi P là chu trình Hamilton: a y b ... a trong G’, trong đó a và b là các đỉnh của G, còn y là một trong các đỉnh mới. Khi đó b không kề với a, vì nếu trái lại thì ta có thể bỏ đỉnh y và được chu trình a b ... a, mâu thuẫn với giả thiết về tính chất nhỏ nhất của k.

Ngoài ra, nếu a’ là một đỉnh kề nào đó của a (khác với y) và b’ là đỉnh nối tiếp ngay a’ trong chu trình P thì b’ không thể là đỉnh kề với b, vì nếu trái lại thì ta có thể thay P bởi chu trình a a’ ...b b’ ... a, trong đó không có y, mâu thuẫn với giả thiết về tính chất nhỏ nhất của k.

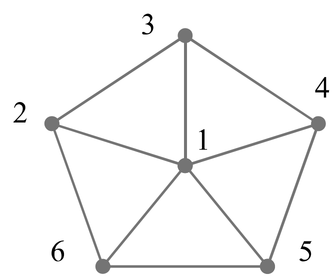
Như vậy, với mỗi đỉnh kề với a, ta có một đỉnh không kề với b, tức là số đỉnh không kề với b không thể ít hơn số đỉnh kề với a (số đỉnh kề với a không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ +k). Mặt khác, theo giả thiết số đỉnh kề với b cũng không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$+k, nên số đỉnh của G’ không ít hơn $2(\frac{n}{2}+k)=n+2k$ mâu thuẫn với giả thiết là số đỉnh của G’ bằng n+k (k>0). Định lý được chứng minh.

Ví dụ:

Xét đồ thị W_6 như hình 6.18.

Theo định lý Dirac, $\deg(v)=3\geq\frac{6}{2}$.

Vậy đồ thị có chu trình Hamilton: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1



Hình 6.18. Đồ thị W_6

- **Hệ quả 1:** Nếu G là đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$ thì G là đồ thị nửa Hamilton.

Chứng minh:

Thêm vào G một đỉnh x và nối x với mọi đỉnh của G thì ta nhận được đơn đồ thị G' có n+1 đỉnh và mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $\frac{n+1}{2}$. Do đó theo Định lý Dirac, trong G' có một chu trình Hamilton. Bỏ x ra khỏi chu trình này, ta nhận được đường đi Hamilton trong G.

- **Định lý 2 (Định lí Ore).** Cho G là đơn đồ thị n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu $deg(u) + deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau thì đồ thị G có chu trình Hamilton.

Chứng minh:

Chứng minh định lý này khá phức tạp nên không trình bày ở đây.

Ví dụ:

Đồ thị W_6 ở hình 6.18 cũng thỏa mãn định lý Ore.

Ta có $deg(u) + deg(v) \geq 6$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau, nên đồ thị W_6 có chu trình Hamilton.

- **Định lý 3**: Nếu G là một đồ thị có hướng đầy đủ thì G là đồ thị nửa Hamilton.

Chứng minh: Giả sử G=(V,E) là đồ thị có hướng đầy đủ và $\alpha=(v_1,v_2, ..., v_{k-1}, v_k)$ là đường đi sơ cấp bất kỳ trong đồ thị G.

- Nếu α đã đi qua tất cả các đỉnh của G thì nó là một đường đi Hamilton của G.

- Nếu trong G còn có đỉnh nằm ngoài α, thì ta có thể bổ sung dần các đỉnh này vào α và cuối cùng nhận được đường đi Hamilton.

Thật vậy, giả sử v là đỉnh tuỳ ý không nằm trên α.

a) Nếu có cung nối v với v_1 thì bổ sung v vào đầu của đường đi α để được $\alpha_1=(v, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k)$.

b) Nếu tồn tại chỉ số i ($1 \leq i \leq k-1$) mà từ v_i có cung nối tới v và từ v có cung nối tới v_{i+1} thì ta chen v vào giữa v_i và v_{i+1} để được đường đi sơ cấp $\alpha_2=(v_1, v_2, ..., v_i, v, v_{i+1}, ..., v_k)$.

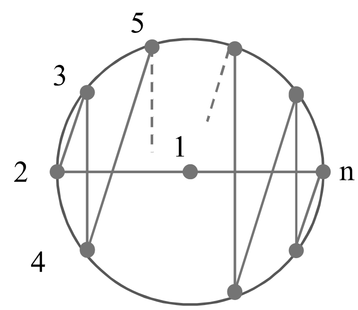
c) Nếu cả hai khả năng trên đều không xảy ra nghĩa là với mọi i ($1 \leq i \leq k$) v_i đều có cung đi tới v. Khi đó bổ sung v vào cuối của đường đi α và được đường đi $\alpha_3=(v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k, v)$.

Nếu đồ thị G có n đỉnh thì sau n-k bổ sung ta sẽ nhận được đường đi Hamilton.

- **Định lý 4:** Đồ thị đầy đủ K_n với n lẻ và n ≥ 3 có đúng $\frac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton phân biệt.

Chứng minh:

K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh và mỗi chu trình Hamilton có n cạnh, nên số chu trình Hamilton phân biệt nhiều nhất là $\frac{n-1}{2}$.



Hình 6.19. Bố trí các đỉnh trên đường tròn

Giả sử các đỉnh của K_n là 1, 2, ..., n. Đặt đỉnh 1 tại tâm của một đường tròn và các đỉnh 2, ..., n đặt cách đều nhau trên đường tròn (mỗi cung là $360^0/(n-1)$ sao cho đỉnh lẻ nằm ở nửa đường tròn trên và đỉnh chẵn nằm ở nửa đường tròn dưới. Ta có ngay chu trình Hamilton đầu tiên là 1,2, ..., n,1. Các đỉnh được giữ cố định, xoay khung theo chiều kim đồng hồ với các góc quay:

$$\frac{360^0}{n-1}, 2.\frac{360^0}{n-1}, 3.\frac{360^0}{n-1}, ..., \frac{n-3}{2}.\frac{360^0}{n-1},$$

ta nhận được $\frac{n-3}{2}$ khung phân biệt với khung đầu tiên. Do đó ta có $\frac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton phân biệt.

Ví dụ 1:

Trong một đợt thi đấu bóng bàn có n (n ≥ 2) đối thủ tham gia. Mỗi đối thủ gặp từng đối thủ khác đúng một lần. Trong thi đấu bóng bàn chỉ có khả năng thắng hoặc thua. Chứng minh rằng sau đợt thi đấu có thể xếp tất cả các đối thủ đứng thành một hàng dọc, để người đứng sau thắng người đứng ngay trước.

Giải:

Xét đồ thị có hướng G gồm n đỉnh sao cho mỗi đỉnh ứng với một đối thủ và có một cung nối từ đỉnh u đến đỉnh v nếu đối thủ ứng với u thắng đối thủ ứng với v.

Như vậy, đồ thị G có tính chất là với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v, có một và chỉ một trong hai cung (u,v) hoặc (v,u), đồ thị như thế được gọi là đồ thị có hướng đầy đủ. Theo định lý 1, G là một đồ thị nửa Hamilton. Khi đó đường đi Hamilton trong G cho ta sự sắp xếp cần tìm.

Ví dụ 2:

Có n đại biểu từ n nước đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi ngày họp một lần ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải bố trí bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người có hai người kế bên là bạn mới. Lưu ý rằng n người đều muốn làm quen với nhau.

Giải:

Xét đồ thị gồm n đỉnh, mỗi đỉnh ứng với mỗi người dự hội nghị, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu tương ứng muốn làm quen với nhau. Như vậy, ta có đồ thị đầy đủ K_n. Đồ thị này là Hamilton và rõ ràng mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp như yêu cầu của bài toán.

Bài toán trở thành tìm các chu trình Hamilton phân biệt của đồ thị đầy đủ K_n (hai chu trình Hamilton gọi là phân biệt nếu chúng không có cạnh chung).

Vậy có $\frac{11-1}{2} = 5$ cách sắp xếp chỗ ngồi phân biệt như sau:

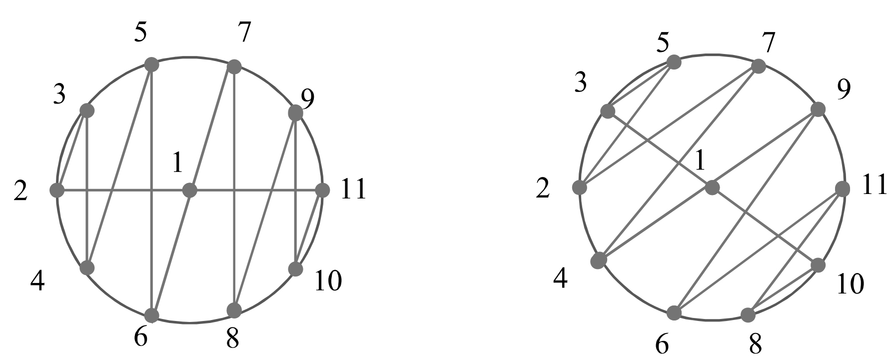
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 1

1 3 5 2 7 4 9 6 11 8 10 1

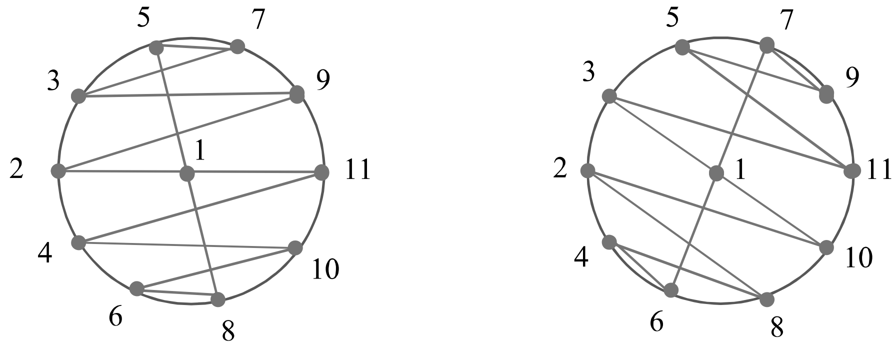
1 5 7 3 9 2 11 4 10 6 8 1

1 7 9 5 11 3 10 2 8 4 6 1

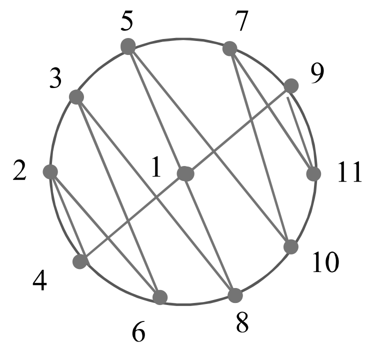
1 9 11 7 10 5 8 3 6 2 4 1



Hình 6.20. Cách xếp 1 và 2



Hình 6.21. Cách xếp 3 và 4



Hình 6.22. Cách xếp 5

6.2.3. Qui tắc chỉ ra chu trình Hamilton H hay chỉ ra G không là Hamilton

➯ **Qui tắc 1**: Mọi cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều phải thuộc chu trình H.

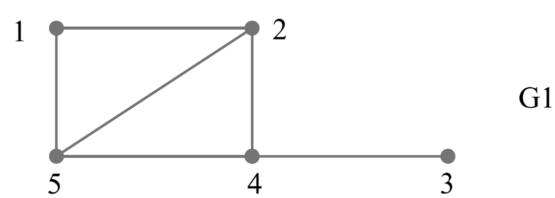
➯ **Qui tắc 2**: Không có chu trình con nào được tạo thành trong khi xây dựng H.

➯ **Qui tắc 3**: Sau khi đã lấy 2 cạnh tới đỉnh x đặt vào chu trình H rồi thì xoá tất cả những cạnh còn lại mà kề với x. Khi đó có thể tạo ra những đỉnh bậc 2 mới (áp dụng qui tắc 1).

➯ **Qui tắc 4**: Nếu tồn tại 1 đỉnh của G có bậc <=1 thì G không có chu trình Hamilton.

Ví dụ 1:

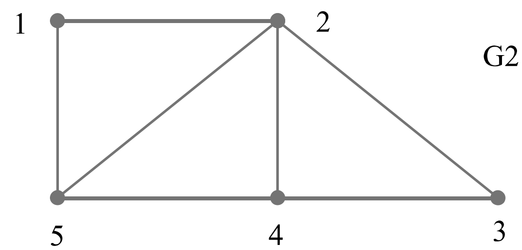
Đồ thị G1 ở hình 6.23 không có chu trình Hamilton vì deg(3) = 1 (vi phạm qui tắc 4)



Hình 6.23. Đồ thị G1 minh họa qui tắc tìm chu trình Hamilton

Ví dụ 2:

Cho biết đồ thị G2 ở hình 6.24 có phải là đồ thị Hamilton không? Chỉ ra chu trình Hamilton trong đồ thị nếu có.



Hình 6.24. Đồ thị G2 minh họa qui tắc tìm chu trình Hamilton

Giải:

Theo qui tắc 1, cạnh (1,2) (1,5) (3,2) (3,4) thuộc chu trình H

Vì đã lấy 2 cạnh tới đỉnh 2 đặt vào chu trình H rồi, nên xóa cạnh (2,4) và (2,5) theo qui tắc 3. Do đó, tạo ra đỉnh bậc 2 mới là đỉnh 4 và đỉnh 5.

Áp dụng qui tắc 1, cạnh (4,3) (4,5) đưa vào chu trình H.

Ta thu được chu trình H: 1 2 3 4 5 1 là chu trình sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

Vậy đồ thị G đã cho là đồ thị Hamilton, và H là chu trình Hamilton cần tìm.

6.2.4. Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị

- ***Mô tả thuật toán***

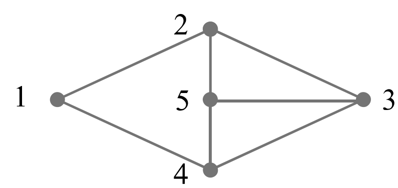
Thuật toán sau đây được xây dựng dựa trên cơ sở thuật toán quay lui cho phép liệt kê tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị.

```
void Hamilton()
{
/*  liệt kê các chu trình Hamilton thu được bằng việc phát triển dãy đỉnh
(X[1], ……, X[k-1]) của đồ thị G=(V,E).
*/
for ( y ∈ Ke(X[k-1]) )
        if ((k ==N+1) && (y==v0))
                Ghinhan(X[1],. . . , X[n], v0)
        else if ( Chuaxet[y] )
        {
```

```
                X[k]=y;
                Chuaxet[y]=false;
                Hamilton(k+1);
                Chuaxet[y]=true;
        }
}
// Main program
{
        for ( v ∈ V )
                Chuaxet[v]=true;
        X[1]= v0;       //  v0 la mot dinh nao do cua do thi
        Chuaxet[v0]=false;
        Hamilton(2);
}
```

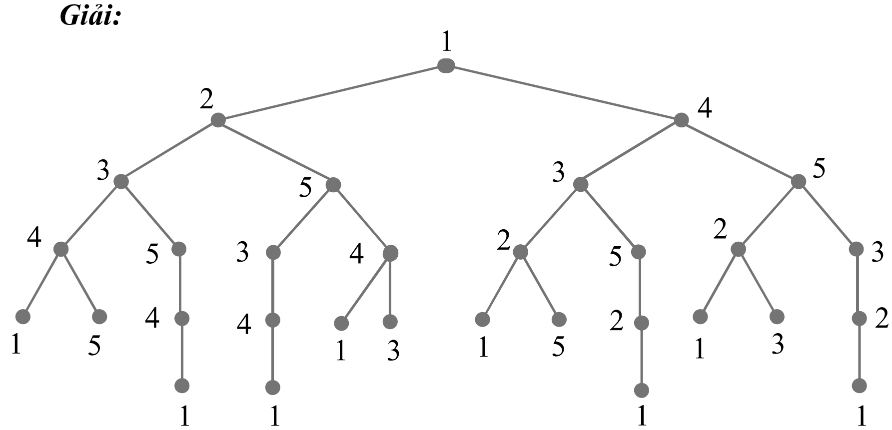
Ví dụ:

Liệt kê tất cả các chu trình Hamilton (nếu có) trong đồ thị ở hình 6.25.



Hình 6.25. Minh họa thuật toán tìm tất cả chu trình Hamilton

Giải:



Hình 6.26. Cây liệt kê tất cả các chu trình Hamilton

Kết quả được mô tả như hình 6.26.

Vậy, đồ thị có 4 chu trình Hamilton sau:

1 2 3 5 4 1

1 2 5 3 4 1

1 4 3 5 2 1

1 4 5 3 2 1

- ***Chương trình minh họa thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton***

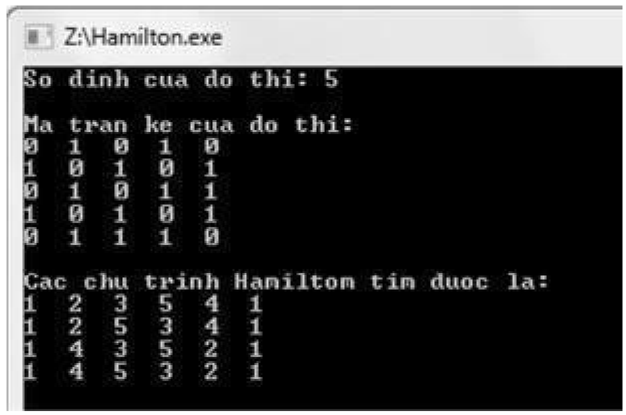
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include <stdlib.h>
#define MAX 50
#define TRUE 1
#define FALSE  0
int A[MAX][MAX], n;
int v0, X[MAX], ChuaXet[MAX];
int nSoCTrinh = 0;
void DocFile(char *dd)
{
   FILE *fp=fopen(dd,"rt");
   if (fp==NULL)
   {
        printf("File Error !!!");
        getch();
        exit(0);
   }
   fscanf (fp,"%d",&n);
   for (int i=1; i<=n; i++)
        for (int j=1; j<=n; j++)
             fscanf (fp,"%d",&A[i][j]);
   fclose(fp);
   printf("So dinh cua do thi: %d\n\n",n);
   printf("Ma tran ke cua do thi:\n");
   for (int i=1; i<=n; i++)
   {
        for(int j=1; j<=n; j++)
             printf("%d  ",A[i][j]);
        printf("\n");
   }
}
```

```
//Lưu các đỉnh trong chu trình
void LuuCT( )
{
 if (nSoCTrinh == 0)
      printf("\nCac chu trinh Hamiltom tim duoc la:\n");
 for (int i=1; i<=n; i++)
      printf("%d  ",X[i]);
 nSoCTrinh++;
 printf("%d \n",v0);
 }
//giải thuật đệ qui tìm chu trình Hamilton
void TimChuTrinhHamilton(int k)
{
for (int y=1; y<=n; y++)
    if (A[X[k-1]][y] != 0)
         if ((k==n+1) && (y==v0))
                LuuCT();
         else if (ChuaXet[y] == 0)
         {
              X[k] = y;
              ChuaXet[y] = 1;
              TimChuTrinhHamilton(k+1);
              ChuaXet[y] = 0;
          }
 }
int main()
{
   DocFile("Z:\\dulieu.txt");
   for (int i=1; i<=n; i++)
        ChuaXet[i]=0;
   X[1] = v0 = 1;
   ChuaXet[v0] = 1;
   TimChuTrinhHamilton(2);
   if (nSoCTrinh == 0)
        printf("\nKhong co chu trinh Hamiltom nao.\n")
   getch();
   return 1;
}
```

Ví dụ: Nội dung file *dulieu.txt* như sau:

5
0 1 0 1 0
1 0 1 0 1
0 1 0 1 1
1 0 1 0 1
0 1 1 1 0

Kết quả của chương trình là:

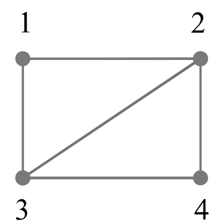


Hình 6.27. Kết quả chương trình tìm tất cả chu trình Hamilton

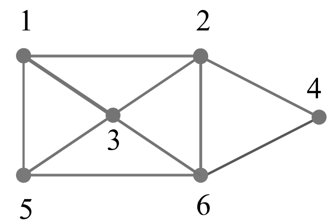
BÀI TẬP CHƯƠNG 6

1. Tìm chu trình Euler, hoặc đường đi Euler (nếu có) trong đồ thị:

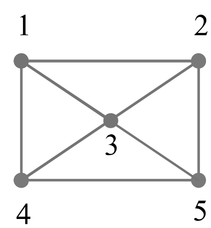
a.



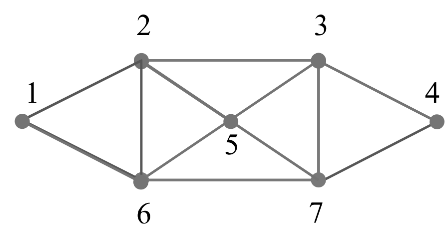
b.



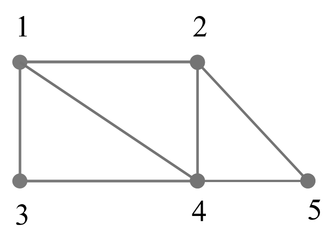
c.



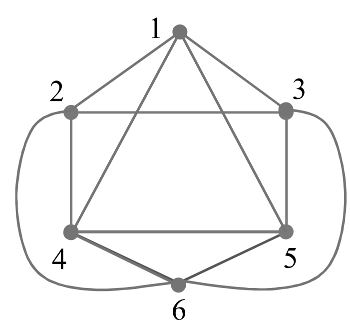
d.



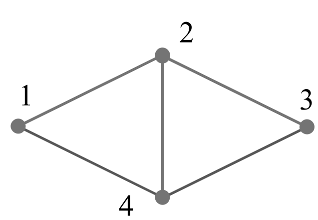
e.



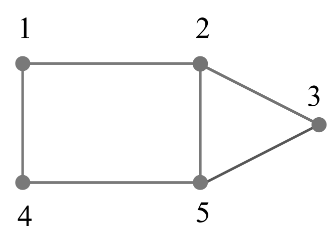
f.



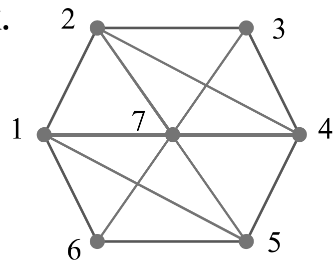
g.



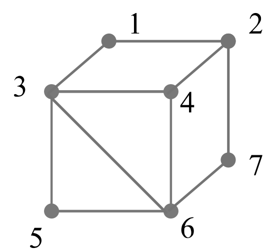
h.



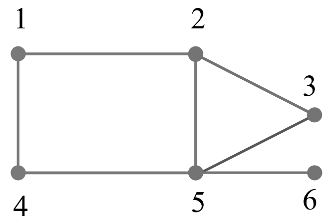
i.



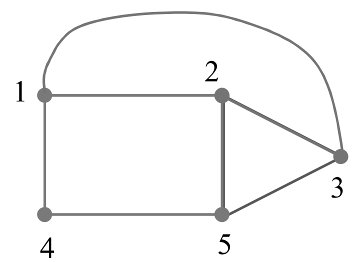
g.



k.



l.



2. Trong các đồ thị đã cho ở câu 1, đồ thị nào là đồ thị Hamilton, cho biết chu trình Hamilton tìm được.

3. Liệt kê tất cả các chu trình và đường đi Hamilton tìm được (nếu có) trong các đồ thị được cho ở câu 1.

4. Cho ví dụ một đồ thị Euler nhưng không là đồ thị Hamilton.

5. Cho ví dụ một đồ thị Hamilton nhưng không là đồ thị Euler.

6. Cho ví dụ một đồ thị Euler đồng thời là đồ thị Hamilton.

7. Tính số chu trình Hamilton phân biệt có được trong đồ thị K_5, K_7, K_9.

8. Hãy xây dựng đồ thị được cho bởi ma trận kề A, B và cho biết:

a. Đồ thị đó có phải là đồ thị Euler hoặc nửa Euler hay không? Cho biết chu trình Euler hoặc đường đi Euler nếu có.

b. Đồ thị đó có phải là đồ thị Hamilton hoặc nửa Hamilton hay không? Cho biết chu trình Hamilton hoặc đường đi Hamilton nếu có.

$$A= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Cho G là đơn đồ thị n đỉnh ($n \geq 3$) và có $deg(u) + deg(v) \geq n-1$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau của đồ thị G. Chứng minh rằng G có đường đi Hamilton.

10. Viết chương trình tìm đường đi Euler trên đồ thị.

11. Viết chương trình tìm đường đi Hamilton trên đồ thị.