CHƯƠNG 6

Đồ thị Euler và Hamilton

Đồ thị Euler và Hamilton

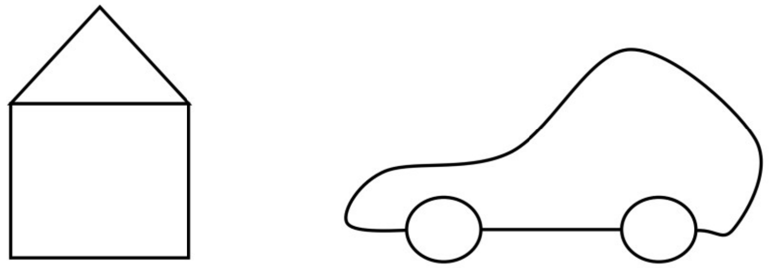
- Đồ thị Euler
  - Giới thiệu, định nghĩa
  - Các định lý và hệ quả
  - Thuật toán tìm chu trình Euler
- Đồ thị Hamilton
  - Giới thiệu, định nghĩa
  - Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton
  - Qui tắc chỉ ra chu trình Hamilton hay không Hamilton
  - Thuật toán tìm chu trình Hamilton

Đồ thị Euler

- Đồ thị Euler
  - Giới thiệu, định nghĩa
  - Các định lý và hệ quả
  - Thuật toán tìm chu trình Euler

Câu hỏi???

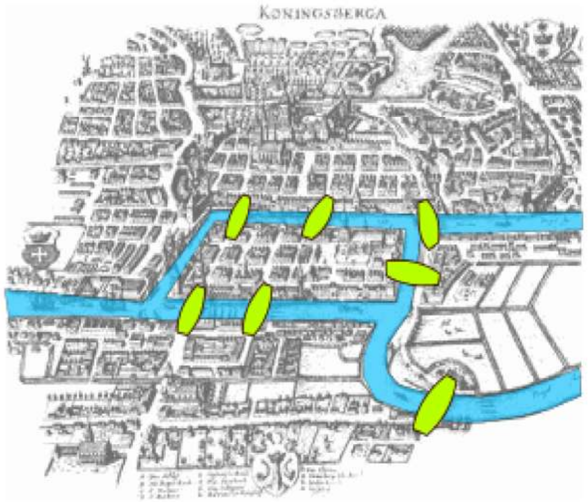
- Hình nào dưới đây có thể vẽ bằng 1 nét bút?



Giới thiệu

- Bài toán 7 cây cầu

Hỏi có thể đi qua cả 7 cây cầu, mỗi cầu đúng một lần, rồi quay về chỗ xuất phát được hay không?



Giới thiệu (tt)

- 1736, nhà toán học Thuỵ sỹ, Leonhard Euler đã giải bài toán này.
- Lời giải của Ông cho bài toán bảy cây cầu ở Königsberg được coi là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

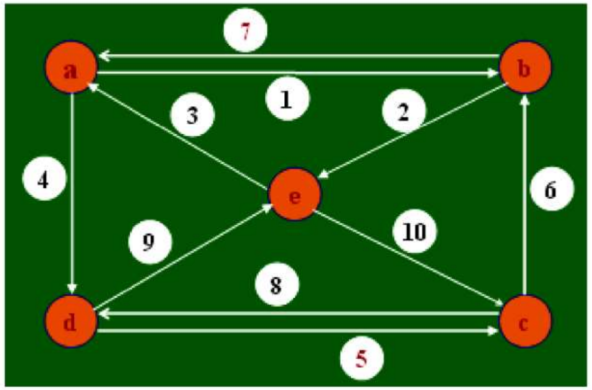
Leonhard Euler

(April 1707 – September 1783)

Các định nghĩa

- Đường đi qua tất cả các **cạnh/cung** của đồ thị, mỗi cạnh/cung đúng một lần gọi là đường đi Euler.
- Đường đi Euler có điểm đầu trùng với điểm cuối gọi là chu trình Euler.
- Đồ thị có đường đi Euler là **đồ thị nửa Euler**.
- Đồ thị có chu trình Euler gọi là **đồ thị Euler**.

Ví dụ



Chu trình Euler: E = [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 6, 7]

Các định lý, hệ quả

- Định lý 1: Đồ thị vô hướng, liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.
- Hệ quả 1: Đồ thị vô hướng, liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.

Các định lý, hệ quả (tt)

- Định lý 2: Đồ thị có hướng liên thông mạnh G là đồ thị Euler khi và chỉ khi $deg^+(v)=deg^-(v)\ \forall v \in V$
- Hệ quả 2: Đthị có hướng liên thông yếu, nếu tồn tại 2 đỉnh u và v: $deg^-(u)<deg^+(u)$ 1 đơn vị, $deg^-(v)>deg^+(v)$ 1 đơn vị, mọi đỉnh khác đều có $deg^- = deg^+$ thì có đường đi Euler từ u tới v.

Thuật toán tìm chu trình Euler

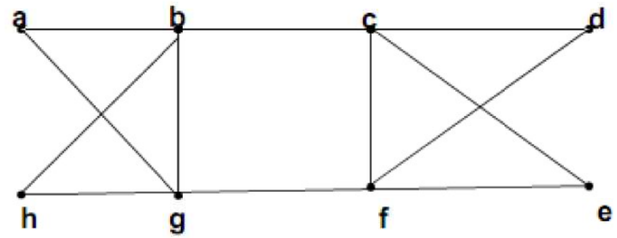
(Thuật toán Fleury)

Xuất phát từ một đỉnh u nào đó của G, ta đi theo các cạnh của nó một cách tuỳ ý, chỉ cần tuân theo 2 qui tắc sau:

- Khi đi qua 1 cạnh thì xoá cạnh đó đi và xoá luôn đỉnh cô lập nếu có.
- Không bao giờ đi qua cầu (cạnh cắt) trừ khi không còn cách nào khác.

Ví dụ

- Tìm chu trình Euler cho đồ thị:

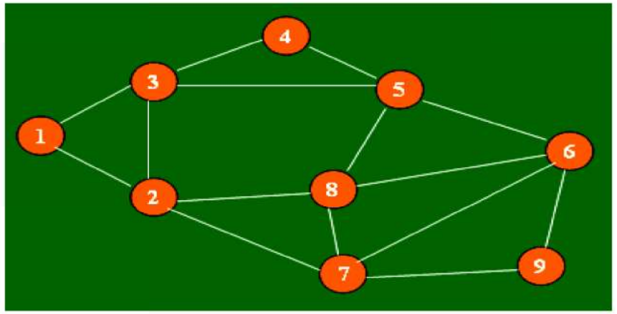


Cài đặt

- **B1.** Nạp 1 đỉnh u tuỳ ý của đthị vào stack (thường là đỉnh 1)
- **B2.** Thực hiện vòng lặp đến khi stack rỗng
  - Xét đỉnh x trên đỉnh stack:
    - Nếu là đỉnh cô lập thì lấy khỏi stack → kết quả.
    - Nếu còn đỉnh y kề với x thì nạp y vào stack và xoá cạnh xy.

Ví dụ

- Tìm chu trình Euler cho đồ thị?



Đồ thị Hamilton

- Đồ thị Hamilton
  - Giới thiệu, định nghĩa
  - Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton
  - Qui tắc chỉ ra chu trình Hamilton hay không Hamilton
  - Thuật toán tìm chu trình Hamilton

Giới thiệu

- **William Rowan Hamilton** là một nhà toán học, vật lý và thiên văn học người Ireland.
- Có 1 khối 12 mặt, mỗi mặt hình ngũ giác đều. Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối là tên của 1 TP. Hãy tìm đường xuất phát từ 1 TP, đi dọc theo các cạnh của khối ghé thăm mỗi TP đúng 1 lần, cuối cùng trở về TP ban đầu.

Giới thiệu

- *Tổ chức tour du lịch:* sao cho người du lịch thăm quan mỗi thắng cảnh trong thành phố đúng một lần
- *Bài toán mã đi tuần*: cho con mã đi trên bàn cờ vua sao cho nó đi qua mỗi ô đúng một lần.

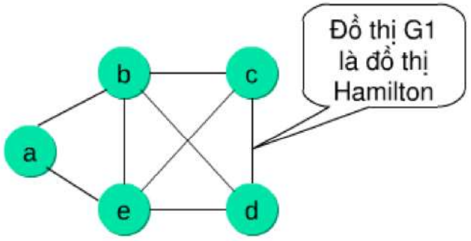
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

H = [8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4]

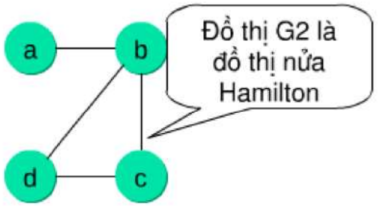
Các định nghĩa

1. Đường đi qua tất cả các **đỉnh** của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là đường đi Hamilton.
2. Chu trình đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh đúng 1 lần (trừ đỉnh đầu trùng đỉnh cuối) gọi là chu trình Hamilton.
3. Đồ thị có đường đi Hamilton là đồ thị **nửa Hamilton.**
4. Đồ thị có chu trình Hamilton gọi là **đồ thị Hamilton.**

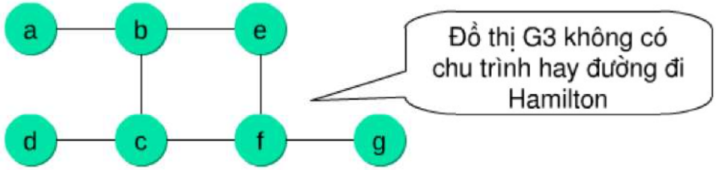
Ví dụ



G1



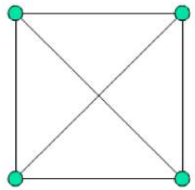
G2

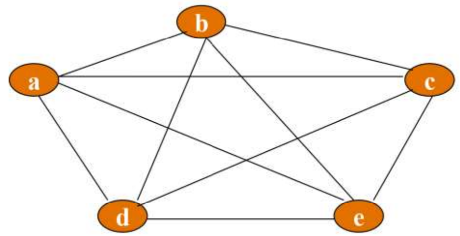


G3

Tính chất HAMILTON trong đồ thị đầy đủ

- Đồ thị đầy đủ luôn là đồ thị Hamilton.
- Với n lẻ và n>=3 thì Kn có (n-1)/2 chu trình Hamilton đôi một không có cạnh chung





Điều kiện đủ

1. <u>Định lý 1 (Dirak):</u> Đơn đồ thị vô hướng G với n>2 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn n/2 là đồ thị Hamilton.
2. <u>Định lý 3:</u> Nếu G là đơn đồ thị có hướng liên thông mạnh n đỉnh và $deg^+(v)>=n/2$, $deg^-(v)>=n/2$ $\forall v$ thì G là đồ thị Hamilton.

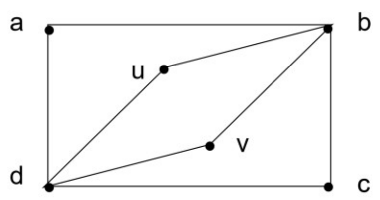
Qui tắc

Chỉ ra chu trình Hamilton H hay chỉ ra G không là Hamilton (đthị vô hướng)

- **Qt1**. Mọi cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều phải thuộc chu trình H.
- **Qt2**. Không có chu trình con nào được tạo thành trong khi xây dựng H.
- **Qt3**. Sau khi đã lấy 2 cạnh tới đỉnh x đặt vào chu trình H rồi thì xoá tất cả những cạnh còn lại mà kề với x. Khi đó có thể tạo ra những đỉnh bậc 2 mới (áp dụng Qt1).
- **Qt4**. Nếu $\exists$ 1 đỉnh của G có bậc <=1 thì G không có chu trình Hamilton.

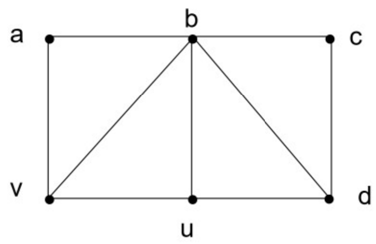
Ví dụ

- Xét xem đồ thị sau có là đồ thị Hamilton không?



Ví dụ

- Xét xem đồ thị sau có là đồ thị Hamilton không?



Thuật toán tìm chu trình Hamilton

- Có thể sử dụng thuật toán quay lui để tìm chu trình Hamilton
  - Lưu trữ đồ thị đã cho dưới dạng danh sách Ke(v)
  - Liệt kê các chu trình Hamilton thu được bằng việc phát triển dãy các đỉnh (X[1], …, X[k-1])

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (tt)

- B1: Bắt đầu từ đỉnh 1, x[1]=1
- B2: Tìm và lưu đỉnh có cạnh nối với x[i] và và đỉnh j này chưa thăm trước đó
- B3: Nếu đỉnh j này là x[n] và x[1] có cạnh nối với nó thì xuất ra đồ thị Hamilton

  Nếu đỉnh j vẫn chưa phải là x[n] thì tiếp tục B2

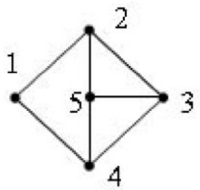
Thuật toán tìm chu trình Hamilton (tt)

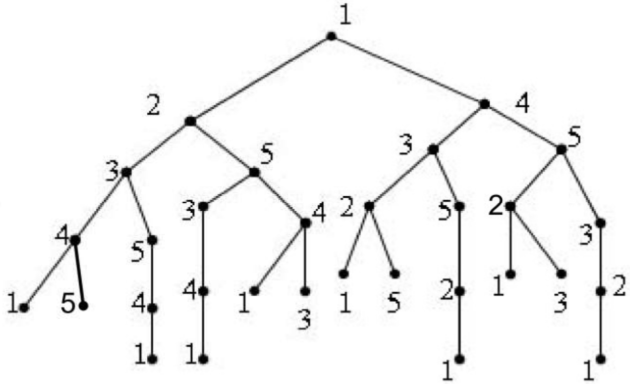
```
Procedure Hamilton(k);
BEGIN
   for y ∈ Ke(X[k-1]) do
      if (k =N+1) and (y=v0) then
            Ghinhan(X[1],. . . , X[n], v0)
      else  if Chuaxet[y] then
      begin
            X[k]:=y;
            Chuaxet[y]:=false;
            Hamilton(k+1);
            Chuaxet[y]:=true;
      end;
END;
```


Thuật toán tìm chu trình Hamilton (tt)

```
(* Main program*)
BEGIN
   for v ∈ V do
      Chuaxet[v]:=true;
   X[1]:=v0;              (* v0: 1 đỉnh bất kỳ *)
   Chuaxet[v0]:=false;
   Hamilton(2);
END
```

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (tt)





Câu hỏi???