CHƯƠNG 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Đồ thị là một tập các đối tượng được gọi là các đỉnh, được nối với nhau bởi các cạnh, cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Trong chương này chúng ta sẽ làm quen với các khái niệm, thuật ngữ cơ bản của đồ thị và cách biểu diễn đồ thị trên máy tính.

1.1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.1.1. Đơn đồ thị vô hướng

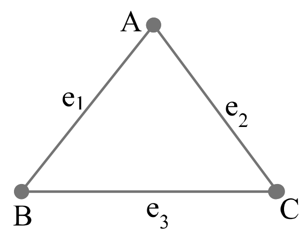
Đơn đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm một tập khác rỗng V các đỉnh, và một tập E các cạnh, mỗi cạnh là một cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt.

Ví dụ:

Hình 1.1 là đơn đồ thị vô hướng có:

Tập đỉnh V = {A, B, C}

Tập cạnh E = {e_1, e_2, e_3}



Hình 1.1. Đơn đồ thị vô hướng

1.1.2. Đa đồ thị vô hướng

Một đa đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm một tập khác rỗng V các đỉnh, và một tập E các cạnh, mỗi cạnh là một cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt. Hai cạnh được gọi là cạnh song song hay cạnh bội nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.

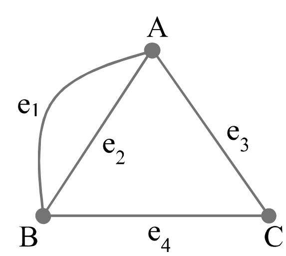
Ví dụ:

Hình 1.2 là đa đồ thị vô hướng có:

Tập đỉnh V = {A, B, C} và

Tập cạnh E = {e_1, e_2, e_3, e_4},

trong đó e_1 và e_2 có cùng cặp đỉnh.



Hình 1.2. Đa đồ thị vô hướng

Từ hai định nghĩa trên ta thấy: mỗi đơn đồ thị là đa đồ thị, nhưng không phải đa đồ thị nào cũng là đơn đồ thị.

1.1.3. Giả đồ thị vô hướng

Một giả đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm một tập khác rỗng V các đỉnh, và một tập E các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh (không nhất thiết là phân biệt).

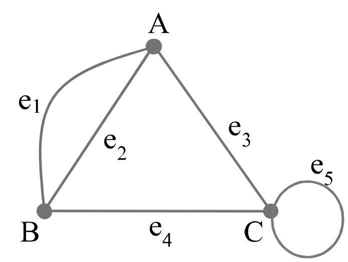
Với $v \in V$, nếu $(v, v) \in E$ thì ta nói có một khuyên tại đỉnh v.

Ví dụ:

Hình 1.3 là giả đồ thị vô hướng có:

Tập đỉnh V = {A, B, C}

Tập cạnh E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}



Hình 1.3. Giả đồ thị vô hướng

Từ các định nghĩa trên ta thấy:

Giả đồ thị là loại đồ thị vô hướng tổng quát nhất vì nó có thể chứa các khuyên và các cạnh song song.

Đa đồ thị vô hướng là loại đồ thị vô hướng có thể chứa các cạnh song song nhưng không thể có các khuyên.

Đơn đồ thị vô hướng là loại đồ thị vô hướng không chứa cạnh song song hoặc khuyên.

1.1.4. Đơn đồ thị có hướng

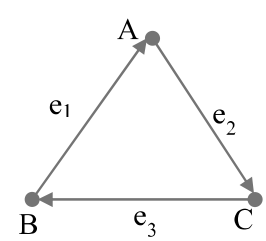
Một đồ thị có hướng G = (V, E) gồm một tập khác rỗng V các đỉnh, và một tập E các cung, mỗi cung là một cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V.

Ví dụ:

Hình 1.4 là đơn đồ thị có hướng có:

Tập đỉnh V = {A, B, C}

Tập cung E = {e_1, e_2, e_3}



Hình 1.4. Đơn đồ thị có hướng

1.1.5. Đa đồ thị có hướng

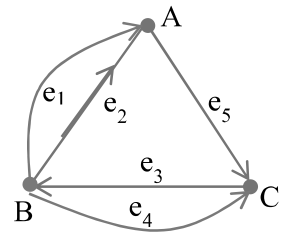
Một đa đồ thị có hướng G = (V, E) gồm một tập khác rỗng V các đỉnh, và một tập E các cung, mỗi cung là một cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung song song cùng chiều.

Ví dụ:

Hình 1.5 là đa đồ thị có hướng có:

Tập đỉnh V = {A, B, C}

Tập cung E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}



Hình 1.5. Đa đồ thị có hướng

Đồ thị vô hướng nhận được từ đồ thị có hướng G bằng cách xoá bỏ các chiều mũi tên trên các cung được gọi là đồ thị vô hướng nền của G.

1.2. BẬC CỦA ĐỈNH

1.2.1. Định nghĩa bậc trong đồ thị vô hướng

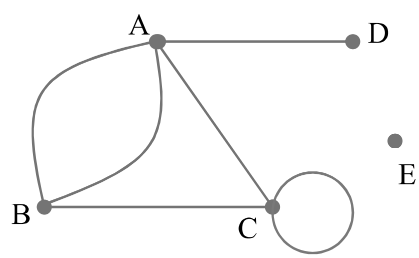
Hai đỉnh u và v trong đồ thị vô hướng G = (V, E) được gọi là kề nhau nếu (u, v) $\in$ E. Nếu e = (u, v) là cạnh của đồ thị thì e gọi là cạnh kề với các đỉnh u và v. Cạnh e cũng được gọi là cạnh nối các đỉnh u và v. Các đỉnh u và v gọi là các đỉnh đầu của cạnh e.

Bậc của đỉnh v trong đồ thị G = (V, E), ký hiệu deg(v), là số các cạnh kề với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.

Đỉnh v gọi là đỉnh treo nếu deg(v) = 1.

Đỉnh v gọi là đỉnh cô lập nếu deg(v) = 0.

Ví dụ: Tìm bậc các đỉnh của đồ thị sau



Hình 1.6. Minh họa bậc của đỉnh trong đồ thị vô hướng

Giải: Đồ thị trong hình 1.6 có:

Bậc các đỉnh là:

deg(A) = 4, deg(B) = 3, deg(C) = 4,
deg(D) = 1, deg(E) = 0.

Đỉnh D là đỉnh treo.

Đỉnh E là đỉnh cô lập.

1.2.2. Các tính chất về bậc trong đồ thị vô hướng

Bậc của đỉnh trong đồ thị vô hướng có các tính chất sau:

1) Cho đồ thị G = (V, E). Khi đó tổng bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh: Rõ ràng mỗi cạnh e = (u,v) được tính một lần trong deg(u) và một lần trong deg(v). Từ đó suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

2) Số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.

Chứng minh: Gọi V_1 và V_2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị G = (V, E). Khi đó

$$2|E| = \sum_{v \in V1} \deg(v) + \sum_{v \in V2} \deg(v)$$

Vế trái là một số chẵn và tổng thứ nhất cũng là một số chẵn nên tổng thứ hai là một số chẵn. Vì deg(v) là lẻ với mọi $v \in V_2$ nên $|V_2|$ là một số chẵn.

1.2.3. Định nghĩa bậc trong đồ thị có hướng

Trong đồ thị có hướng G, đỉnh u được gọi là nối tới v hay v được gọi là được nối từ u nếu (u, v) là một cung của G. Đỉnh u gọi là đỉnh đầu và đỉnh v gọi là đỉnh cuối của cung này.

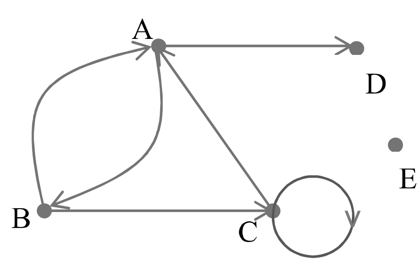
Bán bậc ra của đỉnh v trong đồ thị có hướng G, ký hiệu $\deg^+(v)$, là số các cung có đỉnh đầu là v (đi ra khỏi v).

Bán bậc vào của đỉnh v trong đồ thị có hướng G, ký hiệu $\deg^-(v)$, là số các cung có đỉnh cuối là v (đi vào v).

Đỉnh có bán bậc vào và bán bậc ra cùng bằng 0 gọi là đỉnh cô lập.

Đỉnh có bán bậc vào bằng 1 và bán bậc ra bằng 0 gọi là đỉnh treo, cung có đỉnh cuối là đỉnh treo gọi là cung treo.

Ví dụ: Tính bán bậc vào, bán bậc ra cho các đỉnh của đồ thị sau



Hình 1.7. Minh họa bậc của đỉnh (đồ thị có hướng)

Giải: Đồ thị trong hình 1.7 có:

$\deg^+(A) = 2$, $\deg^-(A) = 2$,

$\deg^+(B) = 2$, $\deg^-(B) = 1$,

$\deg^+(C) = 2$, $\deg^-(C) = 2$,

$\deg^+(D) = 0$, $\deg^-(D) = 1$,

$\deg^+(E) = 0$, $\deg^-(E) = 0$.

1.2.4. Tính chất về bậc trong đồ thị có hướng

Bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng có tính chất sau:

Cho G = (V, E) là một đồ thị có hướng. Khi đó

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v)$$

Chứng minh:

Vì mỗi cung được tính một lần cho đỉnh đầu và một lần cho đỉnh cuối nên tổng số bán bậc vào bằng tổng số bán bậc ra.

1.3. CÁC DẠNG ĐỒ THỊ

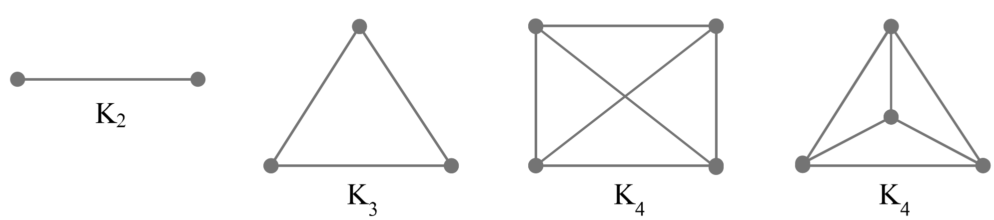
1.3.1. Đồ thị đơn

Đồ thị đơn là đồ thị không có khuyên và không có cạnh song song.

1.3.2. Đồ thị đủ (đồ thị đầy đủ)

Đồ thị đủ là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh. Một đồ thị đủ n đỉnh sẽ có n(n-1)/2 cạnh. Đồ thị đủ n đỉnh được ký hiệu là K_n.

Ví dụ:

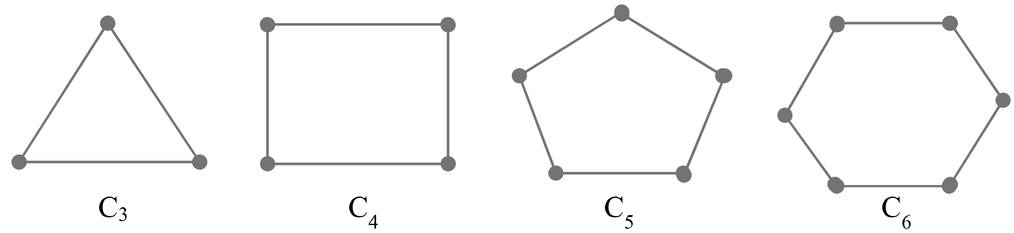


Hình 1.8. Các dạng đồ thị đủ

1.3.3. Đồ thị vòng

Đồ thị vòng là đơn đồ thị gồm n (n>=3) đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ và n cạnh (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1). Mỗi đỉnh của đồ thị vòng sẽ có bậc là 2. Đồ thị vòng n đỉnh được ký hiệu là C_n.

Ví dụ:



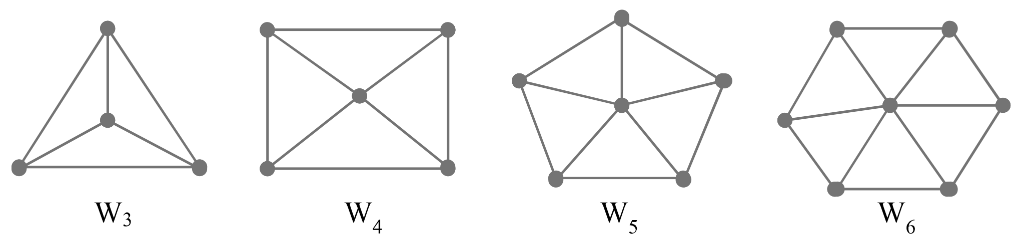
Hình 1.9. Các dạng đồ thị vòng

1.3.4. Đồ thị bánh xe

Đồ thị bánh xe là đồ thị vòng C_n thêm vào đỉnh v_{n+1} và các cạnh (v_{n+1}, v_1), (v_{n+1}, v_2), ..., (v_{n+1}, v_n).

Đồ thị bánh xe được ký hiệu là W_n, gồm n+1 đỉnh, 2n cạnh, một đỉnh bậc n và n đỉnh bậc 3.

Ví dụ:



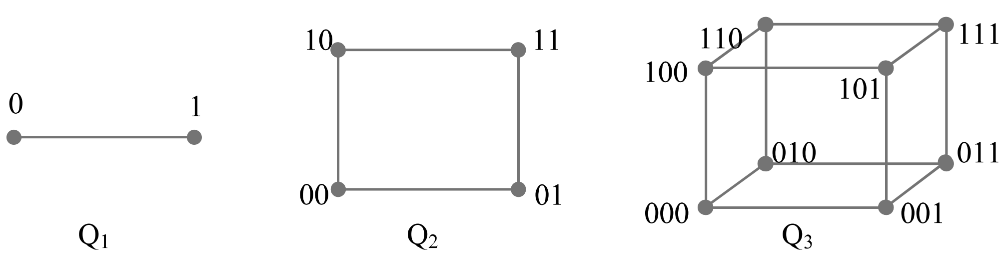
Hình 1.10. Các dạng đồ thị bánh xe

1.3.5. Đồ thị lập phương

Đồ thị lập phương là đồ thị 2^n đỉnh, với các đỉnh biểu diễn 2^n xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh của đồ thị lập phương kề nhau khi và chỉ khi 2 xâu nhị phân tương ứng với hai đỉnh này chỉ khác nhau đúng một bit.

Đồ thị lập phương được ký hiệu là Q_n. Mỗi đỉnh của Q_n có bậc là n, và số cạnh của Q_n là $n.2^{n-1}$.

Ví dụ:



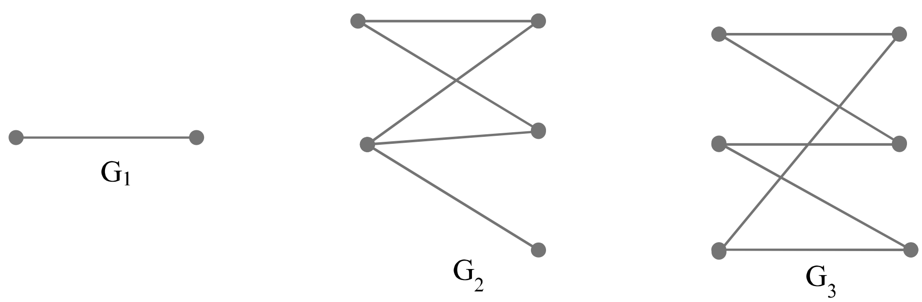
Hình 1.11. Các dạng đồ thị lập phương

1.3.6. Đồ thị lưỡng phân (đồ thị hai phía)

Gọi G = (V, E) là một đồ thị vô hướng, đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập đỉnh V được chia thành hai tập V_1 và V_2 sao cho:

- hai tập V_1 và V_2 phân hoạch V, nghĩa là $V_1 \neq \varnothing \neq V_2$ và $V_1 \cap V_2 = \varnothing$;
- hai đỉnh bất kỳ trong V_1 không có cạnh nối với nhau, hai đỉnh bất kỳ trong V_2 cũng không có cạnh nối với nhau.

Ví dụ:



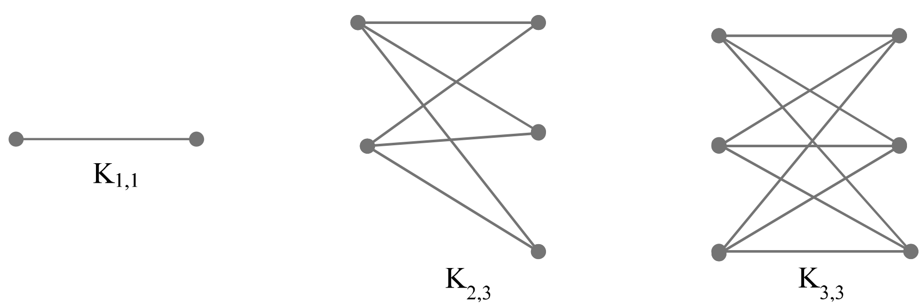
Hình 1.12. Các dạng đồ thị lưỡng phân

1.3.7. Đồ thị lưỡng phân đủ

Gọi G = (V, E) là một đồ thị vô hướng lưỡng phân với hai tập đỉnh V_1 và V_2 định nghĩa như trên, đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân đủ nếu: với mọi cặp đỉnh (i, j) mà $i \in V_1$ và $j \in V_2$ thì có đúng một cạnh của G nối i và j.

Nếu $|V_1| = n$ và $|V_2| = m$ thì G có m.n cạnh, và được ký hiệu là $K_{m,n}$.

Ví dụ:



Hình 1.13. Các dạng đồ thị lưỡng phân đủ

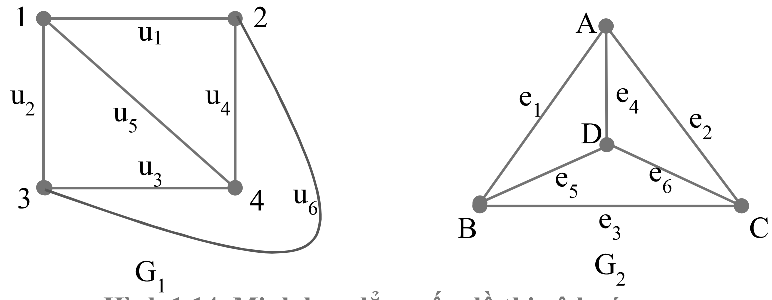
1.4. ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ

1.4.1. Đẳng cấu đồ thị vô hướng

Cho hai đồ thị vô hướng $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$. Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa điều kiện sau:

- $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ và $\delta: E_1 \rightarrow E_2$
- Nếu cạnh $e \in E_1$ liên kết với cặp đỉnh $\{u, v\} \subseteq V_1$ xét trong đồ thị G_1 thì cạnh δ(e) sẽ liên kết với cặp đỉnh {ψ(u), ψ(v)} xét trong đồ thị G_2 (điều này gọi là sự tương ứng cạnh).

Ví dụ: Hai đồ thị G_1 và G_2 trong hình 1.14 có đẳng cấu với nhau?



Hình 1.14. Minh họa đẳng cấu đồ thị vô hướng

Giải: Hai đồ thị G_1 và G_2 là đẳng cấu nhau

Tương ứng đỉnh:

$\psi(1) = A$, $\psi(2) = B$,

$\psi(3) = C$, $\psi(4) = D$;

Tương ứng cạnh:

$\delta(u_1) = e_1$, $\delta(u_2) = e_2$,

$\delta(u_3) = e_6$, $\delta(u_4) = e_5$,

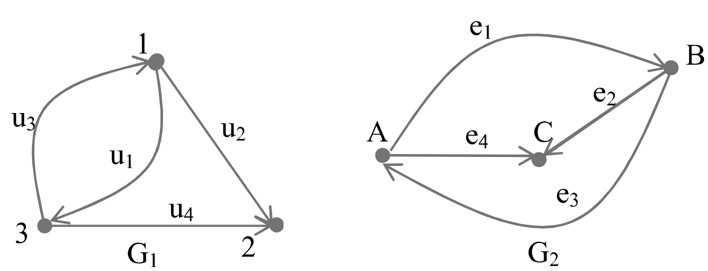
$\delta(u_5) = e_4$, $\delta(u_6) = e_3$.

1.4.2. Đẳng cấu đồ thị có hướng

Cho hai đồ thị có hướng $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$. Hai đồ thị G1 và G2 được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa điều kiện sau:

- ψ: $V_1 \rightarrow V_2$ và δ: $E_1 \rightarrow E_2$
- Nếu cung $e \in E_1$ liên kết với cặp đỉnh $(u, v) \in V_1$ xét trong đồ thị G_1 thì cung $\delta(e)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $(\psi(u), \psi(v))$ xét trong đồ thị G_2 (điều này gọi là sự tương ứng cung).

Ví dụ: Hai đồ thị có hướng G_1 và G_2 trong hình 1.15 có đẳng cấu với nhau?



Hình 1.15. Minh họa đẳng cấu đồ thị có hướng

Giải: Hai đồ thị G_1 và G_2 là đẳng cấu nhau

Tương ứng đỉnh:

$\psi(1) = A$, $\psi(2) = C$, $\psi(3) = B$;

Tương ứng cạnh:

$\delta(u_1) = e_1$, $\delta(u_2) = e_4$,

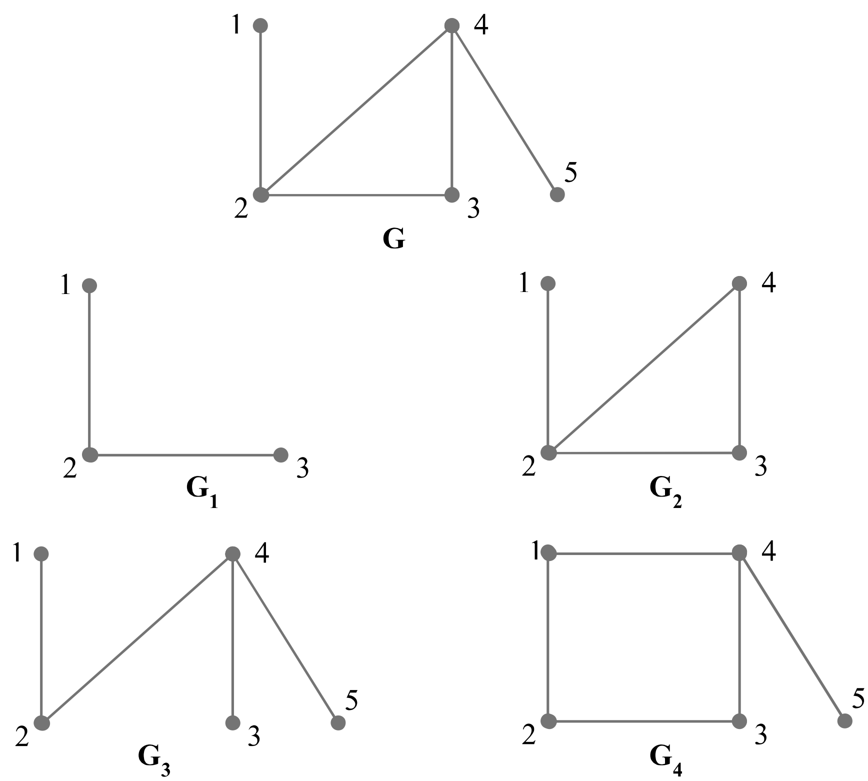
$\delta(u_3) = e_3$, $\delta(u_4) = e_2$.

1.5. ĐỒ THỊ CON, ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

1.5.1. Đồ thị con

Cho hai đồ thị $G=(V, E)$ và $G_1=(V_1, E_1)$. Đồ thị G_1 là đồ thị con của G nếu $V_1 \subseteq V$ và $E_1 \subseteq E$.

Ví dụ:



Hình 1.16. Minh họa đồ thị con

Trong các đồ thị của hình 1.16:

G_1, G_2, G_3 là đồ thị con của G.

G_4 không phải là đồ thị con của G.

1.5.2. Đồ thị bộ phận

Cho đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ là đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$. Đồ thị G_1 là đồ thị bộ phận của G nếu $V = V_1$.

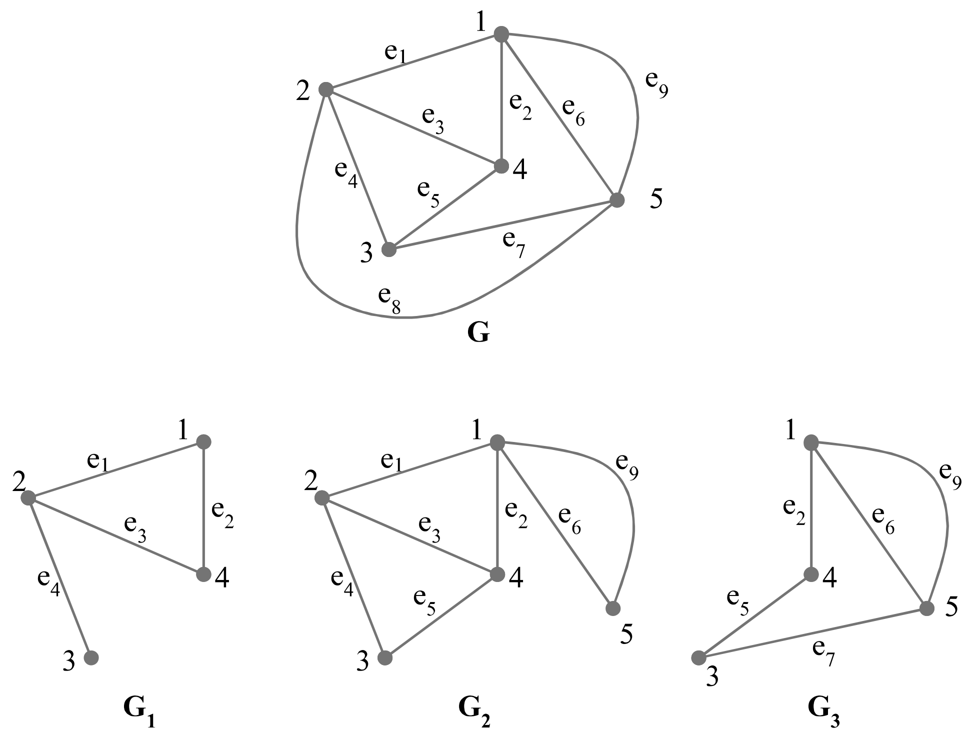
Ví dụ: Trong các đồ thị của hình 1.16, ta thấy trong số các đồ thị con G_1, G_2, G_3 của G, G_3 cũng chính là đồ thị bộ phận của G.

1.5.3. Đồ thị con sinh bởi tập đỉnh

Cho đồ thị G = (V, E) và $X \subseteq V$. Đồ thị con sinh bởi tập đỉnh X, ký hiệu $<X>$ được định nghĩa là $<X> = (X, U)$, trong đó:

- tập cạnh $U \subseteq V$
- gọi $e = (i, j) \in E$ là một cạnh của G, nếu $i, j \in X$ thì $e \in U$.

Ví dụ:



Hình 1.17. Minh họa đồ thị con, đồ thị bộ phận

Trong các đồ thị của hình 1.17, thì G_1, G_2, G_3 đều là đồ thị con của đồ thị G. Trong đó:

G_2 là đồ thị bộ phận của G.

G_3 là đồ thị con của G sinh bởi tập đỉnh {1, 3, 4, 5}.

G_1 không phải là đồ thị bộ phận, cũng không sinh bởi tập đỉnh {1, 2, 3, 4} vì thiếu cạnh e_5.

1.6. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ TRÊN MÁY TÍNH

Trong phần này chúng ta sẽ xét một số phương pháp cơ bản được sử dụng để biểu diễn đồ thị trên máy tính như: ma trận kề, danh sách cạnh, danh sách kề.

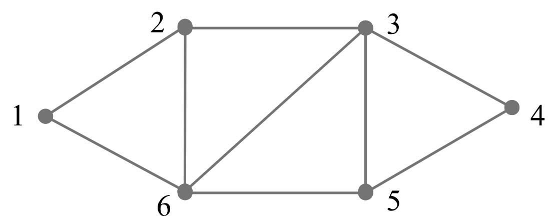
1.6.1. Ma trận kề

Cho đơn đồ thị vô hướng G = (V, E), với tập đỉnh V = {1, 2, …, n} và tập cạnh E = {e_1, e_2, …, e_m}. Ma trận kề của đồ thị G là ma trận A = {$a_{i,j}$} với các phần tử được xác định như sau:

- $a_{i,j} = 1$ nếu $(i, j) \in E$ và
- $a_{i,j} = 0$ nếu $(i, j) \notin E$, với i, j = 1, 2, …, n.

Ví dụ 1:

Cho đồ thị vô hướng G_1



G_1

Hình 1.18. Minh họa ma trận kề đồ thị vô hướng

Ma trận kề của đồ thị G_1 là

$$\begin{array}{c} \\ \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \\ \mathit{4} \\ \mathit{5} \\ \mathit{6} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{5} & \mathit{6} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Các tính chất của ma trận kề:

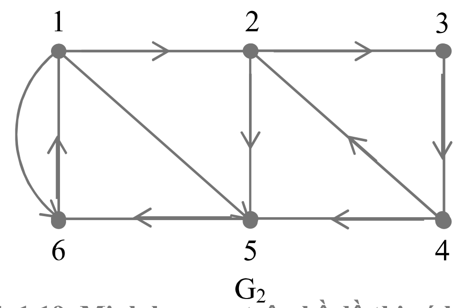
1) Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, hay a[i, j] = a[j, i] với i, j = 1, 2, …, n.

2) Tổng các phần tử trên dòng i (hoặc cột j) của ma trận kề chính là bậc của đỉnh i (hoặc đỉnh j).

✍ Ma trận kề của đồ thị có hướng được định nghĩa tương tự như ma trận kề của đồ thị vô hướng. Tuy nhiên, ma trận kề của đồ thị có hướng không phải là ma trận đối xứng.

Ví dụ 2:

Cho đồ thị có hướng G_2



Hình 1.19. Minh họa ma trận kề đồ thị có hướng

Ma trận kề của đồ thị có hướng G_2 là:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

✍ Ma trận kề của đa đồ thị cũng có thể xây dựng hoàn toàn tương tự, chỉ khác là thay vì ghi 1 vào vị trí a[i, j] nếu (i, j) là cạnh của đồ thị thì chúng ta sẽ ghi số cạnh nối giữa hai đỉnh i, j.

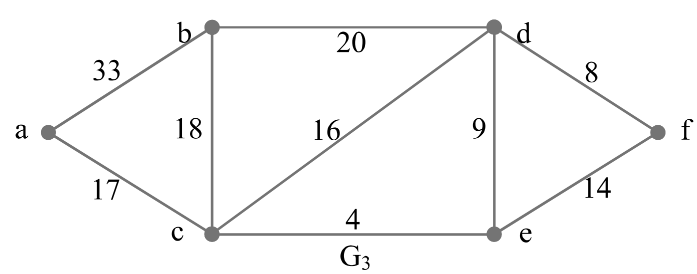
1.6.2. Ma trận trọng số

Đồ thị được gọi là đồ thị có trọng số nếu mỗi cạnh e = (i, j) của đồ thị được gán với một giá trị c(e), hay c(i, j), là trọng số của cạnh e. Với đồ thị có trọng số, thay vì dùng ma trận kề thì ta sử dụng ma trận trọng số để biểu diễn.

Ma trận trọng số của đồ thị G là ma trận C = $\{c_{i,j}\}$ với các phần tử được xác định như sau:

- $c_{i,j} = c(i, j)$ nếu $(i, j) \in E$ và
- $c_{i,j} = \theta$ nếu $(i, j) \notin E$, với $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Trong đó số θ tùy từng trường hợp cụ thể mà có thể được đặt bằng một trong các giá trị như: 0, $+\infty$, $-\infty$.

Ví dụ: Cho đồ thị G_3 cùng trọng số các cạnh



Hình 1.20. Minh họa ma trận trọng số

Ma trận trọng số của đồ thị G_3 có thể biểu diễn như sau

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 33 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & 18 & 20 & 0 & 0 \\ 17 & 18 & 0 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 20 & 16 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 14 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

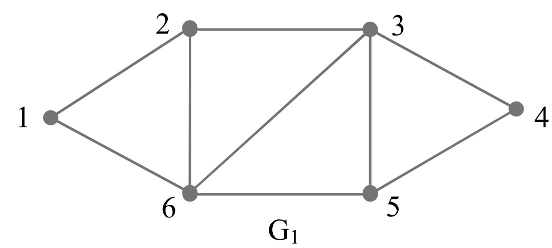
1.6.3. Danh sách cạnh, danh sách cung

Trong trường hợp đồ thị thưa (là đồ thị n đỉnh có số cạnh m thỏa mãn bất đẳng thức m < 6n), ta sử dụng cách biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách cạnh.

Trong cách biểu diễn này, chúng ta sẽ lưu trữ danh sách tất cả các cạnh của đồ thị vô hướng (hay danh sách các cung của đồ thị có hướng). Một cạnh (hay cung) e = (i, j) của đồ thị sẽ tương ứng với hai biến Đầu[e] và Cuối[e].

Ví dụ 1:

Xét đồ thị vô hướng G_1



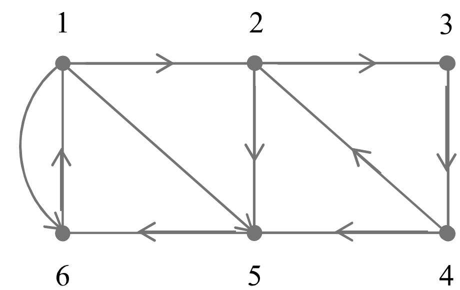
Hình 1.21. Minh họa danh sách cạnh

Danh sách cạnh của đồ thị G_1 là

Đầu	Cuối
1	2
1	6
2	3
2	6
3	4
3	5
3	6
4	5
5	6

Ví dụ 2:

Xét đồ thị có hướng G_2



G_2

Hình 1.22. Minh họa danh sách cung

Danh sách cung của đồ thị G_2 là

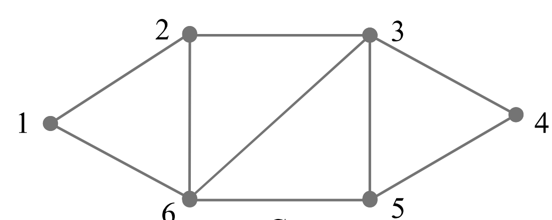
Đầu	Cuối
1	2
1	5
1	6
2	3
2	5
3	4
4	2
4	5
5	6
6	1

1.6.4. Danh sách kề

Trong cách biểu diễn này, với mỗi đỉnh v của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó, ký hiệu Ke(v) = $\{u \in V: (v, u) \in E\}$.

Ví dụ 1:

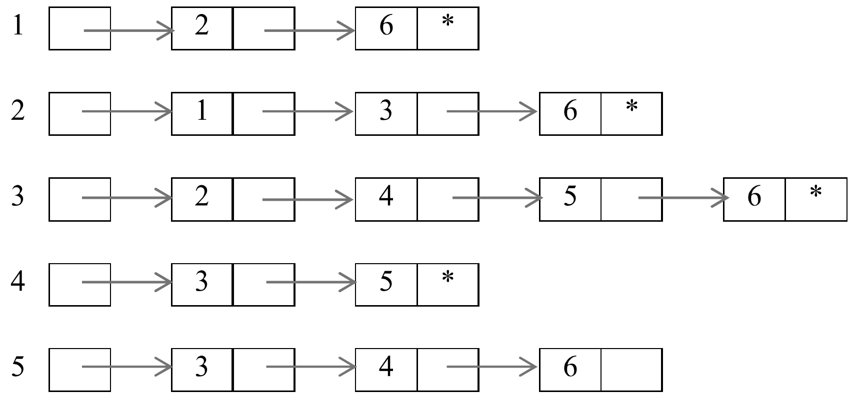
Xét đồ thị vô hướng G_1



G_1

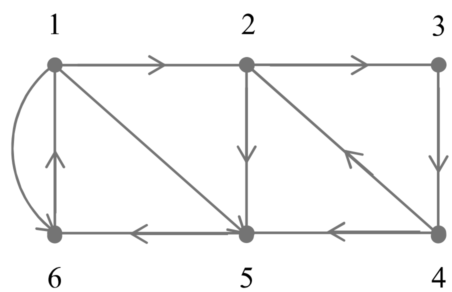
Hình 1.23. Minh họa danh sách kề đồ thị vô hướng

Danh sách kề của đồ thị G_1 có thể biểu diễn như sau:



Ví dụ 2:

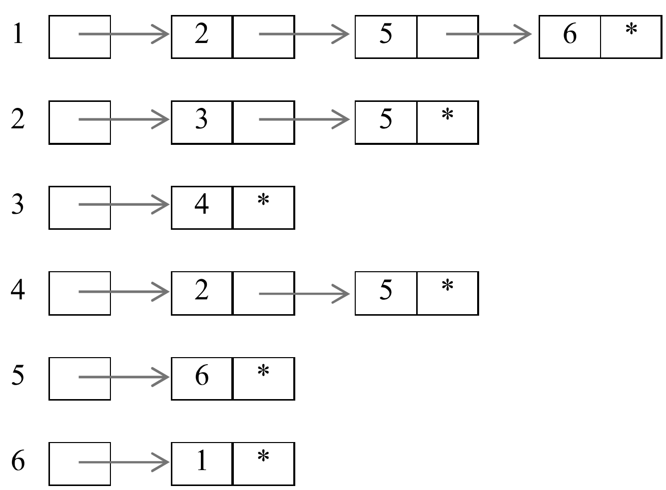
Xét đồ thị có hướng G_2



G_2

Hình 1.24. Minh họa danh sách kề (đồ thị có hướng)

Danh sách kề của đồ thị G_2 có thể biểu diễn như sau:



📖 **Nhận xét**

Về chi phí khi sử dụng các cách lưu trữ đồ thị vừa trình bày, ta có nhận xét như sau:

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (hoặc ma trận trọng số) ta sử dụng n^2 bộ nhớ (không phụ thuộc vào số cạnh của đồ thị). Để xác định hai đỉnh kề nhau, chỉ thực hiện một phép so sánh.

Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh (cung) ta cần sử dụng 2m đơn vị bộ nhớ. Để xác định những đỉnh nào của đồ thị là kề với một đỉnh cho trước chúng ta phải thực hiện khoảng m phép so sánh (khi duyệt qua danh sách tất cả các cạnh của đồ thị). Trong trường hợp đồ thị có trọng số ta cần thêm m đơn vị bộ nhớ để lưu trữ trọng số của các cạnh.

Biểu diễn bằng danh sách kề chúng ta cần phải sử dụng khoảng m+n đơn vị bộ nhớ.

1.6.5. Ví dụ

Ví dụ sau được viết bằng ngôn ngữ C, minh họa cách biểu diễn đồ thị trên máy tính bằng ma trận kề:

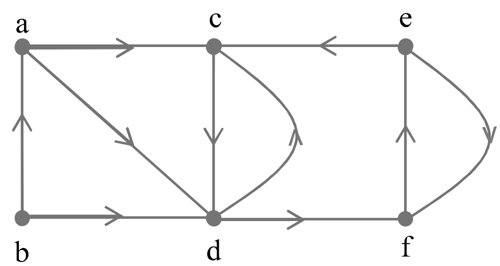
```
#define MAX 20
int A[MAX][MAX];        // Ma trận kề của đồ thị
int n;                  // Số đỉnh của đồ thị
int bac[MAX];           // Bậc các đỉnh của đồ thị
// Hàm nhập ma trận kề từ bàn phím
void NhapMaTranKe(int A[][MAX], int &n)
{
      printf("Nhap n:");
      scanf("%d", &n);
      for (int i=0; i<n; i++)
      {
            for (int j=0; j<n; j++)
            {
                  printf("A[%d,%d] = ", i+1, j+1);
                  scanf("%d", &(A[i][j]));
            }
       }
}
// Hàm xuất ma trận kề ra màn hình
void XuatMaTranKe(int A[][MAX], int n)
{
      printf("\nMa tran ke:\n");
      for (int i=0; i<n; i++)
      {
             for (int j=0; j<n; j++)
                   printf("%3d ", A[i][j]);
             printf("\n");
       }
}
```

```
// Hàm đọc ma trận kề từ tập tin text
int DocMaTranKe(char *fileName, int A[][MAX], int &n)
{
      FILE *f = fopen(fileName, "rt");
      if (f == NULL)
      {
            printf("Doc file loi !!!");
            return 0;
      }
      fscanf(f, "%d", &n);
      for (int i=0; i<n; i++)
      {
            for (int j=0; j<n; j++)
            {
                  fscanf(f, "%d", &(A[i][j]));
            }
      }
      return 1;
}
// Hàm xác định bậc của các đỉnh, đồ thị vô hướng
void TinhBacCuaDinh(int A[][MAX], int n, int bac[])
{
       for(int i=0; i<n; i++)
            for(bac[i]=0, int j=0; j<n; j++)
                  bac[i] += A[i][j];
}
```

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

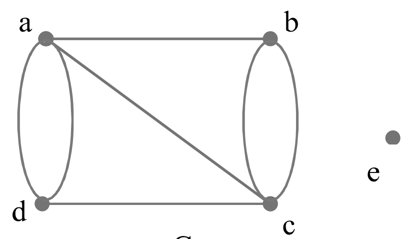
1. Đồ thị nào dưới đây là đơn đồ thị, đa đồ thị. Nếu không là đơn đồ thị, hãy tìm tập các cạnh mà nếu bỏ đi sẽ nhận được đồ thị đơn.

a)



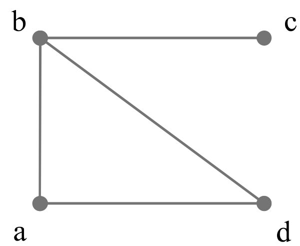
G_1

b)



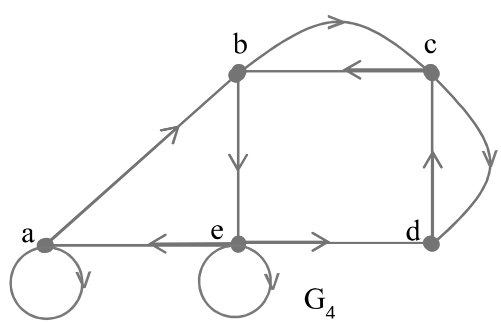
G_2

c)



G_3

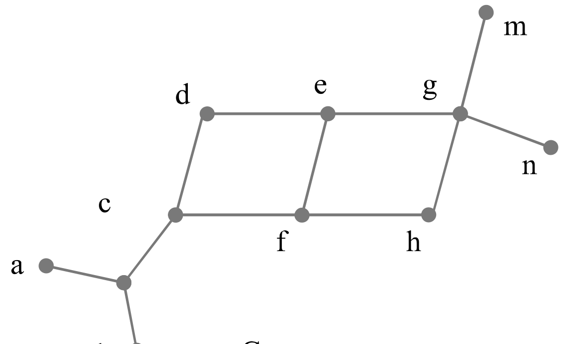
d)



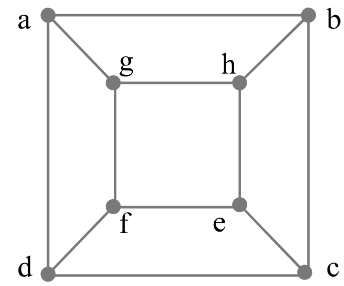
G_4

2. Hãy xác định số đỉnh, số cung, bán bậc vào và bán bậc ra của các đỉnh trong các đồ thị có hướng ở câu 1.

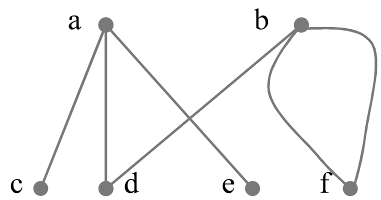
3. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị lưỡng phân. Nếu là đồ thị lưỡng phân, hãy xác định tập các đỉnh V1 và V2.



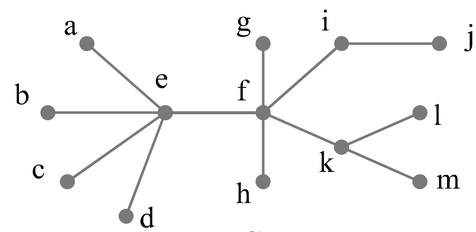
G_1



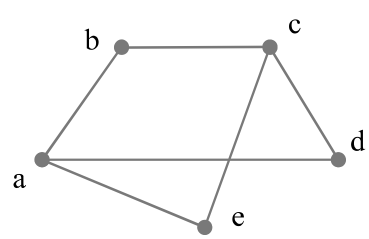
G_2



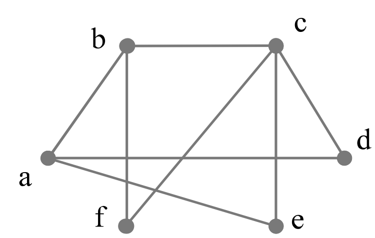
G_3



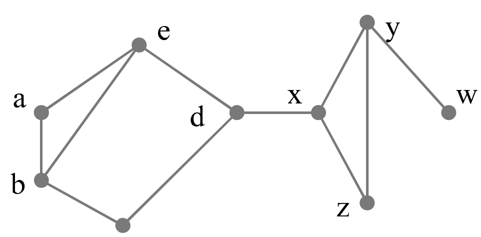
G_4



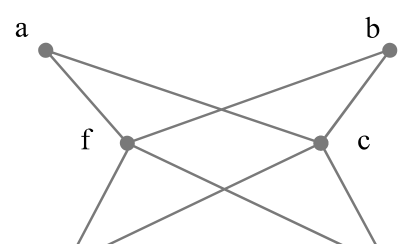
G_5



G_6



G_7



G_8

4. Cho biết bậc các đỉnh của đồ thị là 4, 3, 3, 2, 2. Tính số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.

5. Có thể tồn tại đơn đồ thị có 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 không?

6. Có tồn tại đơn đồ thị có 5 đỉnh với số bậc sau đây không? Nếu có, vẽ đồ thị đó.

a. 3, 3, 3, 3, 2 c. 3, 4, 3, 4, 3 e. 2, 2, 2, 3, 3

b. 1, 2, 3, 4, 5 d. 0, 1, 2, 2, 3 f. 0, 1, 3, 4, 4

7. Vẽ các đồ thị sau đây: K_6, $K_{1,8}$, $K_{4,4}$.

8. Trong 1 cuộc liên hoan, mọi người bắt tay nhau. Chứng minh rằng tổng số lượt bắt tay của tất cả mọi người là một số chẵn, giả sử rằng không ai tự bắt tay mình.

9. Trong một kì nghỉ hè, có 7 người bạn đi nghỉ mát ở xa. Họ hứa với nhau rằng, trong suốt kì nghỉ, mỗi người phải viết thư hồi âm cho đúng 3 người trong số họ. Chứng minh rằng có ít nhất 1 người không thực hiện đúng lời hứa (giả sử rằng không ai tự viết thư cho mình).

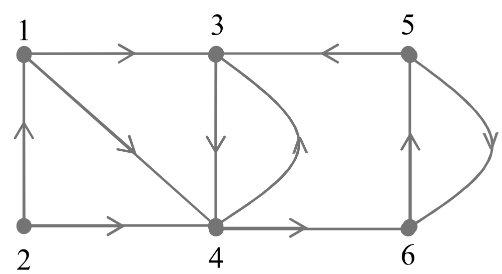
10. Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị 100 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 50?

11. Một đồ thị có 15 cạnh với 3 đỉnh bậc 4, các đỉnh còn lại đều có bậc 3. Hỏi đồ thị này có mấy đỉnh?

12. Biểu diễn các đồ thị dưới đây bằng:

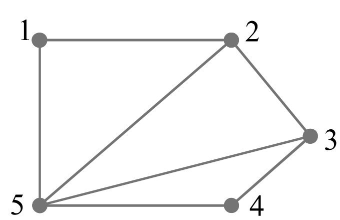
- Ma trận kề
- Danh sách cạnh (cung)
- Danh sách kề.

a)



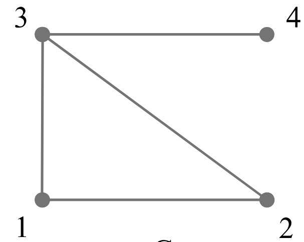
G_1

b)



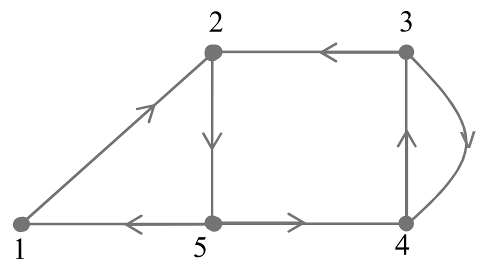
G_2

c)



G_3

d)



G_4

13. Dựng đồ thị từ ma trận kề dưới đây:

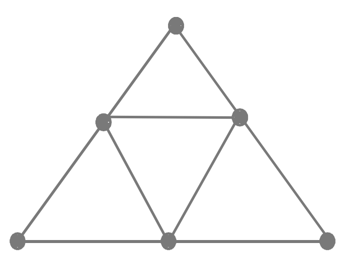
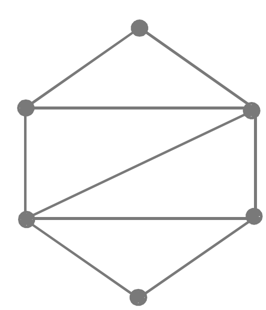
a)

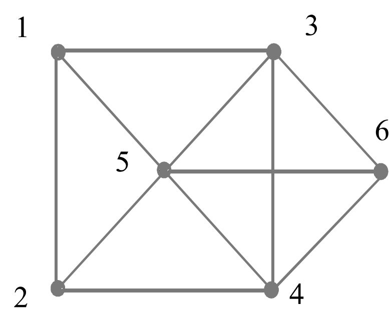
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

b)

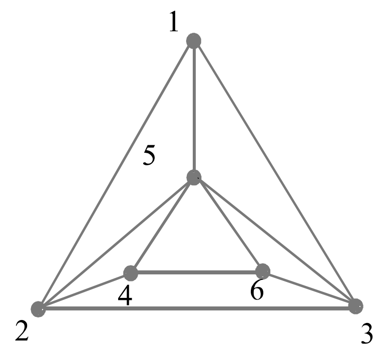
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

14. Các đồ thị sau đẳng cấu với nhau hay không

a)  ? 

b) 

?



15. Viết chương trình nhập vào ma trận kề của đồ thị vô hướng (tối đa 20 đỉnh). Ghi ma trận vừa nhập vào tập tin văn bản dưới dạng:

N ← số đỉnh của đồ thị

← ma trận kề tương ứng của đồ thị, N dòng

16. Cho tập tin văn bản có cấu trúc sau:

0/1 M N

\- -

\- - N dòng, mỗi dòng thể hiện đỉnh đầu và đỉnh cuối của một cạnh

\- -

Dòng đầu tiên cho biết loại đồ thị, số đỉnh, số cạnh của đồ thị.

0: vô hướng, 1: có hướng

M: số đỉnh, N: số cạnh

Viết chương trình nhập đồ thị từ file có cấu trúc như trên.

a. Xuất đồ thị ra màn hình dưới dạng ma trận kề của nó và các thông tin liên quan: loại đồ thị, số đỉnh, số cạnh.

b. Ghi đồ thị vào tập tin văn bản với các thông tin liên quan loại đồ thị, số đỉnh, số cạnh, và ma trận kề của nó.

17. Nhập vào danh sách cạnh của đồ thị vô hướng. Dùng danh sách liên kết đơn để cài đặt danh sách kề và xác định bậc của các đỉnh của đồ thị.

18. Cho danh sách cung của đồ thị có hướng (nhập từ bàn phím hoặc từ tập tin). Hãy xác định bậc vào, bậc ra của từng đỉnh.

Tập tin có dạng

$$\begin{array}{ll} m \quad n & \\ \left.\begin{array}{cc} - & - \\ - & - \\ - & - \end{array}\right\} & m \text{ dòng} \end{array}$$

Trong đó: m: số cạnh, n: số đỉnh. m dòng tiếp theo là danh sách các đỉnh đầu và đỉnh cuối của đồ thị.

19. Cho ma trận kề của đồ thị vô hướng. Hãy cho biết bậc của mỗi đỉnh và các đỉnh kề với nó. Dữ liệu vào của đồ thị được cho từ file.

20. Cho ma trận kề của đồ thị vô hướng. Tìm các đỉnh có bậc cao nhất. Biết rằng:

Dữ liệu vào: từ file

Kết quả (ghi ra file): ghi trên 1 dòng gồm tên các đỉnh có bậc cao nhất.