CHƯƠNG 7

Luồng cực đại trong mạng

Luồng cực đại trong mạng

- Giới thiệu
- Các định nghĩa, định lý
- Bài toán luồng cực đại
- Thuật toán Ford - Fulkerson

Giới thiệu

- Luồng cực đại là một trong những bài toán tối ưu của Lý thuyết Đồ thị, được đề xuất vào đầu những năm 1950.
- Bài toán gắn liền và trở nên nổi tiếng với tên tuổi của hai nhà toán học Mỹ là Ford và Fulkerson

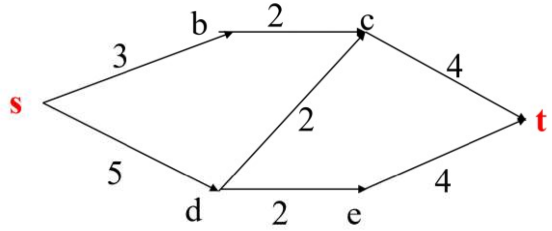
Các định nghĩa, định lý

ĐN1 (Mạng): Đồ thị có hướng $G=(V,E)$ là mạng khi và chỉ khi:

- □ Tồn tại duy nhất một đỉnh s ∈ V, mà tại s không có cung đi vào. Điểm s gọi là điểm phát
- □ Tồn tại duy nhất một đỉnh t ∈ V, mà tại t không có cung đi ra. Điểm t gọi là điểm thu
- □ Mỗi cung u(i,j) ∈ E đều được gán 1 giá trị nguyên không âm c(i,j) và gọi là khả năng thông qua của cung.

Các định nghĩa, định lý (tt)

- Đồ thị sau là mạng với điểm phát là đỉnh s và điểm thu là t



Ta có khả năng thông qua
C(s,b) = 3, C(b,c) = 2, C(s,d) = 5, C(d,c) = 2,
C(d,e) = 2, C(c,t) = 4, C(e,t) = 4

Các định nghĩa, định lý (tt)

- Với một mạng G = (V, E, c), ta ký hiệu:
  - $W^-(x) = \{ (a, x) \in E \mid a \in V \}$ - tập các cạnh đi vào đỉnh *x.*
  - $W^+(x) = \{ (x, b) \in E \mid b \in V \}$ - tập các cạnh đi ra khỏi đỉnh *x.*

Các định nghĩa, định lý (tt)

- ĐN2 (Luồng trên mạng): Hàm $f : E \to N$ là một *luồng* đi qua mạng (G, c) nếu:
  - $\forall\ e \in E :\ f(e) \le c(e)$: luồng trên mỗi cạnh không được vượt quá khả năng thông qua của cạnh đó.
  - $\forall\ x \neq s$ và $t : f(W^-(x)) = f(W^+(x))$: luồng trên các đỉnh phải cân bằng
  - Giá trị của luồng f là số

    $\mathrm{Val}(f) = f(W^+(s)) = f(W^-(t))$

Các định nghĩa, định lý (tt)

- **ĐN3 (lát cắt):** Ta gọi lát cắt (X,X*) là một cách phân hoạch tập đỉnh V của mạng ra thành hai tập X và X* = V\X, trong đó s ∈ X, t ∈ X* . Khả năng thông qua của lát cắt (X,X*) là số:

$$c(X,X^*) = \sum_{\substack{v \in X \\ w \in X^*}} c(v,w)$$

- Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất được gọi là lát cắt hẹp nhất.

Các định nghĩa, định lý (tt)

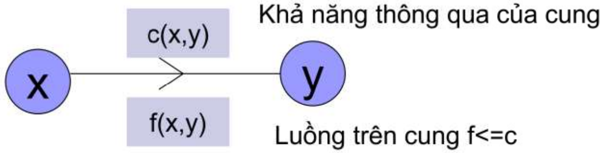
- **Bổ đề 1:** Giá trị của luồng f trong mạng luôn <= khả năng thông qua của lát cắt (X,X*) bất kỳ trong nó.
- **Hệ quả 1:** Giá trị luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất trong mạng

Bài toán luồng cực đại

- **Phát biểu:** Cho mạng G với nguồn s, đích t và khả năng thông qua C(i,j). Trong số các luồng trên mạng G, tìm luồng có giá trị lớn nhất.
- **Ý tưởng**: xuất phát từ luồng nào đó, ta tìm đường đi từ s đến t, cho phép hiệu chỉnh giá trị luồng f trên đường đi đó, sao cho luồng mới có giá trị lớn hơn. Nếu không tìm được đường đi như vậy thì ta có luồng cực đại.
- Đồ thị Gf đó được gọi là đồ thị tăng luồng.

Định lý

- Gọi f là luồng trên mạng G=(V,E). Các mệnh đề sau đây là tương đương:
  - f là luồng cực đại trong mạng
  - Không tìm được đường tăng luồng f
  - ∃ một lát cắt (X,X*) mà val(f)=c(X,X*)



Thuật toán Ford - Fulkerson

1. Gán nhãn cho các đỉnh

- Mỗi đỉnh sẽ có 1 trong 3 trạng thái
  - Đỉnh chưa có nhãn
  - Đỉnh có nhãn nhưng chưa xét
  - Đỉnh có nhãn đã xét xong
- Nhãn của đỉnh y sẽ có dạng **y: [±x, σ(y)]**
  - +x: cần tăng luồng theo cung (x,y)
  - -x: cần giảm luồng theo cung (y,x)
  - σ(y): là lượng dùng để tăng/giảm
- Đầu tiên, các đỉnh đều chưa có nhãn

Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

- B1:
  - Gán nhãn cho đỉnh phát **s: [+s, ∞]**
  - Đỉnh s có nhãn nhưng chưa xét
  - Tất cả các đỉnh khác chưa có nhãn

Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

- B2:
  - Xét 1 đỉnh có nhãn nhưng chưa xét, giả sử đó là x: **[±y, σ(y)]**
  - Với mỗi đỉnh u chưa có nhãn, là ảnh của x (đỉnh cuối) và f(x,u)<c(x,u), được gán nhãn
    - u: [+x, **σ**(u)]   với **σ**(u) = min(**σ**(x), c(x,y)-f(x,y))
  - Với mỗi đỉnh v chưa có nhãn, là tạo ảnh của x (đỉnh đầu) và f(v,x)>0, được gán nhãn
    - v: [-x, **σ**(v)]   với **σ**(v) = min(**σ**(x), f(v,x))
  - x có nhãn đã xét; u,v có nhãn nhưng chưa xét

Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

- B3:
  - Lặp lại B2 cho đến khi:
    - Hoặc là đỉnh thu T được gán nhãn → B4
    - Hoặc là đỉnh T không được gán nhãn và cũng không thể gán nhãn. **Trường hợp này giải thuật kết thúc với luồng cực đại**.

      Gọi X_0 là tập hợp các đỉnh có nhãn

      Gọi Y_0 là tập hợp các đỉnh không có nhãn

      Thì (X_0, Y_0) là lát cắt hẹp nhất

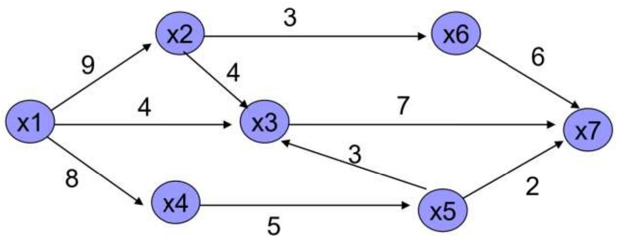
Thuật toán Ford – Fulkerson (tt)

2. Tăng luồng

- B4: Đặt x = t
- B5
  - Nếu nhãn x: [+y, **σ**(x)] thì tăng luồng từ y→x là σ(t)
  - Nếu nhãn x: [-y, **σ**(x)] thì giảm luồng từ x→y là σ(t)
- B6
  - Nếu x = s (điểm phát) thì xoá tất cả các nhãn, quay lại **B1** với luồng đã được điều chỉnh ở **B5**
  - Nếu x ≠ s thì đặt x = y và quay lại **B5**

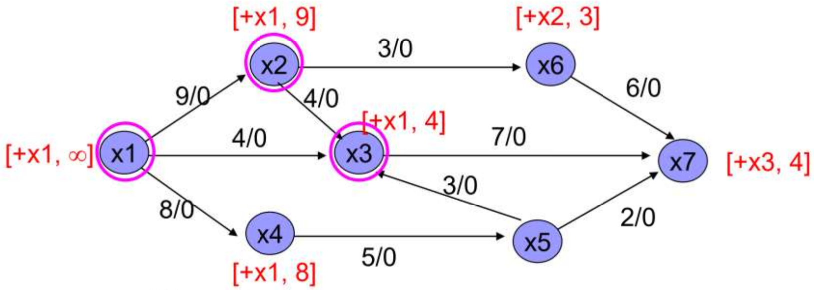
Ví dụ:

- Tìm luồng cực đại trong mạng sau đây



Giải

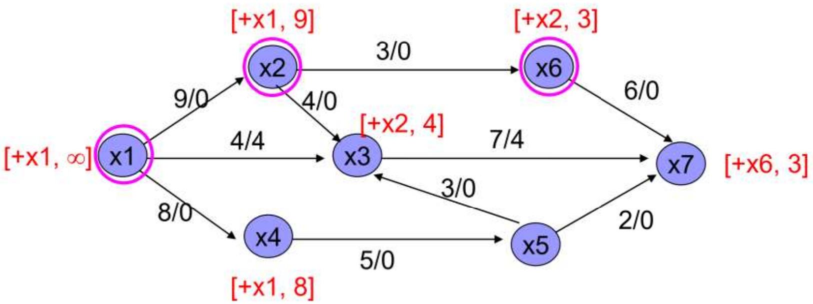
- Lần lặp thứ 1 (luồng =0)



- Chọn x2
- Chọn x3
- Đặt x=x7: [+x3, 4] → tăng luồng (x3, x7) lên 4
- Đặt x=x3: [+x1,4] → tăng luồng (x1, x3) lên 4

Giải

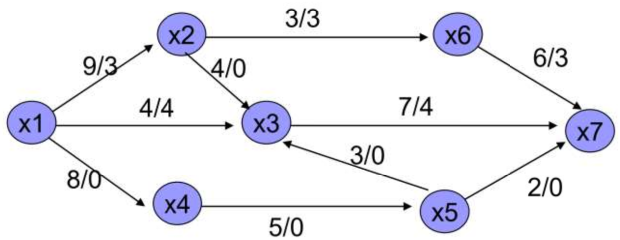
- Lần lặp thứ 2 (với luồng đã điều chỉnh)



- Đặt x=x7: [+x6, 3] → tăng luồng (x6, x7) lên 3
- Đặt x=x6: [+x2, 3] → tăng luồng (x2, x6) lên 3
- Đặt x=x2: [+x1, 9] → tăng luồng (x1, x2) lên 3

Giải

- Lần lặp thứ 3 (với luồng đã điều chỉnh): …..



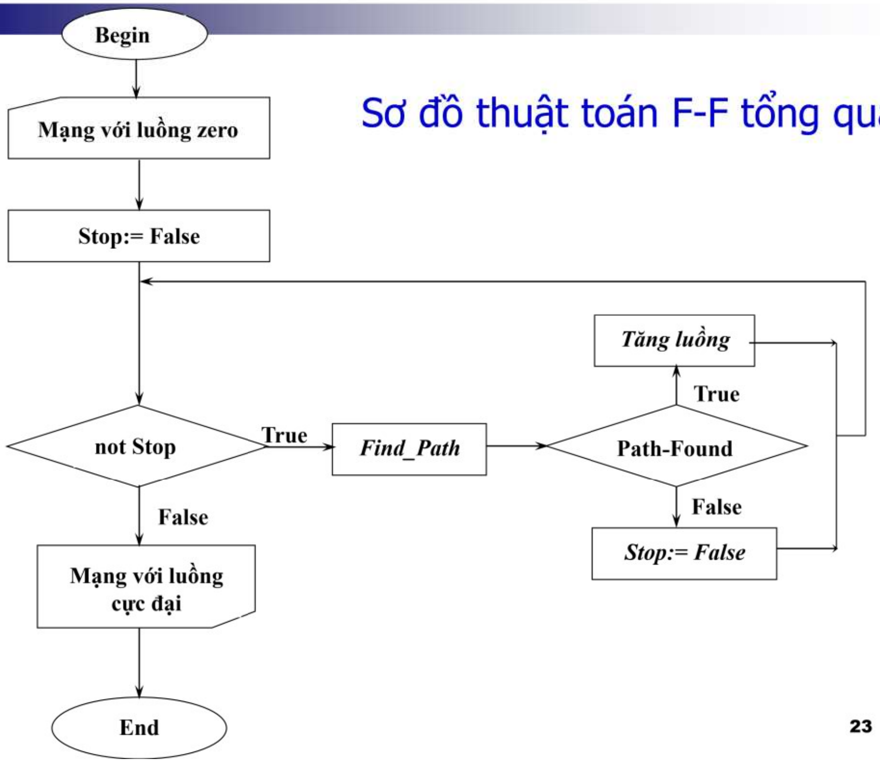
Giải

- Lần lặp thứ 4 (với luồng đã điều chỉnh):

Giải

- Lần lặp thứ 5 (với luồng đã điều chỉnh):

Sơ đồ thuật toán F-F tổng quát



Câu hỏi???