Chương 4

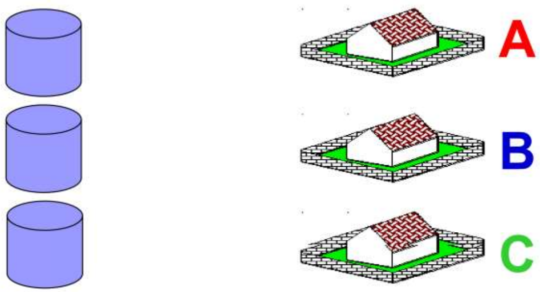
ĐỒ THỊ PHẲNG
VÀ TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Nội dung

- Bài toán
- Khái niệm đồ thị phẳng
- Công thức Euler
- Định lý Kuratowski
- Tô màu đồ thị
- Một số ứng dụng

Bài toán

- Có 3 nhà và 3 cái giếng. Các nhà đều muốn thiết kế đường dây nối từ nhà đến mỗi giếng nhưng không được cắt nhau. Hỏi phải thiết kế làm sao cho các dây nối không cắt nhau?



Khái niệm đồ thị phẳng

- Mô hình hoá bài toán bằng đồ thị lưỡng phân đủ $K_{3,3}$
- Câu hỏi: “Có hay không cách vẽ đồ thị $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau?”

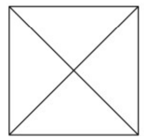
Khái niệm đồ thị phẳng (tt)

- **Định nghĩa:** Đồ thị vô hướng G là đồ thị phẳng nếu ta có thể biểu diễn nó trên một mặt phẳng sao cho không có cạnh nào cắt nhau.
- *Chú ý: một đồ thị có thể được vẽ bằng nhiều cách khác nhau. Nếu tồn tại một cách vẽ thoả mãn định nghĩa trên thì nó là đồ thị phẳng*

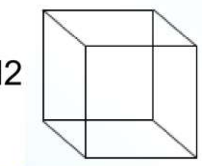
Khái niệm đồ thị phẳng (tt)

- VD:

H1

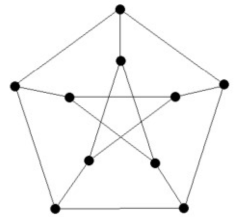


H2



Đồ thị phẳng

H3



Không là đồ thị phẳng

Công thức Euler

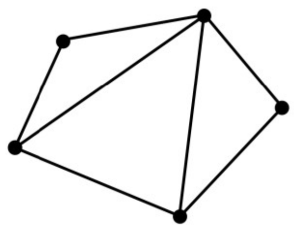
- **<u>Định lý:</u>** Cho G là đồ thị phẳng, liên thông với n đỉnh và e cạnh. Gọi d là số miền trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó, ta có:

$$\mathbf{d = e - n + 2}$$

Công thức Euler (tt)

- VD:

  Số miền biểu diễn phẳng của đồ thị?



Công thức Euler (tt)

- VD: CMR $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.
- Giải

Công thức Euler (tt)

- **Hệ quả 1.** Nếu G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, n đỉnh, trong đó n ≥ 3. Khi đó ta có:

$$e \leq 3n - 6$$

- **Hệ quả 2.** Trong một đồ thị phẳng liên thông tùy ý, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc không vượt quá 5.

Công thức Euler (tt)

- **Hệ quả 3.** Giả sử G là đơn đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh và e cạnh và *không chứa chu trình đơn độ dài 3*. Khi đó

$$e \leq 2n - 4$$

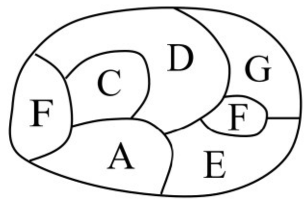
Định lý Kuratowski

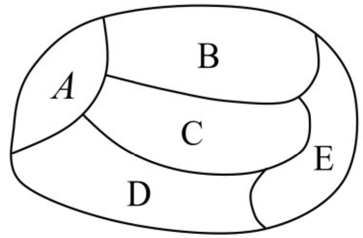
- **Định lý:** Đồ thị G không là đồ thị phẳng khi và chỉ khi G chứa đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$
  - K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất, vì khi xóa bất kỳ đỉnh hoặc cạnh của các đồ thị này sẽ nhận được đồ thị phẳng.
  - K_5 là đồ thị không phẳng ít đỉnh nhất.
  - $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng ít cạnh nhất.

Tô màu đồ thị

Tô màu đồ thị (tt)

- Để phân biệt các miền trên bản đồ ta phải tô màu chúng bằng các màu khác nhau
- Cần ít nhất bao nhiêu màu để tô một bản đồ bất kỳ sao cho các miền kề nhau không cùng một màu?

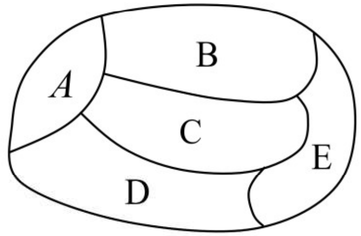




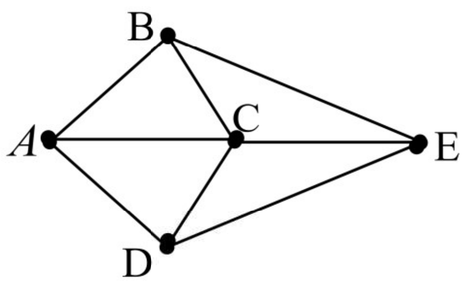
Tô màu đồ thị (tt)

- Mô hình bài toán:
  - Mỗi miền tương ứng một đỉnh của đồ thị
  - Hai đỉnh có cạnh nối nếu chúng là hai miền có chung biên giới
  - Đồ thị nhận được gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ. Đồ thị đối ngẫu của bản đồ là đồ thị phẳng.

Tô màu đồ thị (tt)



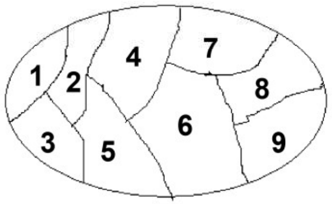
Bản đồ

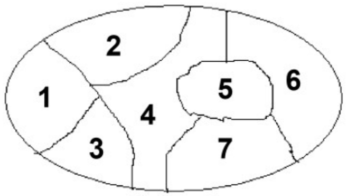


Đồ thị

Tô màu đồ thị (tt)

- Hãy biểu diễn đồ thị cho các bản đồ sau?





Tô màu đồ thị (tt)

- **Định lý 1**: Mọi chu trình độ dài lẻ đều có sắc số là 3.
- **Định lý 2**: Đồ thị G có sắc số là 2 khi và chỉ khi G không có chu trình độ dài lẻ.
- **Định lý 3**: **(Định lý 5 màu của Kempe-Heawood):** Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 5 màu.

Tô màu đồ thị (tt)

- **Định lý 4** **(Định lý 4 màu của Appel-Haken, 1976)** Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số không lớn hơn 4.
- Lưu ý
  - Định lý 4 màu chỉ đúng với đồ thị phẳng, với đồ thị không phẳng: **có thể cần nhiều hơn 4 màu**.

Tô màu đồ thị (tt)

- **Sắc số của một số đồ thị cơ bản**
  - Đồ thị lưỡng phân đủ có sắc số là **2**.
  - Đồ thị vòng có sắc số là **2** nếu số đỉnh n chẵn, là 3 nếu số đỉnh n lẻ.
  - Đồ thị bánh xe ($n \geq 4$) có sắc số là **4** nếu số đỉnh n chẵn, là **3** nếu số đỉnh n lẻ.
  - Đồ thị đầy đủ K_n có sắc số là **n**.

Thuật toán tô màu đồ thị

Liệt kê các tập **V’** các đỉnh của đồ thị theo thứ tự bậc giảm dần.

k=1

while V’ ≠ ∅ do

{ Tô màu k cho đỉnh **v** đầu tiên trong danh sách

Tô màu k cho các đỉnh tiếp theo không kề v

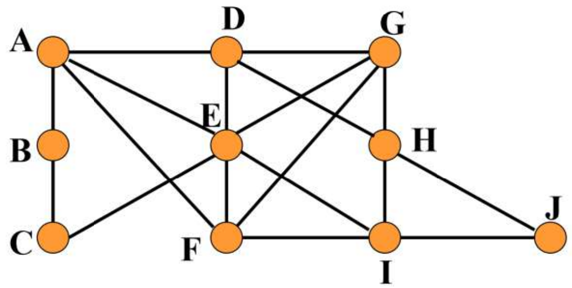
Loại khỏi V’ các đỉnh đã tô màu

k=k+1

}

Thuật toán tô màu đồ thị (tt)

- **VD:** tô màu cho đồ thị dưới đây



Thuật toán tô màu đồ thị (tt)

- **Giải**

Một số bài toán ứng dụng

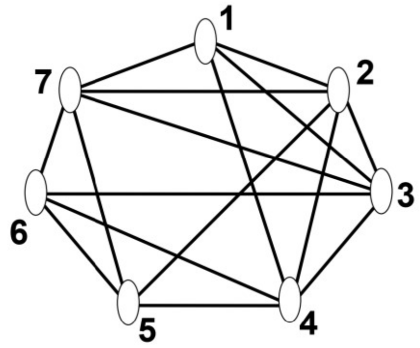
- Các bài toán xếp lịch
  - Lịch thi
  - Lịch công tác
  - Thời khoá biểu
- Bài toán điều khiển đèn các nút giao thông

Một số bài toán ứng dụng (tt)

- Xếp lịch: xếp lịch thi trong một trường sao cho không có sinh viên (lớp) nào thi hai môn cùng một lúc.
- Giải pháp:
  - Mỗi môn học là một đỉnh
  - Nếu 2 môn học nào được dự thi bởi cùng 1 sinh viên thì sẽ nối bằng 1 cạnh.
  - Cách lập lịch sẽ tương ứng với bài toán tô màu của đồ thị này.

Một số bài toán ứng dụng (tt)

- <u>**VD:**</u> Có 7 môn thi với thông tin SV dự thi như sau:
  - **Môn 1: có sv A, B, C và D**
  - **Môn 2: có sv A, E, F, G và H**
  - **Môn 3: có sv B, E, I, J và K**
  - **Môn 4: có sv B, F, L và M**
  - **Môn 5: có sv G, L, N và O**
  - **Môn 6: có sv J, M, N và P**
  - **Môn 7: có sv D, H, K, O và P**



Câu hỏi???