CHƯƠNG 7
LUỒNG CỰC ĐẠI TRÊN MẠNG

Mạng có ở khắp mọi nơi trong đời sống hằng ngày của chúng ta, mạng mang lại nhiều lợi ích thiết thực. Mạng lưới điện và năng lượng mang lại ánh sáng và phương tiện giải trí. Mạng điện thoại cho phép chúng ta liên lạc với nhau dù đang ở nơi nào trên thế giới. Hệ thống đường quốc lộ, đường sắt và đường hàng không cho phép mọi người vượt qua khoảng cách địa lý khác nhau để công tác, du lịch hay giải trí. Mạng lưới sản xuất và phân phối sản phẩm thì cung cấp thực phẩm và nhu yếu phẩm hàng ngày cho con người. Mạng lưới máy tính, mạng internet cho ta phương thức trao đổi thông tin vô cùng hiệu quả.

Trong tất cả các lĩnh vực trên và trong rất nhiều lĩnh vực khác nữa, chúng ta muốn chuyển một thực thể nào đó (dòng điện, sản phẩm, con người hay xe cộ hoặc các thông điệp, …)từ một điểm đến một vị trí khác trong mạng lưới tương ứng và ta luôn muốn thực hiện công việc này sao cho hiệu quả nhất có thể.

Luồng trên mạng là một lớp các bài toán liên quan đến nhiều lĩnh vực khác nhau như toán ứng dụng, tin học, công nghệ, quản lý, … Có thể nói bài toán luồng cực đại trong mạng là một trong số những bài toán tối ưu trên đồ thị tìm được những ứng dụng rộng rãi trong thực tế cũng như những ứng dụng thú vị trong lý thuyết tổ hợp. Bài toán được đề xuất vào đầu những năm 1950, và gắn liền với tên tuổi của hai nhà bác học Mỹ là L.R.Ford và D.R.Fulkerson.

Bài toán luồng cực đại trong mạng có nhiều ứng dụng trong thực tế như: Bài toán xác định cường độ dòng lớn nhất của dòng vận tải giữa hai nút của một bản đồ giao thông, bài toán tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa của một hệ thống đường ống dẫn dầu…Ngoài ra, ứng dụng của bài toán còn để giải các bài toán như: Bài toán đám cưới vùng quê, bài toán về hệ thống đại diện chung, bài toán phân nhóm sinh hoạt, bài toán lập lịch cho hội nghị…

7.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÝ

7.1.1. Định nghĩa 1

Mạng (Network) là đơn đồ thị có hướng G=(V, E) thoả mãn:

- Có duy nhất một đỉnh, gọi là nguồn, không có cung đi vào

- Có duy nhất một đỉnh, gọi là đích, không có cung đi ra

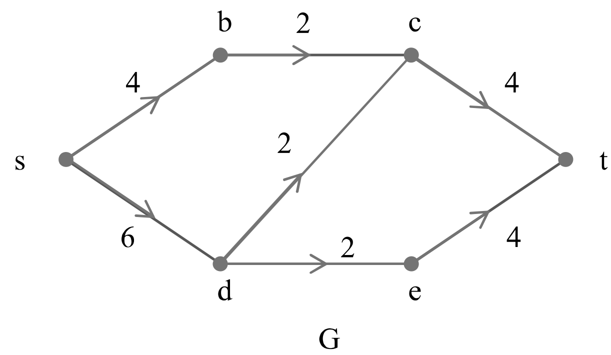
- Trọng số c(i,j) của cung (i,j) là các số không âm gọi là khả năng thông qua của cung. Ta qui ước rằng nếu không có cung (i,j) thì khả năng thông qua c(i,j) được gán bằng 0.

Ví dụ:

Đồ thị G ở hình 7.1 là mạng.

Nguồn là đỉnh s và đích là đỉnh t

Khả năng thông qua của các cung: c(s,b) = 4, c(s,d) = 6, c(b,c) = 2, c(d,c) = 2, c(d,e) = 2, c(c,t)= 4, c(e,t) = 4.



Hình 7.1. Mạng G

7.1.2. Định nghĩa 2

Cho mạng G, với khả năng thông qua c(i,j), cung e=(i,j) $\in$ E. Tập các giá trị $\{f_{ij} \mid (i, j) \in G\}$ gọi là luồng trên cung nếu thoả mãn:

- Luồng trên cung e $\in$ E không vượt quá khả năng thông qua của nó

$$0 \le f(e) \le c(e) \quad \forall e \in E \text{ hay } 0 \le f_{ij} \le c(i,j) \quad \forall (i, j) \in G$$

- Điều kiện cân bằng luồng trên mỗi đỉnh của mạng: Tổng luồng trên các cung đi vào đỉnh v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi đỉnh v, với mọi đỉnh v không phải là nguồn hoặc đích.

$$Div\ f(v) = \sum_{w \in \Gamma^-(v)} f(w,v) - \sum_{w \in \Gamma^+(v)} f(v,w) = 0$$

trong đó $\Gamma^-(v)$ là tập các đỉnh của mạng mà từ đó có cung đi vào v,

$\Gamma^+(v)$ là tập các đỉnh của mạng mà từ v có cung đến nó:

$$\Gamma^-(v) = \{ w \in V : (w,v) \in E\},$$

$$\Gamma^+(v) = \{ w \in V : (v,w) \in E\}.$$

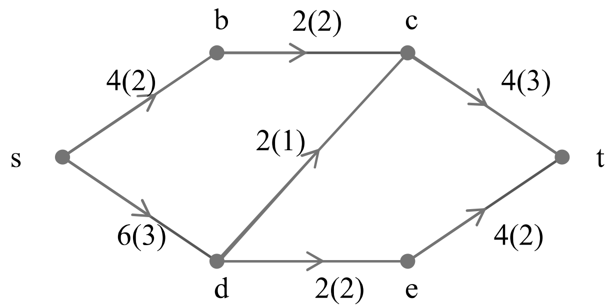
Giá trị của luồng f là số

$$Val(f) = \sum_{w \in \Gamma^+(s)} f(s,w) = \sum_{w \in \Gamma^-(t)} f(w,t)$$

Ví dụ:

Cho mạng như hình 7.2, luồng được biểu diễn bằng các số trong ngoặc đơn.

Tập $\{f_{ij}\}$ là luồng: $f_{sb} = 2$, $f_{sd} = 3$, $f_{bc} = 2$, $f_{dc} = 1$, $f_{de} = 2$, $f_{ct} = 3$, $f_{et} = 2$



Hình 7.2. Luồng trên mạng

7.1.3. Định nghĩa 3

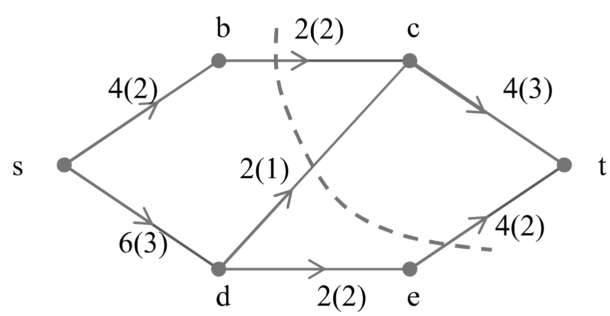
Ta gọi lát cắt (X,X^*) là một cách phân hoạch tập đỉnh V của mạng ra thành hai tập X và $X^* = V\backslash X$, trong đó $s \in X$, $t \in X^*$. Khả năng thông qua của lát cắt (X,X^*) là số

$$c(X,X^*) = \sum_{\substack{v \in X \\ w \in X^*}} c(v,w)$$

Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất được gọi là lát cắt hẹp nhất.

Ví dụ:

Lát cắt phân hoạch tập đỉnh X và X* như hình 7.3



Hình 7.3. Lát cắt

7.1.4. Định lý 1

Giá trị của luồng f trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X,X^*) bất kỳ trong nó: $val(f) \le c(X,X^*)$.

Chứng minh:

Cộng các điều kiện cân bằng luồng Div f(v)=0 với mọi $v \in X$. Khi đó ta có

$$\sum_{v\in X} \left(\sum_{w\in \Gamma^-(v)} f(w,v) - \sum_{w\in \Gamma^+(v)} f(v,w) \right) = -Val(f)$$

Tổng này sẽ gồm các số hạng dạng f(u,v) với dấu cộng hoặc dấu trừ mà trong đó có ít nhất một trong hai đỉnh u, v phải thuộc tập X. Nếu cả hai đỉnh u,v đều trong tập X, thì f(u,v) xuất hiện với dấu cộng trong Div f(v) và với dấu trừ trong Div f(u), vì thế, chúng triệt tiêu lẫn nhau. Do đó, sau khi giản ước các số hạng như vậy ở vế trái, ta thu được

$$-\sum_{\substack{v\in X\\ w\in X^*}} f(v,w) + \sum_{\substack{v\in X^*\\ w\in X}} f(v,w) = -val(f),$$

Hay là $$val(f) = \sum_{\substack{v\in X\\ w\in X^*}} f(v,w) - \sum_{\substack{v\in X^*\\ w\in X}} f(v,w)$$

Mặt khác $$\sum_{\substack{v\in X\\ w\in X^*}} f(v,w) \le \sum_{\substack{v\in X\\ w\in X^*}} c(v,w)$$

Nên $$val(f) = \sum_{\substack{v\in X\\ w\in X^*}} f(v,w) - \sum_{\substack{v\in X^*\\ w\in X}} f(v,w) \le \sum_{\substack{v\in X\\ w\in X^*}} c(v,w) - \sum_{\substack{v\in X^*\\ w\in X}} f(v,w)$$

Mà $$-\sum_{\substack{v\in X^*\\ w\in X}} f(v,w) \le 0$$

Suy ra $val(f) \le c(X,X^*)$. Định lý được chứng minh.

7.1.5. Hệ quả

Giá trị luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất trong mạng.

7.1.6. Định nghĩa 4

Định nghĩa đồ thị tăng luồng:

Giả sử f là một luồng trong mạng G = (V,E). Từ mạng G =(V,E) ta xây dựng đồ thị có trọng số trên cung Gf = (V, Ef), với tập cung Ef và trọng số trên các cung được xác định theo qui tắc sau:

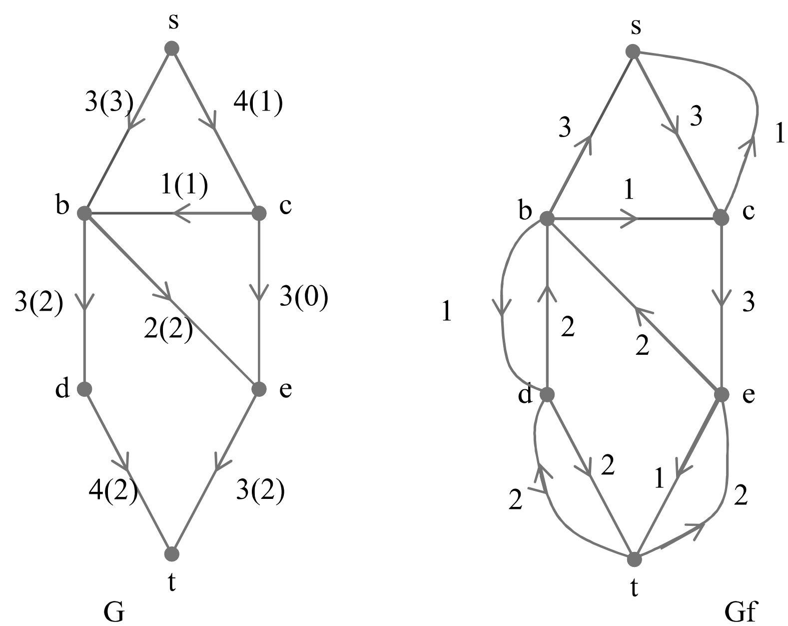
Nếu $e=(v,w) \in E$ với $f(v,w) =0$, thì $(v,w) \in Ef$ với trọng số $c(v,w)$

Nếu $e=(v,w) \in E$ với $f(v,w) =c(v,w)$, thì $(w,v) \in Ef$ với trọng số $f(v,w)$

Nếu e=(v,w) ∈ E với 0<f(v,w)<c(v,w), thì (v,w) ∈ Ef với trọng số c(v,w)-f(v,w) và (w,v) ∈ Ef với trọng số f(v,w).

Các cung của Gf đồng thời cũng là cung của G được gọi là cung thuận, các cung còn lại được gọi là cung nghịch. Đồ thị Gf được gọi là đồ thị tăng luồng.

Ví dụ:



Hình 7.4. Mạng G, luồng f và đồ thị tăng luồng tương ứng

Giả sử P=(s=v_0, v_1, . . . , v_k=t) là một đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng Gf. Gọi δ là giá trị nhỏ nhất của các trọng số của các cung trên đường đi P. Xây dựng luồng f' trên mạng theo qui tắc sau:

$$f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \delta, & \text{nếu } (u,v) \in P \text{ là cung thuận} \\ f(u,v) - \delta, & \text{nếu } (v,u) \in P \text{ là cung nghịch} \\ f(u,v), & \text{nếu } (u,v) \notin P \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng f' được xây dựng như trên là luồng trên mạng và val(f') = val(f) + δ . Ta sẽ gọi thủ tục biến đổi luồng vừa nêu là tăng luồng dọc theo đường P.

Ta gọi đường tăng luồng f là mọi đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng G(f).

7.1.7. Định lý 2

Các mệnh đề dưới đây là tương đương:

a. f là luồng cực đại trong mạng

b. Không tìm được đường tăng luồng f
c. $val(f)=c(X,X^*)$ với một lát cắt (X,X^*) nào đó.

Chứng minh:

a. $\rightarrow$ b. Giả sử ngược lại, tìm được đường tăng luồng P. Khi đó ta có thể tăng giá trị luồng bằng cách tăng luồng dọc theo đường P. Điều đó mâu thuẫn với tính cực đại của luồng f.

b. $\rightarrow$ c. Giả sử không tìm được đường tăng luồng. Ký hiệu X là tập tất cả các đỉnh có thể đến được từ đỉnh s trong đồ thị Gf, và đặt $X^*=V\backslash X$. Khi đó (X,X^*) là lát cắt, và $f(v,w)=0$ với mọi $v \in X^*$, $w \in X$ nên

$$val(f) = \sum_{\substack{v \in X \\ w \in X^*}} f(v,w) - \sum_{\substack{v \in X^* \\ w \in X}} f(v,w) = \sum_{\substack{v \in X \\ w \in X^*}} f(v,w)$$

Với $v \in X$, $w \in X^*$, do $(v,w) \notin Gf$, nên $f(v,w) = c(v,w)$. Vậy

$$val(f) = \sum_{\substack{v \in X \\ w \in X^*}} f(v,w) = \sum_{\substack{v \in X^* \\ w \in X}} c(v,w) = c(X,X^*)$$

c. $\rightarrow$ a. Theo bổ đề 1, $val(f) \le c(X,X^*)$ với mọi luồng f và với mọi lát cắt (X,X^*). Vì vậy, từ đẳng thức $val(f) = c(X,X^*)$ suy ra luồng f là luồng cực đại trong mạng.

7.1.8. Định lý Ford-Fulkerson

Luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

Việc chứng minh định lý Ford-Fulkerson đã được thực hiện thông qua xây dựng thuật toán tìm luồng cực đại trên mạng.

7.2. BÀI TOÁN TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

7.2.1. Mô tả bài toán

Cho mạng G=(V,E). Hãy tìm luồng f* trong mạng với giá trị luồng val(f*) là lớn nhất. Luồng như vậy ta sẽ gọi là luồng cực đại trong mạng.

Bài toán như vậy có thể xuất hiện trong rất nhiều ứng dụng thực tế. Chẳng hạn khi cần xác định cường độ lớn nhất của dòng vận tải giữa hai nút của một bản đồ giao thông. Trong ví dụ này lời giải của bài toán luồng cực đại sẽ chỉ cho ta các đoạn đường đông xe nhất và chúng tạo thành "chỗ hẹp" tương ứng với dòng giao thông xét theo hai nút được chọn.

Một ví dụ khác là nếu xét đồ thị tương ứng với một hệ thống đường ống dẫn dầu. Trong đó các ống tương ứng với các cung, điểm phát có thể coi là tàu chở dầu, điểm thu là bể chứa, còn những điểm nối giữa các ống là các nút của đồ thị. Khả năng thông qua của các cung tương ứng với tiết diện của các ống. Cần phải tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa.

Bài toán tìm luồng cực đại được phát biểu: Cho mạng G=(V,E) với nguồn s, đích t và khả năng thông qua c(v,w), (v,w) $\in$ E. Trong số các luồng trên mạng G, tìm luồng có giá trị lớn nhất.

Ý tưởng xây dựng luồng cực đại như sau: xuất phát từ luồng nào đó, ta tìm đường đi (không định hướng) từ s đến t và hiệu chỉnh giá trị luồng trên đường đi đó sao cho luồng mới có giá trị lớn hơn. Nếu không tìm được đường đi như vậy thì ta có luồng cực đại.

7.2.2. Thuật toán Ford-Fulkerson

Thuật toán Ford-Fulkerson tìm luồng cực đại có thể mô tả sau đây:

- Bắt đầu từ luồng trên tất cả các cung bằng 0 (ta sẽ gọi luồng như vậy là luồng không), và lặp lại bước lặp tăng luồng cho đến khi thu được luồng mà đối với nó không còn đường tăng.
- Bước lặp tăng luồng: Tìm đường tăng P đối với luồng hiện có. Tăng luồng dọc theo đường P.
- Kết thúc thuật toán ta tìm được luồng cực đại, và giá trị của nó đúng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

Để tăng luồng trong Gf có thể dùng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (hay tìm kiếm theo chiều sâu) bắt đầu từ đỉnh s, trong đó không cần xây dựng đồ thị tường minh Gf. Ford-Fulkerson đề nghị thuật toán gán nhãn chi tiết sau đây để giải bài toán luồng cực đại trên mạng.

Để tìm đường tăng luồng ta sẽ áp dụng phương pháp gán nhãn cho các đỉnh. Nhãn của một đỉnh v gồm 2 phần và có một trong 2 dạng sau:

- [+p(v), e (v)]
- hoặc [-p(v), e (v)].

Phần thứ nhất +p(v) là để chỉ ra là cần tăng luồng theo cung (p(v),v) (hoặc -p(v) là để giảm luồng theo cung (v, p(v)) còn phần thứ hai e (v) chỉ ra lượng lớn nhất có thể tăng hoặc giảm luồng trên các cung của đường tăng luồng từ s tới v. Mỗi đỉnh trong quá trình thực hiện thuật toán sẽ ở một trong ba trạng thái:

- Đỉnh chưa có nhãn;
- Đỉnh có nhãn nhưng chưa xét;
- Đỉnh có nhãn đã xét.

Đầu tiên chỉ có đỉnh s được khởi tạo và nhãn của nó là chưa xét, còn tất cả các đỉnh còn lại là đều chưa có nhãn. Từ s ta gán nhãn cho tất cả các đỉnh kề với nó và nhãn của đỉnh s sẽ trở thành đã xét. Tiếp theo, từ mỗi đỉnh v có nhãn chưa xét ta lại gán nhãn cho tất cả các đỉnh chưa có nhãn kề nó và nhãn của đỉnh v trở thành đã xét. Quá trình sẽ lặp lại cho đến khi gặp 1 trong 2 trường hợp sau:

- Đỉnh t trở thành đỉnh có nhãn
- Tất cả các đỉnh có nhãn đều là đã xét nhưng đỉnh t vẫn không có nhãn.

Trong trường hợp thứ nhất ta tìm được đường tăng luồng, còn trong trường hợp thứ hai đối với luồng đang xét không tồn tại đường tăng luồng (tức là luồng đã là cực đại). Mỗi khi ta tìm được đường tăng luồng, ta lại tăng luồng theo đường tìm được, sau đó xoá tất cả nhãn và đối với luồng mới thu được lại sử dụng phép gán nhãn các đỉnh để tìm đường tăng luồng.

Thuật toán sẽ kết thúc khi nào đối với luồng đang có trong mạng không tìm được đường tăng luồng.

Thuật toán gồm có 3 thủ tục được mô tả như bên dưới

- ***Thủ tục tìm đường tăng luồng***

```
void Find_Path()
        /*      p[v], e [v] là nhãn của đỉnh v;
                VT – danh sách các đỉnh có nhãn nhưng chưa xét;
                c[u,v] – khả năng thông qua của cung (u,v), u, v ∈ V;
                f[u, v] – luồng trên cung (u, v), u, v ∈ V . */
{
        p[s]=+s;
        e [s]=∞ ;
        VT= { s} ;
        PathFound=true;
        while ( VT != ∅ )
        {
                // Lấy u từ VT
                u ⇐ VT;
                for ( v ∈ V \ VT )
                {
                        if (f[u,v] <c[u,v])
                        {
                                p[v]=+u;
                                e [v]=min { e [u], c[u,v] – f[u,v] };
```

```
                VT= VT ∪ { v} ;
                    // Nạp v vào danh sách đỉnh có nhãn
                if ( v == t )
                    exit;
            }
            else if ( f[v,u]>0 )
            {
                p[v]=-u;
                e [v]=min { e[u], f[v,u] } ;
                VT= VT ∪ { v} ;
                if ( v== t )
                    exit;
            }
        }
        PathFound=false;
    }
```

- ***Thủ tục tăng luồng***

```
void Inc_Flow()
{
    v=p[t];
    u=t;
    tang= e [t];
    while ( u != s )
    {
        if ( v>0 )
            f[v,u] =f[v,u] + tang;
        else
        {
            v = -v;
            f[u,v] =f[u,v] - tang;
        }
```

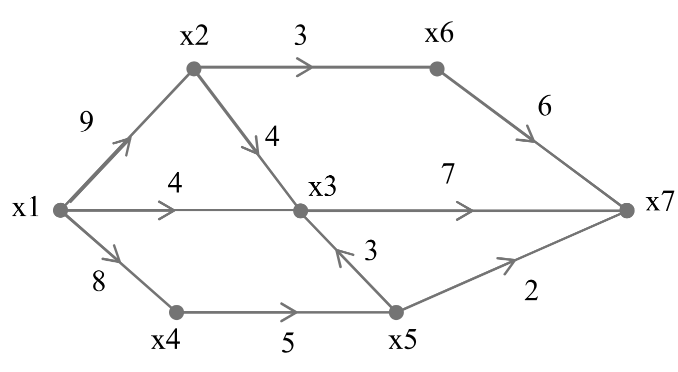
```
            u = v;
            v = p[u];
        }
}
```

- ***Thủ tục Ford-Fulkerson***

```
void Max_Flow()
{
        for (u ∈ V)
                for ( v ∈ V)
                        f[u,v] = 0;
        stop=false;
        while ( not stop )
        {
                find_path;
                if ( pathFound )
                        Inc_Flow;
                else
                        stop=true;
        }
        <Luồng cực đại trong mạng là f[u,v], u, v ∈ V >
        <Lát cắt hẹp nhất là (VT, V \ VT)>
}
```

Ví dụ:

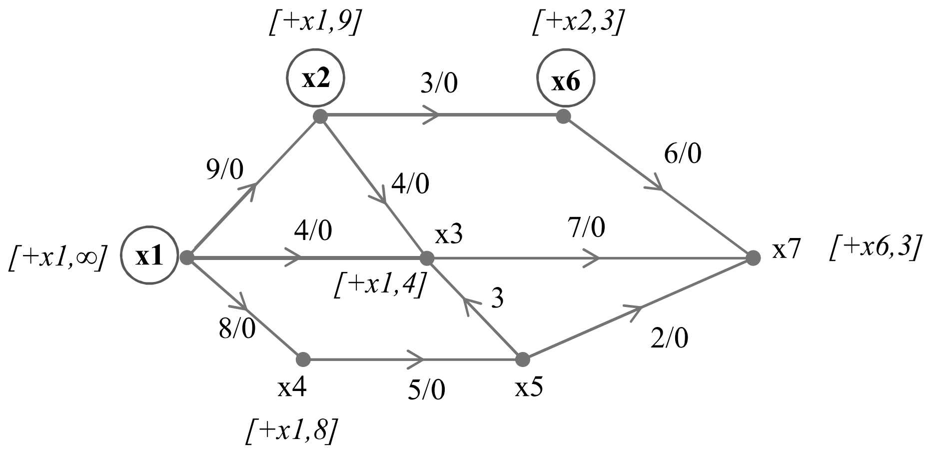
Tìm luồng cực đại trên mạng được cho như hình 7.5



Hình 7.5. Ví dụ tìm luồng cực đại

Giải:

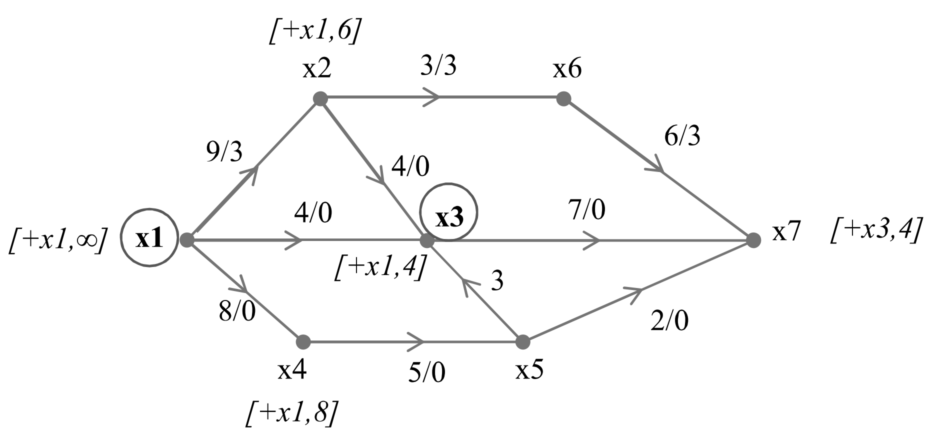
Lần lặp thứ 1: (Luồng bằng 0)



Hình 7.6. Lần lặp thứ 1

- Lần lượt chọn x1, x2, x6
- Ta thấy x7 đã được gán nhãn. Vậy:
    - Đặt x=x7: [+x6,3] → tăng luồng từ x6 → x7 lên 3
    - Đặt x=x6: [+x2,3] → tăng luồng từ x2 → x6 lên 3
    - Đặt x=x2: [+x1,9] → tăng luồng từ x1 → x2 lên 3
    - Đặt x=x1 → dừng tăng luồng

Lần lặp thứ 2: (với luồng đã điều chỉnh)

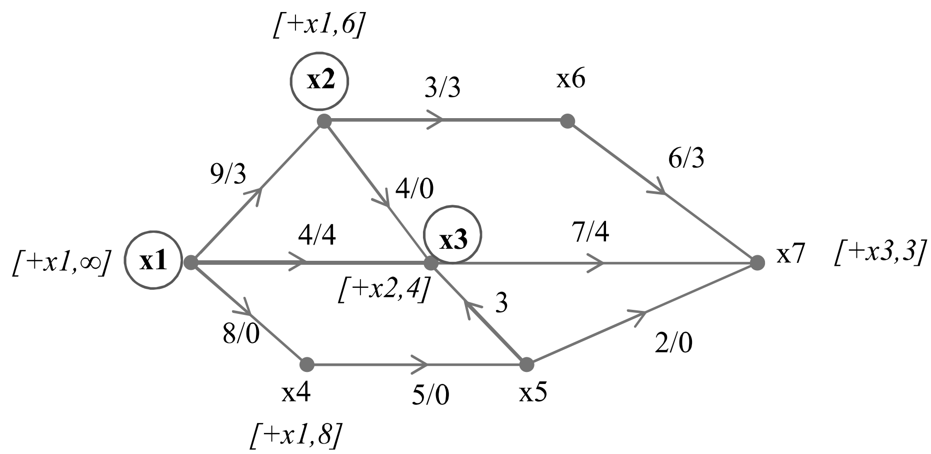


Hình 7.7. Lần lặp thứ 2

- Lần lượt chọn x1, x3
- Ta thấy x7 đã được gán nhãn. Vậy:

- o Đặt x=x7: [+x3,4] → tăng luồng từ x3 → x7 lên 4
- o Đặt x=x3: [+x1,4] → tăng luồng từ x1 → x3 lên 4
- o Đặt x=x1 → dừng tăng luồng

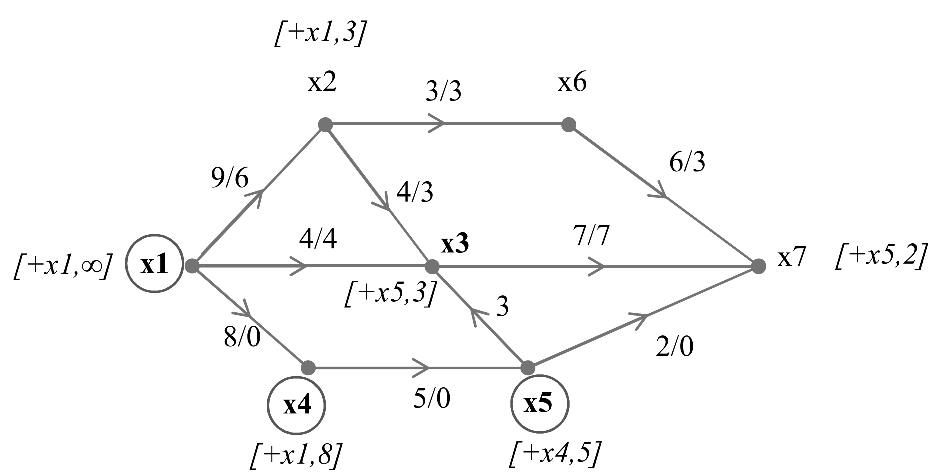
Lần lặp thứ 3: (với luồng đã điều chỉnh)



Hình 7.8. Lần lặp thứ 3

- Lần lượt chọn x1, x2, x3
- Ta thấy x7 đã được gán nhãn. Vậy:
  - o Đặt x=x7: [+x3,3] → tăng luồng từ x3 → x7 lên 3
  - o Đặt x=x3: [+x2,4] → tăng luồng từ x2 → x3 lên 3
  - o Đặt x=x2: [+x1,6] → tăng luồng từ x1 → x2 lên 3
  - o Đặt x=x1 → dừng tăng luồng

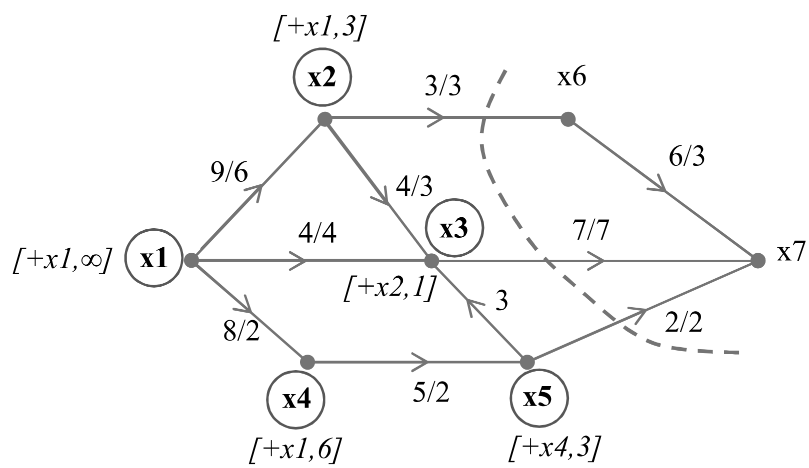
Lần lặp thứ 4: (với luồng đã điều chỉnh)



Hình 7.9. Lần lặp thứ 4

- Lần lượt chọn x1, x4, x5
- Ta thấy x7 đã được gán nhãn. Vậy:
    - o Đặt x=x7: [+x5,2] → tăng luồng từ x5 → x7 lên 2
    - o Đặt x=x5: [+x4,5] → tăng luồng từ x4 → x5 lên 2
    - o Đặt x=x4: [+x1,8] → tăng luồng từ x1 → x4 lên 2
    - o Đặt x=x1 → dừng tăng luồng

Lần lặp thứ 5: (với luồng đã điều chỉnh)



Hình 7.10. Lần lặp thứ 5

- Lần lượt chọn x1, x2, x3, x4, x5
- Ta thấy x7 không được gán nhãn, và cũng không thể nào tiếp tục thực hiện gán nhãn được nữa. Giải thuật dừng, ta tìm được lát cắt.

Gọi X0 là tập các đỉnh có nhãn

Gọi Y0 là tập các đỉnh chưa có nhãn

X0	Y0
x1	x6
x2	x7
x3	
x4	
x5	

Lát cắt phân hoạch tập X0, Y0 là lát cắt hẹp nhất.

Khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất chính là giá trị luồng cực đại tìm được trên mạng: f = 3 + 7 + 2 = 12.

7.3. MỘT SỐ BÀI TOÁN LUỒNG TỔNG QUÁT

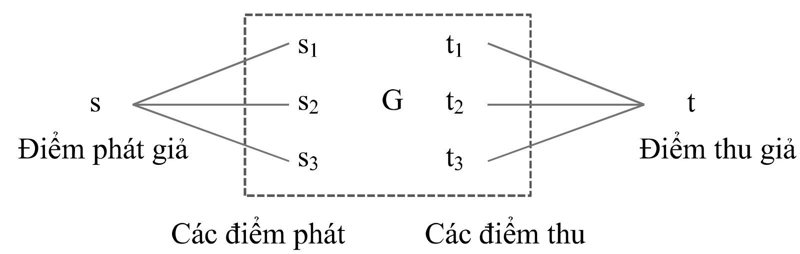
Trong phần này ta nêu ra một số dạng bài toán về luồng tổng quát mà việc giải chúng có thể dẫn về bài toán luồng cực đại trình bày ở trên.

7.3.1. Mạng với nhiều điểm phát và điểm thu

Xét mạng G với p điểm phát $s_1, s_2, \ldots, s_p$ và q điểm thu $t_1, t_2, \ldots, t_q$. Giả sử rằng luồng có thể đi từ một điểm phát bất kỳ đến tất cả các điểm thu. Bài toán tìm luồng cực đại từ các điểm phát đến các điểm thu có thể đưa về bài toán với một điểm phát và một điểm thu bằng cách đưa vào một điểm phát giả s và một điểm thu giả t và cạnh nối s với tất cả các điểm phát và cạnh nối các điểm thu với t.

Hình 7.11 minh hoạ cho cách đưa mạng với nhiều điểm phát và nhiều điểm thu về mạng chỉ có một điểm phát và một điểm thu. Khả năng thông qua của cung nối s với điểm phát s_k sẽ bằng $+\infty$ nếu không có hạn chế về lượng phát của điểm phát s_k, và nếu lượng phát của s_k bị hạn chế bởi b_k thì cung (s, s_k) có khả năng thông qua là b_k. Cũng như vậy, đối với các cung nối t_k với điểm thu t, giả sử khả năng thông qua của (t_k, t) sẽ là giới hạn hoặc không giới hạn tuỳ theo lượng thu của điểm thu này có bị giới hạn hay không.

Trường hợp một số điểm thu chỉ nhận "hàng" từ một số điểm phát ta có bài toán nhiều luồng là một bài toán phức tạp hơn rất nhiều so với bài toán luồng cực đại giữa điểm phát s và điểm thu t.



Hình 7.11. Mạng với nhiều điểm phát và điểm thu

7.3.2. Bài toán đám cưới vùng quê

Bài toán luồng cực đại có nhiều ứng dụng trong việc giải bài toán tổ hợp. Khó khăn chính ở đây là phải xây dựng mạng tương ứng sao cho việc tìm luồng cực đại trong nó sẽ tương đương với việc giải bài toán tổ hợp đặt ra. Ví dụ, ta cùng xem bài toán đám cưới vùng quê được mô tả như sau:

Có m chàng trai ở một vùng quê nọ. Đối với mỗi chàng trai ta biết các cô gái mà anh ta vừa ý. Hỏi khi nào thì có thể tổ chức các đám cưới trong đó chàng trai nào cũng sánh duyên với các cô gái mà mình vừa ý.

Ta có thể xây dựng đồ thị với các đỉnh biểu thị các chàng trai và các cô gái, còn các cung biểu thị sự vừa ý của các chàng trai với các cô gái. Khi đó ta thu được một đồ thị hai phía.

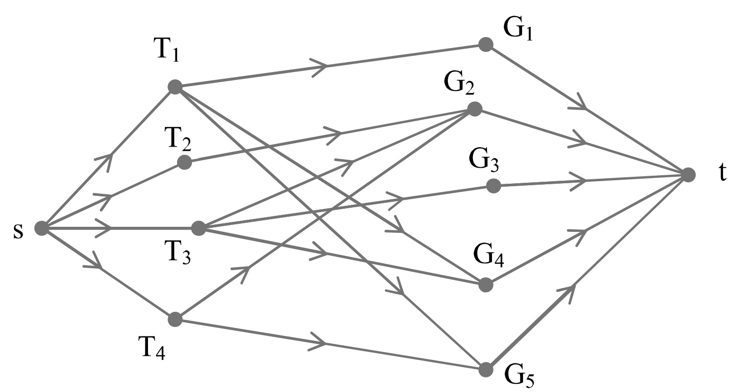
Ví dụ:

Có 4 chàng trai { T_1, T_2, T_3,T_4} và 5 cô gái { G_1, G_2, G_3,G_4, G_5} . Sự vừa ý cho trong bảng 7.1 sau:

Bảng 7.1. Bài toán đám cưới vùng quê

Chàng trai	Các cô gái mà chàng trai ưng ý
T_1	G_1, G_4, G_5
T_2	G_2
T_3	G_2, G_3,G_4
T_4	G_2, G_5

Đồ thị tương ứng thể hiện trong hình 7.12.



Hình 7.12. Mạng tương ứng bài toán đám cưới vùng quê

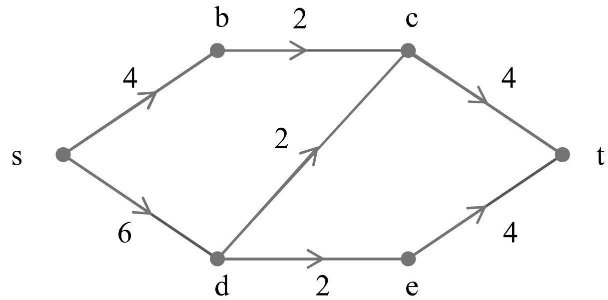
Đưa vào điểm phát s và điểm thu t. Nối s với tất cả các đỉnh biểu thị các chàng trai, và nối t với tất cả các đỉnh biểu thị các cô gái. Tất cả các cung của đồ thị đều có khả năng thông qua bằng 1. Bắt đầu từ luồng 0, ta tìm luồng cực đại trong mạng xây dựng được theo thuật toán Ford-Fulkerson, luồng trên các cung sẽ là các số 0 hoặc 1.

Rõ ràng là nếu luồng cực đại trong đồ thị có giá trị Vmax = m, thì bài toán có lời giải, và các cung với luồng bằng 1 sẽ chỉ ra cách tổ chức đám cưới thoả mãn điều kiện đặt ra.

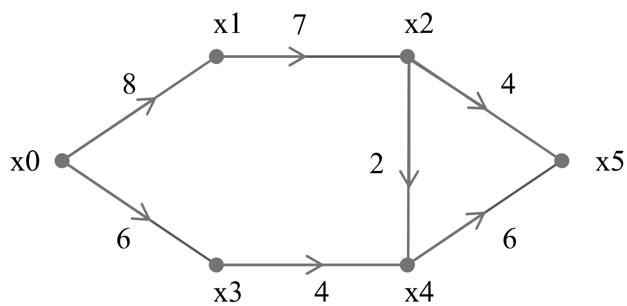
BÀI TẬP CHƯƠNG 7

Tìm luồng cực đại trong các mạng sau bằng thuật toán Ford-Fulkerson

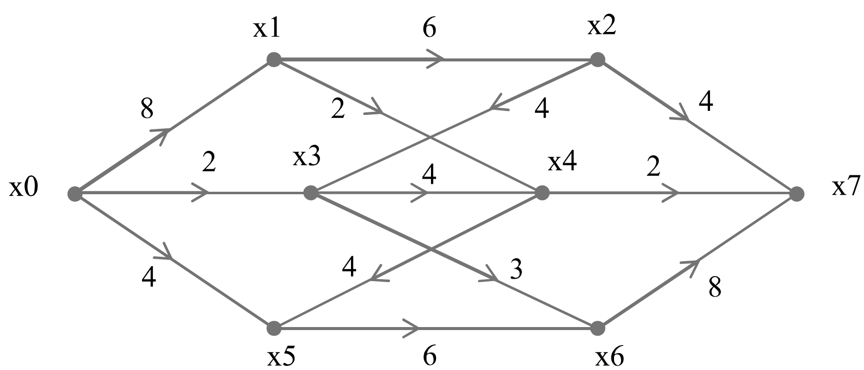
1.



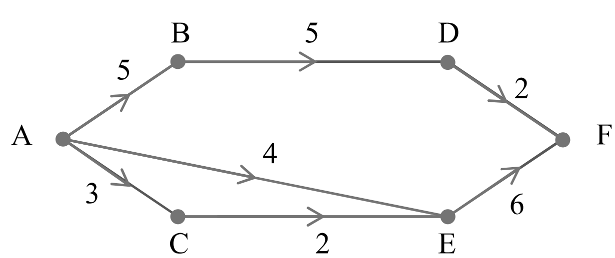
2.



3.



4.



TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bùi Anh Kiệt &Trương Quốc Bảo. (2008). *Giáo trình toán rời rạc*. Đại học Cần Thơ.

Kenneth H. Rosen (1997). *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - Hà Nội.

Nguyễn Đức Nghĩa & Nguyễn Tô Thành. (2003). *Toán rời rạc*. Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.

Nguyễn Cam & Chu Đức Khánh (1998). *Lý thuyết đồ thị*. Nhà xuất bản trẻ.

Trương Mỹ Dung (2005). *Giáo trình Lý thuyết đồ thị.* Đại học Khoa Học Tự Nhiên TP HCM.

Trường Đại học KHTN (2007). *Bài tập Toán rời rạc nâng cao*. ĐH Quốc gia TP HCM.

Vũ Kim Thành (2003). *Toán rời rạc*. Đại học Nông Nghiệp Hà Nội.