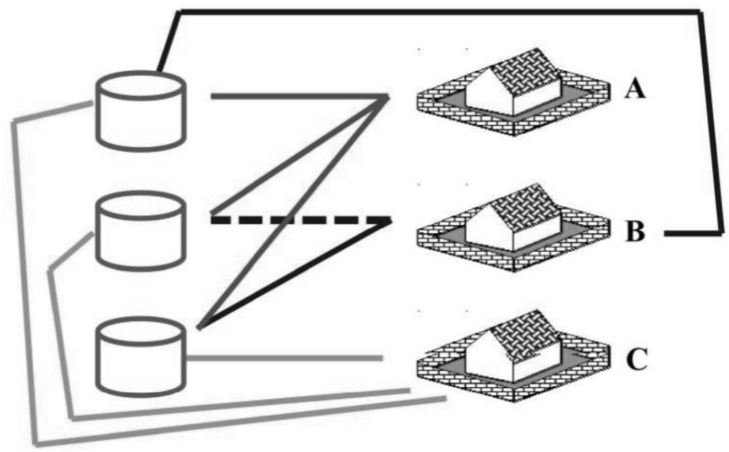
CHƯƠNG 4
ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Để nghiên cứu về đồ thị phẳng, ta bắt đầu bằng việc xét bài toán thú vị "ba nhà ba giếng" như sau: Có ba nhà ở gần ba cái giếng, có lần bất hoà với nhau, họ tìm cách làm các đường khác đến giếng sao cho không có đường nào cắt đường nào. Họ có thực hiện được ý định đó không?



Hình 4.1. Bài toán ba gia đình, ba giếng

Bài toán này có thể được mô hình bằng đồ thị lưỡng phân đủ $K_{3,3}$. Câu hỏi ban đầu diễn đạt như sau: Có hay không cách vẽ đồ thị $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau?

4.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

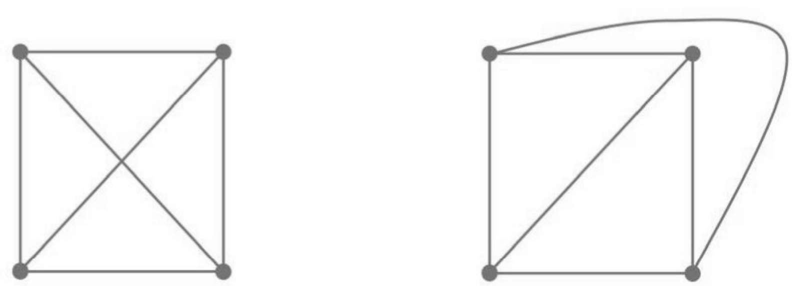
4.1.1. Đồ thị phẳng

Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau.

Khi G là một đồ thị phẳng thì mỗi cách vẽ G trong một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau được gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị G.

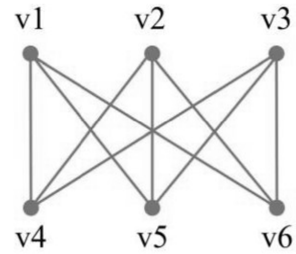
Hai cạnh chung đỉnh được qui ước là không cắt nhau.

Ví dụ 1:



Hình 4.2. Đồ thị K4 và đồ thị K4 vẽ lại

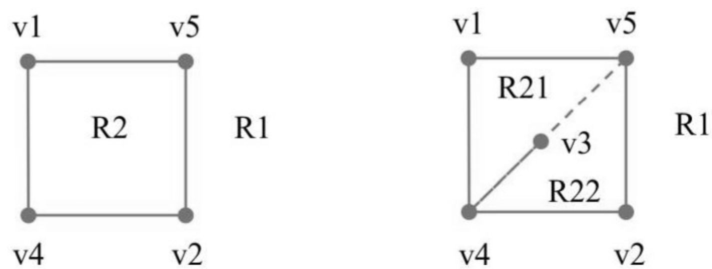
Ví dụ 2: Đồ thị lưỡng phân $K_{3,3}$ có là đồ thị phẳng không?



Hình 4.3. Đồ thị $K_{3,3}$

Giải

Ta sẽ chứng minh $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng. Thật vậy, ta thấy trong một biểu diễn phẳng bất kỳ của $K_{3,3}$ thì v1 và v2 đều nối với v4 và v5. Bốn đỉnh này tạo thành một đường khép kín chia mặt phẳng ra làm hai miền R1 và R2. Đỉnh v3 nằm trong R1 hoặc R2. Khi v3 nằm trong R2, cạnh (v3, v4) và (v3, v5) chia R2 thành hai miền con R21 và R22 như sau:



Hình 4.4. Chứng minh đồ thị $K_{3,3}$ không phẳng

Xét đỉnh v6. Có 3 trường hợp đối với v6:

+ Nếu v6 nằm trong R1 thì cạnh nối v3 với v6 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác.

+ Nếu v6 nằm trong R21 thì cạnh nối v2 với v6 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác.

+ Nếu v6 nằm trong R22 thì cạnh nối v1với v6 sẽ cắt ít nhất một cạnh khác.

$\Rightarrow$ v3 không thể nằm trong R2.

Tương tự ta cũng chứng minh được nếu v3 nằm trong R1 thì đồ thị cũng không phẳng.

Vậy, $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng.

Khi ta kết luận $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng, ta cũng đã giải quyết được bài toán "ba nhà ba giếng": Không có đường đi nào nối mỗi nhà với 3 giếng mà không cắt nhau. Hay nói cách khác "ba nhà ba giếng" nói trên không thể nối với nhau trên một mặt phẳng mà không cắt nhau.

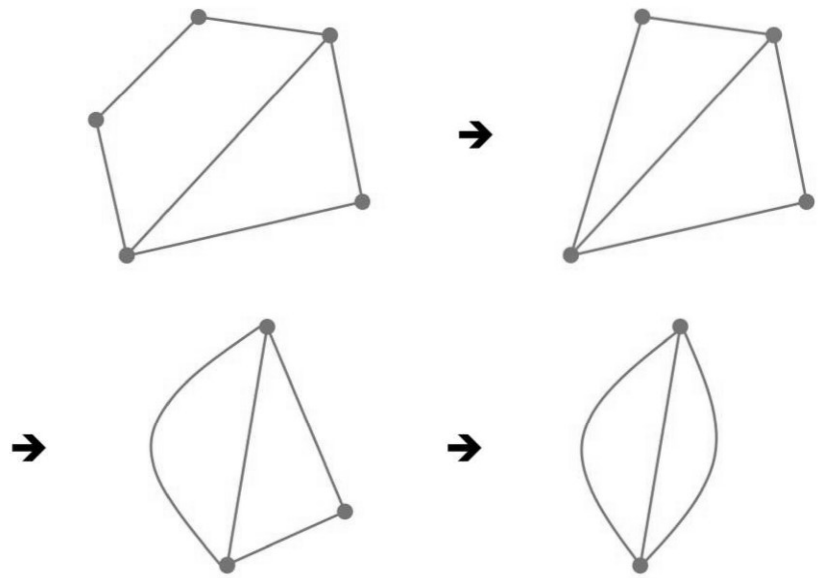
4.1.2. Đồ thị đồng phôi

Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi. Các phép biến đổi đồng phôi gồm:

- Thêm 1 đỉnh nằm trên một cạnh
- Gộp 2 cạnh chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

Ví dụ:

Các đồ thị hình 4.5 là đồ thị đồng phôi



Hình 4.5. Ví dụ các đồ thị đồng phôi

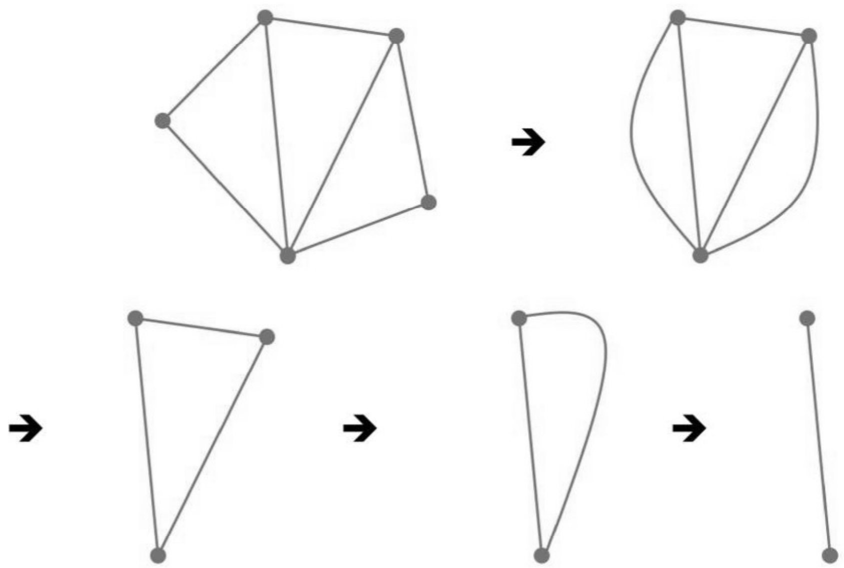
4.1.3. Các phép rút gọn cơ bản

Tính phẳng của một đồ thị không thay đổi nếu thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn sau đây:

- Bỏ đi các khuyên
- Bỏ bớt các cạnh song song, chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh.
- Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

Ví dụ:

Hình 4.6 là các đồ thị có được từ phép rút gọn cơ bản



Hình 4.6. Minh hoạ các phép rút gọn cơ bản

4.2. CÁC ĐỊNH LÝ KURATOWSKI

Đồ thị là không phẳng khi và chỉ khi nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

Ta thấy K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất, vì khi xóa bất kỳ đỉnh hoặc cạnh của các đồ thị này sẽ nhận được đồ thị phẳng.

K_5 là đồ thị không phẳng ít đỉnh nhất.

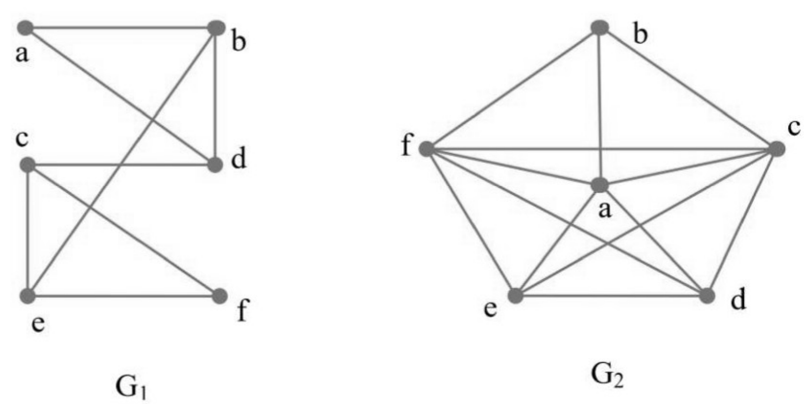
$K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng ít cạnh nhất.

Chứng minh:

Chứng minh định lý này tương đối phức tạp nên không trình bày ở đây.

Ví dụ 1:

Đồ thị G1, G2 trong hình 4.7 có phải là đồ thị phẳng không?



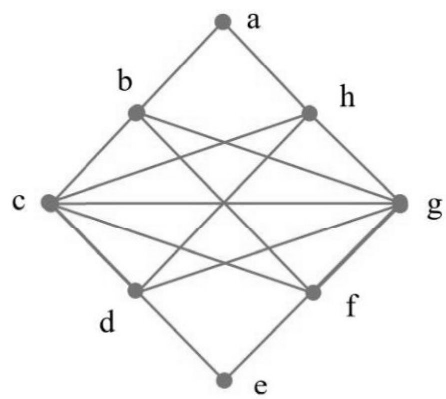
Hình 4.7. Ví dụ 1 về đồ thị phẳng

Giải:

Đồ thị G_1 là đồ thị phẳng, do không chứa đồ thị con K_3, cũng không chứa đồ thị con K_5.

Đồ thị G_2 là đồ thị không phẳng vì nếu xóa đỉnh b cùng các cạnh (b, a), (b, c), (b, f) ta được đồ thị con là K_5.

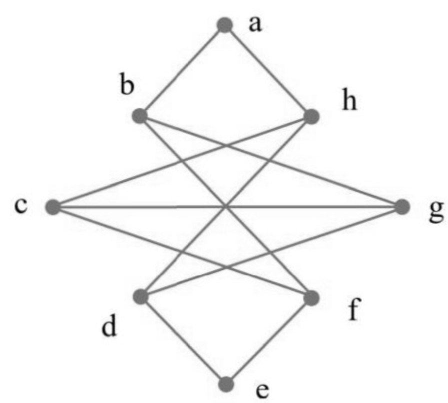
Ví dụ 2: Cho biết đồ thị trong hình 4.8 có là đồ thị phẳng không?



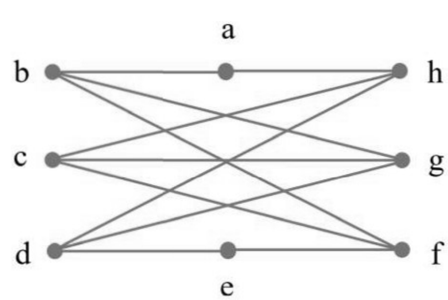
Hình 4.8. Ví dụ 2 về đồ thị phẳng

Giải:

Xét đồ thị đã cho, nếu bỏ đi các cạnh bc, cd, fg, gh ta thu được đồ thị con G':



Hình 4.9. Đồ thị con G'



Hình 4.10. Đồ thị con G' sau khi vẽ lại

Đồ thị này đồng phôi với đồ thị $K_{3,3} \Rightarrow$ đồ thị đã cho không phẳng.

4.3. CÔNG THỨC EULER

Khi biểu diễn phẳng một đồ thị, nó sẽ chia mặt phẳng thành các miền, kể cả miền vô hạn. Euler đã chứng minh rằng tất cả các biểu diễn phẳng của một đồ thị đều chia mặt phẳng thành cùng một số miền như nhau. Euler cũng đã tìm ra mối liên hệ giữa số miền, số đỉnh và số cạnh của một đồ thị phẳng.

4.3.1. Công thức Euler về đồ thị phẳng liên thông

Nếu một đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, e cạnh. Giả sử biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng ra thành d miền thì ta có công thức:

$$\mathbf{d = e - n + 2}$$

Công thức $d = e - n + 2$ thường gọi là "hệ thức Euler cho hình đa diện", vì được Euler chứng minh đầu tiên cho hình đa diện có n đỉnh, e cạnh và d miền. Mỗi hình đa diện có thể coi là một đồ thị phẳng.

Chứng minh:

Giả sử ta đã có biểu diễn phẳng của G. Ta sẽ chứng minh bằng cách xây dựng một dãy các đồ thị con của G: $G_1, G_2, ..., G_e = G$ bằng cách ghép thêm một cạnh vào đồ thị ở bước trước.

Điều này là làm được vì ta có thể lấy bất kỳ một cạnh của G để được G_1. Sau đó, ta nhận được G_{n+1} từ G_n bằng cách thêm vào G_n một cạnh có một đỉnh liên thuộc với G_n và một đỉnh khác liên thuộc với cạnh mới đó. Điều này luôn làm được do G là liên thông. Ta sẽ nhận được đồ thị G sau e bước (vì G có e cạnh).

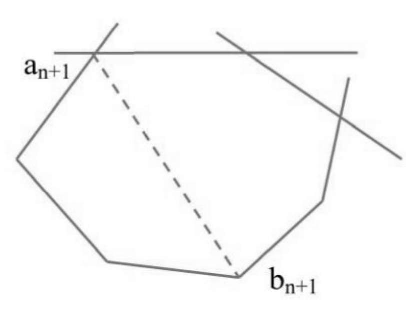
Gọi d_n, e_n và n_n tương ứng là số miền, số cạnh và số đỉnh của biểu diễn phẳng của G_n; n = 1, ..., e.

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp:

- Đối với G_1 ta có: $e_1 = 1$; $n_1 = 2$; $d_1 = 1$. Do đó: $d_1 = e_1 - n_1 + 2$.

- Giả sử đã có $d_n = e_n - n_n + 2$. Gọi $a_{n+1} b_{n+1}$ là cạnh ghép thêm vào G_n để có G_{n+1}. Khi đó có hai trường hợp có thể xảy ra:

+ Nếu cả hai đỉnh a_{n+1} và b_{n+1} đều thuộc G_n (hình 4.11)



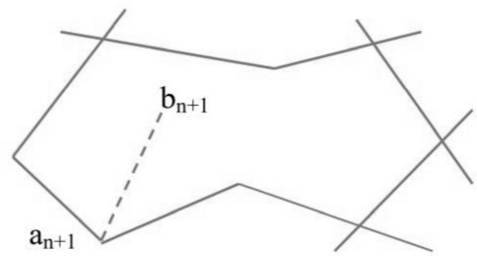
Hình 4.11. Trường hợp 1

Do G_{n+1} là đồ thị phẳng nên a_{n+1} b_{n+1} không thể cắt bất cứ cạnh nào của G_{n+1} $\Rightarrow$ a_{n+1} và b_{n+1} phải nằm trên biên của miền chung R $\Rightarrow$ cạnh a_{n+1} b_{n+1} chia R ra làm hai miền con. Khi đó: $d_{n+1} = d_n + 1$; $e_{n+1} = e_n + 1$.

$$n_{n+1} = n_n \Rightarrow d_{n+1} = e_{n+1} - n_{n+1} + 2.$$

+ Nếu một trong a_{n+1} hoặc b_{n+1} không thuộc G_n (hình 4.12):

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_{n+1} \in G_n$ và $b_{n+1} \notin G_n$. Khi đó ta thấy khi thêm cạnh $a_{n+1}b_{n+1}$ vào G_n để được G_{n+1} sẽ không thêm miền mới nào vì a_{n+1} phải ở trên miền có a_{n+1} ở trên biên của nó.



Hình 4.12. Trường hợp 2

Do đó: $d_{n+1} = d_n$; $n_{n+1} = n_n + 1$;

$e_{n+1} = e_n + 1 \Rightarrow d_{n+1} = e_{n+1} - n_{n+1} + 2$.

Vậy, $\forall n = 1, 2, ..., e$ ta luôn có: $d_n = e_n - n_n + 2$

hay $d = e - n + 2$.

Ví dụ:

Cho G là một đơn đồ thị liên thông có 8 đỉnh và mỗi đỉnh đều có bậc là 3. Khi đó biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Giải:

Ta có: n = 8, theo giả thiết mỗi bậc có đỉnh bằng 3 nên ta có tổng số bậc của đỉnh: 3n = 8 x 3 = 24

Mà tổng số bậc của đỉnh = 2e $\Rightarrow$ 2e = 24 $\Rightarrow$ e = 12

$\Rightarrow$ số miền của G: d = e – n + 2 = 12 – 8 + 2 = 6.

4.3.2. Hệ quả 1

Nếu G là đơn đồ thị, phẳng, liên thông, gồm n đỉnh ($n \geq 3$) và e cạnh (với e>2). Khi đó ta có:

$$\mathbf{e \leq 3n - 6}$$

Chứng minh:

Trong một đồ thị phẳng, liên thông thì:

+ Mỗi miền d được bao bởi ít nhất là 3 cạnh

+ Mỗi cạnh nằm trên nhiều nhất 2 miền.

Vậy trong một đồ thị phẳng, ta có:

$3d \le 2e$ hay $d \le 2e / 3$ (1)

Mặt khác, theo công thức Euler về đồ thị phẳng liên thông, ta có:

$d = e - n + 2$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$e - n + 2 \le 2e / 3 \rightarrow 3e - 3n + 6 \le 2e \rightarrow e \le 3n - 6$

Ví dụ:

Chứng minh rằng đồ thị K_5 không là đồ thị phẳng.

Giải:

Ta có đồ thị K_5 có 5 đỉnh và 10 cạnh

Mà theo hệ quả $e \le 3n - 6$ thì $10 \le 3 \times 5 - 6$ (vô lý)

Do đó, K_5 không là đồ thị phẳng.

4.3.3. Hệ quả 2

Trong một đồ thị phẳng liên thông tùy ý, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc không vượt quá 5.

Chứng minh:

Theo nhận xét của hệ quả 1, chúng ta có một đồ thị phẳng liên thông thì ta có bất đẳng thức:

$3d \le 2e$ (1)

Giả sử G là một đồ thị phẳng, liên thông có e cạnh, n đỉnh mà $\forall v \in V$ đều có $deg(v) \ge 6$. Điều này có nghĩa là mỗi đỉnh của G sẽ là đầu mút của ít nhất 6 cạnh và mỗi cạnh liên thuộc với 2 đỉnh. Từ đó, ta có:

$6n = 2e$ hay $3n = e$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, chúng ta có:

$3d + 3n \le 3e \rightarrow d + n \le e \rightarrow d + n - e \le 0$ (vô lý)

Vậy trong một đồ thị phẳng, liên thông có e cạnh, n đỉnh thì phải có ít nhất một đỉnh v có $deg(v) \le 5$.

4.3.4. Hệ quả 3

Giả sử G là đơn đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh và e cạnh và không chứa chu trình đơn độ dài 3. Khi đó:

$$\mathbf{e \leq 2n - 4}$$

Chứng minh:

Trong một đồ thị phẳng, liên thông e cạnh, v đỉnh; $v \geq 3$ và không có chu trình độ dài 3 thì:

+ Mỗi miền r được bao bởi ít nhất là 4 cạnh,

+ Mỗi cạnh nằm trên nhiều nhất 2 miền.

Vậy trong một đồ thị phẳng, ta có: $4d \leq 2e$ hay $d \leq e / 2$ (1)

Mặt khác, theo công thức Euler về đồ thị phẳng liên thông, ta có:

$d = e - n + 2$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$e - n + 2 \leq e / 2$

→ $2e - 2n + 4 \leq e$

→ $e \leq 2n - 4$

Hệ quả được chứng minh.

Ví dụ:

Chứng minh rằng $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.

Giải:

Ta có $K_{3,3}$ không có chu trình độ dài 3.

Hơn nữa, $K_{3,3}$ có 6 đỉnh và 9 cạnh

Theo hệ quả, ta có $e \leq 2n - 4$ → thì $9 \leq 2 \times 6 - 4$ (vô lý). Điều này không thỏa hệ quả 3 ⇒ Do đó $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.

4.4. BÀI TOÁN TÔ MÀU

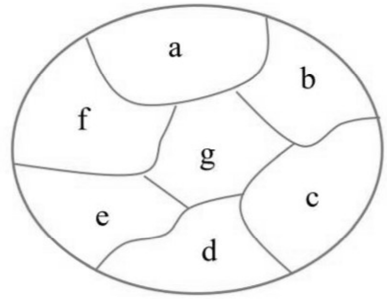
Mục đích của việc tô màu một bản đồ là để phân biệt các vùng miền sao cho hai vùng miền có chung biên giới được tô bằng hai màu tùy ý, miễn là khác nhau. Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, ta có thể tô mỗi miền bằng một màu khác nhau.

Tuy nhiên, điều này là không cần thiết vì đối với nhiều bản đồ, ta có thể dùng số màu ít hơn số miền nhưng vẫn đảm bảo hai miền kề nhau có màu khác nhau.

Do đó bài toán đặt ra là "Xác định số màu tối thiểu cần có để tô màu một bản đồ sao cho hai miền kề nhau có màu khác nhau".

Ví dụ 1:

Với bản đồ ở hình 4.13, ta cần 3 màu là đủ



Hình 4.13. Bản đồ ví dụ

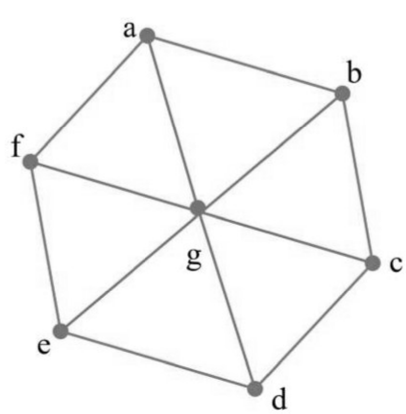
Để tô màu một bản đồ, chúng ta sẽ chuyển bản đồ về dưới dạng đồ thị. Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị. Trong đó:

- Mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh của đồ thị.
- Nếu hai miền có chung biên giới sẽ được biểu diễn bằng cạnh nối giữa hai đỉnh. Hai miền chung nhau chỉ một điểm, không được coi là kề nhau.

Đồ thị nhận được từ bản đồ bằng cách xây dựng trên được gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ đang xét.

Ví dụ 2:

Bản đồ ở hình 4.13 có đồ thị đối ngẫu như hình 4.14:



Hình 4.14. Đồ thị đối ngẫu vớ bản đồ

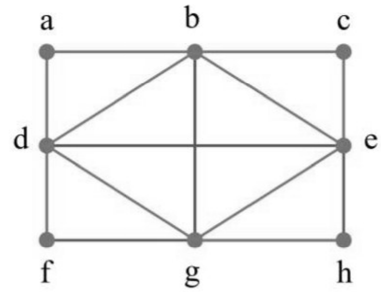
4.4.1. Định nghĩa tô màu đồ thị

Tô màu đồ thị là một cách gắn cho mỗi đỉnh của đồ thị một màu, sao cho 2 đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.

Số màu ít nhất cần dùng để tô màu đồ thị G được gọi là sắc số của đồ thị G, ký hiệu là $\chi(G)$

Ví dụ:

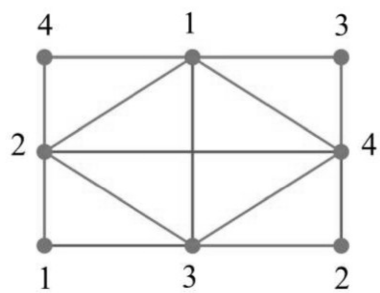
Cần phải dùng ít nhất bao nhiêu màu để tô màu cho đồ thị G ở hình 4.15?



Hình 4.15. Đồ thị G cần tô màu

Giải:

Ta thấy: 4 đỉnh b, d, g, e đôi một kề nhau nên phải được tô bằng 4 màu khác nhau. Do đó $\chi(G) = 4$. Có thể dùng 4 màu đánh số 1, 2, 3, 4 để tô như hình 4.16



Hình 4.16. Đồ thị G với số màu cần tô

4.4.2 Một số định lý về tô màu đồ thị

1. Định lý 1: Mọi chu trình độ dài lẻ đều có sắc số là 3.

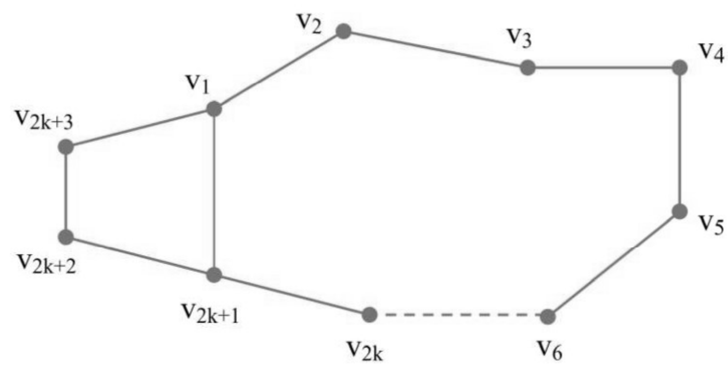
Chứng minh:

Giả sử α là một chu trình độ dài lẻ tuỳ ý. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên n để $|\alpha|=2n+1$. Giả sử dãy các đỉnh của α là: $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}, v_{2n+1}\}$. Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n.

➢ *Trường hợp cơ sở :* Với n = 1. Chu trình α gồm 3 đỉnh v_1, v_2, v_3. Do mỗi đỉnh v_i ($1 \le i \le 3$) đều kề với 2 đỉnh còn lại, nên ta phải dùng đúng 3 màu khác nhau để tô cho α vì 2 đỉnh kề nhau tuỳ ý đều phải có màu khác nhau.

➢ *Giả thiết quy nạp*: Giả sử khẳng định đã đúng với $n \le k$, nghĩa là với một chu trình α_1 tuỳ ý với độ dài $2n + 1$ ($1 \le n \le k$) đều có sắc số bằng 3. Ta chỉ cần chỉ ra rằng với $n = k + 1$ khẳng định vẫn đúng. Nghĩa là chu trình α có độ dài $2(k + 1) + 1$ cũng có sắc số bằng 3.

Giả sử α là chu trình có độ dài lẻ tùy ý có độ dài bằng $2(k + 1) + 1$ và có tập đỉnh: $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}, v_{2k+1}, v_{2k+2}, v_{2k+3}\}$ ta mô tả chu trình α như hình 4.17:



Hình 4.17. Chu trình α có v_{2k+3} đỉnh

Nối đỉnh v_1 với đỉnh v_{2k+1} ta được chu trình α_1 với độ dài lẻ là $2k + 1$. Theo giả thuyết quy nạp thì α_1 có sắc số là 3 và hai đỉnh v_1 và v_{2k+1} phải có màu khác nhau. Chẳng hạn v_1 được tô bằng màu M_1 và đỉnh v_{2k+1} được tô bằng màu M_2. Khi đó, để tô đỉnh v_{2k+2} ta có thể dùng lại màu M_1 và tô đỉnh v_{2k+3} ta có thể dùng lại màu M_2. Nghĩa là không cần dùng thêm màu mới.

Vậy sắc số của α là 3 và định lý đã được chứng minh.

2. Định lý 2: Đồ thị G có sắc số là 2 khi và chỉ khi G không có chu trình độ dài lẻ.

Chứng minh:

➢ *Điều kiện cần:* Giả sử G là đồ thị có sắc số là 2, nhưng trong G lại có một chu trình lẻ α . Khi đó theo định lý 1, sắc số của α phải là 3. Ta suy ra điều mâu thuẫn với giả thuyết, nên G không có chu trình độ dài lẻ.

➢ *Điều kiện đủ:* Giả sử đồ thị G không có chu trình độ dài lẻ. Ta cần chứng minh rằng đồ thị G có sắc số là 2.

Ta bắt đầu tô dần các đỉnh của G theo quy tắc sau:

+ Tô màu M_1 cho đỉnh w bất kỳ, $w \in V$.

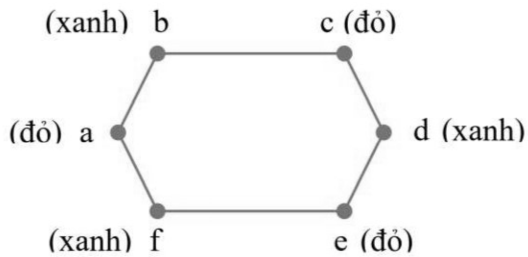
+ Nếu một đỉnh $u \in V$ nào đó đã được tô bằng màu M_1, ta sẽ dùng màu M_2 để tô cho tất cả các đỉnh kề với u và ngược lại nếu đỉnh $u \in V$ nào đó đã được tô bằng M_2, ta sẽ dùng màu M_1 để tô cho tất cả các đỉnh kề với u.

Vì G là đồ thị hữu hạn nên đến một lúc nào đó tất cả các đỉnh của G sẽ phải được tô màu và mỗi đỉnh của G không thể cùng lúc vừa được tô bằng M_1 vừa được tô bằng M_2. Thật vậy, giả sử trong G tồn tại đỉnh v mà theo nguyên tắc nó vừa được tô bằng M_1 đồng thời cũng được tô bằng M_2. Khi đó v phải kề với đỉnh s được tô bằng M_1 và đỉnh t được tô bằng M_2, nên khi đó các đỉnh v, s, t phải nằm trên một chu trình độ dài lẻ. Như vậy mâu thuẫn với giả thuyết nên đỉnh v không tồn tại.

Định lý đã được chứng minh.

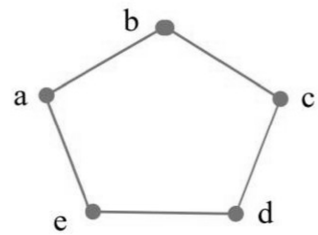
Ví dụ: Xét đồ thị vòng C_n ($n \geq 3$).

➢ Khi n chẵn, chẳng hạn n = 6. Dễ thấy khi đó $\chi(C_6) = 2$ vì ta có thể tô màu như hình 4.18. Rõ ràng C_6 không có chu trình lẻ.



Hình 4.18. Đồ thị C_6 không có chu trình độ dài lẻ

➢ Khi n lẻ, chẳng hạn n = 5. Dễ thấy rằng C_5 có chứa chu trình lẻ và $\chi(C_5) = 3$.Ta có đồ thị như hình 4.19:



Hình 4.19. Đồ thị C_5 có chu trình độ dài lẻ

3. Định lý 5 màu của Kempe-Heawood: Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 5 màu.

Chứng minh:

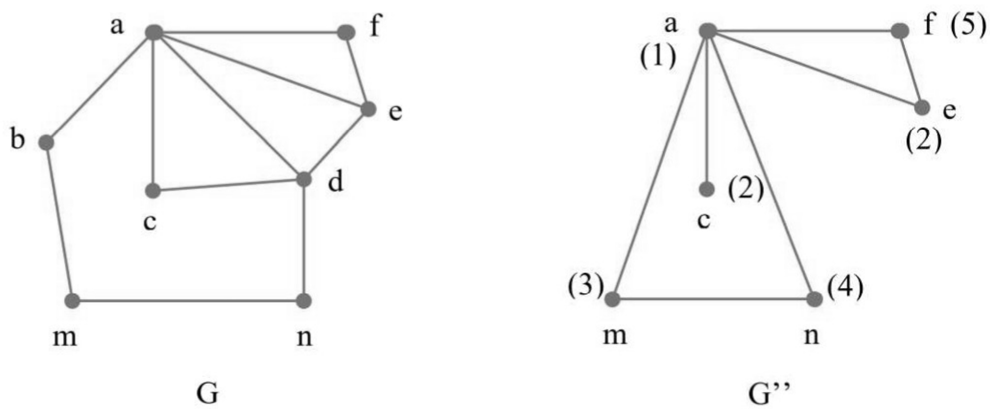
Cho G là một đồ thị phẳng. Không mất tính chất tổng quát có thể xem G là liên thông và có số đỉnh $n \geq 5$. Ta chứng minh G được tô đúng bởi 5 màu bằng quy nạp theo n.

Trường hợp n=5 là hiển nhiên. Giả sử định lý đúng cho tất cả các đồ thị phẳng có số đỉnh nhỏ hơn n.

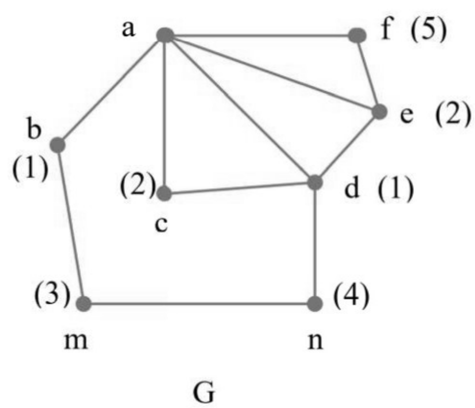
Xét G là đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh. Theo Hệ quả 2 (mục 4.3.3), trong G tồn tại đỉnh a với $\deg(a) \leq 5$. Xoá đỉnh a và các cạnh liên thuộc với nó, ta nhận được đồ thị phẳng G’ có $n-1$ đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, có thể tô đúng các đỉnh của G’ bằng 5 màu. Sau khi tô đúng G’ rồi, ta tìm cách tô đỉnh a bằng một màu khác với màu của các đỉnh kề nó, nhưng vẫn là một trong 5 màu đã dùng. Điều này luôn thực hiện được khi deg(a) < 5 hoặc khi deg(a)=5 nhưng 5 đỉnh kề a đã được tô bằng 4 màu trở xuống.

Chỉ còn phải xét trường hợp deg(a)=5 mà 5 đỉnh kề a là b, c, d, e, f đã được tô bằng 5 màu rồi. Khi đó trong 5 đỉnh b, c, d, e, f phải có 2 đỉnh không kề nhau, vì nếu 5 đỉnh đó đôi một kề nhau thì đỉnh b, c, d, e, f là đồ thị đầy đủ K_5 và đây là một đồ thị không phẳng, do đó G không phẳng, trái với giả thiết. Giả sử b và d không kề nhau (Hình 4.20).

Xoá 2 đỉnh b và d và cho kề a những đỉnh trước đó kề b hoặc kề d mà không kề a, ta được đồ thị mới G'' có n−2 đỉnh (Hình 4.20). Theo giả thiết quy nạp, ta có thể tô đúng G'' bằng 5 màu. Sau khi các đỉnh của G'' được tô đúng rồi, ta dựng lại 2 đỉnh b và d, rồi tô b và d bằng màu đã tô cho a (màu 1, Hình 4.21), còn a thì được tô lại bằng màu khác với màu của b, c, d, e, f. Vì b và d không kề nhau đã được tô bằng cùng màu 1, nên với 5 đỉnh này chỉ mới dùng hết nhiều lắm 4 màu. Do đó G được tô đúng bằng 5 màu.



Hình 4.20. Đồ thị G và G''



Hình 4.21. Đồ thị G với màu được tô

4. Định lý bốn màu của Appel-Haken (1976): Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số không lớn hơn 4.

Định lý Bốn màu đầu tiên được đưa ra như một phỏng đoán vào năm 1850 bởi một sinh viên người Anh tên là F. Guthrie và cuối cùng đã được hai nhà toán học Mỹ là Kenneth Appel và Wolfgang Haken chứng minh vào năm 1976. Trước năm 1976 cũng đã có nhiều chứng minh sai, mà thông thường rất khó tìm thấy chỗ sai, đã được công bố. Hơn thế nữa đã có nhiều cố gắng một cách vô ích để tìm phản thí dụ bằng cách cố vẽ bản đồ cần hơn bốn màu để tô nó.

Có lẽ một trong những chứng minh sai nổi tiếng nhất trong toán học là chứng minh sai "bài toán bốn màu" được công bố năm 1879 bởi luật sư, nhà toán học nghiệp dư Luân Đôn tên là Alfred Kempe. Nhờ công bố lời giải của "bài toán bốn màu", Kempe được công nhận là hội viên Hội Khoa học Hoàng gia Anh. Các nhà toán học chấp nhận cách chứng minh của ông ta cho tới 1890, khi Percy Heawood phát hiện ra sai lầm trong chứng minh của Kempe. Mặt khác, dùng phương pháp của Kempe, Heawood đã chứng minh được "bài toán năm màu" (tức là mọi bản đồ có thể tô đúng bằng 5 màu).

Như vậy, Heawood mới giải được "bài toán năm màu", còn "bài toán bốn màu" vẫn còn đó và là một thách đố đối với các nhà toán học trong suốt gần một thế kỷ. Việc tìm lời giải của "bài toán bốn màu" đã ảnh hưởng đến sự phát triển theo chiều hướng khác nhau của lý thuyết đồ thị.

Mãi đến năm 1976, khai thác phương pháp của Kempe và nhờ công cụ máy tính điện tử, Appel và Haken đã tìm ra lời giải của "bài toán bốn màu". Chứng minh của họ dựa trên sự phân tích từng trường hợp một cách cẩn thận nhờ máy tính. Họ đã chỉ ra rằng nếu "bài toán bốn màu" là sai thì sẽ có một phản thí dụ thuộc một trong gần 2000 loại khác nhau và đã chỉ ra không có loại nào dẫn tới phản thí dụ cả. Trong chứng minh của mình họ đã dùng hơn 1000 giờ máy. Cách chứng minh này đã gây ra nhiều cuộc tranh cãi vì máy tính đã đóng vai trò quan trọng biết bao. Chẳng hạn, liệu có thể có sai lầm trong chương trình và điều đó dẫn tới kết quả sai không? Lý luận của họ có thực sự là một chứng minh hay không, nếu nó phụ thuộc vào thông tin ra từ một máy tính không đáng tin cậy?

- ***Sắc số của một số đồ thị cơ bản***
    - Đồ thị lưỡng phân đủ có sắc số là 2.
    - Đồ thị vòng có sắc số là 2 nếu số đỉnh n chẵn, là 3 nếu số đỉnh n lẻ.
    - Đồ thị bánh xe ($n \geq 4$) có sắc số là 4 nếu số đỉnh n chẵn, là 3 nếu số đỉnh n lẻ.
    - Đồ thị đầy đủ K_n có sắc số là n.

4.4.3. Giải thuật tô màu đồ thị Welsh and Powell

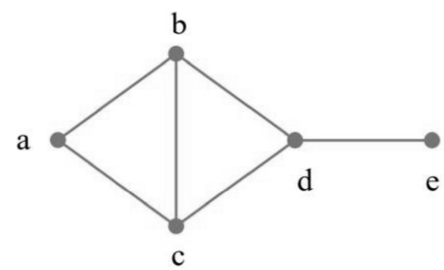
Bước 1. Xác định bậc các đỉnh trong đồ thị, sắp xếp các đỉnh của đồ thị theo thứ tự bậc giảm dần.

Bước 2. Dùng màu k để tô cho đỉnh đầu tiên và cũng dùng màu này để tô cho các đỉnh liên tiếp trong danh sách mà không kề với đỉnh đầu tiên. Sau đó loại những đỉnh đã tô màu ra khỏi danh sách.

Bước 3. Trở lại đầu danh sách, tô màu k+1 cho đỉnh chưa được tô và lặp lại quá trình trên cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu.

➢ **Chú ý**: Thuật toán tô màu trên chỉ giúp ta một cách tiếp cận để tìm sắc số của một đồ thị và có thể chưa đưa ra lời giải cho việc tìm sắc số một cách tốt nhất. Bởi vì bài toán tìm sắc số của đồ thị là một bài toán khó và không phải đồ thị nào cũng tìm được sắc số của nó một cách dễ dàng.

Ví dụ: Tô màu cho đồ thị dưới đây



Hình 4.22. Ví dụ giải thuật tô màu

Giải:

Tính và sắp xếp các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần như bảng 4.1

Bảng 4.1. Các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần

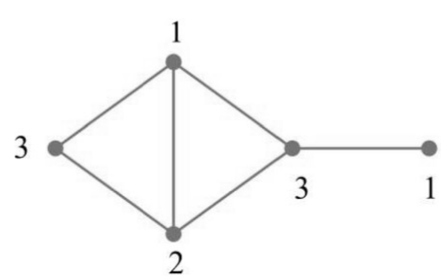
v	b	c	d	a	e
deg(v)	3	3	3	2	1

Tô màu 1 cho b, e. Các đỉnh còn lại: {c, d, a}

Tô màu 2 cho c. Các đỉnh còn lại: {d, a}

Tô màu 3 cho d, a.

Vậy dùng tất cả 3 màu để tô. Đồ thị có thể vẽ lại như hình 4.23:



Hình 4.23. Đồ thị với màu được tô

4.5. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

4.5.1. Bài toán lập lịch thi

Hãy lập lịch thi trong một trường đại học sao cho không có sinh viên nào thi hai môn cùng một lúc.

Giải pháp: Biểu diễn bằng đồ thị: mỗi môn học là một đỉnh, nếu 2 môn học nào được dự thi bởi cùng 1 sinh viên thì sẽ nối bằng 1 cạnh. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy việc lập lịch thi sẽ tương ứng với việc tô màu đồ thị này.

Ví dụ:

Có 7 môn thi với thông tin sau:

Môn 1: có các sinh viên A, B, C và D thi

Môn 2: có các sinh viên A, E, F, G và H thi

Môn 3: có các sinh viên B, E, I, J và K thi

Môn 4: có các sinh viên B, F, L và M thi

Môn 5: có các sinh viên G, L, N và O thi

Môn 6: có các sinh viên J, M, N và P thi

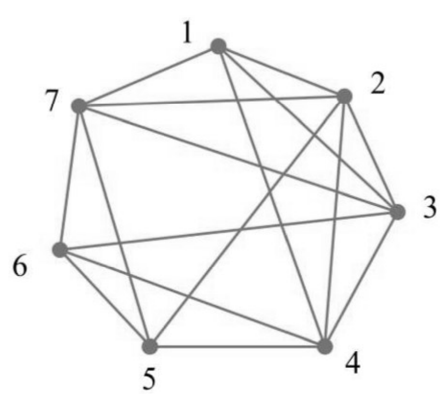
Môn 7: có các sinh viên D, H, K, O và P thi

Hãy xếp lịch thi cho các môn thi sao cho không có sinh viên nào thi hai môn cùng một lúc.

Giải:

Ta biểu diễn bằng đồ thị như hình 4.24.

Việc lập lịch thi chính là việc tô màu đồ thị này.



Hình 4.24. Đồ thị tương ứng với lịch thi

Tính và sắp xếp các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần như bảng 4.2

Bảng 4.2. Thứ tự bậc giảm dần của các đỉnh

v	2	3	4	7	1	5	6
deg(v)	5	5	5	5	4	4	4

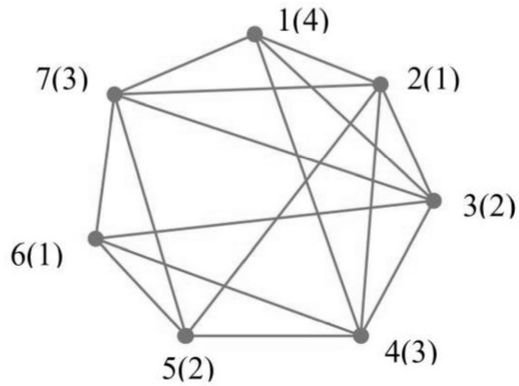
Tô màu 1 cho đỉnh 2, 6. Các đỉnh còn lại: {3, 4, 7, 1, 5}

Tô màu 2 cho đỉnh 3, 5. Các đỉnh còn lại: {4, 7, 1}

Tô màu 3 cho đỉnh 4, 7. Các đỉnh còn lại: {1}

Tô màu 4 cho đỉnh 1.

Thu được đồ thị như hình 4.25



Hình 4.25. Đồ thị kết quả bài toán lập lịch

Ta dùng tất cả 4 màu để tô màu cho đồ thị. Vậy có thể xếp lịch thi cho các môn vào 4 ngày thi như bảng 4.3:

Bảng 4.3. Bảng kết quả xếp lịch

Ngày thi	Môn thi
1	2, 6
2	3, 5
3	4, 7
4	1

4.5.2. Bài toán phân chia tần số

Giả sử mỗi kênh truyền hình phủ sóng trong phạm vi bán kính 50 km, khu vực miền Nam có tất cả 12 đài phát truyền hình. Phải phân chia các kênh cho các đài phát như thế nào sao cho không có 2 đài phát nào bị trùng kênh trong vùng phủ sóng của chúng.

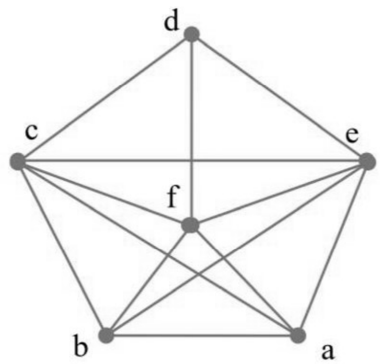
Giải pháp: Ta xây dựng đồ thị gồm 12 đỉnh, mỗi đỉnh ứng với một đài phát. Hai đài có khoảng cách từ 100 km trở xuống được nối với nhau bằng 1 cạnh. Thực hiện việc tô màu cho đồ thị, các đỉnh cùng màu được phép phát cùng một kênh.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

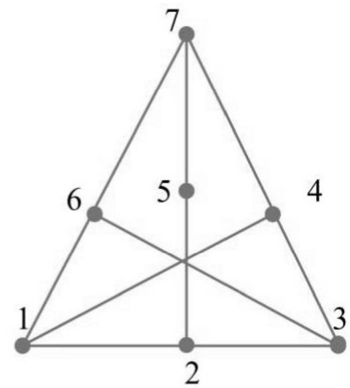
1. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 miền, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị G.

2. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Tìm số cạnh và số miền của G.

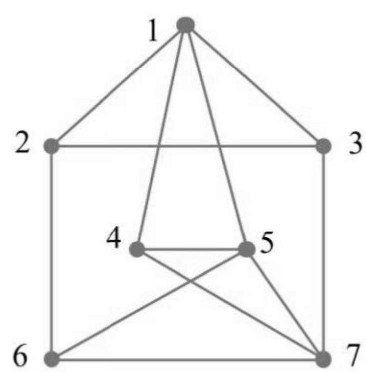
3. Cho 3 đồ thị G1, G2, G3, đồ thị nào là phẳng, đồ thị nào không phẳng? Vì sao? Nếu là đồ thị phẳng hãy vẽ lại sao cho các cạnh không cắt nhau.



G1



G2



G3

4. Tìm sắc số của các đồ thị cho ở câu 3.

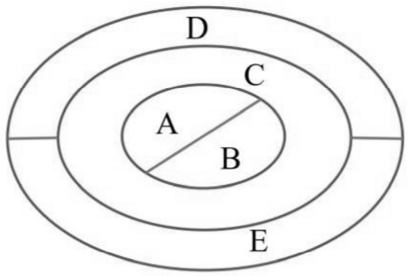
5. Khoa Toán có 6 hội đồng họp mỗi tháng một lần. Cần có bao nhiêu thời điểm họp khác nhau (ít nhất) để đảm bảo rằng không ai bị xếp lịch họp hai hội đồng cùng một lúc, nếu các hội đồng là:

$$H_1 = \{H, L, P\}, H_2 = \{L, M, T\}, H_3 = \{H, T, P\}.$$

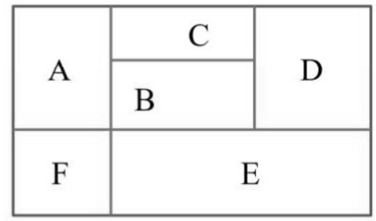
$$H_4 = \{P, M, T\}, H_5 = \{H, L\}, H_6 = \{L, T, P\}$$

6. Hãy xây dựng đồ thị đối ngẫu và tô màu các bản đồ:

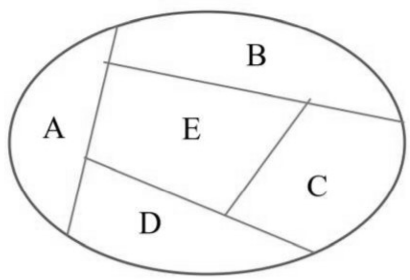
a.



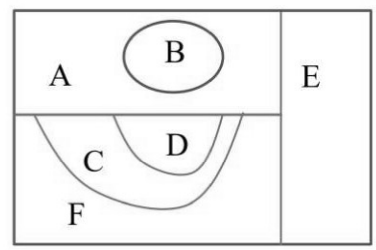
b.



c.



d.



7. Cho ví dụ một đồ thị phẳng liên thông với 6 cạnh và 3 miền.

8. Cho ví dụ một đồ thị phẳng liên thông với 4 đỉnh và 5 miền.

9. Cho ví dụ một đồ thị phẳng liên thông với 6 đỉnh và 7 cạnh.

10. Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: Bỏ một đỉnh bất kỳ và các cạnh kề của nó tạo ra một đồ thị phẳng.

a) K_5 **b)** K_6 **c)** $K_{3,3}$.

11. Hãy lập lịch thi cho tình huống sau: Có 7 môn thi A, B, C, D, E, F, H và các môn có sinh viên đăng ký thi cùng là:

(A, B, C); (B, C, F); (E, F); (A, D, E); (A, E, F); (B, E); (C, H); (A, C, E, F).

12. Viết chương trình minh họa thuật toán tô màu cho đồ thị.