Ch5. Phép tính tích phân hàm nhiều biến

Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP. HCM

5.1. TÍCH PHÂN KÉP

5.1.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép - thể tích vật thể hình trụ cong

Giả sử cần tính thể tích V của vật thể hình trụ cong Ω, giới hạn dưới bởi miền hữu hạn D trong mặt phẳng Oxy, giới hạn trên bởi mặt cong S có phương trình $z = f(x, y) \geq 0$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ với đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn là biên của D. Hàm số $z = f(x, y)$ xác định, liên tục và không âm trong miền D.

5.1.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép - thể tích vật thể hình trụ cong

Chia miền D một cách tùy ý thành n miền nhỏ $D_{1,}$ $D_2, ...,$ D_n không dẫm lên nhau (nghĩa là $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \varnothing, \forall i \neq j, \cup_{i=1}^{n} D_i = D$), có các diện tích tương ứng là ΔS_1, $\Delta S_2, ...,$ ΔS_n, và qua biên của các miền nhỏ ấy dựng các mặt trụ đường sinh song song với trục Oz. Như vậy hình trụ cong được chia thành n hình trụ cong nhỏ Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n.

5.1.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép - thể tích vật thể hình trụ cong

5.1.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép - thể tích vật thể hình trụ cong

Để tính thể tích của Ω_i, lấy trong miền D_i một điểm tùy ý $M_i\left(\xi_i, \eta_i\right)$.
Do $f(x, y)$ liên tục trên miền D, nên trên miền nhỏ D_i, giá trị của f khác $f(M_i)$ rất ít. Vậy ta có thể xem thể tích của Ω_i gần bằng thể tích hình trụ đáy D_i và chiều cao $f(M_i)$

$$\Delta V_i = V(\Omega_i) \approx f(M_i) S(D_i) = f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta S_i \tag{1}$$

Vậy thể tích V của Ω được tính gần đúng bằng tổng sau

$$V(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta S_i = V_n \tag{2}$$

5.1.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép - thể tích vật thể hình trụ cong

Rõ ràng khi tăng số phần chia n lên sao cho các miền nhỏ D_i có đường kính $d(D_i)$ (ở đây $d(D_i)$ ký hiệu là đường kính của mảnh D_i bằng khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì thuộc D_i) càng nhỏ lại thì sự khác nhau giữa V và V_n càng ít.

Cho $\max d(D_i) \to 0$ (khi ấy $n \to \infty$, $\Delta S_i \to 0$) thì V_n tiến đến giá trị giới hạn là thể tích của khối Ω.
Vậy

$$V(\Omega) = \lim_{\max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)\to 0} V_n = \lim_{\max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta S_i. \tag{3}$$

5.1.2. Định nghĩa tích phân kép

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền đóng bị chặn D. Ta thực hiện các bước sau:

1. Chia tùy ý miền D thành n miền nhỏ $D_1,\ D_2, ...,\ D_n$ không dẫm lên nhau có diện tích tương ứng là $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ ...,\ \Delta S_n$.
2. Trên mỗi D_i lấy một điểm tùy ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$.
3. Thiết lập tổng (được gọi là tổng tích phân kép của hàm $f(x, y)$ trên miền D)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \tag{4}$$

Rõ ràng tổng S_n phụ thuộc vào cách chia (mỗi cách chia miền D được gọi là một phân hoạch của miền D), cách lấy điểm trung gian M_i.

5.1.2. Định nghĩa tích phân kép

Định nghĩa 5.1. Nếu tổng $\lim\limits_{\max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)\to 0} S_n = S \in \mathbb{R}$ sao cho S không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm trung gian M_i, thì ta nói hàm $f(x,y)$ khả tích trên D. Số thực S đgl *tích phân bội hai* (hay *tích phân kép*) của hàm $f(x,y)$ trên miền D và được ký hiệu

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \text{ hay } \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Hàm số $f(x,y)$ đgl hàm dưới dấu tích phân, $f(x,y)\,dxdy$ đgl biểu thức dưới dấu tích phân, D là miền lấy tích phân.

Chú thích 5.1.

$i)$ Trở lại bài toán tính thể tích hình trụ cong, ta có

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$$

$ii)$ Xét đường cong (C) với phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

- (C) được gọi là *trơn*, nếu $x'(t)$, $y'(t)$ liên tục và $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$.
- (C) được gọi là *trơn từng khúc* nếu có thể chia nó thành hữu hạn cung trơn.

Các tính chất

Tính chất 1. Hàm liên tục trên miền đóng, bị chặn, có biên trơn từng khúc thì khả tích trên miền ấy.

Tính chất 2. (Tính tuyến tính)

1. $\iint\limits_D dxdy = S(D)$ (diện tích miền D)
2. $\iint\limits_D Cf(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$
3. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

Các tính chất

4/ Nếu D được chia thành 2 miền D_1 và D_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dxdy \tag{5}$$

5/ Nếu $f(x, y) \geq 0$ trong D thì

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy \geq 0 \tag{6}$$

Các tính chất

6/ Nếu $f(x,y) \leq g(x,y)$ trong D, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy \tag{7}$$

7/ Nếu M, m là giá trị lớn nhất và bé nhất của $f(x,y)$ trên D, thì

$$mS(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq MS(D) \tag{8}$$

Các tính chất

8/ (*Định lý giá trị trung bình*) Nếu $f(x, y)$ liên tục trong D thì trong miền đó tìm được ít nhất một điểm $M_0(\xi_0, \eta_0)$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = f(\xi_0, \eta_0) S(D). \tag{9}$$

Khi ấy đại lượng $\alpha = \dfrac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ được gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x, y)$ trên D.

5.1.4. Cách tính tích phân kép - đưa về tích phân lặp

1^0 Xét trường hợp $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \le x \le b,$ $c \le y \le c\}$ *là hình chữ nhật.*

i/ Nếu $f(x, y) = X(x)Y(y)$ thì

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \left(\int_a^b X(x)dx\right)\left(\int_c^d Y(y)dy\right).$$

ii/ Nếu $f(x, y)$ tùy ý thì

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

hay

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

5.1.4. Cách tính tích phân kép - đưa về tích phân lặp

2^0 *Trường hợp* $D = \{(x, y) : y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$.
Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục trên $[a, b]$, hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền D.
Khi đó

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \\
&= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dydx \\
&= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy
\end{aligned}$$

5.1.4. Cách tính tích phân kép - đưa về tích phân lặp

3^0 Trường hợp $D = \{(x, y) : x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$.
Giả sử $x_1(y)$, $x_2(y)$ liên tục trên $[a, b]$, hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền D.
Khi đó

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy &= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \\
&= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dxdy \\
&= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx
\end{aligned}$$

Ví dụ 5.1. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{4}\int_{1}^{2} \left(xy^2 + y\right) dxdy$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{4}\int_{1}^{2} \left(xy^2 + y\right) dxdy = \int_{-1}^{4} dy \int_{1}^{2} \left(xy^2 + y\right) dx \\ &= \int_{-1}^{4} \left(\frac{x^2y^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{1}^{2} dy = \int_{-1}^{4} \left(\frac{3y^2}{2} + y\right) dy = 40.\blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.2. Tính tích phân $I = \iint\limits_{D} x\sqrt{y}dxdy$ với

$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 4\right\}$.

Giải. Ta có

$$I = \int_{1}^{3}\int_{2}^{4} x\sqrt{y}dydx = \int_{1}^{3} xdx \int_{2}^{4} \sqrt{y}dy = \frac{16}{3}(4 - \sqrt{2}).\blacksquare$$

5.1.5. Các ví dụ

Ví dụ 5.4. Tính tích phân $I = \iint\limits_D x^2 y dx dy$, D là tam giác với các đỉnh $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,4)$.

Giải. Ta có

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}.$$

Vậy

$$I = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2x} y dy = \int_0^2 2x^4 dx = \frac{64}{5}. \blacksquare$$

Ví dụ 5.6. Tính tích phân $I = \iint\limits_D \sin y dxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường $y = x$, $2y = x$, $y = 2$.

Ví dụ 5.6.

Giải.
Chiếu miền D xuống Oy, ta có

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq 2y\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_y^{2y} \sin y dx dy = \int_0^2 \sin y dy \int_y^{2y} dx \\ &= \int_0^2 y \sin y dy \\ &= \sin 2 - 2\cos 2. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.6.

Cách khác
Chiếu miền D xuống Ox, ta có

$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2 \\ &= \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le x\} \\ &\quad \cup \{(x,y) : 2 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le 2\}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{x} \sin y dy dx + \int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{2} \sin y dy dx \\ &= (2\sin 1 - \sin 2) + (2\sin 2 - 2\sin 1 - 2\cos 2) \\ &= \sin 2 - 2\cos 2. \blacksquare \end{aligned}$$

5.1.4. Đổi biến số trong tích phân kép

5.1.4.1. Công thức đổi biến số tổng quát

Giả sử điểm $M(x, y)$ trong D_{xy} có thể được xác định bởi (u, v) trong D'_{uv} như sau

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \tag{10}$$

trong đó, $x(u, v)$ và $y(u, v)$ là các hàm khả vi liên tục (nghĩa là liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục), thỏa điều kiện

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11}$$

trong D'_{uv}.

5.1.4.1. Công thức đổi biến số tổng quát

Định thức trên được gọi là định thức Jacobi của các hàm $x(u,v)$ và $y(u,v)$. Khi đó ta có công thức đổi biến sau

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.} \qquad (12)$$

Ví dụ 5.8. Tính tích phân $I = \iint\limits_{D} (x+y)^3 (x-y)^2\,dxdy$ với D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $x+y=1, x+y=3, x-y=2, x-y=5$.

Ví dụ 5.8.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2} \end{cases}$$

Ta có miền $D = D_{xy}$ biến thành miền $D_{uv} = \{1 \leq u \leq 3,\ 2 \leq v \leq 5\}$ với Jacobien

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5.8.

Ví dụ 2.8.

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \int_2^5 u^3 v^2 dv du = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 du \int_2^5 v^2 dv = 390. \blacksquare$$

5.1.4.2. Đổi biến số trong tọa độ cực

Trong mặt phẳng Oxy, xét miền D. Vẽ hai tia OA, OB tiếp xúc với miền D và $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right) = \alpha$, $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB}\right) = \beta$. Khi đó điểm $M(x, y)$ thuộc miền D khi và chỉ khi

$$\begin{cases} OM_1 \leq OM \leq OM_2 \\ \alpha \leq \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) \leq \beta \end{cases}$$

Hình

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{13}$$

trong đó O là gốc cực, Ox là trục cực và $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ là bán kính cực, $0 \le \varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) \le 2\pi$ góc cực.

Khi đó, miền D trở thành

$$D_{r\varphi} = \left\{(r, \varphi) : r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\right\}.$$

Ta có

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Do đó

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdrd\varphi.} \tag{14}$$

Định lý Fubini trong tọa độ cực

1^0 $D_{r\varphi}$ xác định bởi $a \le r \le b$ và $\alpha \le \varphi \le \beta$.
Khi đó

$$\iint\limits_{D_{r\varphi}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) drd\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{a}^{b} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) rdr$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) rdrd\varphi \tag{15}$$

$$= \int_{a}^{b}\int_{\alpha}^{\beta} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) rd\varphi dr. \tag{16}$$

Ví dụ 5.9.

Tính tích phân $I = \iint\limits_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, với D là phần giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O bán kính lần lượt là 1 và 2.

Ví dụ 5.9.

Giải. Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó miền D biến thành miền
$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 1 \le r \le 2\}$.

Vậy

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin^2\varphi}{\sqrt{r^2}} r d\varphi dr \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\varphi d\varphi dr = \frac{7}{3}\pi. \blacksquare \end{aligned}$$

Định lý Fubini trong tọa độ cực

2^0 $D_{r\varphi}$ *xác định bởi* $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ *và* $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$.
Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr.} \quad (17)$$

Ví dụ 5.10. Tính tích phân $I = \iint\limits_D ydxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \sqrt{2x-x^2}$, $x = 0$.

Ví dụ 5.10.

Giải. Đổi biến trong tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó, ta có miền $D_{r\varphi} = \left\{(r,\varphi) : 2\cos\varphi \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$.
Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y dy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\varphi}^{2} r^2 \sin\varphi dr d\varphi \\ &= -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)\left(\cos^3\varphi - 1\right) d\varphi = 2. \blacksquare \end{aligned}$$

Định lý Fubini trong tọa độ cực

3^0 $D_{r\varphi}$ xác định bởi $a \le r \le b$ và $\varphi_1(r) \le \varphi \le \varphi_2(r)$.
Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr d\varphi = \int_a^b dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r d\varphi.} \tag{18}$$

5.1.5.1. Ứng dụng hình học

1^0 Diện tích hình phẳng

Từ định nghĩa tích phân kép ta có

$$\boxed{S(D) = \iint_D dxdy.} \tag{19}$$

Ví dụ 5.15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = x^2$ trong góc phần tư thứ nhất.

Giải. Hai đường $y = x$ và $y = x^2$ cắt nhau tại $(0, 0)$ và $(1, 1)$. Vậy

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^x dydx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}.\blacksquare$$

Ví dụ 5.12.

Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 2x$.

Giải. Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó, ta có miền

$$D_{r\varphi} = \left\{(r,\varphi) : 0 \le r \le 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} r dr d\varphi = 2\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.16.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(x-1)^2+y^2=1$, $(x-2)^2+y^2=4$, $y=x$, $y=0$.

Giải. Chuyển sang tọa độ cực thì 4 đường trên có phương trình lần lượt là $r=2\cos\varphi$, $r=4\cos\varphi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=0$.

Vậy

$$D_{r\varphi}=\left\{(r,\varphi):0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi\right\}.$$

Cho nên

$$S(D)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}rdr=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right).\blacksquare$$

5.1.5.1. Ứng dụng hình học

2^0 Thể tích vật thể

Thể tích khối trụ cong Ω giới hạn trên bởi mặt $z = f(x, y) \geq 0$, giới hạn dưới bởi mặt phẳng $z = 0$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ song song với trục Oz và đường chuẩn là biên miền D được tính bởi công thức:

$$\boxed{V(\Omega) = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.} \tag{20}$$

Trụ cong Ω giới hạn trên bởi mặt $z = f_2(x, y)$, giới hạn dưới bởi mặt $z = f_1(x, y) \geq 0$ $(f_1(x, y) \leq f_2(x, y))$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ song song với trục Oz và đường chuẩn là biên miền D được tính bởi công thức:

$$\boxed{V(\Omega) = \iint\limits_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dxdy.} \tag{21}$$

Ví dụ 5.17.

Tìm thể tích miền Ω giới hạn bởi các mặt $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

Giải. Giao của hai mặt:

$$\begin{cases} 2(4 - x^2 - y^2) = 2 + x^2 + y^2 \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Chiếu miền Ω xuống mặt phẳng Oxy, ta được miền $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$

Vậy

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} \left[(4 - x^2 - y^2) - \frac{1}{2}(2 + x^2 + y^2)\right] dxdy \\ &= \frac{3}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} (2 - x^2 - y^2) dxdy. \end{aligned}$$

5.1.5.1. Ứng dụng hình học

Chuyển sang tọa độ cực ta được

$$V = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr = 3\pi. \blacksquare$$

3^0 Diện tích mặt cong

Cho mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ và có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là D. Diện tích mặt S được tính bởi công thức sau

$$\boxed{S = \iint\limits_D \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1} dxdy.} \tag{22}$$

Ví dụ 5.18

Tính diện tích mặt $z = \frac{2}{3}x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2.$

Giải. Ta có $z'_x = \sqrt{x},\ z'_y = 0$

nên

$$S = \int_1^2 \int_0^1 \sqrt{1+x}dxdy = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).\blacksquare$$

5.2.1. Tích phân bội ba

5.2.1.1. Định nghĩa

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên miền đóng, bị chặn Ω trong không gian $Oxyz$. Chia Ω thành n phần nhỏ $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ không dẫm với nhau với các thể tích tương ứng ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. Trong mỗi miền Ω_k lấy một điểm bất kỳ $M_k(x_k, y_k, z_k)$. Lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k. \tag{23}$$

5.2.1.1. Định nghĩa

Gọi $d(\Omega_k)$ là đường kính nhỏ nhất của quả cầu chứa Ω_k.
Định nghĩa. Nếu $\lim\limits_{\max d(\Omega_k)\to 0} S_n = S \in \mathbb{R}$ sao cho S không phụ thuộc vào cách chia miền Ω và cách lấy điểm M_k, thì ta nói hàm f *khả tích* trên Ω, số thực S được gọi là tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên miền Ω và ký hiệu

$$S = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz \text{ hay } S = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz. \tag{24}$$

Hàm f đgl hàm dưới dấu tích phân, biểu thức $f(x, y, z)\, dxdydz$ đgl biểu thức dưới dấu tích phân, Ω là miền lấy tích phân.

5.2.1.2. Các tính chất

Định nghĩa 5.2. Mặt cong $z = f(x, y)$ được gọi là mặt trơn nếu hàm $f(x, y)$ khả vi liên tục. Mặt S được gọi là trơn từng khúc nếu có thể chia nó thành hữu hạn mặt cong trơn.

Tính chất 1. Nếu $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, giới nội Ω với biên là mặt cong trơn từng khúc thì hàm $f(x, y, z)$ khả tích trên Ω.

Tính chất 2. Với f, g, Ω thỏa tính chất 1, ta có các tính chất sau:

1. $$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = V(\Omega)$$
2. $$\iiint\limits_{\Omega} Cf(x, y, z)\, dxdydz = C \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz \ (C = const)$$
3. $$\iiint\limits_{\Omega} (f + g)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} fdxdydz + \iiint\limits_{\Omega} gdxdydz$$

5.2.1.2. Các tính chất

4. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f dxdydz \geq 0$ nếu $f \geq 0$ trên Ω

5. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f dxdydz \geq \iiint\limits_{\Omega} g dxdydz$ nếu $f \geq g$ trên Ω

6. Nếu Ω được chia thành 2 phần không dẫm nhau Ω_1 và Ω_2 thì

$$\iiint\limits_{\Omega} f dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f dxdydz$$

5.2.1.2. Các tính chất

Tính chất 3. (Định lí giá trị trung bình) Nếu $f(x, y, z)$ liên tục trong miền đóng, giới nội liên thông Ω thì trong Ω tồn tại ít nhất một điểm (x_0, y_0, z_0) sao cho

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = f(x_0, y_0, z_0) V(\Omega).$$

Đại lượng $I = \dfrac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} fdxdydz$ được gọi là giá trị trung bình của hàm f trên Ω.

5.2.1.3. Cách tính

1. Trường hợp Ω là hình hộp:
$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [m, n] = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,$
$m \leq z \leq n\}$

(i) Nếu $f(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ (là hàm tách biến), ta có

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$
$$= \left(\int_a^b X(x)dx\right)\left(\int_c^d Y(y)dy\right)\left(\int_m^n Z(z)dz\right). \qquad (25)$$

5.2.1.3. Cách tính

(ii) Nếu $f(x, y, z)$ tùy ý, thì ta có thể tính $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$ bằng một trong các công thức sau

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x, y, z)\, dz, \qquad (26)$$

hay

5.2.1.3. Cách tính

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d dy \int_m^n dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx, \tag{27}$$

hay

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \equiv \int_m^n dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\,dy. \tag{28}$$

5.2.1.3. Cách tính

2. Trường hợp $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$ $(x, y) \in D\}$, *các hàm* $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ *liên tục trên* D.

Cho miền Ω giới hạn bởi mặt dưới $z = z_1(x, y)$, giới hạn trên bởi mặt $z = z_2(x, y)$, giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song trục Oz và tựa trên đường chuẩn là biên ∂D của miền D (D là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy). Khi ấy tích phân bội ba có thể đưa về tích phân lặp gồm một tích phân kép và một tích phân đơn

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dxdy \\
&= \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.
\end{aligned}$$

5.2.1.3. Cách tính

Tùy thuộc miền D ta có các cận cụ thể cho tích phân kép trên D.
$i)$ Nếu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) \le y \le y_2(x), \; a \le x \le b\}$, ta có

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

ii) Nếu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \ c \leq y \leq d\}$, ta có

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

5.2.1.3. Cách tính

Chú thích 5.5. Tương tự, ta cũng có các công thức cho trường hợp sau
iii) Trường hợp $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)$,
$(x, z) \in D_1\}$, D_1 là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxz :

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_{D_1} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dxdz \\ &= \iint_{D_1} dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy.\end{aligned}$$

iv) Trường hợp $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)$, $(y, z) \in D_2\}$, D_2 là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oyz :

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_{D_2}\left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\right] dxdz \\ &= \iint_{D_2} dydz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.20.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} x^2 y \sqrt{z} dxdydz$, trong đó Ω là hình hộp chữ nhật giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

Giải. Ta có

$$I = \int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 x^2 y \sqrt{z} dxdydz = \int_0^2 x^2 dx. \int_0^3 ydy. \int_0^4 \sqrt{z} dz = 64. \blacksquare$$

Ví dụ 5.21. Tính $I = \int_2^a \int_1^x \int_0^{xy} zdzdydx$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_2^a dx \int_1^x dy \int_0^{xy} zdz = \int_2^a dx \int_1^x \frac{x^2y^2}{2} dy \\ &= \int_2^a \left. \frac{x^2y^3}{6} \right|_{y=1}^{y=x} dx = \frac{1}{6} \int_2^a (x^5 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{36} a^6 - \frac{1}{18} a^3 - \frac{4}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.23. Tính $I = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ydydzdx$.

Giải. Ta có

$$I = \int_0^2 dx \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ydy = \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^1 (1-z^2)dz = \frac{2}{3}.\blacksquare$$

Ví dụ 5.24.

Xác định cận và tính các tích phân sau
$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ với Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt tọa độ và mặt $x+y+z=1$.

Ví dụ 5.24.

Giải. Chiếu xuống mặt phẳng Oxy, ta được miền $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 - x\}$. Vậy

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dzdydx \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} \right] dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right] dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx
\end{aligned}$$

Ví dụ 5.24.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}. \blacksquare \end{aligned}$$

5.2.2.1. Công thức đổi biến tổng quát

Giả sử miền Ω_{uvw} trong không gian $Ouvw$ được ánh xạ 1-1(song ánh) vào miền Ω trong không gian $Oxyz$ bằng hệ các hàm khả vi liên tục

$$x = x\left(u, v, w\right), \quad y = y\left(u, v, w\right), \quad z = z\left(u, v, w\right). \tag{29}$$

và cho định thức hàm Jacobi khác 0 trong Ω_{uvw}.

$$J = \frac{D\left(x, y, z\right)}{D\left(u, v, w\right)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (trong } \Omega_{uvw}\text{)}. \tag{30}$$

5.2. Đổi biến trong tích phân bội ba

Khi đó, ta có công thức đổi biến cho tích phân bội ba như sau

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)dxdydz\\&=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f\left[x\left(u,v,w\right),y\left(u,v,w\right),z\left(u,v,w\right)\right]\left|J\right|dudvdw.\end{aligned}} \tag{31}$$

5.2.2.2. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ

Xét $M(x, y, z)$ trong không gian và $N(x, y, 0)$ là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy. Gọi r, φ là tọa độ cực của N trong mặt phẳng Oxy

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{32}$$

5.2.2.2. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ

Vậy điểm M có thể xác định bởi (r, φ, z), chúng được gọi là tọa độ trụ của điểm M. Công thức liên hệ giữa tọa độ Descarte trong không gian và tọa độ trụ là

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{33}$$

5.2.2.2. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ

Ta có công thức tích phân bội ba trong tọa độ trụ

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f\left(x, y, z\right) dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi z}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right) rdrd\varphi dz.} \tag{34}$$

Ví dụ 5.26.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{z}{x^2+y^2} dxdydz$ với Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=4;\ z=2\pi;\ z=3\pi$.

Giải. Chiếu Ω xuống mặt phẳng Oxy ta được miền $D = \left\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.

Chuyển sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Khi ấy miền $\Omega : 1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 2\pi \le z \le 3\pi$.

Ví dụ 5.26.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{z}{r^2} r dz d\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r} dr \int_{2\pi}^{3\pi} z dz = 5\pi^3 \ln 2. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.28.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} y dx dy dz$ với Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$ và $z = 3$.

Giải. Chiếu Ω xuống mặt phẳng Oxy, ta được miền $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

Chuyển sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Khi ấy miền $\Omega : 0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2\sin\varphi$, $0 \leq z \leq 3$. Vậy

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\varphi} \int_0^3 r^2 \sin\varphi dz dr d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\sin\varphi} r^2 dr \int_0^3 dz = 3\pi. \blacksquare$$

2.2.2.3. Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Hình 2.24

5.2.2.3. Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Điểm $M(x, y, z)$ trong không gian có thể được biểu diễn bởi tọa độ cầu (r, φ, θ) như sau

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{35}$$

trong đó

$$\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases} \tag{36}$$

5.2.2.3. Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Công thức đổi biến tích phân bội ba trong tọa độ cầu như sau

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \\ &= \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\theta}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.\end{aligned}} \quad (37)$$

Nếu miền $\Omega_{r\varphi\theta} = \{(r,\varphi,\theta) : r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta),\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi),$ $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$ thì tích phân trên được chuyển về tích phân lặp

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\theta}} f.r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} d\theta \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f.r^2\sin\theta d\theta.} \quad (38)$$

Ví dụ 5.30.

Tính thể tích hình cầu Ω tâm O bán kính R.
Giải. Chuyển sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Khi đó miền $\Omega : 0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
Vậy

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.31.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$ với Ω là góc 1/8 thứ nhất của hình cầu tâm O bán kính 1.

Giải. Chuyển sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Khi đó miền $\Omega : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi drd\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^5dr = \frac{1}{48}.\blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.32.

Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$ với $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

Ví dụ 5.32.

Giải. Chuyển sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Khi đó miền $\Omega : 0 \leq r \leq \cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta . \frac{\cos^4\theta}{4} d\theta = \frac{1}{10}\pi. \blacksquare \end{aligned}$$

5.2.3.1. Thể tích vật thể

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz. \tag{39}$$

Ví dụ 5.36. Tính thể tích miền được giới hạn bởi các mặt sau:
$z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$ và $x^2 + y^2 = 1$ (lấy miền không chứa gốc tọa độ).
Giải. Chiếu Ω xuống mặt phẳng Oxy, ta được miền

$$D_{xy} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

5.2.3. Ứng dụng

Chuyển sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4-r^2} rdz \\ &= \int_1^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} rdzd\varphi dr = \frac{135}{2}\pi. \blacksquare \end{aligned}$$

5.3. Tích phân đường loại một

5.3.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(M)$ xác định trên dây cung $\overset{\frown}{AB}$, chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n phần bởi các điểm chia $A = A_0,\ A_1,\ A_2, ...,\ A_n,\ A_n = B$.

Trên mỗi cung $A_k\overset{\frown}{A}_{k+1}$, lấy một điểm bất kì M_k và lập tổng

$$S_n = \sum_{n=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \Delta s_k, \tag{40}$$

với Δs_k là độ dài cung $A_k\overset{\frown}{A}_{k+1}$.

5.3.1. Định nghĩa

Cho $\max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta s_k \to 0$. Nếu S_n có giới hạn hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách lấy điểm M_k) thì giới hạn trên được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(M)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và được ký hiệu là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds \text{ hay } \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds. \tag{41}$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ thuộc mặt phẳng Oxy và hàm f là hàm hai biến $f(x, y)$, ta có thể dùng kí hiệu $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, ds$.

5.3.1. Định nghĩa

Trong trường hợp tổng quát (trong không gian $Oxyz$) ta dùng kí hiệu

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, ds.$$

Khi ấy hàm $f(M)$ được gọi là hàm khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$.

Các tính chất

Tính chất 1. (*Định lý tồn tại*) *Nếu hàm* $f(M)$ *liên tục dọc theo cung* $\overset{\frown}{AB}$ *trơn hoặc trơn từng khúc thì* f *khả tích trên* $\overset{\frown}{AB}$.

Tính chất 2.

1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds = l(\overset{\frown}{AB})$ (độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$).
2. Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung lấy tích phân, tức là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(M)\,ds.$$

Các tính chất

3. Nếu f, g khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$, α, β là các hằng số thì $\alpha f + \beta g$ cũng khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [\alpha f(M) + \beta g(M)]\, ds = \alpha \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds + \beta \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} g(M)\, ds.$$

Tính chất 3.
Nếu f khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$, C là điểm trên cung đó thì f khả tích trên $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ và

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(M)\, ds + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(M)\, ds.$$

Tính chất 4.

1. Nếu $f(M) \geq 0$ và f khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds \geq 0.$$

2. Nếu f khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $|f|$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và

$$\left| \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds \right| \leq \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} |f(M)|\, ds.$$

Các tính chất

Tính chất 5. (*Định lý giá trị trung bình*) Nếu $f(M)$ liên tục trên cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có độ dài L. Khi ấy tồn tại điểm $\overline{M}$ thuộc cung ấy sao cho

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,ds = f\left(\overline{M}\right) L.$$

Đại lượng $\alpha = \frac{1}{L} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,ds$ được gọi là giá trị trung bình của hàm $f(M)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$.

Công thức tính tích phân đường loại một

5.3.3.1. Tích phân đường loại 1 trên mặt phẳng

Tùy thuộc vào phương trình của $\overset{\frown}{AB}$, ta có các công thức sau:

1^0 $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số

Cho cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad a \leq t \leq b. \end{cases}$$

Hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó, ta có

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt} \tag{42}$$

Ví dụ 5.38.

Tính chu vi đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = R^2$.

Giải. Chu vi của đường tròn là $l(C) = \int_{(C)} ds$.

Phương trình tham số của (C) là

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_{(C)} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} dt \\ &= R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.39.

Tính tích phân $I = \int_C y ds$, (C) là nửa trên đường tròn $B(0, R)$.

Giải. Phương trình tham số của (C) là

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t, \ 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{(C)} y ds = \int_0^{\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} R\sin t dt \\ &= R^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2R^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 5.40.

Tính tích phân $I = \int_{(C)} (x - y)\, ds$, với $(C) : x^2 + y^2 = ax \; (a > 0)$.

Giải. Ta có $(C) : x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

Tham số hóa phương trình của (C) : $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \end{cases}$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{a}{2}(1 + \cos t - \sin t)\,\frac{a}{2} dt = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)\, dt \\ &= \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{a^2\pi}{2} \blacksquare \end{aligned}$$

5.3.3.1. Tích phân đường loại 1 trên mặt phẳng

2^0 $\overset{\frown}{AB}$ *có phương trình dưới dạng hàm 1 biến*

- $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Khi đó, ta có

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.}$$

- $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$. Khi đó, ta có

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy.}$$

Ví dụ 5.41.

Tính độ dài cung AB có phương trình $y = x^2$ $(-1 \leq x \leq 1)$.

Giải. Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$I(\overset{\frown}{AB}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) + \sqrt{5}. \blacksquare$$

Ví dụ 5.42.

Tính $I = \int_C (x+y)\,ds$ với (C) là tam giác với các đỉnh $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Giải. Ta có

$$I = \int_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = I_1 + I_2 + I_3.$$

- Trên OA: $y = 0 \ \ (0 \le x \le 1)\,, ds = dx$

$$I_1 = \int_{OA} (x+y)\,ds = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5.42.

- Trên OB, $x = 0 \ \ (0 \leq y \leq 1), ds = dy$

$$I_3 = \int_{BO} (x+y)\, ds = \int_{OB} (x+y)\, ds = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

- Trên AB, $y = 1 - x \ \ (0 \leq x \leq 1), ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{2} dx$

$$I_2 = \int_{AB} (x+y)\, ds = \sqrt{2} \int_0^1 dx = \sqrt{2}.$$

Vậy

$$I = 1 + \sqrt{2}. \blacksquare$$

Ví dụ 5.43.

Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{OB}} xds$, (OB) là cung parabol $y = x^2$ nối từ điểm $O\,(0,0)$ đến điểm $B\,(2,4)$.

Giải. Ta có

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

Vậy

$$I = \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{17}{12}\sqrt{17} - \frac{1}{12}.\blacksquare$$

3^0 Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình dạng tọa độ cực

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực là

$$r = r(\varphi), \ \alpha \le \varphi \le \beta.$$

Khi đó, coi φ là tham số, ta có phương trình của cung $\overset{\frown}{AB}$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \ \alpha \le \varphi \le \beta. \tag{43}$$

Ta có công thức

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi} \tag{44}$$

Ví dụ 5.44.

Tính tích phân $I = \int_{(C)} (x - y)\, ds$, với $(C) : x^2 + y^2 = ax\ (a > 0)$.

Giải. Đặt $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$

Ta có $(C) : r(\varphi) = a\cos\varphi \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2\varphi - a\cos\varphi\sin\varphi)\sqrt{(a\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2}\, d\varphi$$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi a^2}{2}. \blacksquare$$

5.3.3.2. Tích phân đường loại một trong không gian

Cho hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ a \leq t \leq b. \end{cases}$$

Khi đó

$$\boxed{\begin{aligned} &\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, ds \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \end{aligned}}$$

Ví dụ 5.46. Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2 ds$, với

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt, 0 \leq t \leq 3 \end{cases}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 b^2 t^2 \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} dt \\ &= b^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^3 t^2 dt = 9b^2\sqrt{a^2+b^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

5.4.1. Định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng

Cho các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thuộc mặt phẳng Oxy. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n phần bởi các điểm $A = A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n = B$, với $A_k = (x_k, y_k)$. Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ lấy điểm bất kỳ $M_k(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ và lập tổng

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} [P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [P(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta x_k + Q(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta y_k],$$

với $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

5.4.1. Định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng

Cho $\max \Delta l_k \to 0$ (Δl_k là độ dài cung $A_k\overset{\frown}{A}_{k+1}$), nếu S_n tiến tới một giới hạn hữu hạn S không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm trung gian M_k thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm P, Q trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và được kí hiệu

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Các tính chất của tích phân đường loại hai

Tính chất 1. (Định lý tồn tại) Nếu các hàm $P(x,y),\ Q(x,y)$ liên tục trong miền mở chứa cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc thì tồn tại tích phân đường loại hai của $P,\ Q$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Tính chất 2. Khi đổi hướng lấy tích phân thì tích phân đổi dấu, tức là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy.$$

Tính chất 3. Nếu $P,\ Q$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ thì $P,\ Q$ khả tích trên $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$. Khi ấy ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} Pdx + Qdy.$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc. Ta có các trường hợp sau

1/ Cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình dạng tham số

Cho các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ a \leq t \leq b. \end{cases}$$

với $t = a$ ứng với $A(x(a), y(a))$, $t = b$ ứng với $B(x(b), y(b))$.

Ta có công thức

$$\boxed{\begin{aligned} &\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \\ &\quad = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right] dt. \end{aligned}}$$

Ví dụ 5.47. Tính tích phân $I = \int_C y^2 dx - x^2 dy$, với C là đường tròn tâm O bán kính 1.

Giải. (C) có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 t.(-\sin t) - \cos^2 t.\cos t\right] dt = 0. \blacksquare$$

2/ Cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình dạng hàm 1 biến

i/ Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Khi đó, ta có

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\ &\quad = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x)\right] dx.\end{aligned}}$$

Ví dụ 5.49. Tính $I = \int_C \left(x^2 + y\right) dx + y^3 dy$, với C là parabol $y = x^2$ đi từ $A(-1,1)$ đến $B(2,4)$.

Giải. Ta có

$$I = \int_{-1}^{2} \left[\left(x^2 + x^2\right) + x^6.2x\right] dx = \int_{-1}^{2} \left(2x^2 + 2x^7\right) dx = \frac{279}{4}.\blacksquare$$

Cách tính tích phân đường loại hai

ii/ Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x\left(y\right)$, $c \leq y \leq d$. Khi đó, ta có

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy \\ &\quad = \int_c^d \left[P\left(x\left(y\right),y\right)x'\left(y\right) + Q\left(x\left(y\right),y\right)\right]dy.\end{aligned}}$$

Ví dụ 5.50. Tính tích phân $I = \int_L y^2 dx + x dy$, trong đó L là một phần của parabol $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$ nối từ $A(1,0)$ đến $B(0,2)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[y^2 \left(-\frac{1}{2}y \right) + \left(1 - \frac{1}{4}y^2 \right) \right] dy \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^3 + 1 - \frac{1}{4}y^2 \right) dy = -\frac{2}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

Tích phân đường loại hai trong không gian

Nếu các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục trong miền mở D chứa cung $\overset{\frown}{AB}$, hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng, ta có tích phân đường loại hai trong không gian

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \\ &\qquad = \lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k].\end{aligned}}$$

Cách tính

Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ và các đạo hàm riêng liên tục, ta có công thức

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\\ &\qquad = \int_a^b \begin{bmatrix} P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) \\ +Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) \\ +R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t) \end{bmatrix} dt.\end{aligned}}$$

Ví dụ 5.51. Tính tích phân $I = \int_C zdx + xdy + ydz$, với C được cho bởi công thức

$$x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 3t, 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [3t.(-\sin t) + \cos t.\cos t + \sin t.3]\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-3t\sin t + \cos^2 t + 3\sin t\right) dt = 7\pi.\blacksquare \end{aligned}$$

Cách tính

Ví dụ 5.52. Tính tích phân $I = \int_L \left(y^2 - z^2\right) dx + 2y^2 dy - x^2 dz$, L là đường cong có phương trình

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3, \ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\left(t^4 - t^6\right) + 2t^4 2t - t^2 3t^2\right] dt \\ &= -\int_0^1 t^4 \left(t^2 - 4t + 2\right) dt = \frac{13}{105}. \blacksquare \end{aligned}$$

Định lý Green

Cho D là một miền đóng, giới nội trong mặt phẳng Oxy với biên C trơn từng khúc. Các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở chứa D. Khi ấy ta có công thức Green sau

$$\boxed{\oint\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.}$$

Ví dụ 5.53. Tính tích phân $I = \oint\limits_{C} xy^2dy - x^2ydx$, $(C) : x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Ta có $P(x, y) = -x^2y$, $Q(x, y) = xy^2$.
Theo công thức Green, ta có

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(y^2 + x^2\right) dxdy$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r.r^2dr = \frac{\pi}{2}.\blacksquare$$

Công thức Green-Ứng dụng tính diện tích phẳng

Trong công thức Green, lấy $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$, ta được

$$\boxed{\frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy = \iint_\Omega dxdy = |\Omega|\,.}$$

Ngoài ra,

$$\boxed{|\Omega| = \oint_C xdy, \text{ (lấy } P = 0, Q = x),}$$

và

$$\boxed{|\Omega| = -\oint_C ydx, \text{ (lấy } P = -y,\ Q = 0).}$$

Định lý Bốn mệnh đề tương đương

Định lý 5.1. Cho các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở, đơn liên D. Khi đó, 4 mệnh đều sau tương đương:

1. Tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ không phụ thuộc vào đường cong trơn từng khúc nối A và B trong D.
2. $Q'_x = P'_y$, $(x,y) \in D$
3. Tồn tại một hàm $U(x,y)$ xác định trong D, sao cho biểu thức $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ là vi phân toàn phần của U, tức là
$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$
4. $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ với mọi chu tuyến kín (C) trơn từng khúc trong D.

Điều kiện để tích phân loại hai không phụ thuộc đường lấy tích phân

Nhận xét 5.1. Để tính tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ thỏa điều kiện không phụ thuộc vào đường đi, ta có thể làm theo các cách sau

Cách 1. Tìm hàm $U(x,y)$ thỏa

$$\begin{cases} U'_x = P \\ U'_y = Q \end{cases} \tag{45}$$

Từ $(45)_1$, ta có

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \Phi(x,y) + C(y).$$

Từ $(45)_2$, ta có

$$\Phi'_y(x,y) + C'(y) = Q(x,y)$$
$$\Rightarrow C'(y) = Q(x,y) - \Phi'_y(x,y)$$

Điều kiện để tích phân loại hai không phụ thuộc đường lấy tích phân

Do đó

$$C(y) = \int \left[Q(x,y) - \Phi'_y(x,y) \right] dy$$

và ta được $U(x,y)$.
Khi đó,

$$\begin{aligned}
\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= \int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} Pdy + Qdy \\
&= \int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} dU(x,y) \\
&= U(x_B,y_B) - U(x_A,y_A).
\end{aligned}$$

Cách 2.

$$\int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AC}} + \int_{\overset{\frown}{CB}}$$

Cách 2.

Trên AC: $y = y_A$, $dy = 0$.

$$\int_{\overset{\frown}{AC}} Pdx + Qdy = \int_{x_A}^{x_B} P\left(x, y_A\right) dx$$

Trên CB: $x = x_B$, $dx = 0$.

$$\int_{\overset{\frown}{CB}} Pdx + Qdy = \int_{y_A}^{y_B} Q\left(x_B, y\right) dy.$$

Vậy

$$\boxed{\int\limits_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} Pdy + Qdy = \int\limits_{x_A}^{x_B} P\left(x, y_A\right) dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q\left(x_B, y\right) dy.}$$

Ví dụ 5.54.

Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$, với $A(1,1)$ và $B(2,5)$ và AB là đường cong nào đó nối A và B không đi qua gốc O.

Giải. Ta có

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Do

$$U(x,y) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx = \sqrt{x^2+y^2} + C(y)$$

Ví dụ 5.54.

nên

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\Rightarrow C(y) = C\end{aligned}$$

Do đó

$$U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \\ &= \int dU(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}+C\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,5)} \\ &= \sqrt{4+25} - \sqrt{2} = \sqrt{29} - \sqrt{2}. \blacksquare \end{aligned}$$