Chương 3. Lý thuyết chuỗi

Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP. HCM

Bài 1. Định nghĩa và các tính chất của chuỗi số

3.1.1. Định nghĩa, ví dụ

Cho dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Biểu thức

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

được gọi là *chuỗi số*, u_n được gọi là *số hạng tổng quát* của chuỗi.

Tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi (1).

Nếu dãy $\{S_n\}$ có giới hạn là S thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi hội tụ* và S được gọi là tổng của chuỗi (1) và ta viết $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Chuỗi không hội tụ được gọi là *chuỗi phân kỳ*. Như vậy chuỗi phân kỳ nếu dãy S_n không có giới hạn hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Ví dụ 3.1.

Xét sự hội tụ của chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Giải. Ta có $u_n = q^n$,

$$S_n = q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} n, & q = 1, \\ \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q}{1-q}$.

  $\Rightarrow$ Chuỗi hội tụ và có tổng bằng $\dfrac{q}{1-q}$.

- Nếu $|q| > 1$ thì S_n không có giới hạn hữu hạn

  $\Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ.

- Nếu $q = 1$ thì $S_n = n \to \infty$

  $\Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 3.1.

- Nếu $q = -1$ thì $S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ lẻ}, \\ 0, & n \text{ chẵn}. \end{cases}$

$\Rightarrow S_n$ không có giới hạn

$\Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ.

Tóm lại:

- Nếu $|q| < 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ và có tổng bằng $\dfrac{q}{1-q}$, hay $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \dfrac{q}{1-q}$.
- Nếu $|q| \geq 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ phân kỳ.

Ví dụ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{-\dfrac{1}{4}}{1+\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 3.2.

Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \text{ khi } n \to \infty. \end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \blacksquare$$

Ví dụ 3.3.

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Giải. Ta có

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + [\ln(n+1) - \ln n] \\ &= \ln(n+1) \to +\infty. \end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.■

Ví dụ 3.4.

Xét sự hỗi tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Giải. Ta có $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &> n.\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty. \end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.■

3.1.2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 3.1. *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì* $u_n \to 0$.

Hệ quả 3.1. Nếu u_n không có giới hạn hoặc giới hạn khác 0 thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.■

Ví dụ 3.5.

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)$ phân kỳ vì $u_n = n^2 + 1 \to +\infty$.

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ phân kỳ vì $u_n = \frac{n+1}{n} \to 1 \neq 0$.

c) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ vì $u_n = (-1)^n$ không tồn tại giới hạn khi $n \to \infty$.

Định lý 3.2. *Cho các chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ. Khi ấy các chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *hội tụ và*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} cu_n &= c\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \blacksquare \end{aligned}$$

3.1.3. Các tính chất của chuỗi

Chuỗi

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_m + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \qquad (2)$$

được gọi là chuỗi dư của chuỗi (1).

Định lý 3.3. *Chuỗi (1) hội tụ khi và chỉ khi chuỗi dư (2) hội tụ.*■

Hệ quả 3.2. *Tính hội tụ của chuỗi không thay đổi nếu ta bỏ đi hoặc thêm vào một số hữu hạn số hạng.*

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0. \tag{3}$$

Vì dãy tổng riêng $\{S_n\}$ là dãy không giảm nên nó có giới hạn khi và chỉ khi nó bị chặn trên.

Các định lý so sánh

Định lý 3.4. *Cho hai chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *thỏa điều kiện* $\exists n_0 : 0 \leq u_n \leq v_n, \ \forall n \geq n_0$.

Khi đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ (chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ).*

Các định lý so sánh

Định lý 3.5. *Xét hai chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *với* $u_n > 0,\ v_n > 0$ *(với n đủ lớn). Giả thiết rằng tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = K \in \overline{\mathbb{R}}$. *Khi đó:*

a) Nếu $K = 0$ *thì từ sự hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *ta suy ra sự hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

b) Nếu $K = +\infty$ *thì từ sự hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *ta suy ra sự hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

c) Nếu $0 < K < +\infty$ *thì hai chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Các ví dụ

Ví dụ 3.6. Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ phân kỳ nên theo định lý 2.5, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.■

Các ví dụ

Hệ quả 3.3. Nếu $u_n \sim v_n$ khi $n \to \infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 3.7. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \dfrac{1}{n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$

Giải.

a) Ta có $n \sin \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ (khi $n \to \infty$)

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ

b) $\sqrt[n]{n} - 1 = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim \dfrac{1}{n} \ln n > \dfrac{1}{n}$, $\forall n \geq 3$, vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 3.6. *(Tiêu chuẩn d'Alembert)* *Cho* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *là chuỗi số dương có giới hạn*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{4}$$

Khi đó:

a) Nếu $D < 1$ *thì chuỗi hội tụ*
b) Nếu $D > 1$ *thì chuỗi phân kỳ*
c) Nếu $D = 1$ *thì chưa thể kết luận.* ∎

Ví dụ 3.8.

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n!)^2}{(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Giải.

a) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\to \frac{1}{3}\frac{e}{e} = \frac{1}{3} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ 3.8.

b) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} : \frac{5^n(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{5(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{5}{4} > 1$$

Vậy chuỗi phân kỳ.

c) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 1.$

Tuy nhiên, ta lại có dãy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ đơn điệu tăng và hội tụ về e nên $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ hay $u_{n+1} > u_n$.

$\Rightarrow u_n \nrightarrow 0$, chuỗi phân kỳ.■

Định lý 3.7. (Tiêu chuẩn Cauchy)

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n \geq 0$ và

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = C. \tag{5}$$

Khi đó:

a) Nếu $C < 1$ thì chuỗi hội tụ

b) Nếu $C > 1$ thì chuỗi phân kỳ

c) Nếu $C = 1$ thì chưa thể kết luận.■

Ví dụ 3.9.

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Giải. a) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3} < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ 3.9.

b) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.■

Định lý 3.8. *(Tiêu chuẩn Maclaurin - Cauchy) Cho hàm $f(x)$ liên tục, không âm và giảm trên $[k, +\infty)$.*

Khi ấy chuỗi $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ hội tụ khi và chỉ khi tích phân $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ 3.10. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Giải. Ta có các trường hợp sau:

- TH1: $\alpha \leq 0$. Ta có $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ nên chuỗi phân kỳ.
- TH2: $\alpha > 0$. Ta có hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ thỏa các điều kiện của định lý 3.8.

Ví dụ 3.10

Hơn nữa, tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

Tóm lại, ta có

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \alpha > 1, \text{ phân kỳ khi và chỉ khi } \alpha \le 1.}$$

Ví dụ 3.11.

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

Giải. Ta có hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^{\alpha} x}$, $x \in [2, +\infty)$ thỏa các điều kiện của định lý 3.8.

Hơn nữa, tích phân $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$ (đặt $t = \ln x$) hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi và chỉ khi $\alpha \leq 1$.

Vậy

Nếu $\alpha > 1$ thì chuỗi hội tụ, $\alpha \leq 1$ thì chuỗi phân kỳ.■

3.3.1. Chuỗi đan dấu. Tiêu chuẩn Leibnitz

Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ..., \tag{6}$$

với $u_n > 0$ được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lý 3.9. *(Tiêu chuẩn Leibnitz) Nếu dãy u_n đơn điệu giảm và dần về 0 thì chuỗi đan dấu (6) hội tụ. Hơn nữa, tổng S của chuỗi thỏa bất đẳng thức*

$$0 \leq S \leq u_1.$$

Chú thích 3.1. Chuỗi thỏa mãn định lý Leibnitz được gọi là chuỗi Leibnitz.

Ví dụ 3.12. Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi Leibnitz nên hội tụ.■

Ví dụ 3.13. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+n+1}$.

Giải. Hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ đơn điệu giảm trên $[2, +\infty)$ và tiến tới 0 khi $x \to +\infty$.

Vậy chuỗi thỏa mãn định lý Leibnitz nên hội tụ.■

Định lý 3.10. *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ và*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| .\blacksquare$$

Định nghĩa 3.1.

i) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì ta nói rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối.*

ii) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ không hội tụ thì ta nói rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *bán hội tụ.*

3.3.2. Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Ví dụ 3.14. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ.

Chú thích 3.2.

i) Chú ý rằng nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ hoặc phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ (tuyệt đối) hoặc phân kỳ.

ii) Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ mà thấy nó phân kỳ ($D > 1$ hoặc $C > 1$), thì có nghĩa là $|u_n| \not\to 0$. Suy ra $u_n \not\to 0$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.■

Định lý 3.11.

i) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là S thì chuỗi số được suy ra từ chuỗi nầy bằng cách thay đổi vị trí một cách tùy ý các số hạng của nó cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S.

ii) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ thì ta có thể thay đổi vị trí các số hạng của nó để cho chuỗi số thu được hội tụ và có tổng là một số thực cho trước hoặc trở nên phân kỳ.■

3.4.1. Định nghĩa

Cho dãy các hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, xác định trên tập D. Biểu thức

$$u_1(x) + u_2(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (7)$$

được gọi là chuỗi hàm xác định trên D.

3.4.2. Miền hội tụ của chuỗi hàm

Với mỗi $x \in D$, ta có chuỗi (7) là một chuỗi số, nó có thể hội tụ hoặc phân kỳ.

Định nghĩa 3.2. Tập hợp tất cả những điểm x sao cho chuỗi (7) hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi (7).

Ví dụ 3.15. Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Giải. Ta xét chuỗi tuyệt đối $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$.

Ta đã biết nếu $|x| < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ.

Khi ấy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Nếu $|x| > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ phân kỳ nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ phân kỳ.

Nếu $x = \pm 1$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ là $(-1, 1)$.

Ví dụ 3.16.

Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ $(x \neq \pm 1)$.

Giải. Ta xét chuỗi tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right|$.

Ta có

$$D_n = |x| \left| \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} \right| \longrightarrow \begin{cases} |x|, & \text{nếu } |x| < 1, \\ 1, & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$$

Vậy với $|x| < 1$ thì chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert.
Nếu $|x| > 1$ thì chưa kết luận. Tuy nhiên, số hạng tổng quát

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} - 1} \longrightarrow -1 \neq 0$$

nên chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ là $(-1, 1)$.

3.5.1. Định nghĩa. Định lý Abel

Định nghĩa 3.3. Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, các hằng số a_0, a_1, a_2, ...được gọi là các hệ số của chuỗi, x_0 là số thực cho trước. Chuỗi nầy còn được gọi là chuỗi lũy thừa tâm x_0.

Bằng một phép biến đổi tịnh tiến $X = x - x_0$, chuỗi trên trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Từ đây trở đi ta sẽ xét chuỗi lũy thừa tâm $x_0 = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{8}$$

Ta chú ý rằng chuỗi nầy luôn luôn hội tụ tại $x = 0$.

Định lý Abel

Định lý 3.12. (Abel). Nếu chuỗi (8) hội tụ tại $x_0 \neq 0$, thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.■

Hệ quả 3.4. Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_1, thì nó phân kỳ tại mọi điểm x sao cho $|x| > |x_1|$.■

Chú thích 3.3. Đối với chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ta có ba trường hợp sau:

a) Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chỉ hội tụ tại $x = 0$.

Định lý Abel. Ví dụ

Ví dụ 3.17. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ chỉ hội tụ tại $x = 0$.

Thật vậy, với mọi $x \neq 0$, thì $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = +\infty > 1$.

Suy ra chuỗi phân kỳ.

b) Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x \in \mathbb{R}$.

Định lý Abel. Ví dụ

Ví dụ 3.18. Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ tại $x \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} : \frac{|x^n|}{n!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ hội tụ theo tiêu chuẩn A'Alembert, và do đó hội tụ.

c) Tồn tại số thực $R > 0$ sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in (-R, R)$ và phân kỳ tại mọi x, $|x| > R$.$\blacksquare$

3.5.2. Bán kính hội tụ và miền hội tụ

Định nghĩa 3.4.

i) Số thực $R > 0$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in (-R, R)$ và phân kỳ tại mọi x, $|x| > R$, được gọi là *bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Khoảng $(-R, R)$ được gọi là *khoảng hội tụ.*

ii) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại mọi $x \neq 0$, thì ta gọi *bán kính hội tụ* $R = 0$. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$, thì ta gọi *bán kính hội tụ* $R = +\infty$.

Ví dụ 3.19. Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ có bán kính hội tụ $R = 1$.

Chú thích 3.4. Tại $x = \pm R$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ.

Định lý 3.14. Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \ (0 \le \rho \le +\infty).$$

Khi đó, bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cho bởi công thức

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \text{nếu } \ 0 < \rho < +\infty, \\ 0, & \text{nếu } \ \rho = +\infty, \\ +\infty, & \text{nếu } \ \rho = 0. \blacksquare \end{cases}$$

Chú thích 3.5. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ thì giới hạn đó chính là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.■

Ví dụ 3.20. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 3^n}$$

Giải. a) Bán kính hội tụ $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n} : \dfrac{1}{n+1}\right] = 1$. Khoảng hội tụ là $-1 < x < 1$.

Ví dụ 3.20.

Tại $x = -1$, ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ là $[-1, 1)$.

Ví dụ 3.20.

b) Đặt $X = x + 2$, ta có chuỗi mới $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$.

Bán kính hội tụ

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2 3^n} : \frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} 3(1 + \frac{1}{n})^2 = 3. \end{aligned}$$

Khoảng hội tụ là $-3 < X < 3$.

Ví dụ 3.20.

Tại $X = -3$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối.

Tại $X = 3$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n^2 3^n}$ là $[-3, 3]$.

Suy ra miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 3^n}$ là: $-3 \leq x+2 \leq 3$ hay $-5 \leq x \leq 1$.