Chương 1. Phép tính vi phân hàm một biến

Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP. HCM

2019

1.1. Giới hạn của hàm số

1.1.1. Các định nghĩa về hàm số

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$.

- Ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ được gọi là một hàm số.
  - Tập D đgl *miền xác định* của h/s f, $x \in D$ đgl *biến số* của h/s f và $y = f(x)$ đgl *giá trị của hàm số f tại x*.
  - $R_f = f(D) = \{f(x) | x \in D\} = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in D : y = f(x)\} = \{y \in \mathbb{R}|$ ph/tr $y = f(x)$ có nghiệm $x \in D\}$ đgl *miền giá trị* của h/s f.
  - Tập hợp $\{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}$ đgl *đồ thị* của hàm số f. Biễu diễn đồ thị của một hàm số trong mặt phẳng toạ độ là một đường cong.
- Cho hàm số $y = f(x)$ thì ta hiểu **MXĐ** của hàm số là $\{x \in \mathbb{R} : f(x)$ có nghĩa$\}$.

1.1.1. Các định nghĩa về hàm số

Định nghĩa 1.1.2. Cho hàm số f xác định trên tập D.
a/ Hàm số f đgl *tăng* trên D nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

b/ Hàm số f đgl *giảm* trên D nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- Trong định nghĩa trên nếu thay dấu " $\leq$ "(hoặc " $\geq$ ") bởi dấu "$<$" (hoặc "$>$") thì ta nói hàm số tăng ngặt (hoặc giảm ngặt) trên D.
- Người ta gọi chung hàm số tăng hoặc hàm số giảm là hàm số đơn điệu.

Định nghĩa 1.1.3. Cho hàm số f xác định trên tập D đối xứng qua gốc tọa độ, tức là $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$.
a) Hàm số f được gọi là chẵn trên D nếu $f(-x) = f(x), \ \forall x \in D$.
b) Hàm số f được gọi là lẻ trên D nếu $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in D$.
Nhận xét 1.1.1.

- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Định nghĩa 1.1.4. Hàm số f đgl *tuần hoàn chu kỳ* T trên tập D nếu

$$\forall x \in D : x \pm T \in D \text{ và } f(x+T) = f(x). \tag{1}$$

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thoả mãn (1) đgl *chu kỳ cơ sở* của hàm số tuần hoàn f.

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử hàm số f là một song ánh từ miền xác định D lên miền giá trị R_f. Khi đó, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in D : y = f(x)$. Vậy ta có quy tắc $R_f \to D, y \mapsto x$ và quy tắc đó xác định một hàm số từ R_f vào D, đgl *hàm số ngược* của hàm số f và ký hiệu là f^{-1}. Vậy

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Nhận xét 1.1.2. a/ Thông thường người ta hay dùng chữ x để chỉ đối số và chữ y để chỉ hàm số nên hàm ngược của hàm số $y = f(x)$ cũng được kí hiệu là $y = f^{-1}(x)$.
b/ Nếu điểm có toạ độ (x, y) thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì điểm có toạ độ (y, x) thuộc đồ thị hàm ngược của nó. Do đó, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và hàm ngược của nó đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất của hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy.

Ví dụ 1.1.2. a) Hàm số $f : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ có hàm số ngược là $f^{-1} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$.
b) Hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ là hai hàm số ngược nhau.
Định nghĩa 1.1.6. Cho hai hàm số $f : D \to E$, và $g : F \to \mathbb{R}$, với $E \subset F$. Khi đó, ta xác định được một hàm số $h(x) = g[f(x)]$ có miền xác định là D được gọi là hàm hợp của hai hàm số f và g và ký hiệu $h = g \circ f$.
Vậy

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Ví dụ 1.1.3. Hàm số $y = \sin(x^2 - 4x + 5)$ là hàm hợp của hai hàm số $y = \sin u$ và $u = x^2 - 4x + 5$.

1.1.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

- $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$
- $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$
- $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$
- $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$

1. Hàm số $y = \arcsin x$.

- Hàm số $f(x) = \sin x$ có hàm ngược trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ là $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto f^{-1}(x) = \arcsin x$
- Ví dụ: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

[2.]Hàm số $y = \arccos x$.

2. Hàm số $f(x) = \cos x$ có hàm ngược trên $[0, \pi]$ là $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \arccos x$

- Ví dụ: $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$
- Chú ý: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$.

[3.]Hàm số $y = \arctan x$.

3 • Hàm số $f(x) = \tan x$ có hàm ngược trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ là $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \arctan x$
  Ví dụ: $\arctan 0 = 0$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
- Qui ước: $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

[4.]Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$.

4. Hàm số $f(x) = \cot x$ có hàm ngược trên $(0, \pi)$ là $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$
- Ví dụ: $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$
- Qui ước: $\arctan(+\infty) = 0$, $\arctan(-\infty) = \pi$

- Lân cận U của một điểm x_0 trên trục số thực được coi là khoảng tâm x_0, bán kính r, tức là

$$U = (x_0 - r, x_0 + r),$$

tổng quát hơn, nó là một khoảng (a, b) chứa điểm x_0.

1.1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1.8. (Cauchy) Cho hàm số f xác định trong một lân cận U nào đó của điểm x_0 (có thể trừ điểm x_0). Số L được gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần tới x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

1.1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1.9. (Heine) Cho hàm số f xác định trong một lân cận U nào đó của điểm x_0 (có thể trừ điểm x_0). Số L đgl giới hạn của hàm số f khi $x \to x_0$ nếu với $\forall x_n \in U$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$.

Định nghĩa 1.1.10. Cho hàm số f xác định trong khoảng $(a, +\infty)$. Số L đgl giới hạn của hàm số f khi $x \to +\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in (a, +\infty), x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

Định nghĩa 1.1.11. Cho hàm số f xác định trong khoảng $(-\infty, a)$. Số L đgl giới hạn của hàm số f khi $x \to -\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in (-\infty, a), x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

1.1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1.13. Cho hàm số f xác định trong một lân cận U nào đó của điểm x_0 (có thể trừ điểm x_0).

- Hàm số f được gọi là tiến ra $+\infty$ khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to x_0$.

- Hàm số f được gọi là tiến ra $-\infty$ khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ hoặc $f(x) \to -\infty$ khi $x \to x_0$.

1.1.3.2. Một số định lý về giới hạn của hàm số

Định lý 1.1.1. Nếu hàm số f có giới hạn khi $x \to x_0$ (hoặc $\pm\infty$) thì giới hạn đó là duy nhất.
Định lý 1.1.2. Nếu hàm số f có giới hạn hữu hạn khi $x \to x_0$ thì nó bị chặn trong một lân cận nào đó của điểm x_0 (trừ điểm x_0), tức là tồn tại một lân cận U của điểm x_0 và một số dương M sao cho

$$|f(x)| \leq M, \; \forall x \in U, \; x \neq x_0.$$

Định lý 1.1.3. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$ thì

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = L_1 L_2$

Hệ quả $\lim\limits_{x\to x_0} [\alpha f(x)] = \alpha L_1$

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $(L_2 \neq 0)$.

1.1.3.2. Một số định lý về giới hạn của hàm số

Định lý 1.1.4. Nếu hàm số f và g có giới hạn khi $x \longrightarrow x_0$ và $f(x) \leq g(x)$ trong lân cận $U(x_0)$ của điểm x_0 (trừ điểm x_0) thì

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x).$$

Định lý 1.1.5. Nếu $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U(x_0)$ (có thể trừ điểm x_0) và $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) = L$ thì

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L.$$

Định lý 1.1.6. Cho hàm số hợp $y = g[f(x)]$. Nếu $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = u_0$ và $\lim\limits_{u \longrightarrow u_0} g(u) = L$ thì

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g[f(x)] = L.$$

1.1.3.2. Một số định lý về giới hạn của hàm số

Định lý 1.1.7. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $L > 0$ $(L < 0)$ thì $\exists$ lân cận $U(x_0)$ của điểm x_0 sao cho

$$f(x) > 0 \ (f(x) < 0), \ \forall x \in U(x_0).$$

Nhận xét 1.1.5. Các Định lý 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7 vẫn đúng trong các trường hợp x_0 là $+\infty$ hoặc $-\infty$ nếu lân cận của điểm x_0 được thay bởi các khoảng $(-\infty, a)$ hoặc $(a, +\infty)$ tương ứng.

Một số giới hạn cơ bản

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{n}$

Mệnh đề.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$
3. Cho $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$. Khi đó ta có $\lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^{v(x)} = a^b$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

1.1.3.3. Giới hạn một phía

Định nghĩa 1.1.14. Cho hàm số f xác định trên một lân cận nào đó của điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ (có thể trừ điểm x_0).

- Số thực L đgl giới hạn của f khi tiến tới bên phải của x_0(còn gọi là giới hạn phải của f khi x tiến tới x_0) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in U, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

- Số thực L đgl giới hạn của f khi tiến tới bên trái của x_0(còn gọi là giới hạn trái của f khi x tiến tới x_0) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in U, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

1.1.3.3. Giới hạn một phía

Định lý 1.1.8. Cho hàm số f xác định trên một lân cận nào đó của điểm x_0(có thể trừ điểm x_0). Hàm số có giới hạn là số L khi x tiến tới x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái và giới hạn phải khi x tiến tới x_0 và

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

1.1.4.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1.15. a) Hàm số α được gọi là vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi x dần tới x_0 (hay khi x dần tới ∞) nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ (hay $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

b) Hàm số f được gọi là vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi x dần tới x_0 (hay khi x dần tới ∞) nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ (hay $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x)| = +\infty$).

Ví dụ 1.1.11. a/ Khi $x \to 0$, các hàm số x^2 và $\sin 2x$ đều là các VCB.

b/ Khi $x \to 0$, các hàm số $\dfrac{1}{x}$ và $\cot x$ đều là các VCL.

Nhận xét

Từ các tính chất của giới hạn hàm số, ta có

- Nếu $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là những VCB khi $x \to x_0$ thì $\alpha(x) \pm \beta(x), \alpha(x).\beta(x)$ cũng là những VCB khi $x \to x_0$.
- Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$, $\beta(x)$ bị chặn trong lân cận nào đó của x_0 thì $\alpha(x).\beta(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.
- Nếu $0 \neq \alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ thì $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.

1.1.4. Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 1.1.16. Cho α và β là hai VCB khi $x \to x_0$. Ta nói α và β là hai VCB so sánh được nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ (k có thể $\pm\infty$).

Khi đó

- Nếu $k = 0$ thì ta nói α có cấp cao hơn β và ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.
- Nếu $k = \infty$ thì ta nói α có cấp thấp hơn β(hay β có cấp cao hơn α) và ký hiệu $\beta(x) = o(\alpha(x))$.
- Nếu $k \neq 0, k \neq \infty$ thì ta nói α và β là hai VCB cùng cấp. Đặc biệt, nếu $k = 1$ thì ta nói α và β là hai VCB tương đương và ký hiệu là $\alpha \sim \beta$.

Ví dụ 1.1.12. a/ Khi $x \to 0$, x^2 và $1 - \cos x$ là hai VCB cùng cấp vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

b/ Khi $x \to 0$, x^3 là VCB cấp cao hơn $2 \sin x$, vì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{2 \sin x} = 0$.

c/ Khi $x \to 1$, $(x-1)^2$ và $\tan^2(x-1)$ là hai VCB tương đương vì $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{\tan^2(x-1)} = 1$.

1.1.4. Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ta có các tính chất sau đây của VCB tương đương khi $x \to x_0$:

1. $\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) = o(\beta(x))$.
2. $\alpha(x) \sim \alpha(x)$
3. $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x) \Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x)$
4. $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x), \alpha_2(x) \sim \beta_2(x) \Rightarrow \alpha_1(x)\alpha_2(x) \sim \beta_1(x)\beta_2(x)$.
5. Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là những VCB khác cấp thì $\alpha(x) + \beta(x)$ tương đương với VCB cấp thấp hơn.
6. Nếu $\alpha(x) \sim \beta(x), \alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$ và $\beta(x) \nsim \beta_1(x)$ thì $\alpha(x) - \alpha_1(x) \sim \beta(x) - \beta_1(x)$.
7. Nếu $\alpha(x) \sim \beta(x), \alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$.

Các VCB tương đương cơ bản

Khi $x \to 0$, ta có các VCB tương đương cơ bản sau:

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $e^x - 1 \sim x$
8. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (\alpha \neq 0)$
9. $a^x - 1 \sim x \ln a \ (0 < a \neq 1)$
10. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a} \ (0 < a \neq 1)$
11. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$.

1.1.4.2 Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

Định lý 1.1.10. Giả sử $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ là các VCB khi $x \longrightarrow x_0$. Nếu $\alpha(x) = o(\alpha_1(x)), \beta(x) = o(\beta_1(x))$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \alpha_1(x)}{\beta(x) + \beta_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ví dụ 1.1.13. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \tan^2 2x)}{x^2 + 2\sin^3 3x}$.

Giải. Khi $x \longrightarrow 0$, ta có

$$\ln(1 + \tan^2 2x) \sim \tan^2 2x \sim (2x)^2 = 4x^2,$$

$$2\sin^3 3x \sim 2(3x)^3 = o(x^2), \ x^2 + 2\sin^3 3x = x^2 + o(x^2) \sim x^2.$$

Do đó

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \tan^2 2x)}{x^2 + 2\sin^3 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{x^2} = 4.$$

1.1.4.3. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn cấp thấp

Định nghĩa 1.1.17. Cho f và g là hai VCL khi $x \longrightarrow x_0$. Ta nói f và g là hai VCL so sánh được nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ (k có thể $\pm\infty$).

Khi đó

- Nếu $k = 0$ thì ta nói f có cấp thấp hơn g.
- Nếu $k = \infty$ thì ta nói f có cấp cao hơn g(hay g có cấp thấp hơn f).
- Nếu $k \neq 0, k \neq \infty$ thì ta nói f và g là hai VCL cùng cấp. Đặc biệt, nếu $k = 1$ thì ta nói f và g là hai VCL tương đương và ký hiệu là $f \sim g$.

1.1.4.3. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn cấp thấp

Ví dụ 1.1.14. Khi $x \to +\infty$, các hàm số x^2+1 và $\sqrt{x}$ là hai VCL so sánh được. Hơn nữa x^2+1 là VCL cấp cao hơn $\sqrt{x}$, vì
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$

Bổ đề 1.1.1. Cho f và g là hai VCL khi $x \to x_0$ (hoặc $x \to \infty$). Khi đó, ta có

a) Nếu cấp của f thấp hơn cấp của g thì $f(x) + g(x) \sim g(x)$.

b/ Nếu $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x)$ và $f_1(x) \nsim g_1(x)$ thì
$f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x)$.

c/ Nếu $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x)$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

1.1.4.3. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn cấp thấp

Định lý 1.1.11. Giả sử f, g, f_1, g_1 là các VCL khi $x \to x_0$ (x_0 có thể là ∞). Nếu cấp của f cao hơn cấp của f_1, cấp của g cao hơn cấp của g_1 thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Chú thích. Áp dụng định lý 1.2.11, với $a_n b_m \neq 0$, ta có ngay

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} &= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{nếu } m > n \\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{nếu } m = n \\ \infty & \text{nếu } m < n \end{cases} \end{aligned}$$

1.1.4.3. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn cấp thấp

Ví dụ 1.1.15. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{5x+2}}{\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^3}}$.

Giải. Khi $x \to +\infty$, ta có

$$\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{5x+2} \sim \sqrt{3x^2+2x+1} \sim \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3},$$

$$\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^3} \sim \sqrt[3]{x^3+x} \sim \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{5x+2}}{\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}.$$

Trong quá trình tìm giới hạn các hàm số dạng

$$\frac{f(x)}{g(x)},\ [f(x)]^{g(x)},\ f(x) \pm g(x),\ f(x)g(x)$$

ta gặp các dạng vô định sau

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \times \infty$$

mà việc tính các giới hạn này đòi hỏi ta phải biến đổi làm mất các dạng này và đưa về các giới hạn thường gặp, trong quá trình biến đổi ta thường dùng các hằng đẳng thức cơ bản cần nhớ.

Ví dụ 1.1.16. (Dạng $\frac{0}{0}$) Tính $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

Ví dụ 1.1.17. (Dạng $\frac{0}{0}$) Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-3}{\sqrt[3]{7+x}-2}$

Giải. Đặt $t=\sqrt[3]{7+x}$, ta có $x=t^3-7$. Khi $x\to 1$ thì $t\to 2$. Vậy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{\sqrt[3]{7+x}-2} &= \lim_{t\to 2} \frac{3(t^3-7)-3}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{3(t^3-8)}{t-2} \\ &= \lim_{t\to 2} 3(t^2+2t+4) = 36.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.18. (Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+4x^2-2\sqrt{x}}{9x^3-\sqrt{x^5}+6x^2+3\sqrt{x}}$.

Giải. Khi $x \to +\infty$, ta có

$$3x^3+4x^2-2\sqrt{x} \sim 3x^3 \text{ và } 9x^3-\sqrt{x^5}+6x^2+3\sqrt{x} \sim 9x^3.$$

Vậy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+4x^2-2\sqrt{x}}{9x^3-\sqrt{x^5}+6x^2+3\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{9x^3} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 1.1.19. (Dạng 1^∞)Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{2x-1}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{2x-1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

Ví dụ 1.1.20. (Dạng $0\times\infty$)Tính $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}.\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} = \frac{2}{\pi}.$$

Ví dụ 1.1.21. (Dạng $\infty - \infty$)Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)$.

Giải. Ta có

$$\sqrt[3]{x^3-x^2}-x = \frac{(x^3-x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2} = \frac{-x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}.$$

Ta cũng có

$$\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2 \sim \left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3}+x^2 = 3x^2$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

1.2.1. Định nghĩa hàm số liên tục

Định nghĩa 1.2.1. Cho hàm số f có miền xác định là $D \subset \mathbb{R}$.

- Hàm số f được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Nếu hàm số f liên tục tại mọi $x \in D$ thì ta nói f liên tục trên D.

Đặc biệt nếu $D = (a, b)$ thì ta nói f liên tục trên khoảng (a, b).

1.2.1. Định nghĩa hàm số liên tục

Định nghĩa 1.2.2. Cho hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$. Hàm số f được gọi là liên tục phải tại điểm a (hay liên tục trái tại điểm b) nếu

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ (\text{hay } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)).$$

Định lý 1.2.1. Điều kiện cần và đủ để hàm số f liên tục tại điểm x_0 là nó liên tục phải và liên tục trái tại điểm đó, tức là

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

1.2.1. Định nghĩa hàm số liên tục

Định nghĩa 1.2.3. Cho hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$. Hàm số f được gọi là liên tục trên đoạn$[a, b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b), liên tục phải tại điểm a và liên tục trái tại điểm b.

- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 ta còn nói nó gián đoạn tại điểm này. Người ta chia các điểm gián đoạn của một hàm số thành hai loại như sau:

- Hàm số f được gọi là gián đoạn loại I tại điểm x_0(x_0 còn gọi là điểm gián đoạn loại I) nếu f gián đoạn tại điểm x_0 nhưng tồn tại các giới hạn trái và giới hạn phải tại điểm này là các số hữu hạn. Đặc biệt, nếu có

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$$

thì f còn được gọi là gián đoạn bỏ được tại điểm x_0.

- Hàm số gián đoạn tại điểm x_0 nhưng không phải là gián đoạn loại I thì ta nói hàm số gián đoạn loại II tại điểm x_0 (x_0 còn gọi là điểm gián đoạn loại II).

Ví dụ 1.2.4. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 0$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$ nên điểm x_0 là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số f.

Ví dụ 1.2.5. Cho hàm số

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$, nên điểm $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn loại I của hàm số f.

Ví dụ 1.2.6. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gián đoạn loại II tại điểm $x_0 = 0$, vì nó không tồn tại giới hạn trái và giới hạn phải là số hữu hạn.

Định lý 1.2.2. Hàm số sơ cấp cơ bản xác định tại điểm nào sẽ liên tục tại điểm ấy.

1.2.2.1. Các phép toán của hàm số liên tục

Định lý 1.2.3. Cho các hàm số f và g cùng xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có:

a) Nếu f và g liên tục tại điểm $x_0 \in D$ thì các hàm $f \pm g$, αf, fg cũng liên tục tại điểm x_0. Hơn nữa, nếu $g(x_0) \neq 0$ thì hàm $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại điểm x_0.

b) Nếu f và g liên tục trên D thì các hàm $f \pm g$, αf, fg cũng liên tục trên D. Hơn nữa, nếu $g(x) \neq 0,\ \forall x \in D$ thì hàm $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại trên D.

1.2.2.2. Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Định lý 1.2.4. Nếu hàm số f liên tục tại điểm x_0 và hàm số g liên tục tại điểm $y_0 = f(x_0)$ thì hàm hợp $g \circ f$ liên tục tại điểm x_0.

Định lý 1.2.5. (Weierstrass) Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì

a) f bị chặn trên đoạn $[a, b]$, tức là

$$\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b].$$

b) f có giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m trên đoạn $[a, b]$, tức là tồn tại $x_0, x_1 \in [a, b]$ sao cho

$$f(x_0) = m, \ f(x_1) = M \text{ và } m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b].$$

Định lý 1.2.6. (Bolzano – Cauchy) Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó, ta có
a) Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.
b) Hàm số f nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó, tức là

$$\forall \mu \in [m, M], \ \exists c \in [a, b] : f(c) = \mu.$$

1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một khoảng (a, b) chứa điểm x_0. Cho x_0 một số gia Δx sao cho $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, khi đó ta được số gia của hàm số tại x_0 là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = L \in \mathbb{R}$$

thì ta nói hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

Vậy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Đặt $x = x_0 + \Delta x$. Khi đó, nếu $\Delta x \to 0$ thì $x \to x_0$ nên ta cũng có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nếu hàm số f có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói nó có đạo hàm trên khoảng (a, b). Khi đó, đạo hàm của hàm số $f(x)$ cũng là một hàm số xác định trên khoảng (a, b) và kí hiệu là $f'(x)$ hoặc $y'(x)$ hoặc $\dfrac{dy}{dx}$.

1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.3.2. (Đạo hàm một phía) Giả sử hàm số f xác định trong nửa khoảng $(a, x_0]$. Nếu tồn tại giới hạn

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R}$$

thì ta nói hàm số f có đạo hàm bên trái tại điểm x_0.
Tương tự, giả sử hàm số f xác định trong nửa khoảng $[x_0, b)$. Nếu tồn tại giới hạn

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R}$$

thì ta nói hàm số f có đạo hàm bên phải tại điểm x_0.
Người ta gọi vắn tắt đạo hàm bên trái (bên phải) tại điểm x_0 là đạo hàm trái (phải) tại điểm x_0.

Định lý 1.3.1. a) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có cả đạo hàm trái, đạo hàm phải tại x_0 và $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Khi đó, ta có

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0).$$

b) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0. Điều ngược lại không đúng.

1.3.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm tại một điểm

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C).

1.3.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm tại một điểm

Ta có

$$\lim_{M \to M_0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{M \to M_0} \tan \varphi = \tan \alpha.$$

Do đó, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha.$$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại $M_0(x_0, y_0)$ bằng đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 và phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại $M_0(x_0, y_0)$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \ \ (\text{với } y_0 = f(x_0)).$$

1.3.3. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Hàm số	Đạo hàm	Hàm số	Đạo hàm
$y = c = const$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = a^x,\ 0 < a \neq 1$	$y' = a^x \ln a$	$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x,\ 0 < a \neq 1$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \mathrm{arccot}\, x$	$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Định lý 1.3.2. Nếu hai hàm $u(x)$ và $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thì tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có đạo hàm tại điểm x và

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u'+v',\ (uv)' = u'v+uv',\\ (ku)' &= ku',\ \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2} \quad (v\neq 0)\end{aligned}$$

Định lý 1.3.3. (Đạo hàm của hàm hợp) Cho hàm hợp $y = g[f(x)]$. Nếu hàm $y = g(u)$ có đạo hàm đối với u và $u = f(x)$ có đạo hàm đối với x thì $y = g[f(x)]$ có đạo hàm đối với x và

$$y'(x) = g'(u).u'(x).$$

1.3.4. Các quy tắc tính đạo hàm

Ví dụ 1.3.5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Giải. Ta có $y = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
Suy ra

$$y' = \left[x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]' e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x.\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'\right]\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x.\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right]\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Định lý 1.3.4. (Đạo hàm của hàm ngược) Giả sử hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược là $x = f^{-1}(y)$. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $y'(x_0) \neq 0$ thì hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}.$$

1.3.5. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 1.3.3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp một của $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và ký hiệu là $f''(x)$.
Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$ và ký hiệu $f^{(n)}(x)$.
Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm cấp n trong khoảng (a, b) thì

$$\begin{aligned}
[f(x) \pm g(x)]^{(n)} &= f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x), \\
[\alpha f(x)]^{(n)} &= \alpha f^{(n)}(x), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\
[f(x)g(x)]^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),
\end{aligned}$$

trong đó ta qui ước $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$ và

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \; 0! = 1! = 1, \; k! = 1.2...k.$$

Ví dụ 1.3.8. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = xe^x$.
Giải. Ta có

$$\begin{aligned} y' &= e^x + xe^x = (1+x)e^x, \\ y'' &= (y')' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x, \\ &\dots \end{aligned}$$

Giả sử $y^{(k)} = (k+x)e^x$. Ta có

$$y^{(k+1)} = \left[y^{(k)}\right]' = [(k+x)e^x]' = e^x + (k+x)e^x = [(k+1)+x]e^x.$$

Vậy $y^{(n)} = (n+x)e^x$.

Ví dụ 1.3.9. Tìm đạo hàm cấp của $y = \dfrac{1}{1+x}$.

Giải: Ta có $y = (1+x)^{-1}$. Do vậy

$$\begin{aligned} y' &= (-1).(1+x)^{-2},\ y'' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \\ y''' &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}, ... \end{aligned}$$

Giả sử

$$y^{(k)} = (-1)(-2)...(-k)(1+x)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

1.3.5. Đạo hàm cấp cao

Ta có

$$
\begin{aligned}
y^{(k+1)} &= \left[y^{(k)}\right]' = (-1)(-2)...(-k)(-k-1)(1+x)^{-k-2} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}.
\end{aligned}
$$

Vậy $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Chú thích. Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}},\ \left(e^{kx}\right)^{(n)} = k^n e^{kx}, \\
\sin^{(n)} x &= \sin(x + n\frac{\pi}{2}),\ \cos^{(n)} x = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

1.3.6. Các định lý về giá trị trung bình

Định nghĩa 1.3.4. (Cực trị địa phương) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a, b). Điểm x_0 được gọi là điểm cực đại (cực tiểu) địa phương của hàm số $y = f(x)$ trên (a, b) nếu

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

Điểm x_0 mà tại đó $f(x)$ đạt cực đại hay cực tiểu địa phương được gọi là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.
Định lý 1.3.6. (Định lý Fermat) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì đạo hàm $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại.
Điểm x_0 đó được gọi là điểm tới hạn của hàm số $f(x)$.
Điểm x_0 mà $f'(x_0) = 0$ được gọi là điểm dừng của hàm số $f(x)$.
Nhận xét 1.3.1. Định lý Fermat thường gọi là điều kiện cần để hàm số có cực trị.

1.3.6. Các định lý về giá trị trung bình

Định lý 1.3.7. (Định lý Rolle) Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trong khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 1.3.8. (Định lý Lagrange). Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ hay } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

1.3.6. Các định lý về giá trị trung bình

1.3.6. Các định lý về giá trị trung bình

Định lý 1.3.9. (Định lý Cauchy) Giả sử hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trong khoảng (a, b) và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Nhận xét 1.3.2. Nếu trong định lý Cauchy lấy $g(x) = x$ thì ta được định lý Lagrange.

1.4. Vi phân của hàm số

1.4.1. Định nghĩa Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$.

- Nếu số gia của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 có thể viết được dưới dạng

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

  trong đó $A = const$ và $o(\Delta x)$ là một VCB cấp cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói nó khả vi tại điểm x_0.

Khi đó, biểu thức $A\Delta x$ được gọi là vi phân của $f(x)$ tại x_0 và được ký hiệu là $df(x_0)$ hoặc $dy(x_0)$. Tức là

$$df(x_0) = A\Delta x.$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là khả vi trên khoảng (a, b) nếu nó khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$.

Định lý 1.4.1. Hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại điểm này.

Nhận xét 1.4.1.

a/ Hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 thì nó liên tục tại x_0, nhưng điều ngược lại không đúng.

b/ Khi $f(x) = x$, ta có $dx = df(x) = 1.\Delta x$. Vậy

$$df(x) = f'(x)\Delta x = f'(x)dx.$$

Ta cũng có

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

c/ Giả sử $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ là các hàm số khả vi. Khi đó vi phân hàm $y = f[\varphi(t)]$ là

$$df = (f[\varphi(t)])' \, dt = f'(x)x'(t)dt = f'(x)dx.$$

Vậy dạng vi phân của hàm $y = f(x)$ không thay đổi dù x là biến độc lập hay x là là hàm khả vi theo biến t. Tính chất này gọi là tính bất biến của dạng vi phân cấp một.

1.4.2. Qui tắc tính vi phân

Định lý 1.4.2. Cho u, v là hai hàm số khả vi trong (a, b) và C là một hằng số tùy ý. Khi đó, ta có

- $dC = 0$;
- $d(u + v) = du + dv$;
- $d(uv) = vdu + udv$, $d(Cu) = Cdu$
- $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

1.4.3. Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

Giả sử hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó, ta có

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Do đó khi Δx khá nhỏ, ta có

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ 1.4.3. Tính gần đúng $\sqrt{1 + \frac{1}{121}}$.

Giải: Xét hàm $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = \frac{1}{121}$.

Sử dụng công thức tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

ta có

$$\sqrt{1+\frac{1}{121}} \approx \sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}.\frac{1}{121} = 1+\frac{1}{242} \approx 1,004.$$

Ví dụ 1.4.4. Tính gần đúng $\sin 29^0$.
Giải: Ta có

$$\sin 29^0 = \sin(30^0 - 1^0) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right).$$

Xét hàm

$$f(x) = \sin x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{6},\ \ \Delta x = -\frac{\pi}{180}.$$

Sử dụng công thức tính gần đúng

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

1.4.3. Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

ta có

$$\begin{aligned}
\sin 29^0 &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.\left(-\frac{\pi}{180}\right) \\
&\approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{180} \approx 0,84.
\end{aligned}$$

1.4.4. Vi phân cấp cao

Định nghĩa 1.4.2. Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trên khoảng (a, b).
Khi đó, $df(x) = f'(x)dx$ được gọi là vi phân cấp một của $f(x)$.
Vi phân của vi phân cấp một (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ được gọi là vi phân cấp hai của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là $d^2f(x)$.
Tổng quát, vi phân của vi phân cấp $n-1$ (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ được gọi là vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là $d^nf(x)$.
Vậy

$$\begin{aligned} d^2f(x) &= d(df(x)) = f''(x)\,(dx)^2 \equiv f''(x)dx^2, \\ d^3f(x) &= d(d^2f(x)) = f'''(x)dx^3, \\ &\dots \\ d^{(n)}f(x) &= d(d^{(n-1)}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n. \end{aligned}$$

2.3.1. Quy tắc L'Hospital

Định lý 2.3.1. (Quy tắc 1. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$). Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ xác định và khả vi trong lân cận U của điểm x_0 (có thể trừ x_0). Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in U$.

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ví dụ 2.3.1. Tính $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$(dạng $\frac{0}{0}$).

Giải. Ta có

$$\lim_{x \to a} \frac{(a^x - x^a)'}{(x-a)'} = \lim_{x \to a} \frac{a^x \ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a$$

Vậy $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a$.

Định lý 2.3.2. (Quy tắc 2. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$). Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ xác định và khả vi trong lân cận U của điểm x_0 (có thể trừ x_0). Giả sử $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in U$.

Khi đó, nếu $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ví dụ 2.3.2. Tính $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(x-1)}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$).

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(x-1)} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left[\ln(x^2-1)\right]'}{\left[\ln(x-1)\right]'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{1}{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1.
\end{aligned}$$

Nhận xét 2.3.1

1) Nếu áp dụng quy tắc L'Hospital mà giới hạn vẫn còn dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ thì có thể áp dụng quy tắc L'Hospital một lần nữa và tiếp tục cho đến khi hết dạng vô định.

2) Quy tắc L'Hospital vẫn áp dụng được cho các trường hợp $x \to x_0^{\pm}$ và $x \to \pm\infty$.

3) Khi sử dụng qui tắc L'Hospital ta cần chú ý các điều kiện quan trọng sau đây:

- Nếu $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ thì chưa có kết luận gì về $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- Trước khi áp dụng qui tắc này cho tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ ta nên thay thế $f(x)$, $g(x)$ bởi các hàm tương đương (vận dụng qui tắc ngắt bỏ vô cùng bé cấp cao hoặc vô cùng lớn cấp thấp) để việc tính đạo hàm đơn giản hơn.

- Qui tắc này chỉ áp dụng cho dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Đối với các dạng vô định $\infty - \infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0 và 1^∞ ta phải đưa về một trong hai dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ sau đó ta áp dụng quy tắc L'Hospital.

Ví dụ 2.3.3. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ (dạng $\frac{0}{0}$).

Giải: Áp dụng liên tiếp ba lần quy tắc L'Hospital ta được

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x} - 2x\right)'}{\left(x - \sin x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x + e^{-x} - 2\right)'}{\left(1 - \cos x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{\left(\sin x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

Ví dụ 2.3.4. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$).

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)'}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}.\left(\frac{-2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{x^2+1}{x^2} . \frac{-x^3}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

Ví dụ 2.3.5. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Ví dụ 2.3.6. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ (dạng $0\times\infty$).

Giải: Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.\end{aligned}$$

Tổng quát

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x = 0,\ \forall\alpha > 0.$$

Ví dụ 2.3.7. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ (dạng $\infty-\infty$).

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\ \left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{[x(e^x-1)]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

Chú ý Ta có thể giải bằng cách thay VCB tương đương như sau

$$e^x-1\sim x,\ \text{khi } x\to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.3.8. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)$ (dạng $\infty-\infty$).

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right)$$

Mà

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3\frac{1}{x}\ln^2 x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{6\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)=+\infty.$

Ví dụ 2.3.9. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (dạng 0^0).

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} x^{\sin x} &= e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x} \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3.10. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$ (dạng 1^∞).

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \ln(1+x)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

(do $\ln x \ln(1+x) \sim x \ln x$ (VCB tương đương))

Ví dụ 2.3.11. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{x}}$ (dạng ∞^0).

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

Ví dụ 2.3.11'. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3^x)^{\frac{2}{x}}$ (dạng ∞^0).

Giải: Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3^x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(x+3^x)^{\frac{2}{x}}} = e^{2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3^x)}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+3^x\ln 3}{x+3^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln^2 3}{1+3^x\ln 3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln^3 3}{3^x\ln^2 3} = \ln 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(x+3^x)^{\frac{2}{x}} = e^{2\ln 3} = 9.$$

2.3.2. Công thức Taylor và Maclaurin

Định lý 2.3.3. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $(n+1)$ trong khoảng (a, b). Khi đó: $\forall x, x_0 \in (a, b)$, $\exists \theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ta gọi $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ là *đa thức Taylor bậc* n của hàm số $f(x)$ tại lân cận của điểm x_0 và

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ là *phần dư dạng Lagrange* của công thức Taylor.

Nhiều lúc công thức Taylor tiện dùng ở dạng sau đây

2.3.2. Công thức Taylor và Maclaurin

Định lý 2.3.4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $n-1$ trong khoảng (a, b) và tồn tại $f^{(n)}(x_0)$, $x_0 \in (a, b)$. Khi đó, với mọi $x \in (a, b)$ và đủ gần x_0 ta có công thức

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Biểu thức $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ là *phần dư dạng Peano*.
Khi $x_0 = 0$, công thức Taylor còn gọi là công thức Maclaurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x),$$

với phần dư $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$ hoặc $R_n(x) = o(x^n)$.

Một số khai triển Maclaurin cơ bản

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n).$
2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
4. $(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + ... + C_m^n x^n + o(x^n).$
5. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ...(-1)^n x^n + o(x^n).$
6. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ...(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n).$