Chương 5.

QUAN HỆ

- Quan hệ hai ngôi
- Quan hệ tương đương
- Quan hệ thứ tự

QUAN HỆ HAI NGÔI

1. **Định nghĩa:** Cho hai tập hợp **A** và **B**. Một quan hệ hai ngôi (Binary Relation) từ **A** đến **B** là một tập con của tích Đề các $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

Ký hiệu:

Cho quan hệ hai ngôi **R**

a **R** b để chỉ (a, b) $\in$ **R**

a $\not\mathbf{R}$ b để chỉ (a, b) $\notin$ **R**

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A

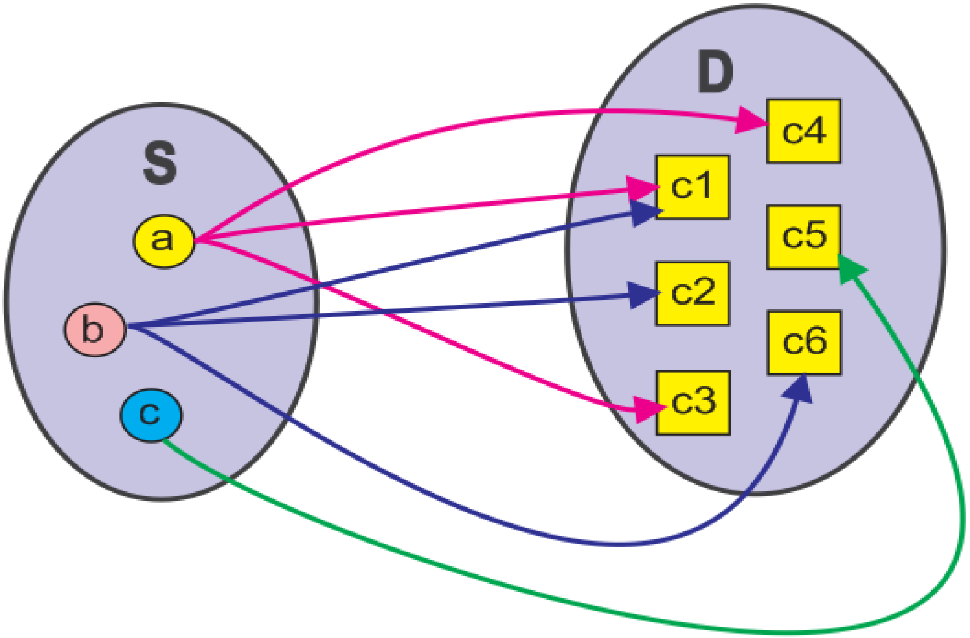
QUAN HỆ HAI NGÔI

Ví dụ 1:

Cho tập sinh viên **S** = {a, b, c}. Cho tập các chương của môn Toán **D** = {c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6}

Cho quan hệ ôn bài **R** : **S** → **D**

R	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
a	x		x	x		
b	x	x				x
c					x	



QUAN HỆ HAI NGÔI

Ví dụ 2:

Cho tập **A** = {1, 3, 5, 6}. Cặp nào thuộc quan hệ R = {(a, b); a, b $\in$ **A** | a ⋮ b}

→ **R = {** (1,1); (3,1); (3,3); (5,1); (5,5); (6,1); (6,3); (6,6) **}**

R	1	3	5	6
1	x	x	x	x
3		x		x
5			x	
6				x

QUAN HỆ HAI NGÔI

2. Các tính chất:

a. Tính phản xạ:

Quan hệ **R** trên **A** được gọi là **phản xạ** nếu:

$\forall$ a $\in$ **A,** a **R** a

Ví dụ. cho tập A= {1, 2, 3} và quan hệ

- R_1 = {(1,1); (1,2); (2,1); (3,2); (3,1)} không phản xạ vì (3,3) $\notin R_1$
- R_2 = {(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,3); (3,1)} phản xạ vì (1,1); (2,2); (3,3) $\in R_2$

QUAN HỆ HAI NGÔI

2. Các tính chất:

b. Tính đối xứng:

Quan hệ **R** trên **A** được gọi là **đối xứng** nếu:

$\forall$ a, b $\in$ **A,** a **R** b thì b **R** a

Ví dụ. cho tập A= {1, 2, 3} và các quan hệ

- R_1 = {(1,1); (1,2); (2,1); (3,2); (3,1)} không đối xứng.
- R_2 = {(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,3)} là đối xứng.
- Quan hệ $\leq$ trên Z là không đối xứng.

QUAN HỆ HAI NGÔI

2. Các tính chất:

c. Tính phản xứng:

Quan hệ **R** trên **A** được gọi là **phản xứng** nếu: $\forall$ a, b $\in$ **A,** (a **R** b) $\wedge$ (b **R** a) $\rightarrow$ (a = b)

Ví dụ.

- Quan hệ $\leq$ trên Z là phản xứng vì

  $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)$

- Quan hệ ước số | trên Z^+ là phản xứng vì

  $(a \mid b) \wedge (b \mid a) \rightarrow (a = b)$

QUAN HỆ HAI NGÔI

2. Các tính chất:

d. Tính bắc cầu:

Quan hệ **R** trên **A** có tính **bắc cầu** nếu:

$\forall$ a, b, c $\in$ **A,** (a **R** b) $\wedge$ (b **R** c) $\rightarrow$ (a **R** c)

Ví dụ. cho tập A = {1, 2, 3}

- Quan hệ R = {(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (1,3); (2,3)} trên A có tính bắc cầu.
- Quan hệ "|" và $\leq$ trên Z có tính bắc cầu vì

  (a | b) $\wedge$ (b | c) $\rightarrow$ (a | c)

  (a $\leq$ b) $\wedge$ (b $\leq$ c) $\rightarrow$ (a $\leq$ c)

BIỂU DIỄN QUAN HỆ

1. Biểu diễn quan hệ bằng phương pháp liệt kê
2. Biểu diễn quan hệ bằng điều kiện
3. Biểu diễn quan hệ bằng ma trận
4. Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG PP. LIỆT KÊ

Cho **R** là quan hệ từ **A** = {1, 2, 3, 4}

vào **B** = { u, v, w }. R được liệt kê như sau:

R = {(1,u); (1,v); (2,w); (3,w); (4,u)}

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG MA TRẬN

Cho **R** là quan hệ từ

A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến

B = $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Ma trận biểu diễn của **R** là ma trận cấp m × n

$\mathbf{M_R}$ =$[m_{ij}]$ xác định bởi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG MA TRẬN

Ví dụ.

Cho R là quan hệ từ A = {1, 2, 3} đến

B = {1, 2} sao cho a R b nếu a > b khi đó ma

trận biểu diễn của R là $\mathbf{M_R}$

	1	2
1	0	0
2	1	0
3	1	1

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG MA TRẬN

- Cho R là quan hệ trên A = {x, y, z} khi đó $\mathbf{M_R}$ là **ma trận vuông**
- R là **phản xạ** nếu tất cả các phần tử trên đường chéo chính của $\mathbf{M_R}$ đều bằng 1 $m_{ij} = 1$ khi i = j

	x	y	z
x	1	0	0
y	1	1	0
z	1	1	1

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG MA TRẬN

- R là **đối xứng** nếu $\mathbf{M_R}$ là **đối xứng** ($m_{ij} = m_{ji}$)

	x	y	z
x	1	1	0
y	1	1	0
z	0	0	0

- R là **phản xứng** nếu $\mathbf{M_R}$ là thỏa

  $m_{ij} = 0$ hay $m_{ji} = 0$ nếu $i \neq j$

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG ĐIỀU KIỆN

- Cho **R** là quan hệ từ **A** = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ vào

  B = $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ với

  R được định nghĩa như sau : **R** = {(x,y) | x δ y },

  trong đó δ là một hoặc nhiều điều kiện

Ví dụ.

Cho R là quan hệ từ A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} vào

B = {1, 2} với R = {(x,y) | x ⋮ y và x >1}

BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG ĐỒ THỊ

- Cho **R** là quan hệ trên **A** = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\}$

  Đồ thị có hướng G = (V,E) biểu diễn qua hệ **R** như sau:

  V : là tập các đỉnh (các phần tử của A)

  E : là tập các cung (các phần tử của R)

  Cung $(v_i,v_j) \in E$ nếu v_i **R** v_j hay $(v_i,v_j) \in$ **R**

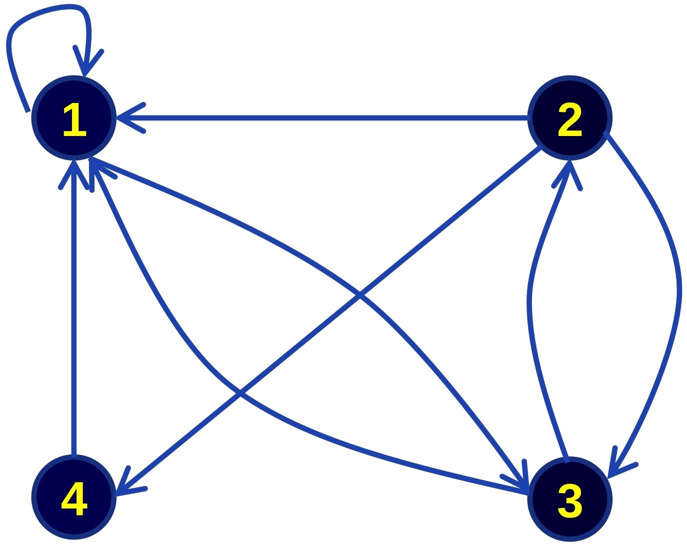
Ví dụ.

Cho A = {1, 2, 3, 4}

R = {(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)}

R được biểu diễn bằng

Đồ thị có hướng sau:



QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Định nghĩa:

Quan hệ **R** trên **A** được gọi là **tương đương** nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ 1. Quan hệ R trên các chuỗi kí tự xác định bởi a R b nếu a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương

Ví dụ 2. Cho R là quan hệ trên tập số nguyên sao cho a R b nếu a + b nguyên . Khi đó R là quan hệ tương đương

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 3. Cho m là số nguyên dương **R** là quan hệ trên **Z** sao cho *a R b* nếu *a – b* chia hết cho m. Khi đó R là quan hệ tương đương.

- a – a chia hết cho m (p.x)
- a – b chia hết cho m → b – a cũng chia hết cho m (đ.x)
- Cho a, b, c sao cho a – b và b – c chia hết cho m, khi đó a – c = a – b + b – c chia hết cho m (b.c)

→ R là quan hệ tương đương (đpcm) và quan hệ R được gọi là ***quan hệ đồng dư modulo m***

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

2. Lớp tương đương:

Cho **R** là quan hệ tương đương trên **A** và phần tử a ∈ **A**. **Lớp tương đương** chứa a *là tập hợp các phần tử thuộc A và có quan hệ R với a*.

Kí hiệu bởi $[a]_R$ hoặc [a] là tập

$[a]_R = \{b \in A \mid b \, R \, a\}$

2. Lớp tương đương:

Ví dụ 1. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1 ?

- Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8

$$[0]_8 = \{\ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots\}$$

- Lớp tương đương modulo 8 chứa 1 gồm tất cả các số nguyên a chia cho 8 dư 1

$$[1]_8 = \{\ldots, -15, -7, 1, 9, 17, \ldots\}$$

→ Lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 2. Tìm các lớp tương đương modulo *m* với $m \in Z^+$?

Trả lời: ta sẽ có m lớp tương đương đồng dư modulo *m* là : $[0]_m$, $[1]_m$,…, $[m-1]_m$ chúng phân Z thành các tập con rời nhau

- $[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \ldots$
- $[1]_m = [m + 1]_m = [2m + 1]_m = \ldots$
- ……………………………………….
- $[m-1]_m = [2m - 1]_m = [3m – 1]_m = \ldots$

→ mỗi lớp tương đương này gọi là **số nguyên modulo m**. Tập hợp số nguyên modulo m được ký hiệu là Z_m

$Z_m = \{ [0]m, [1]m, \ldots, [m-1]m \}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

1. Định nghĩa 1:

Quan hệ **R** trên tập **A** được gọi là **quan hệ thứ tự** nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi đó ta nói A là tập có thứ tự (poset)

Ví dụ 1. Quan hệ ước số (|) trên tập Z^+ là quan hệ thứ tự ?

- $\forall x \in Z^+, x \mid x$ *vì* $x = 1.x$ **(p.x)**
- $Với\ a, b, c \in Z^+$, $a \mid b$ *nghĩa là* $b = k.a$, b | *c nghĩa là c = l.* b → *c = l. (k.a)* → *a | c* ***(b.c)***
- *Ta có a | b nghĩa là b = k.a, b | a nghĩa là a = j. b. Khi đó a = j.k.a . Suy ra j = k = 1, nghĩa là a = b* ***(phản xứng)***

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 2. Quan hệ ước số (|) trên tập Z là quan hệ thứ tự ?

- $\forall x \in Z \; , x \mid x \; vì \; x = 1.x$ **(p.x)**
- $Với \; a, b, c \in Z \quad , \; a \mid b$ *nghĩa là* $b = k.a, \; b$ | *c nghĩa là c =* *l.* b → *c = l. (k.a)* → *a | c* ***(b.c)***
- *Ta có 3 | -3 và -3 | 3 nhưng a $\neq$ b* ***(không phản xứng)***

→ *Quan hệ ước số trên tập Z* ***không*** *phải là quan hệ thứ tự*

QUAN HỆ THỨ TỰ

2. **Định nghĩa 2.** Các phần tử a và b của poset (S, R) gọi là so sánh được nếu a R b hay b R a.

Trái lại thì ta nói a và b không so sánh được

Cho (S, R), nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là tập sắp thứ tự toàn phần

Ta cũng nói rằng R là thứ tự toàn phần hay thứ tự tuyến tính trên S

Ví dụ:

- Quan hệ "≤ " trên tập Z^+ là thứ tự toàn phần.
- Quan hệ ước số trên tập Z^+ không là thứ tự toàn phần vì 5 và 7 là không so sánh được.

BIỂU ĐỒ HASSE

Mỗi poset có thể biểu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ Hasse

Để định nghĩa biểu đồ Hasse ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Định nghĩa:

- Phần tử *b* trong poset (S, R) được gọi là **phần tử trội** của phần tử *a* trong S nếu *a* R *b*
- Phần tử *b* được gọi là **trội trực tiếp** của *a* nếu *b* là trội của *a* và không tồn tại *c* sao cho

$$a \; R \; c \; R \; b \;, \; a \neq c \neq b$$

BIỂU ĐỒ HASSE

Ta định nghĩa biểu đồ Hasse của poset (S, R) là đồ thị :

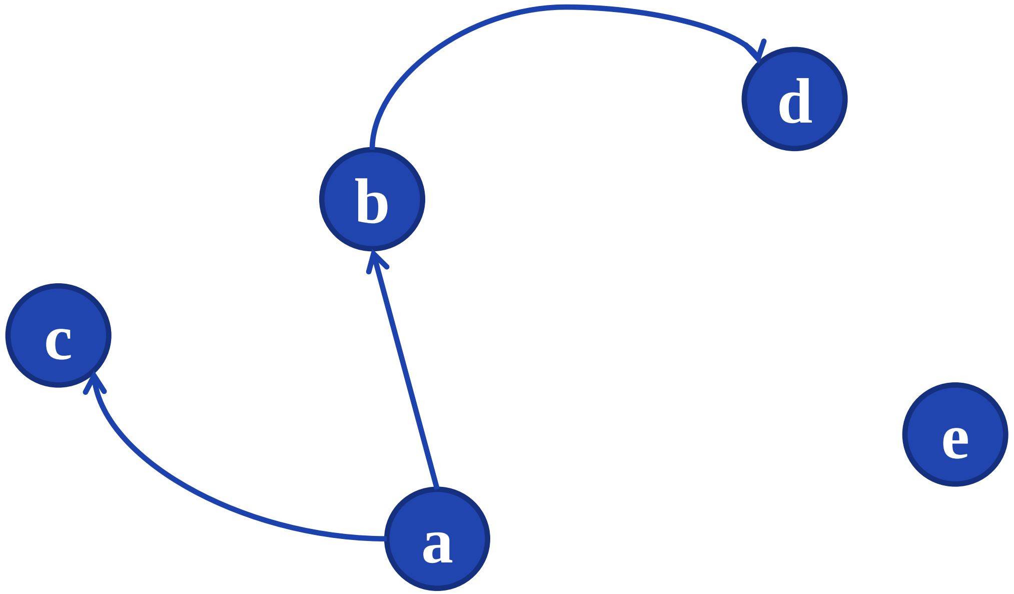
- Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.
- Nếu phần tử *b* là trội trực tiếp của *a* thì vẽ một cung đi từ a đến *b.*

BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ 1: Vẽ biểu đồ Hasse cho tập sắp thứ tự (S,R)

S = { a, b, c, d, e}

R = {(a, b), (b,d), (a,d), (a,c)}



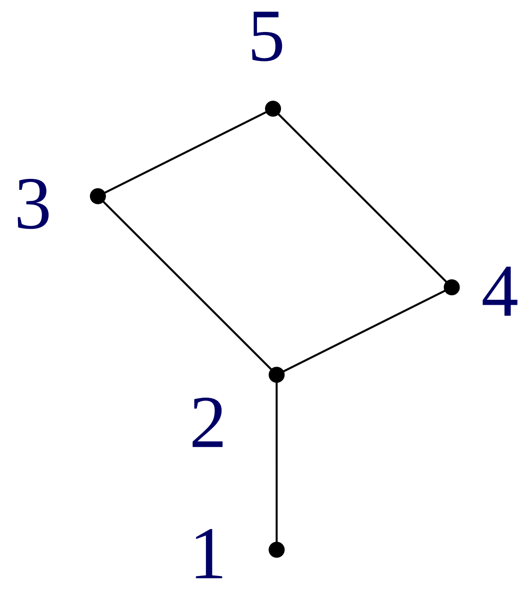
Chú ý:
Chúng ta có thể không vẽ mũi tên với quy ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên.

BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ 2: Cho S = { 1, 2, 3, 4, 5}, R là một quan hệ thứ tự trên S được định nghĩa như sau:

R = {(1, 1), (2,2), (3,3), (4,4), (5, 5), (1,2), (1,3), (1,4) , (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5) }

Trên biểu đồ Hasse các quan hệ có tính chất phản xạ và bắc cầu được loại bỏ, nhưng vẫn được hiểu ngầm là có.



BIỂU ĐỒ HASSE

- **Phần tử tối tiểu:** Cho $x \in X$ được gọi là phần tử tối tiểu của X nếu:

$$\nexists y \in X \ (y \neq x) : yRx$$

(Không có cung nào kết thúc ở x)

- **Phần tử tối đại:** Cho $x \in X$ được gọi là phần tử tối đại của X nếu:

$$\nexists y \in X \ (y \neq x) : xRy$$

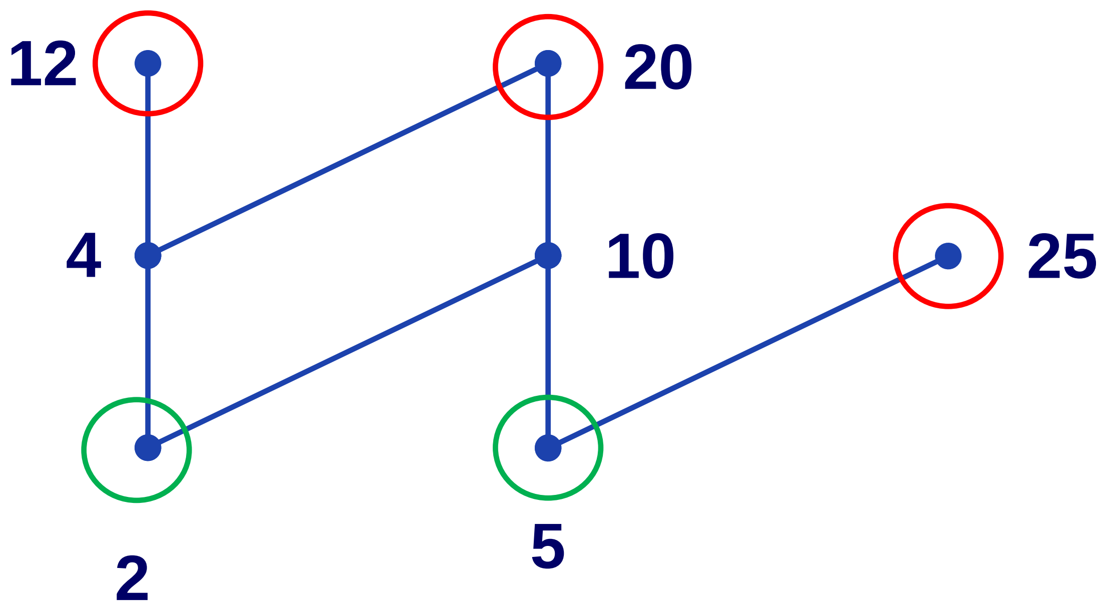
(Không có cung nào xuất phát ở x)

- **Phần tử tối đại và tối tiểu của poset có thể không duy nhất**

BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ: Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của Poset ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |) ?

Từ biểu đồ Hasse ta có : 12, 20, 25 là các phần tử tối đại; 2, 5 là các phần tử tối tiểu.



BIỂU ĐỒ HASSE

- **Phần tử nhỏ nhất:** Cho $x \in X$ được gọi là phần tử nhỏ nhất của X nếu:

$$\forall y \in X \ (y \neq x): xRy$$

(Nếu chỉ có duy nhất một phần tử tối tiểu thì đó là phần tử nhỏ nhất)

- **Phần tử lớn nhất:** Cho $x \in X$ được gọi là phần tử lớn nhất của X nếu:

$$\forall y \in X \ (y \neq x): yRx$$

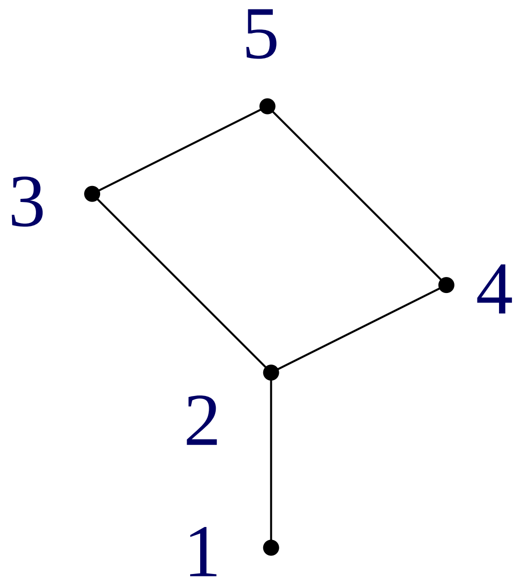
(Nếu chỉ có duy nhất một phần tử tối đại thì đó là phần tử lớn nhất)

BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ: Tìm phần lớn nhất, phần tử nhỏ nhất của Poset ({1, 2, 3,4, 5}, R) ?

R = {(1, 1), (2,2), (3,3), (4,4), (5, 5), (1,2), (1,3), (1,4) , (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5) }

Từ biểu đồ Hasse ta có phần tử lớn nhất là : **5**; phần tử nhỏ nhất là: **1**



BIỂU ĐỒ HASSE

- **Phần tử chặn dưới:** Cho $x \in X$ được gọi là chặn dưới của A (A $\subset$ X) nếu:

$$\forall a \in A : xRa$$

$$(x \in A \vee x \notin A)$$

- **Phần tử chặn trên:** Cho $x \in X$ được gọi là chặn trên của A (A $\subset$ X) nếu:

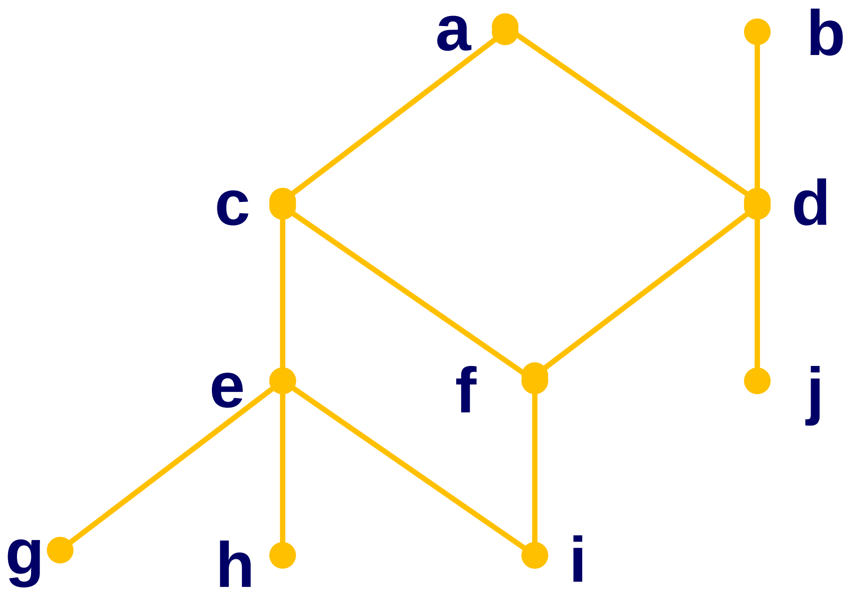
$$\forall a \in A : aRx$$

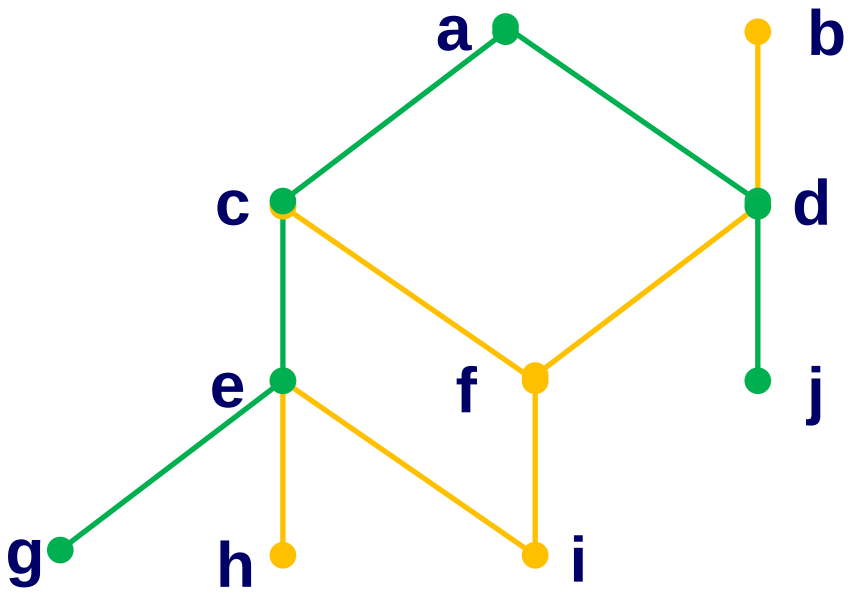
$$(x \in A \vee x \notin A)$$

BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ: Phần tử chặn trên của {g, j} là ?

Phần tử chặn dưới của {a, b} là gì ?





BIỂU ĐỒ HASSE

- **Chặn dưới lớn nhất** của tập A là phần tử lớn nhất trong tập các chặn dưới của A

  Ký hiệu *inf (A)*

- **Chặn trên nhỏ nhất:** của tập A là phần tử nhỏ nhất trong tập các chặn trên của A

  Ký hiệu *sup (A)*

BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ: Cho biểu đồ Hasse như sau:

Tìm phần tử tối tiểu ?

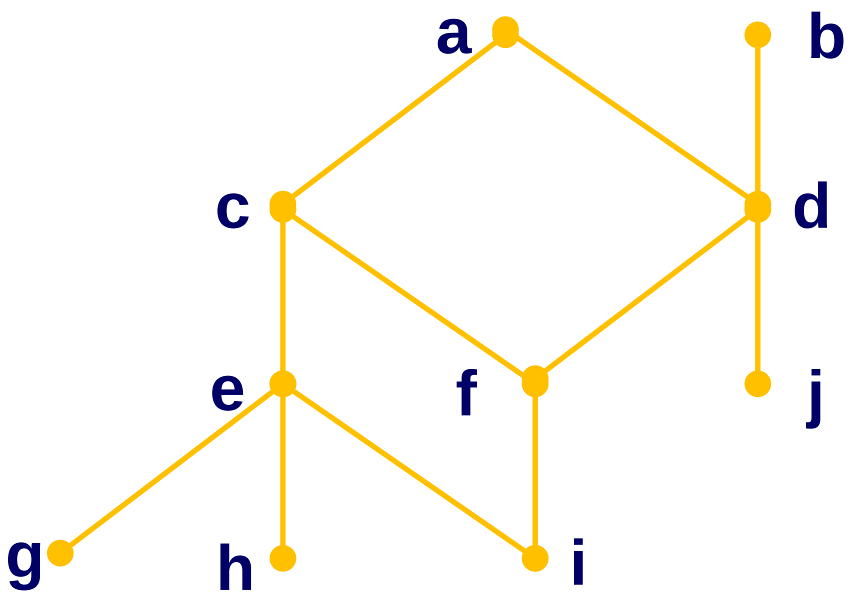
Tìm phần tử tối đại ?

Tìm phần tử nhỏ nhất ?

Tìm phần tử lớn nhất ?

Tìm inf ({b,c}) = ?

Tìm sup ({i, j}) = ?



BIỂU ĐỒ HASSE

Ví dụ: Cho biểu đồ Hasse như sau:

Tìm phần tử tối tiểu g, h, i, j

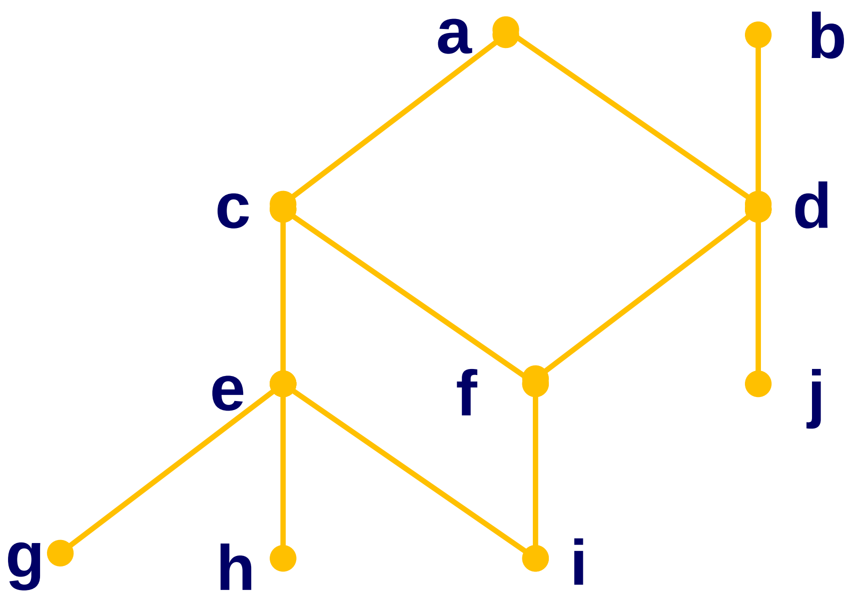
Tìm phần tử tối đại a, b

Tìm phần tử nhỏ nhất = ∅

Tìm phần tử lớn nhất = ∅

Tìm inf ({b,c}) = f

Tìm sup ({i, j}) = d



BÀI TẬP

Bài 1: Kiểm tra tính phản xạ của các quan hệ

- Quan hệ <, ≤, >, ≥ trên Z
- Quan hệ ước số | trên Z^+

Bài 2: Cho A = {1,2,3,4,5,6} trên A xác định quan hệ R = { (a, b) | a – b = 3k; a, b ∈ A; k ∈ Z} ?

a. Biểu diễn R bằng phương pháp liệt kê, phương pháp ma trận, phương pháp đồ thị có hướng

b. Chứng minh R là quan hệ tương đương trên A ?

c. Tìm quan hệ tương đương S sinh ra các lớp sau $A_1 = \{1\}$ $A_2 = \{2,3\}$ $A_3 = \{4,5,6\}$?

BÀI TẬP

Bài 3: Xét các quan hệ sau trên tập số nguyên:

- $R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$
- R3 = {(a,b) | a = b hoặc a = -b }
- R4 = {(a,b) | a = b}
- R5 = {(a,b) | a = b + 1}
- R6 = {(a,b) | a + b ≤ 3}

Hỏi quan hệ nào là quan hệ tương đương và quan hệ nào là quan hệ không tương đương vì sao ?

BÀI TẬP

Bài 4: Hãy tìm một quan hệ trên A = {1,2,3,4} sao cho nó có các tính chất

a. Phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu
b. Phản xạ và bắc cầu nhưng kg đối xứng
c. Đối xứng và bắc cầu nhưng không phản xạ

Bài 5: Cho tập X = {1, 2, 3, 4, 5}; Cho R = {(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (2,3); (2,5); (2,1); (4,3); (4,1); (5,1); (3,1)}. a.Chứng minh R là một quan hệ thứ tự

b.Tìm phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu của X trên R

c. Cho A = {2,3,5} hãy tính sup(A) và inf(A)

d. Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho tập thứ tự (X,R)

BÀI TẬP

Bài 6: Cho tập X = {a,b,c,d,e} cho R = { (a,a), (b, b), (c,c), (d,d), (e,e), (a, b), (a,e), (c, b), (c,e), (c,d)}

Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho tập hợp X với quan hệ R như trên

Bài 7: Cho biểu đồ Hasse của một tập hợp thứ tự (X,R) như sau:

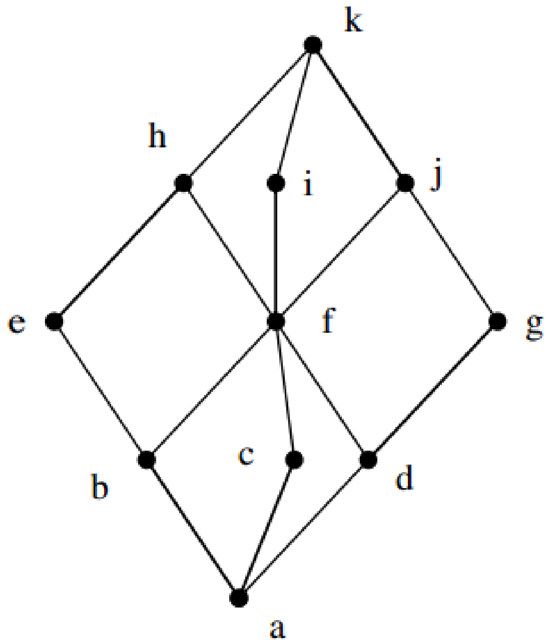
Xét Y = {b,c,e,f} .

Hãy tìm tập các Chặn trên của Y

Tìm tập các chặn dưới của Y

Sup(Y)

Inf(Y)



Q & A