Phương trình vi phân

Ordinary differential equations

P.

HUFI - 2020

Nội dung

1. Phương trình vi phân cấp một
   a) Phương trình tách biến
   b) Phương trình vi phân đẳng cấp
   c) Phương trình vi phân toàn phần
   d) Phương trình vi phân tuyến tính
   e) Phương trình Bernoulli
2. Phương trình vi phân cấp hai
   a) Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

(*Thời lượng:* 6 *tiết*)

Definitions

Phương trình vi phân là phương trình chứa biến độc lập x, hàm phải tìm $y(x)$ và đạo hàm của hàm phải tìm, dạng

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

- Cấp (order) của PTVP là cấp cao nhất của đạo hàm có trong đó.

Định nghĩa II

Definitions

Phương trình vi phân *cấp một* là phương trình có dạng:

1. Tổng quát
$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \qquad (1)$$

2. Giải ra được đối với đạo hàm
$$y' = f\left(x, y\right) \qquad (2)$$

3. Vi phân toàn phần
$$P\left(x, y\right) dx + Q\left(x, y\right) dy = 0 \qquad (3)$$

Definitions

Nghiệm (solutions) của PTVP cấp một

1. Ngiệm tổng quát: là họ các hàm số $y_C = \varphi(x, C)$ thỏa PTVP (1) với mọi hằng số $C \in \mathbb{R}$. Nếu họ hàm số được thay bởi họ các đường cong $\Phi(x, y, C) = 0$ thì ta gọi là tích phân tổng quát của (1).
2. Nghiệm riêng: Thay $C = C_0$ cụ thể, ta được nghiệm riêng $y = \varphi(x, C_0)$ hoặc tích phân riêng $\Phi(x, y, C_0) = 0$.
   Thông thường, để tìm nghiệm riêng, ta thế điều kiện đầu $y_0 = y(x_0)$ vào nghiệm tổng quát.
3. Nghiệm kỳ dị: Là nghiệm không suy được từ nghiệm tổng quát.

Ví dụ

Example

Tìm hàm số $y(x)$ biết:

1. $y'(x) = 2$
2. $y' = 3x$
3. $y' = 2x$ với $y(1) = 2$
4. $y'' = 4x$
5. $y'' = 4x$ với $y(0) = 1, y'(0) = 2$

Một số phương trình có phương pháp giải

1. Phương trình vi phân tách biến
2. Phương trình vi phân đẳng cấp
3. Phương trình vi phân toàn phần
4. Phương trình vi phân tuyến tính
5. Phương trình Bernoulli
6. Phương trình Ricatti

Phương trình vi phân tách biến

1. *Dạng:* là PTVP có dạng

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

hoặc

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

2. *Cách giải:* Tích phân hai vế, ta được nghiệm tổng quát

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

Ví dụ

Example

Giải các PTVP sau:

1. $2xdx + \sin y dy = 0$
2. $xydx + dy = 0$
3. $xdy + ydx = 0$
4. $y' = \frac{\ln x}{x}$
5. $y' = \cos^3 x$
6. $\left(xy^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - x^2 y\right) dy = 0$
7. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$
8. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0,\ y(1) = 1$
9. $\left(xy^2 + x\right) dx + \left(x^2 y - y\right) dy = 0,\ y(0) = 1$

Phương trình vi phân đẳng cấp (thuần nhất)

Definition

- *Hàm thuần nhất*: Hàm $f(x, y)$ gọi là thuần nhất bậc m nếu $\forall \lambda \in \mathrm{R}, \forall x, y$
$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$
- *Phương trình vi phân đẳng cấp* có dạng
$$y' = f(x, y),$$
trong đó f là hàm thuần nhất bậc 0; hoặc
$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0,$$
trong đó M, N là các hàm thuần nhất cùng bậc.

- *Cách giải:* Đặt $z = z(x) = \frac{y}{x}$, hay $y = z.x$.

Ví dụ

Example

Giải các phương trình

1. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$
2. $(x - y)\, ydx - x^2 dy = 0$
3. $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

Ví dụ

Solution

1. *Đặt* $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$. *Ta có*

$$z'x + z = \frac{2z}{1 - z^2} \Rightarrow z' = \frac{z\left(1 + z^2\right)}{x\left(1 - z^2\right)}$$

- *Nếu* $z \neq 0 \Rightarrow \frac{\left(1-z^2\right)dz}{z(1+z^2)} = \frac{dx}{x}$. *Do đó*

$$\int \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2}\right) dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{1 + z^2}\right| = \ln|Cx|, \;\; C \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{z}{1 + z^2} = Cx \Rightarrow x^2 + y^2 = Cy, \;\; C \neq 0.$$

- *Nếu* $z = 0 \Rightarrow y = 0$. *Thế vào thỏa phương trình. Vậy* $y = 0$ *cũng là nghiệm.*

Phương trình vi phân toàn phần

1. *Dạng:* là PTVP có dạng (3)

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

trong đó, các hàm số P, Q thỏa mãn

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{4}$$

2. *Cách giải:* Từ định lý cơ bản của tích phân đường loại hai, ta có

$$dU(x,y) = C,$$

với hàm U được xác định (sai khác hằng số)

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

hoặc

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$$

ở đây, (x_0, y_0) được lấy bất kỳ trong miền xác định của P, Q.

- Vậy, nghiệm (tích phân tổng quát) của pt là

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C$$

hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C$$

Ví dụ

Examples

Giải các PTVP sau

1. $\left(3y^2 + 2xy + 2x\right) dx + \left(6xy + x^2 + 3\right) dy = 0$
2. $\left(e^x + y + \sin y\right) dx + \left(e^y + x + x \cos y\right) dy = 0$

Phương trình vi phân tuyến tính

1. *Dạng:*

$$y' + p(x)\,y = f(x) \tag{5}$$

- $f(x) \equiv 0$: phương trình *thuần nhất*
- $f(x) \neq 0$: phương trình *KHÔNG thuần nhất*

2. *Cách giải:* Đặt $p_1(x) = \int p(x)\,dx$

$$y' e^{p_1(x)} + p(x)\,y e^{p_1(x)} = f(x)\,e^{p_1(x)}$$

$$\left(y e^{p_1(x)}\right)' = f(x)\,e^{p_1(x)}$$

$$y e^{p_1(x)} = \int f(x)\,e^{p_1(x)}dx + C$$

$$y = e^{-p_1(x)}\left[\int f(x)\,e^{p_1(x)}dx + C\right]$$

Phương trình vi phân tuyến tính

- *Nghiệm:*

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\left(\int f(x)\, e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

- Nếu $f(x) \equiv 0,$

$$y = C.e^{-\int p(x)dx}$$

- Trong thực hành, chú ý đồng nhất

$$C.e^{k.\ln|A|} = C.e^{\ln|A|^k} = C.|A|^k \equiv C.A^k$$

Ví dụ

Examples

Giải các PTVP sau

1. $y' + x^2 y = 0$
2. $y' + \frac{y}{x+1} = 0$
3. $y' \cos^2 x + y = 0$
4. $y' + \frac{y}{x+1} = 2$
5. $y' + \frac{y}{x+1} = 2, y\left(0\right) = 0$
6. $y' + \frac{1}{x} y = 3x$
7. $xy' - y = 3x^4$
8. $y' - 2y = e^{2x}$

1. *Dạng:*

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}, \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

2. *Cách giải:*

- Xét $y = 0$: là nghiệm nếu $\alpha > 0$; không là nghiệm nếu $\alpha < 0$.
- Xét $y \neq 0$: chia hai vế phương trình cho y^{α}, ta được

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\,y^{1-\alpha} = q(x)\,.$$

Đặt $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$. Suy ra $z' = (1-\alpha)\,\frac{y'}{y^{\alpha}}$ và thu được phương trình tuyến tính theo z

$$z' + (1-\alpha)\,p(x)\,z = (1-\alpha)\,q(x)$$

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Là nhà Toán học nổi tiếng người Thụy Sỹ, là anh trai của nhà toán học nổi tiếng khác *Johann Bernoulli* (1667-1748), giáo sư toán tại ĐH Groningen, và là bác của nhà toán học, vật lý học *Daniel Bernoulli* (1700-1782), tác giả của *phương trình thuỷ động lực học*, được xem là một trong 5 phương trình làm thay đổi thế gới. Dòng họ nhà Bernoulli danh tiếng được nhắc đến nhiều như một gia đình sản sinh ra nhiều nhà toán học kiệt xuất cho nhân loại.

Jacques (James) Bernoulli

- Jacob Bernoulli có nhiều cống hiến quan trọng trong đại số, hình học, lý thuyết xác suất, đặc biệt là đóng góp về *luật số lớn*.
- Ông cũng phát hiện ra *hằng số Napier* e khi nghiên cứu bài toán lãi suất kép
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
- Năm 1690, ông thiết lập một bất đẳng thức nổi tiếng, mang tên ông
$$(1+x)^n \geq 1+nx,\ \ x>-1, n\in \mathbb{N}.$$
- Năm 1696, ông giải được phương trình vi phân, sau gọi là PT Bernoulli
$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^n.$$
- Ông giữ ghế giáo sư Toán tại đại học Basel cho đến cuối đời. Sau đó, em trai ông, Johann rời Groningen về thay vị trí của anh mình.

Ví dụ

Examples

Giải các PTVP

1. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$
2. $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$

- Giả sử ta gởi tiết kiệm 1000\$ với lãi suất hàng năm là 6%, thì
  - sau 1 năm khoản tiết kiệm trở thành: $1000.(1,06) = 1060\$$,
  - sau 2 năm: $1060.(1,06) = 1000.(1,06)^2 = 1123,60\$$,
  - sau t năm: $1000.(1,06)^t\$$.
- Tổng quát, số tiền gởi ban đầu A_0, tỉ lệ lãi suất hàng năm là r. Sau t năm, khoảng tiền trở thành: $A_0.(1+r)^t$. Tuy nhiên, để thu hút đầu tư, ngân hàng thường trả lãi thường kỳ hơn, chẳng hạn, n lần mỗi năm, và cộng dồn lãi vào vốn. Khi đó lãi suất mỗi kỳ là $\frac{r}{n}$, và khoản tiền sau t năm là:

$$A_0.\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Lãi kép liên tục

- Chẳng hạn, sau 3 năm $(t = 3)$, $r = 6\%$, $A_0 = 1000\$$
  - Lãi suất tính theo năm $(n = 1)$: $1000.\left(1,06\right)^3 = 1191,02\$$
  - Lãi suất tính theo nửa năm $(n = 2)$: $1000.\left(1,03\right)^6 = 1194,05\$$
  - Lãi suất tính theo quý $(n = 3)$: $1000.\left(1,015\right)^{12} = 1195,62\$$
  - Lãi suất tính theo tháng $(n = 12)$: $1000.\left(1,005\right)^{36} = 1196,68\$$
  - Lãi suất tính theo ngày $(n = 365)$:
    $1000.\left(1 + \frac{0,06}{365}\right)^{365\times 3} = 1197,20\$.$
- Giả sử n khá lớn, số tiền thu được sau t năm (vẫn không quá lớn):

$$A(t) \leq \lim_{n\to\infty} A_0.\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 e^{rt}.$$

- Nếu lãi suất được tính dồn liên tục $(n \to \infty)$ thì $A(t) = A_0 e^{rt}$ chính là nghiệm của PTVP

$$\begin{cases} A'(t) = rA(t) \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

Example

Chu kỳ bán rã của đồng vị radium-226 ($^{226}_{88}Ra$) là 1590 năm.

1. Một mẫu radium-226 có khối lượng $100mg$. Tìm khối lượng còn lại của nó sau t năm.
2. Sau 1000 năm còn lại bao nhiêu milligram?
3. Khi nào khối lượng nó giảm còn $30mg$?

1. Gọi $m(t)$ là khối lượng còn lại sau t năm. Ta có

$$m(t) = m_0 e^{kt} = 100.e^{kt}.$$

Theo bài, ta tính được $k = -\frac{\ln 2}{1590}$. Vậy

$$m(t) = 100.e^{-(\ln 2/1590)t} = 100.2^{-t/1590}.$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

- *Dạng:*
$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = G(x) \tag{2.1}$$
trong đó P, Q, R, G là các hàm số liên tục.
- Đặc biệt, nếu $G(x) = 0, \forall x$ thì ta gọi là phương trình tuyến tính *thuần nhất (homogeneous)*. Ngược lại, ta gọi là phương trình tuyến tính *không thuần nhất (nonhomogeneous)*.
- Thông thường, để *giải* phương trình không thuần nhất, *trước hết* ta cần giải phương trình thuần nhất tương ứng
$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0. \tag{2.2}$$

Tính chất nghiệm I

Theorem

Nếu $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là nghiệm của phương trình thuần nhất thì* $y(x) = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x)$, *với* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *tùy ý, cũng là nghiệm. Hơn nữa, nếu* $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là hệ hàm độc lập tuyến tính thì*

$$y(x) = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x)$$

cũng chính là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

- Hệ hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính nếu *định thức Wronski*

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

tại một giá trị x nào đó.

Ví dụ

Example

- Các hàm $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ độc lập tuyến tính.
- Các hàm $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$ độc lập tuyến tính.
- Các hàm $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ độc lập tuyến tính.

Tính chất nghiệm II

Theorem

Nếu y_p *là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất và* y_c *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, thì*

$$y = y_p + y_c$$

là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất đó.

Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

1. *Dạng:*

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

2. *Cách giải:*

(B1) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

(B2) Tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

I-Giải phương trình tuyến tính thuần nhất

- Giả sử *phương trình đặc trưng*

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.3}$$

có hai nghiệm r_1, r_2.

- Nếu $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ thì nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

- Nếu $r_1 = r_2 = r$ thì nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

- Nếu $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ thì nghiệm tổng quát có dạng

$$y = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right).$$

Ví dụ

Example

Giải các phương trình vi phân sau.

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0.$
4. $y'' - 5y' + 6y = 0$
5. $y'' - 6y' + 9y = 0$
6. $y'' + 2y = 0$

Ví dụ

Example

Giải các bài toán biên sau

1. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = y(1) = 0$
2. $4y'' + y = 0,\ y(0) = 3, y(\pi) = -4$

Example (*)

Cho $ay'' + by' + cy = 0$ với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$$

II-Tìm nghiệm riêng của phương trình KHÔNG thuần nhất

1. Vế phải có dạng $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$
   - α *không là nghiệm* của phương trình đặc trưng. Khi đó pt có một nghiệm riêng *dạng*
     $$y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$$
   - α *là nghiệm đơn* của phương trình đặc trưng. Khi đó pt có một nghiệm riêng *dạng*
     $$y_p = xe^{\alpha x} Q_n(x)$$
   - α *là nghiệm kép* của phương trình đặc trưng. Khi đó pt có một nghiệm riêng *dạng*
     $$y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$$

II-Tìm nghiệm riêng của phương trình KHÔNG thuần nhất

1. Vế phải có dạng $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right]$
   - $\alpha + i\beta$ *không là nghiệm* của phương trình đặc trưng. Khi đó pt có một nghiệm riêng *dạng*
   $$y_p = e^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_n(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_n(x)\sin\beta x\right]$$
   - $\alpha + i\beta$ *là nghiệm* của phương trình đặc trưng. Khi đó pt có một nghiệm riêng *dạng*
   $$y_p = xe^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_n(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_n(x)\sin\beta x\right]$$

Ví dụ

Example

Giải các phương trình sau

1. $y'' + y = 1$
2. $y'' + y = x$
3. $y'' + y = e^x$
4. $y'' - y' = 2(1 - x)$
5. $y'' - 5y' + 6y = e^x(2x - 1)$
6. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$
7. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x)$
8. $y'' + y = 4\cos 2x + 2\sin x.$

Problem

Xét chuyển động của một vật có khối lượng (mass) m, *gắn vào một cái lò xo với độ cứng* k *theo chiều dọc hoặc ngang khi ta kéo vật đến vị trí* x

Dao động của lò xo

- Theo định luật Hooke, lực đàn hồi (*restoring force*) tác dụng lên vật

$$F_r = -kx$$

- Theo định luật II Newton $F = m.a$ nên

$$m.x'' = -kx$$

$$\Rightarrow x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Do đó, theo ví dụ trên, đặt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \\ &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Vậy

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

được gọi là *dao động điều hòa đơn giản*.

Ứng dụng II

Giảm xốc, giảm ma sát

- Xét bài toán trên khi vật dao động thẳng đứng trong môi trường nhớt.
- Trong cơ học, ta biết rằng lực giảm xốc (*damping force*) tỉ lệ với vận tốc (*velocity*) và có hướng ngược với chuyển động. Tức là

$$F_d = -c.x'(t),$$

với c là hằng số tất dần. Do đó theo định luật II Newton

$$F = F_d + F_r = m.a$$

$$\Rightarrow -c.x'(t) - k.x = m.x''(t)$$

hay

$$m.x'' + cx' + kx = 0.$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Giảm xốc, giảm ma sát

- $c^2 - 4mk > 0$ (chống rung quá mức)

$$x\left(t\right) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

- $c^2 - 4mk = 0$ (tắt dần tới hạn)

$$x\left(t\right) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{-\omega t}$$

- $c^2 - 4mk < 0$ (tắt dần chậm)

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left(C_1 \cos \widetilde{\omega} t + C_2 \sin \widetilde{\omega} t\right) \\ &= A e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \cos\left(\widetilde{\omega} t + \varphi\right) \end{aligned}$$

với $\widetilde{\omega} = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$.

Minh họa

- Trong ba trường hợp, ta đều có

$$\lim_{t\to\infty} x\left(t\right) = 0$$

- Giả sử ngoài lực đàn hồi, lực giảm xốc, còn có ngoại lực tác dụng lên vật là $F(t)$. Khi đó

$$mx'' = -kx - cx' + F(t),$$
$$\Rightarrow mx'' + cx' + kx = F(t).$$

- Thông thường, ngoại lực xuất hiện ở dạng tuần hoàn

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}.$$

- Nếu không có lực chống xốc, $c = 0$, thì

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

  - Trường hợp $\omega_0 = \omega$ (hiện tượng *cộng hưởng, resonance*)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega} t \sin \omega t$$