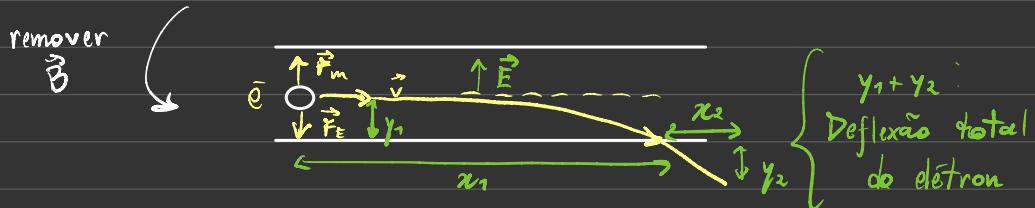


\* Experimento de Thompson:



$$F_m = F_E \Rightarrow qvB = qE \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$



$$\rightarrow v_{x_1} \text{ não se altera} \Rightarrow x_1 = vt_1 = \frac{E}{B}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{B}{E}x_1$$

$$\rightarrow y_1 = \frac{ayt_1^2}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad y_1 = \frac{qEt_1^2}{2m} \Rightarrow y_1 = \frac{qE}{2m} \cdot \frac{B^2}{E^2} x_1^2$$

$$may = qE \Rightarrow ay = \frac{qE}{m}$$

$$\rightarrow v_y = ay t_1 = \frac{qBx_1}{m}$$

$$\rightarrow x_2 = vt_2 = \frac{E}{B}t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{B}{E}x_2$$

$$\rightarrow y_2 = v_y t_2 = \frac{qBx_1}{m} t_2$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{qB}{m} x_1 \cdot \frac{B}{E} x_2 \Rightarrow y_2 = \frac{qB^2}{mE} x_1 x_2$$

→ Deflexão total:

$$y_1 + y_2 = \frac{qB^2}{2mE} z_1^2 + \frac{qB^2}{mE} z_1 z_2 = \frac{q}{m} \frac{B^2}{E} \left( \frac{z_1^2}{2} + z_1 z_2 \right)$$

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{E}{B^2} \frac{y_1 + y_2}{\left( \frac{z_1^2}{2} + z_1 z_2 \right)}}$$

$$\rightarrow \text{Cárm } H^+: \frac{q_e}{m_e} \approx 2000 \frac{q_p}{m_p} \Rightarrow \boxed{m_p \approx 2000 m_e}$$

\* Cálculo da carga do e → Millikan ~ 1927

$$f = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_{ar} g$$

$\bullet \bullet$ $\bullet \cdot$ $\bullet \cdot$ $\bullet \circ$ $\bullet \circ$	<p>* Gota não carregada: <math>m \frac{dv}{dt} = mg - bv - f</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\downarrow</math> desce</p> $\hookrightarrow m \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow mg - bv - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_{ar} g = 0$
---	--

$$bv = mg - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_{ar} g \Rightarrow \boxed{v_{des} = \frac{1}{b} \left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_{ar} \right) g}$$

$$\rightarrow L = v_{des} t_{des} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{b} \left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_{ar} \right) g t_{des}}$$

\* Gota carregada: sulada

$$m \frac{dv}{dt} = qE - mg - bv + \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} g$$

→ Velocidade limite de subida:  $m \frac{dv}{dt} = 0$

$$\Rightarrow bv_{sub} = qE - mg + \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} g$$

$$v_{sub} = \frac{1}{b} \left[ qE - \left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} \right) g \right]$$

$$\Rightarrow L = v_{sub} t_{sub} \Rightarrow L = \frac{1}{b} \left[ qE - \left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} \right) g \right] t_{sub}$$

$$\rightarrow \frac{1}{b} \overbrace{\left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} \right) g}^M t_{desc} = \frac{1}{b} \left[ qE - \left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} \right) g \right] t_{sub}$$

$$M g t_{desc} = qE t_{sub} - M g t_{sub} \Rightarrow qE t_{sub} = (t_{desc} + t_{sub}) M g$$

$$q = \frac{(t_{desc} + t_{sub}) M g}{E t_{sub}} \Rightarrow q = \frac{\left( m - \frac{4}{3} \pi a^3 p_{ar} \right) (t_{desc} + t_{sub}) g}{E t_{sub}}$$

→ Muitas gotas:  $q = ne \rightarrow$  ajusta a carga fundamental até encaixar:  
 $(n_1 e, n_2 e, n_3 e, \dots)$

$$e \approx 1,61 \cdot 10^{-19} C$$

# Radiação de corpo negro / cavidade 17/05/23

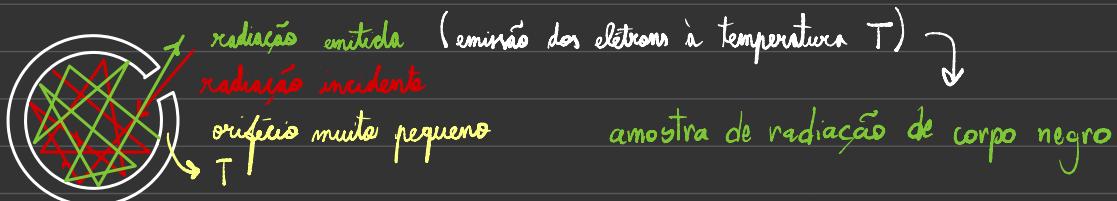
↳ distribuição de radiação universal

## \* Corpo negro:

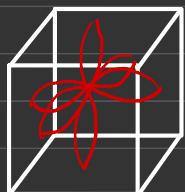
↳ absorve toda a luz incidente

↳ emite radiação quente aquecida → espectro dessa radiação é universal

## \* Cavidade: abstração do corpo negro



↳ Caixa cúbica (metálica) à temperatura T



ondas estacionárias (eletromagnéticas)

Para o campo elétrico das ondas eletromagnéticas:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad E = E(x, y, z, t)$$

→ Ansatz:

$$E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow E(x, y, z, t) = E_0 \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{sen}(wt)$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

$$\hookrightarrow E_{xx} = k_x^2 E_0 \operatorname{cos}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{sen}(wt)$$

$$E_{yy} = -k_y^2 E_0 \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{cos}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{sen}(wt) = -k_y^2 E$$

$$\hookrightarrow E_{yy} = -k_y^2 E$$

$$\hookrightarrow E_{zz} = -k_z^2 E$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 E = -k_x^2 E - k_y^2 E - k_z^2 E = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E$$

relação entre  
frequência e  
vetor de onda

$$\hookrightarrow E_t = w E_0 \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{cos}(wt)$$

$$E_{tt} = -w^2 E_0 \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{sen}(wt) = -w^2 E$$

$$\rightarrow -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E + \frac{w^2}{c^2} E = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{w^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2}$$

$$\boxed{w = \pm ck}$$

$$\rightarrow \text{Condições de contorno: } \begin{cases} \operatorname{sen}(k_x L) = 0 & k_x L = n_x \pi, \quad n_x = 0, 1, 2, \dots \\ \operatorname{sen}(k_y L) = 0 \rightarrow k_y L = n_y \pi, \quad n_y = 0, 1, 2, \dots \\ \operatorname{sen}(k_z L) = 0 \quad k_z L = n_z \pi, \quad n_z = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\hookrightarrow k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x = \frac{2\pi}{c} v_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{c} v_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{c} v_z \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow c = \lambda_x v_x = \lambda_y v_y = \lambda_z v_z$$

$$\hookrightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

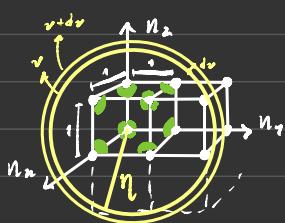
$$\hookrightarrow k_x = \frac{n_x}{L} \pi, \quad k_y = \frac{n_y}{L} \pi, \quad k_z = \frac{n_z}{L} \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = 4 \frac{\pi^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\boxed{n^2 = \frac{4L^2}{c^2} v^2}$$

→ Dada uma frequência  $v$ , quantas ondas existem na variedade com frequência menor ou igual a  $v$ ?



$\frac{1}{8}$  de "ponto" em cada aresta  $\rightarrow 1$  por cubo  
↳ Cada cubo corresponde a um estado

$$G(\eta) = \frac{4}{3} \pi \eta^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2L}{c} v\right)^3$$

$$G(v) = \frac{4}{3} \pi \frac{8L^3}{c^2} v^3$$

↳ Correção:  $G(v) = \frac{2}{8} \frac{4}{3} \pi \frac{8L^3}{c^2} v^3 \Rightarrow \boxed{G(v) = \frac{8}{3} \frac{\pi L^3}{c^2} v^3}$

↳ 1º octante

→ Número de ondas com frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ :

$$g(\nu) = \frac{dG}{d\nu} = \frac{8\pi V}{c^2} \nu^2 \rightarrow \text{densidade de probabilidade}$$

\* Distribuição de energia à temperatura T:

① Vínculo de Einberg da distribuição de Boltzmann:

$$\rightarrow 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta \quad \xrightarrow{\text{vínculo}}$$

$\rightarrow 4$  partículas,  $E = 3\Delta \rightarrow$  maneiras de distribuir?

$$\left. \begin{array}{l} \text{i)} 1p 3\Delta, 3p 0: \frac{4!}{3! 0! 0! 1!} = 4 \\ \text{ii)} 1p \Delta, 1p 2\Delta, 2p 0: \frac{4!}{2! 1! 1! 0!} = 12 \\ \text{iii)} 1p 0, 3p \Delta: \frac{4!}{1! 3! 0! 0!} = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \binom{4}{3} \\ \binom{4}{2} \\ \binom{4}{3} \end{array} \quad \text{Total: } 20$$

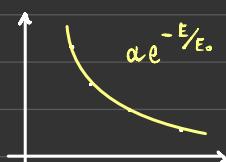
$$\left. \begin{array}{l} P(\text{i}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \\ P(\text{ii}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \\ P(\text{iii}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{nº esperado de partículas no nível } 0: \\ 3 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{5} = 2/4 \\ \rightarrow n_\Delta = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \\ \rightarrow n_{2\Delta} = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \\ \rightarrow n_{3\Delta} = 1 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow n = n_0 + n_\Delta + n_{2\Delta} + n_{3\Delta} = 4 \end{array} //$$

$$\rightarrow P(E=0) = \frac{n_0}{n} = \frac{2/4}{4} = 1/2$$

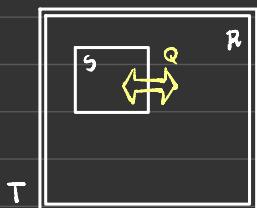
$$P(E=\Delta) = \frac{n_\Delta}{n} = \frac{6/5/4}{4} = 3/10$$

$$P(E=2\Delta) = \frac{n_{2\Delta}}{n} = \frac{3/5/4}{4} = 3/20$$

$$P(E=3\Delta) = \frac{n_{3\Delta}}{n} = \frac{1/5/4}{4} = 1/20$$



## ② Distribuição de Boltzmann



$$E = E_R + E_S$$

↳ Energia fixa  $\Rightarrow$  estados equiprováveis

↳ sistema ergódico  $\rightarrow$  média temporal = média nas configurações

$\rightarrow P_n(E_j)$ : probabilidade do sistema em contato com o reservatório estar com uma energia  $E_j$

$$P(E_j) = \frac{\Omega_S(E_j)}{\sum_{E_i=0}^{\infty} \Omega_S(E_i)} \rightarrow n^{\circ} \text{ config com energia } E_j \text{ do sist. } S$$

$$P(E_j) = \frac{\Omega_R(E-E_j)}{\text{cte} \left\{ \sum_{E_i=0}^{\infty} \Omega_R(E-E_i) \right\}}$$

$$\ln P(E_j) = \tilde{C} \ln [\Omega_R(E-E_j)]$$

Se a energia do sistema no equilíbrio é muito menor que a do reservatório ( $E_j \ll E$ )

$$f(x+h) \underset{\sim}{=} f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots$$

$$\ln \Omega_R(E-E_j) = \ln \Omega_R(E) - E_j \frac{1}{\Omega_R(E)} \frac{\partial \Omega_R(E)}{\partial E} + O(E^2) = \text{cte}$$

$\frac{1}{k_B T}$

$$\rightarrow S = K_B \ln \Omega$$

$\rightarrow 1^{\text{a}} \text{ lei da Termodinâmica: } dU = \delta Q - \delta W$

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV \quad (1)$$

$$S = S(U, V) \Rightarrow dS = \left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_V dU + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_U dV \quad (2)$$

$$\text{Comparando (1) com (2): } \frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = K_B \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E} \Rightarrow \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E} = \frac{1}{K_B T}$$

$$\rightarrow \ln \Omega_R(E - E_j) \approx \text{cte} - \frac{E_j}{K_B T} \Rightarrow \Omega_R(E - E_j) = A e^{-E_j/K_B T}$$

$$\rightarrow \text{Logo, } P(E_j) = C e^{-E_j/K_B T}$$

$$\hookrightarrow \text{Sist. discreto: } P(E_j) = \frac{e^{-E_j/K_B T}}{\sum_j e^{-E_j/K_B T}} \xrightarrow{\text{função de partição}} \sum_j P(E_j) = 1$$

$$\hookrightarrow \text{Sist. contínuo: } P(E) = \frac{e^{-E/K_B T}}{\int_0^\infty e^{-E/K_B T} dE} \rightarrow Z = \int_0^\infty e^{-E/K_B T} dE = \left[ \frac{e^{-E/K_B T}}{-1/K_B T} \right]_0^{+\infty} = K_B T //$$

$$P(E) = \frac{1}{K_B T} e^{-E/K_B T}$$

→ Distribuição de velocidades de um gás (distribuição de Maxwell-Boltzmann)



$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z = (v_x, v_y, v_z)$$

$$dN(v_n) = N f(v_n) dv_n$$

↳ n<sup>o</sup> de moléculas que existem com velocidade entre  $v_n$  e  $v_n + dv_n$

↳ Hipótese 1:  $f(v_n) = f(-v_n)$  (isotropia)

↳ Hipótese 2:  $f(v_n) \rightarrow f(v_n^2)$

$$\hookrightarrow 1+2: f(v_n^2) = f(v_y^2) = f(v_z^2)$$

↳ Hipótese adicional:  $f(v_n, v_y, v_z) = f(v_n) f(v_y) f(v_z)$  (independência)

→ Assim,  $dN(v_n, v_y, v_z) = N f(v_n^2) f(v_y^2) f(v_z^2) dv_n dv_y dv_z$

$$\vec{v} = (v_n, v_y, v_z), \quad v^2 = v_n^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$f(v, 0, 0) = f(v_n, v_y, v_z) \quad \rightarrow \text{independência}$$

$$f(v^2) = f(v_n^2 + v_y^2 + v_z^2) = f(v_n^2) f(v_y^2) f(v_z^2)$$

$$\rightarrow \text{Logo, } f(v_n, v_y, v_z) = C e^{-\frac{m(v_n^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2 k_B T}}$$

⇒  $f(v_n, v_y, v_z) dv_n dv_y dv_z$  = probabilidade de uma molécula estar com uma velocidade com componentes entre  $v_n$  e  $v_n + dv_n$ ,  $v_y$  e  $v_y + dv_y$ , e  $v_z$  e  $v_z + dv_z$

$$\hookrightarrow \text{Normalização: } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1$$

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = 1$$

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_z^2} dv_z = 1$$

$$C \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} dv_x \right)^3 = 1$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-av^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a = \frac{m}{2k_B T} \Rightarrow C \left( \frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow C = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}}$$

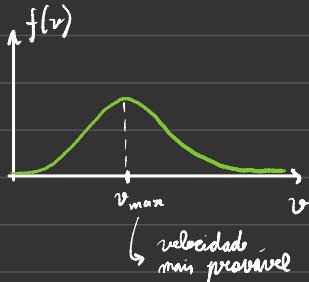
$$\rightarrow f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$



$$\Rightarrow f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} v^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\hookrightarrow \text{Marginalização: } f(v) dv = \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} v^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right] dv$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \Rightarrow \boxed{f(v) dv = \frac{4\pi}{C} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) v^2 dv}$$



$$\frac{df}{dv} = C \left[ -\frac{mv}{k_B T} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 + e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} 2v \right] = 0$$

$$e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \left[ -\frac{m}{k_B T} v^3 + 2v \right] = 0$$

$$2v - \frac{mv^3}{k_B T} = 0 \Rightarrow v \left( 2 - \frac{mv^2}{k_B T} \right) = 0$$

$$\frac{mv^2}{k_B T} = 2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

→ Momento da velocidade:  $\langle v^k \rangle = \int_0^{+\infty} v^k f(v) dv$

- ↳  $k=1$ : valor esperado
- ↳  $k=2$ : variância (dispersão)

→ Dispersão:  $\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle \rightarrow$  largura da distribuição

- ↳  $\langle v - \langle v \rangle \rangle = \langle v \rangle - \langle \langle v \rangle \rangle = \langle v \rangle - \langle v \rangle = 0$  X
- ↳  $\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2 - 2v \langle v \rangle + \langle v \rangle^2 \rangle$   
 $= \langle v^2 \rangle - 2\langle v \rangle^2 + \langle v \rangle^2$   
 $= \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$  //

$$\rightarrow \langle v^k \rangle = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{k}{2}} \int_0^{+\infty} v^{k+2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

Mudança de variáveis:  $z = \frac{mv^2}{2k_B T} \Rightarrow \frac{dz}{dv} = \frac{mv}{k_B T}$

$$v^2 = \frac{2k_B T}{m} z$$

29/05/23

## Efeito fotoelétrico

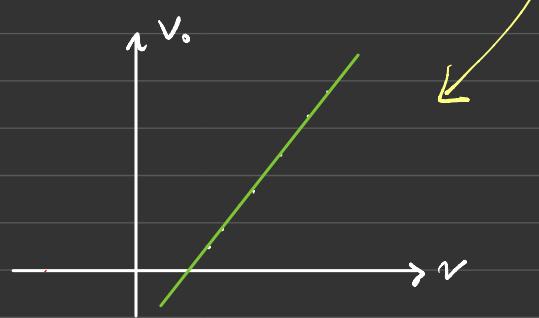
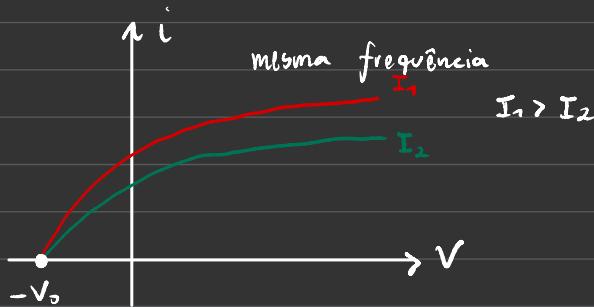
→ Teoria corpuscular da radiação



Einstein:  $h\nu - W = \frac{1}{2}mv^2$

$$W_0 = \min\{W\}$$
$$h\nu - W_0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

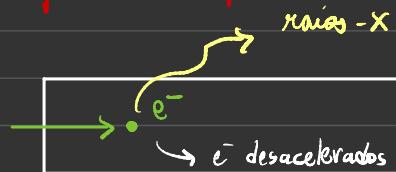
$$h\nu - W_0 = eV_0 \rightarrow V_0 = \frac{h\nu - W_0}{e}$$



"inverso" do  
efeito fotoelétrico

→ Raios-X : Röntgen

## Efeito Compton



→ Compton, ao incidir RX sobre uma placa de grafite, observou que haviam dois comprimentos de onda diferentes na radiação espalhada:  
 $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0: \text{ igual ao incidente} \\ \lambda_1: \text{ diferente} \end{array} \right.$



→ Conservação de energia:

$$\left( E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \rightarrow \text{Foton: } E = pc = h\nu_0 \Rightarrow \boxed{p = h\nu_0 = \frac{h}{\lambda_0}} \right)$$

$$\frac{h\nu_0}{E_{\text{fóton}}} + \frac{m_e c^2}{E_{e^-}} = \frac{h\nu_1}{E_{\text{fóton}}} + \frac{k + m_e c^2}{E_{e^-}} \Rightarrow \boxed{k = h(\nu_0 - \nu_1)}$$

→ Conservação do momento:

$$\begin{array}{l} x: p_0 = p_1 \cos \theta + p \cos \varphi \\ y: p_1 \sin \theta = p \sin \varphi \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \cos \varphi = p_0 - p_1 \cos \theta \quad (1) \\ p_1 \sin \theta = p \sin \varphi \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1)^2: p^2 \cos^2 \varphi = p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2 \cos^2 \theta \\ (2)^2: p^2 \sin^2 \varphi = p_1^2 \sin^2 \theta \end{array} \right\} \quad \boxed{p^2 = p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2} \quad (*)$$

→ Podemos escrever a energia do elétron de duas formas diferentes:

$$\text{ou } E_e = K + m_e c^2 \quad (3)$$

$$E_e^2 = c^2 p^2 + m_e^2 c^4 \quad (4)$$

$$(3)^2: E_e^2 = K^2 + 2Km_e c^2 + m_e^2 c^4 \quad (5)$$

$$\text{Comparando (4) com (5): } K^2 + 2Km_e c^2 + m_e^2 c^4 = c^2 p^2 + m_e^2 c^4 \Rightarrow K^2 + 2Km_e c^2 = c^2 p^2$$

Multiplicando (\*) por  $c^2$  e comparando com (6):

$$\begin{aligned} K^2 + 2Km_e c^2 = p^2 c^2 &= p_0^2 c^2 - 2p_0 p_1 c^2 \cos \theta + p_1^2 c^2 \\ h^2 (v_0 - v_1)^2 + 2h(v_0 - v_1)m_e c^2 &= h^2 v_0^2 - 2hv_0 hv_1 \cos \theta + h^2 v_1^2 \\ h^2 v_0^2 - 2h^2 v_0 v_1 + h^2 v_1^2 + 2h(v_0 - v_1)m_e c^2 &= h^2 v_0^2 - 2hv_0 hv_1 \cos \theta + h^2 v_1^2 \\ 2h(v_0 - v_1)m_e c^2 &= 2h^2 v_0 v_1 (1 - \cos \theta) \\ (v_0 - v_1)m_e c^2 &= h v_0 v_1 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \rightarrow \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{c} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 0,024 \text{ Å}$$

comprimento de onda Compton

\* Um elétron (livre) pode absorver um fóton e simultaneamente o processo conservar momento e energia?

$$p_{\text{fóton}} = \frac{h v_0}{c}, \quad p_{e^-} = m v = \frac{m_e c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v$$



Conservação de momento:

$$\rightarrow \frac{h v_0}{c} = \frac{m_e c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v$$

$$\frac{h^2}{\lambda_0^2} = \frac{m_e^2}{1 - v^2/c^2} v^2$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) h^2 = m_e^2 v^2 \lambda_0^2$$

$$\Rightarrow h^2 - \frac{h^2 v^2}{c^2} = m_e^2 \lambda_0^2 v^2$$

$$\Rightarrow \left(m_e^2 \lambda_0^2 + \frac{h^2}{c^2}\right) v^2 = h^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{h^2 c^2}{m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2} \quad (1)$$

Conservação de energia:

$$\rightarrow h v_0 + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{h c}{\lambda_0} + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

$\Rightarrow (1)$  em  $(2)$ :

$$\frac{h c}{\lambda_0} + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{(m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2)}}}$$

$$\Rightarrow \frac{h c}{\lambda_0} + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{\frac{m_e^2 \lambda_0^2 c^2}{m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{h c}{\lambda_0} + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\lambda_0} \sqrt{m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2}$$

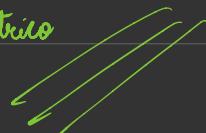
$$\Rightarrow \frac{h c}{\lambda_0} + m_e c^2 = \frac{m_e c^2 \lambda_0}{\sqrt{m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2}}$$

$$\Rightarrow h + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2}$$

$$\Rightarrow h^2 + 2h m_e c \lambda_0 + m_e^2 c^2 \lambda_0^2 = m_e^2 \lambda_0^2 c^2 + h^2$$

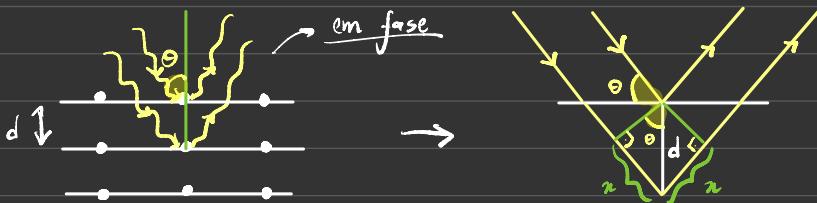
$$2h m_e c \lambda_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 0}$$

∴ Conclusão: o elétron não pode ser livre no efeito fotoelétrico



## Ondas de matéria

\* Difração de raios-X:



$$\text{sen} \theta = \frac{n}{d} \Rightarrow n = d \text{sen} \theta \Rightarrow 2d \text{sen} \theta = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lei de Bragg → interferência construtiva

\* De Broglie: Uma partícula material pode ser associada a uma onda e o comprimento de onda  $\lambda$ , associado a essa partícula.

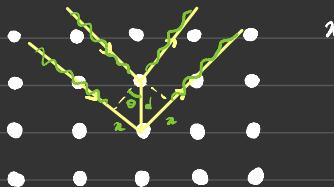
$$\left\{ \begin{array}{l} p = h/\lambda \\ E = h\nu \end{array} \right. \rightarrow \text{Dualidade onda-partícula}$$

(o contrário já era conhecido pelos efeitos fotoelétricos e Compton)

\* Exemplo: Calcule os comprimentos de onda de De Broglie para as seguintes partículas:

- 1) Partícula de poeira:  $m = 1 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$
- 2) Elétron com  $E = 120 \text{ eV}$  (não relativístico)

# Difração de Raios-X



$$x + n = n\lambda \Rightarrow 2x = n\lambda \Rightarrow \boxed{2d \sin \theta = n\lambda}$$

$$\downarrow$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sin \theta = \frac{x}{d}$$

$$\rightarrow 1^{\text{a}} \text{ obs: } \lambda_{\max} = \lambda(n=1) = 2d \sin \theta$$

$$\rightarrow 2^{\text{a}} \text{ obs: } \lambda \approx d$$

## Davison - Germer

$$\rightarrow V = 54V, \quad \Theta = 65^\circ$$

$\hookrightarrow$  diferença de potencial para acelerar os elétrons

$$K = W = q \cdot V, \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} C, \quad V = 54V$$

$$\rightarrow \text{Segundo De Broglie: } \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2mk}}$$

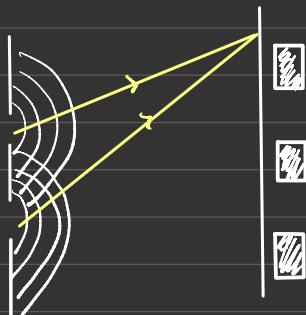
$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 54}} \Rightarrow \boxed{\lambda \approx 0,165 \text{ nm}}$$

$$\rightarrow \text{Segundo a lei de Difração de Bragg: } \lambda_{\max} = 2d \sin \theta$$

$$d = 0,91 \text{ \AA} = 0,091 \text{ nm} \quad \left| \quad \Theta = \arcsen \left( \frac{\lambda_{\max}}{2d} \right) = \arcsen \left( \frac{0,165}{2 \cdot 0,091} \right) = \arcsen (0,9065) \right.$$

$$\boxed{\Theta \approx 65^\circ}$$

# Experimento da dupla fenda de Young ~1800



$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_{01} e^{i(\phi_1 - wt)}, \quad I_1 = |E_{01}|^2 \\ E_2 = E_{02} e^{i(\phi_2 - wt)}, \quad I_2 = |E_{02}|^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= |E_1 + E_2|^2 = |E_{01} \cos(\phi_1 - wt) + i E_{01} \sin(\phi_1 - wt) + E_{02} \cos(\phi_2 - wt) + i E_{02} \sin(\phi_2 - wt)|^2 \\
 &= [E_{01} \cos(\phi_1 - wt) + E_{02} \cos(\phi_2 - wt)]^2 + [E_{01} \sin(\phi_1 - wt) + E_{02} \sin(\phi_2 - wt)]^2 \\
 &= E_{01}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\phi_1 - wt) \cos(\phi_2 - wt) + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \sin(\phi_1 - wt) \sin(\phi_2 - wt) \\
 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} [\cos(\phi_1 - wt) \cos(\phi_2 - wt) + \sin(\phi_1 - wt) \sin(\phi_2 - wt)] \\
 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos[(\phi_1 - wt) - (\phi_2 - wt)]
 \end{aligned}$$

$I_{12} = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\phi_1 - \phi_2) \neq I_1 I_2$

## Onda de De Broglie

formato ondulatório da partícula

$$\rightarrow \Psi(x,t) = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) \right] = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{p}{m} t \right) \right], \quad \frac{p}{m} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\rightarrow A velocidade de propagação da onda: u = \lambda \cdot v = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{p}$$

$$\rightarrow \text{Se é também partícula: } u = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow u = \frac{p}{2} \xrightarrow{\substack{\text{onda} \\ \text{partícula}}} \text{onda desfasada em rel. à partícula}$$

→ Como seria uma idealização de uma onda associada a uma partícula?



$$\rightarrow Olhando para \Psi(x,t), os zeros de \Psi(x,t) ocorrem para: 2\pi \left( \frac{x_n}{\lambda} - vt \right) = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2\pi (Kx_n - vt) = n\pi \Rightarrow Kx_n - vt = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow Kx_n = \frac{n}{2} + vt \Rightarrow x_n = \frac{n}{K} + \frac{vt}{K}$$

$$\rightarrow \text{Se qualquer ponto da onda tem a mesma velocidade, então } u = \frac{dx_n}{dt} = \frac{v}{K}$$

→ Voltando ao problema do atasco,

$$\Psi_1(x_1, t) = \underbrace{\operatorname{sen} [2\pi(kx_1 - vt)]}_B \quad \Psi_2(x_2, t) = \operatorname{sen} \left\{ \underbrace{2\pi[(k+dk)x_2 - (v+dv)t]}_A \right\}$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{A+B}{2} \right) = \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos \left( \frac{A-B}{2} \right) = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) = \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right]$$

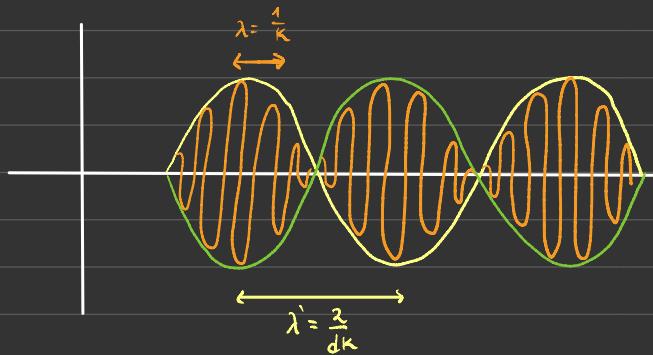
$$= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

Logo,

$$\Psi_1(x_1, t) + \Psi_2(x_2, t) = 2 \operatorname{sen} \left\{ 2\pi \left[ \left( \frac{2k+dk}{2} \right) x_1 - \left( \frac{2v+dv}{2} \right) t \right] \right\} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{dkx_1 - dv t}{2} \right) \right]$$

$$\rightarrow k \gg dk, \quad v \gg dv \Rightarrow \Psi(x, t) = 2 \operatorname{sen} \{ 2\pi (kx - vt) \} \cos \left\{ 2\pi \left( \frac{dkx}{2} - \frac{dv t}{2} \right) \right\}$$



02/06/23

$$\rightarrow \Psi(x, t) = A \sin [2\pi(\kappa x - \nu t)], \quad \kappa = \frac{1}{\lambda}, \quad u = \frac{\omega}{2} \rightarrow \text{partícula}$$

$$\rightarrow \text{Considere: } \Psi_1(x, t) = A \sin [2\pi(\kappa x - \nu t)] \quad e \\ \Psi_2(x, t) = A \sin \left\{ 2\pi \left[ (\kappa + dk)x - (\nu + dv)t \right] \right\}$$

$$\rightarrow \Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) \\ = 2A \sin \left\{ 2\pi \left[ \frac{(\kappa + dk)x - (\nu + dv)t}{\lambda} \right] \right\} \cos \left\{ 2\pi \left( \frac{dkx - dv t}{\lambda} \right) \right\}$$

$$\rightarrow dk \gg d\kappa, \quad dv \gg d\nu \Rightarrow \Psi(x, t) = 2A \sin [2\pi(\kappa x - \nu t)] \cos \left[ 2\pi \left( \frac{dkx - dv t}{\lambda} \right) \right]$$

$$\frac{dk}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{dk} \Rightarrow \lambda \gg \lambda$$

$$\rightarrow \text{Tínhamos mostrado que a velocidade de uma onda } u \text{ é } u = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{v}{2}$$

$$\rightarrow g: \text{velocidade de grupo} \rightarrow g = \frac{\frac{dv}{\lambda}}{\frac{dk}{\lambda}} \Rightarrow g = \frac{dv}{dk}$$

$$\rightarrow \text{De Broglie: } E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{E}{h} \Rightarrow dv = \frac{dE}{h} \quad (1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = hK \Rightarrow dk = \frac{dp}{h} \quad (2)$$

$$p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m}$$

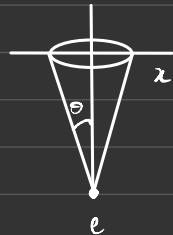
$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow \text{De (1) e (2): } \frac{dv}{dk} = \frac{\frac{dE}{h}}{\frac{dp}{h}} = \frac{dE}{dp} = \frac{d\left(\frac{p^2}{2m}\right)}{dp} = \frac{\frac{1}{2m}dp dp}{dp} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$$

$\therefore \boxed{g = v}$

## Princípio da Incerteza de Heisenberg



$p$ : momento do elétron

$$\Delta p_x = 2p \operatorname{sen} \theta \rightarrow \text{incerteza no momento do } e^-$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta} \approx \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \theta} \rightarrow \text{incerteza na posição do } e^-$$

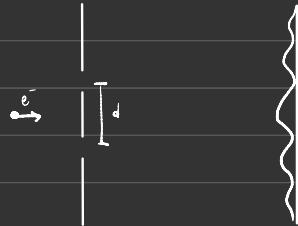
$$\rightarrow \Delta x \Delta p_x \approx 2p \operatorname{sen} \theta \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \theta} = 2 \frac{h}{\lambda} \cdot \lambda = 2h \Rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p_x \sim h}$$

$\rightarrow \theta$  princípio da incerteza:

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{\lambda}, \Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{\lambda}, \Delta z \Delta p_z \geq \frac{h}{\lambda}}$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{d \sin \theta}$$

\* Experimento da fenda dupla:



$\rightarrow \lambda_e \approx d$  (para observar a dispersão)

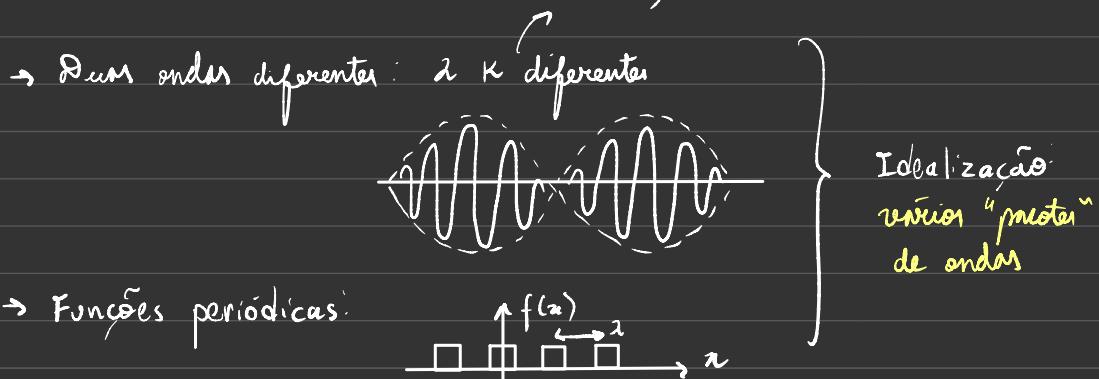
$\rightarrow$  Por qual fenda o elétron passou? Joga luz sobre o elétron,  $\lambda_{luz} \ll d$

$$\rightarrow P_{luz} = \frac{h}{\lambda_{luz}} > \frac{h}{d} \approx \frac{h}{\lambda_e} = \frac{h}{\frac{h}{p_e}} = p_e \therefore \boxed{P_{luz} > p_e}$$

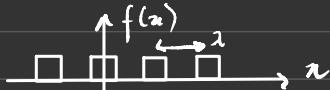
- Como  $p_{\text{tot}} > p_0$ , os elétrons não desviados, atingindo o anteparo
- As ondas breg sobre o elétron, o padrão de interferência é destruído  
 ↳ Tentativa de localizar o elétron → padrão ondulatório é destruído

$$\begin{array}{ccc} \text{partícula} & \leftarrow & \boxed{P = h} \\ & \textcircled{1} \rightarrow & \text{onda} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \curvearrowleft & \boxed{E = h\nu} \\ \text{localizado} & & \text{deslocalizado} \end{array}$$

→ Batimentos:



→ Funções periódicas:



$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \left| \begin{matrix} K_0 = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow n\pi = \frac{k_0 n}{2} \\ \lambda \quad \lambda \quad 2 \end{matrix} \right.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(k_n x)}$$

$$k_n = \frac{\pi}{\lambda_n} \quad //$$

localizar um pacote → não  
periódico

$$\rightarrow \Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{\lambda} (n+1) - \frac{\pi}{\lambda} n = \frac{\pi}{\lambda} \quad \left\{ \begin{matrix} \lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta k_n \rightarrow 0 \end{matrix} \right.$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\Delta k_n} \cos k_n x \Delta k_n$$

$$\lim_{\Delta k_n \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\Delta k_n} \cos k_n x \Delta k_n = \int_0^{\infty} a(k) \cos(kx) dk \quad \left. \right\} \begin{array}{l} \text{integral de} \\ \text{Fourier} \end{array}$$

$\lambda \rightarrow \infty$  fica com apenas um pente da onda

$\rightarrow$  Infinitos  $k$  para 1 pente  $\rightarrow$  localizar em  $x$

$$\Delta x \Delta k \approx 1 \text{ (cte)}$$

$$\rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\frac{d\pi}{k}} = \frac{h}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{h}{2\pi} k \Rightarrow \Delta k = \frac{1}{\hbar} \Delta p \Rightarrow \Delta x \cdot \frac{1}{\hbar} \Delta p \approx 1$$

$$\therefore \boxed{\Delta x \Delta p \approx \hbar} \quad (\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2})$$

$$\begin{array}{l} * \text{Obs.: } \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v = \frac{dx}{dt} \\ \Rightarrow dx = \frac{dE}{dp} dt \Rightarrow \delta x \approx \frac{\delta E}{\delta p} \delta t \end{array}$$

$$\rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta p} \Delta t \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

## Átomo segundo Bohr

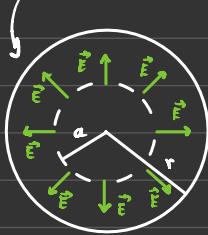
~1910

Thompson → raios corografia / massa do $e^-$ Efeito Compton → difração de $\text{R}X$ em grafite Efeito fotoelétrico → remover $e^-$ com radiação	} existência do elétron
---	-------------------------

→ Thompson:



Campo elétrico:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\vec{E} \parallel \vec{n})$$

cargo englobado pela esfera

↳ superfície da esfera de raio  $a$

$$\rightarrow E \oint dS = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi a^3 \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi a^2 = \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{ap}{3\epsilon_0}$$

→ O átomo é eletricamente neutro (imaginando o átomo de hidrogênio)

$$\rightarrow \rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$\therefore E = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot \frac{a}{3\epsilon_0} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} a$$

→ Assim, num elétron na superfície de radio a sofre uma força devida a esse campo:

$$F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} a = -ka, \text{ onde } k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

oscilador

$$\rightarrow \text{Equação de movimento para o elétron: } m \frac{d^2 a}{dt^2} = -ka \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{k}{m} a = 0}$$

$$\rightarrow \text{Frequência do oscilador: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{Por outro lado: } \frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} a, \quad v = \omega a$$

$$\Rightarrow \frac{mw^2 a^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} a \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \quad \left| \begin{array}{l} e = 1,6 \cdot 10^{-19} C \\ m = 9,11 \cdot 10^{-31} kg \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} r \approx 10^{-10} m \\ c = 3 \cdot 10^8 m/s \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{c}{\nu} = 1,2 \cdot 10^{-7} m = 1200 \text{ \AA} \\ \nu \end{array} \right.$$

longe do espectro eletrromagnético

→ Proporcionava apenas uma frequência (um comprimento de onda), o que significa que era um espectro muito amplo



- Rutherford: Espalhamento de partículas  $\alpha$  ( $\text{He}^{+2}$ ) em folhas finas de ouro  
 → Concluiu que o núcleo estaria concentrado em uma região bem menor ( $\sim 10^{-15} \text{ m}$ )



Modelo de Rutherford

- Problema: toda partícula carregada emite radiação  
 ↳ Perda de energia  $\rightarrow$  diminuição do raio  $\rightarrow e^-$  colapsaria no núcleo

- Balmer (1885):  $\lambda \approx 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4} \rightarrow$  fitting das linhas de emissão , erro  $\sim 10^{-3}$   
 9 primeiras linhas ( $n = 3, 4, \dots$ )

$$\rightarrow K = \frac{1}{\lambda}, \quad R_H = (10967757,6 \pm 1,2) \text{ m}^{-1} \quad (\text{dados atuais})$$

$\hookrightarrow$  cte Rydberg

$$\rightarrow \text{Lyman: } K = R_H \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\rightarrow \text{Balmer: } K = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad \rightarrow \text{próximo da UV}$$

$$\rightarrow Paschen: \quad K = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad \rightarrow \text{IR}$$

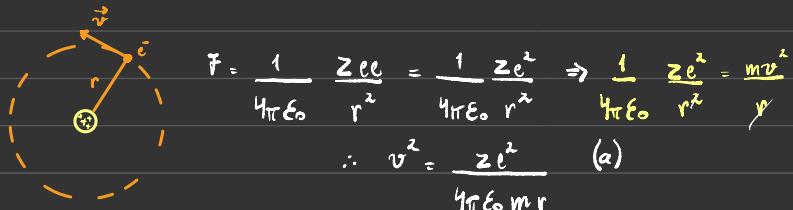
→ Niels Bohr:

- Postulado 1: Eletrons giram em torno do núcleo em órbitas planetárias circulares
- Postulado 2: O elétron não gira em qualquer órbita; gira apenas em órbitas onde o seu momento angular orbital é múltiplo inteiro de  $\hbar$ :  

$$L = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
- Postulado 3: Apesar de constantemente acelerado, o elétron não emite radiação eletromagnética se estiver em uma das órbitas do postulado 2
- Postulado 4: No caso de uma mudança de órbita, o elétron emite radiação com frequência  

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$
 → nível final → mudança descontínua  
 nível atual

→ Modelo de Bohr:



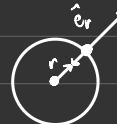
$$L = mv r = n\hbar \Rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr} \quad (b)$$

Substituindo (a) em (b):  $\frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m r} \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{ze^2} \quad (c) \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Substituindo (c) em (b):  $v = \frac{n\hbar}{r_n} = \frac{n\hbar}{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{ze^2}} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2} \Rightarrow v_n = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2} \quad (d)$

$$\rightarrow \text{Energia cinética: } K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow E_n = \frac{1}{2} \frac{m z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2} \frac{1}{r}$$

$\rightarrow$  Energia potencial: A energia potencial do  $e^-$  é o trabalho realizado para levar o  $e^-$  de uma distância  $r$  ao infinito:



$$\vec{F} = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \rightarrow V(r) = \int_r^\infty F(r') dr' = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r'}\right) \Big|_r^\infty$$

$$\therefore V(r) = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow V(r_n) = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{zm e^2}{4\pi\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow V(r_n) = -\frac{m z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\rightarrow \text{Teorema do Virial: } |V(r)| = 2K \quad \left. \right\} (\vec{F}(r) = -f(r) \hat{e}_r)$$

$$\rightarrow E = -\frac{m z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{z^2 e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow E_n = -\frac{m z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2}$$



## Átomo de Bohr

$$F_e = F_c = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (2)$$

→ Quantização do momento angular:  $L = mv r = n\hbar$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$\nu_n = \frac{n\hbar}{mr} \quad (1)$$

→ Substituindo (1) em (2):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r^2} \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{Z_e^2 m}, \quad n = 1, 2, \dots$$

↳ Raio no estado fundamental:  $r_{n=1} = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z_e^2 m}$  → Raio de Bohr

→ Energias:  $E = K + U$ ,  $U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r}$

→ Teorema do virial:  $T = \frac{1}{2}|U|$  para potenciais centrais

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r} \Rightarrow E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_e^2}{r} \frac{Z_e^2 m}{4\pi\epsilon_0 n^2}$$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z_e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

→ O "natural" é que o átomo esteja em um estado de mínima energia

$$E_0 = -\frac{1}{2} \frac{z^2 e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3}$$

$\xrightarrow{z=1}$

$$\xrightarrow{z=1} -13,6 \text{ eV}$$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$z=1 \text{ (H)}$

→ Se o átomo sofre colisão, ou recebe descargas elétricas, a tendência é que o elétron transite para níveis energéticos superiores absorvendo energia e retorna para o estado fundamental emitindo energia.

→ Postulado de Bohr (IV):

$$\nu = \frac{E_f - E_i}{h}$$



$$\nu = -\frac{1}{h} \frac{z^2 e^4 m}{2 (4\pi\epsilon_0)^2 h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \Rightarrow \nu = \frac{1}{4\pi} \frac{z^2 e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

$$\rightarrow z=1, \quad K = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{c}{\nu}} = \frac{\nu}{c}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4\pi c} \underbrace{\frac{e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3}}_{R_\infty} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \Rightarrow K = R_\infty \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right), \quad R_\infty = 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{R_\infty \frac{n_i^2 n_f^2}{(n_f^2 - n_i^2)}} = 911,3 \frac{n_i^2 n_f^2}{(n_f^2 - n_i^2)} \text{ \AA} \quad \left. \right\} \text{ resultado geral}$$

\* Exercício: Se o espectro do átomo de hidrogênio é analisado entre  $1000\text{ \AA}$  e  $4000\text{ \AA}$ , quais linhas espectrais seriam observadas?

Lyman:  $n_i = 1$ ,  $n_f = 2, 3, 4, \dots$

$$\hookrightarrow n_i = 1 \text{ e } n_f = 2 \rightarrow \lambda = 1215\text{ \AA} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{observável}$$

$$\hookrightarrow n_i = 1 \text{ e } n_f = 3 \rightarrow \lambda = 1025\text{ \AA} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

a partir de  $n_f = 4$ ,  $\lambda < 1000\text{ \AA}$

Balmer:  $n_i = 2$ ,  $n_f = 3, 4, 5, \dots$

$$\hookrightarrow n_i = 2 \text{ e } n_f = 3 \rightarrow \lambda = 6561\text{ \AA}$$

$$\hookrightarrow n_i = 2 \text{ e } n_f = 4 \rightarrow \lambda = 4860\text{ \AA}$$

:

$$\hookrightarrow n_i = 2 \text{ e } n_f = 7 \rightarrow \lambda = 3969\text{ \AA} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{observável}$$

$$\hookrightarrow n_i = 2 \text{ e } n_f = 10 \rightarrow \lambda = 3645\text{ \AA}$$

Pashen:  $n_i = 3 \rightarrow$  nenhuma

→ Transição com  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \rightarrow v_{n \rightarrow n+1} &= CR\omega \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = CR\omega \left[ n^{-2} - (n+1)^{-2} \right] \\ &= CR\omega \left[ n^{-2} - n^{-2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-2} \right] = CR\omega n^{-2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-2} \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow (1+x)^{-\alpha} = 1 - \alpha x + O(x^2) \approx 1 - \alpha x \quad (x \ll 1)$$

→ Suponha  $n$  muito grande:

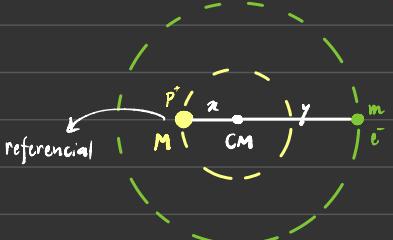
$$v_{n \rightarrow n+1} = CR\omega n^{-2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \right] = CR\omega n^{-2} \left( \frac{2}{n} \right) = \frac{2CR\omega}{n^3}$$

$$\therefore v_{n \rightarrow n+1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v_n &= \frac{n\hbar}{mr_n}, \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{e^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{mr}_n \\ \text{mr}_n \xrightarrow{\text{zeta}} \text{Zem} \end{array} \right\} \quad v_{n\text{rot}} = \frac{\frac{n\hbar}{mr_n}}{2\pi r_n} = \frac{n\hbar}{2\pi m r_n^2} \\ \rightarrow v &= \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = v_{n\text{rot}} = \frac{2\pi}{2\pi r} \quad \left. \begin{array}{l} \text{mr}_n \\ \text{mr}_n \xrightarrow{\text{zeta}} \text{Zem} \end{array} \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2\pi m} \cdot \frac{e^2 m^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3} \frac{1}{r^2} \\ &\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3} \\ \therefore v_{n\text{rot}} &= v_{n \rightarrow n+1} \end{aligned}$$

→ Princípio da correspondência:  $n$  grande → resultado clássico

## → Aproximação de massa finita



$$r = x + y$$

$$R_{CM} = \frac{M \cdot 0 + mr}{m+M} \Rightarrow x = R_{CM} = \frac{mr}{m+M}$$

$$y = r - x = r - \frac{mr}{m+M} = \frac{mr + Mr - mr}{m+M}$$

4<sup>a</sup> casa ↑

$$\underline{M} = 0,99946 \dots$$

$$\frac{M}{m+M}$$

$$y = \frac{\underline{M}}{m+M} r$$

raio da órbita do e<sup>-</sup>

$$\rightarrow v_n = \frac{n \hbar}{my}, \quad y = \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{e^2 m} = \frac{M}{m} r_n \Rightarrow r_n = \left( \frac{m+M}{M} \right) \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{e^2 m}$$

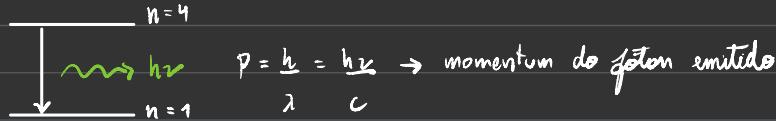
$r_n$ : dist. elétron-proton

$$\rightarrow E_n = - \frac{1}{2(4\pi \epsilon_0)} \frac{e^2}{r_n} = - \frac{1}{2(4\pi \epsilon_0)} \frac{e^2}{m+M} \cdot \frac{e^2 m}{(4\pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = \frac{M}{m+M} \left( - \frac{e^4 m}{2(4\pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} \right)$$

$$\therefore \boxed{E_n = \left( \frac{M}{m+M} \right) E_n}$$

$$\rightarrow h\nu = E_f - E_i \Rightarrow \boxed{K = \left( \frac{m}{m+M} \right) R_{\infty} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) = R_{\infty} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)}$$

\* Exercício: Calcule a velocidade de recesso do átomo quando um elétron desse átomo faz uma transição de  $n=4$  para  $n=1$  em um único salto



$$\rightarrow \vec{p}_{\text{átomo}} + \vec{p}_{\text{fóton}} = 0 \quad (\text{conservação}) \Rightarrow m v_{\text{recesso}} = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow v_{\text{recesso}} = \frac{h\nu}{m c}$$

$$\rightarrow M_a = M + m \Rightarrow v_{\text{recesso}} = \frac{h\nu}{(M+m)c} = \frac{h\nu R_\infty \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)}{(M+m)c}$$

$$\therefore |v_{\text{recesso}}| = \frac{h R_\infty}{(M+m)} \left| \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \right|$$

$$\left. \begin{aligned} m &= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ M &= 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ n_i &= 4, \quad n_f = 1 \\ R_\infty &= 1,09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \\ h &= 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \end{aligned} \right\} \quad \boxed{v_{\text{recesso}} \approx 4 \text{ m/s}}$$