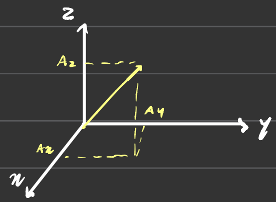
# Mecânica Clássica I

## Revisão de vetores

→ Vetor: segmento de reta orientada

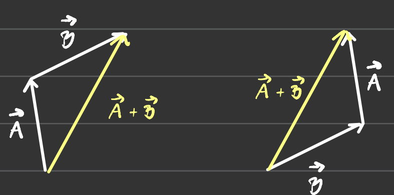



↳ $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

→ Propriedades:

* Igualdade: $\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z \end{cases}$

* Adição: $\vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) = \vec{B} + \vec{A}$



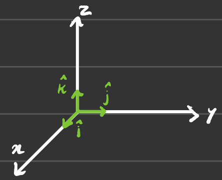

* Multiplicação por escalar: $c\vec{A} = (cA_x, cA_y, cA_z)$, $c \in \mathbb{R}$

* Associatividade: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

* Distributividade: $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$

→ Vetores unitários: módulo igual a 1 → indicam direções no espaço

$\hat{A}$




$\hat{i} = (1, 0, 0)$
$\hat{j} = (0, 1, 0)$
$\hat{k} = (0, 0, 1)$

↳ $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z)$
$= A_x(1,0,0) + A_y(0,1,0) + A_z(0,0,1)$

$\Rightarrow \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

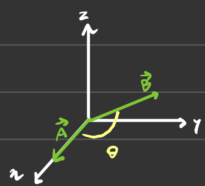
↳ Notação alternativa: $\begin{cases} A_x \equiv A_1 & \hat{i} \equiv \hat{e}_1 \\ A_y \equiv A_2 & \hat{j} \equiv \hat{e}_2 \\ A_z \equiv A_3 & \hat{k} \equiv \hat{e}_3 \end{cases}$ → $\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$

$\boxed{\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i}$

* Produto escalar: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

↳ Comutatividade: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

↳ Distributividade: $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$




$\vec{A} = A\hat{i}$
$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

→ $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB_x = AB\cos\theta}$

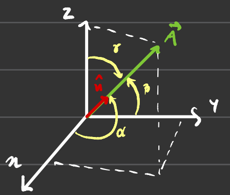
$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}}$

$\boxed{A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}}$

$\left.\begin{array}{l} \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0 \end{array}\right\}$ $\boxed{\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij}}$ ⟶ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

→ Versor: vetor unitário com direção e sentido de $\vec{A}$

$$\boxed{\hat{n} \equiv \frac{\vec{A}}{A}} \to \vec{A} = A\hat{n}, \quad |\hat{n}| = \sqrt{\frac{\vec{A}\cdot\vec{A}}{A^2}} = 1 \;//$$




$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\alpha \\ A_y &= A\cos\beta \\ A_z &= A\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \hat{n} = \frac{A_x}{A}\hat{i} + \frac{A_y}{A}\hat{j} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

$$\boxed{\hat{n} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}} \to \text{cossenos diretores}$$

* Produto vetorial: $\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - B_yA_z,\; A_zB_x - A_xB_z,\; A_xB_y - A_yB_x)$

↳ Anticomutatividade: $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

↳ Mult. escalar: $c(\vec{A}\times\vec{B}) = (c\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(c\vec{B}),\; c\in\mathbb{R}$

↳ Distributividade: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

↳ Não associatividade: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

↳ Vetores unitários: $\left\{\begin{aligned} &\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0 \\ &\left.\begin{aligned} \hat{i}\times\hat{j} &= \hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{k} &= \hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{i} &= \hat{j} \end{aligned}\right\}\end{aligned}\right.$ Definem um sistema de coordenadas dextrógiro

↳ $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

$$\rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

↳ Laplace: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} M_{ij}$

↳ Significado geométrico:

$\rightarrow \vec{C} \equiv \vec{A}\times\vec{B}$

$\rightarrow \vec{A}\cdot\vec{C} = A_x(A_yB_z - B_yA_z) + A_y(A_zB_x - B_zA_x) + A_z(A_xB_y - B_xA_y) = 0$

$\Rightarrow \vec{A}\perp\vec{C}$

$\rightarrow \vec{B}\cdot\vec{C} = \dots = 0 \Rightarrow \vec{B}\perp\vec{C}$

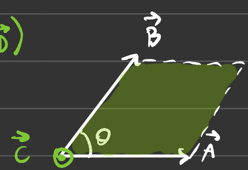
} $\vec{C}\perp$ ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$

↳ sentido de $\vec{C}$: regra da mão direita

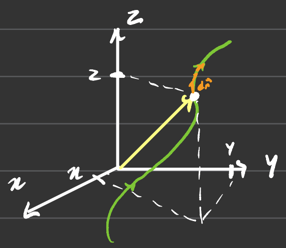
$$\rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B}) - (\vec{B}\cdot\vec{A})^2 = A^2B^2 - (AB\cos\theta)^2$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2(1-\cos^2\theta) \Rightarrow \boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,\text{sen}\,\theta}$$

Marion pg. 25: $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$



# Cinemática




$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$

Velocidade: $\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$ , $\vec{v} \parallel d\vec{r}$ → vetor tangente à trajetória

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{cases}$$

Aceleração: $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt} = \ddot{\vec{r}}}$

$$\vec{a} = \dot{v}_x\hat{i} + \dot{v}_y\hat{j} + \dot{v}_z\hat{k} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

→ Em sistemas de coordenadas ortogonais → $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ constantes no tempo

# Mecânica

→ Movimento + causas do movimento

1º Postulado: Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, exceto sob ação de uma força
corpo

↳ Estabelece um referencial inercial → referencial onde o 1º postulado é válido

↱ definição operacional de "força"

2º Postulado: $\boxed{\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ ↳ massa inercial
corpo

3º Postulado: As forças entre dois corpos possuem mesma magnitude, mesma direção e sentidos
2 corpos

$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_1: \text{força sobre o corpo } 1 \\ \vec{F}_2: \quad " \quad " \quad " \quad " \quad 2\end{array}\right\} \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

↳ Dois corpos isolados: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \quad (*)$$

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cte no tempo}}$$

↳ (*): $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|}}$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Massa inercial: define o 2º postulado} \\ \text{Massa gravitacional: define a força gravitacional}\end{array}\right\}$ equivalentes?

→ Experimentos (1987): $\boxed{m_{inercial} = m_{gravitacional} = m}$ } até 12 casas decimais

Princípio da equivalência

# Movimento de uma partícula

→ 2ª Lei: $\vec{F}_{res} = m\ddot{\vec{r}}$, $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{res}(\vec{r}, \vec{v}, t, \ldots)$

↳ Solução: $\vec{r} = \vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t), \vec{a}(t)$

↳ Duas constantes arbitrárias

↳ Determinadas pelas condições iniciais: $\vec{r}(0) \equiv \vec{r}_0$

$\vec{v}(0) \equiv \vec{v}_0$

## * Força constante:

$F_{res,x} = m\ddot{x}$, $F_{res,x}$ não depende de $\vec{r}$, $\vec{v}$ ou $t$

↳ $$\frac{F_{res,x}}{m} = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow \int dv_x = \frac{F_{res,x}}{m}\int dt \rightarrow v_x(t) = \frac{F_{res,x}}{m}t + A$$

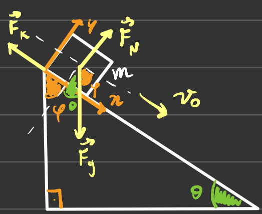
↳ $$v_x(t) = \overbrace{\frac{F_{res,x}}{m}}^{a_x} t + A = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int dx = \int (a_x t + A)\,dt \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + At + B$$

↳ Condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \equiv x(0) \rightarrow B = x_0 \\ v_0 \equiv v(0) \rightarrow A = v_0 \end{array}\right\} \boxed{x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x_0}$$

## ↳ Ex.: Atrito cinético $\mu_K$

- $t = 0 \rightarrow$ topo do plano, empurrado com velocidade $v_0$
- Condições iniciais: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ v_x(0) = 0 \end{cases}$




2ª Lei: $y \rightarrow F_N - F_g \cos\theta = 0 \rightarrow F_N = F_g \cos\theta$

$x \rightarrow F_g \operatorname{sen}\theta - F_K = m\ddot{x}$

$$mg \operatorname{sen}\theta - mg\cos\theta\,\mu_K = m a_x$$

$$\boxed{a_x = g\cos\theta\,(\tan\theta - \mu_K)}$$

- $\mu_K = \tan\theta \Rightarrow a_x = 0$
- $\tan\theta > \mu_K \Rightarrow a_x > 0$
- $\tan\theta < \mu_K \Rightarrow a_x < 0$

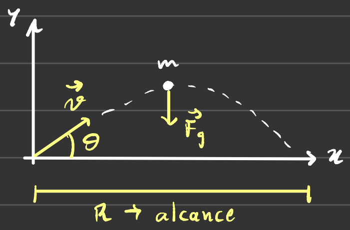
$$\boxed{v_x(t) = v_0 + g\cos\theta\,(\tan\theta - \mu_K)\,t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{g}{2}\cos\theta\,(\tan\theta - \mu_K)\,t^2 + v_0 t}$$

→ Força constante $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \\ v_x(t) = v_{0x} t + a_x t \\ a_x = F_{res,x}/m \end{cases}$

19/03/23

→ Ex.: Lançamento de projéteis




Condições iniciais:
$$\begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \\ \hookrightarrow v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ \hookrightarrow v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

→ $\vec{F}_{res} = -mg\,\hat{j}$

$\hookrightarrow F_{res,x} = 0$

$\hookrightarrow F_{res,y} = -mg$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) &= -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \operatorname{sen}\theta\, t \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= -gt + v_0 \operatorname{sen}\theta \end{aligned}}$$

→ T → tempo de voo

$R = x(T)$ → alcance

definição

$t = T \Rightarrow y(T) = 0$

$$-\frac{g}{2} T^2 + v_0 \operatorname{sen}\theta\, T = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}}$$

$$R = x(T) = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{2 v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}}$$

$\hookrightarrow \theta = 45° \rightarrow R_{max}$

# * Força dependente da velocidade → resistência de um fluido

→ Força de resistência: atrito entre corpo e camadas do fluidos
↳ Dissipativa

módulo da velocidade

→ $\boxed{\vec{F}_R(\vec{v}) = -g(v)\,\vec{v}}$ } forma mais simples
↳ $g(v) > 0$ → arbitrária

→ $\vec{F}_R$ tem sentido contrário a $\vec{v}$

constantes que dependem do fluido e da forma do objeto (não dependem da massa)

→ Teoria fenomenológica: $\boxed{\vec{F}_R(\vec{v}) = -c_1\vec{v} - c_2 v\,\vec{v}}$

↳ $[c_1] = N\,s/m = kg\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{s}{m} = kg/s$ //
↳ $[c_2] = N\,s^2/m^2 = kg\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{s^2}{m^2} = kg/m$ //

→ Em $x$: $F_{R,x} = -c_1 v_x - c_2 v\, v_x$ , $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
↳ $c_1, c_2 > 0$
↳ $\frac{c_2 v v_x}{c_1 v_x} = \frac{c_2 v}{c_1}$

$$\begin{cases} \frac{c_2}{c_1} v > 1 \rightarrow \text{quadrático} \\ \frac{c_2}{c_1} v < 1 \rightarrow \text{linear} \end{cases}$$

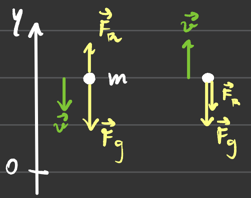
diâmetro

↳ Esfera + ar: $c_1 = (1{,}55 \cdot 10^{-4}\ kg/sm)\, D$
$c_2 = (0{,}22\ kg/m^3)\, D^2$

↳ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{7{,}045 \cdot 10^{-4}}{D}\,\frac{m^2}{s}$

↳ Bola de tênis: $D \approx 0{,}07\,m$
$\frac{c_1}{c_2} \approx 1\,cm/s$ } Quadrática → $v > 1\,\frac{cm}{s}$

## → Movimento vertical – fluido (ar)




Linear: $\vec{F}_{R,y} = -c_1 v_y$

2ª Lei: $-m\vec{g} - c_1 v_y = m\ddot{y} = m\dfrac{dv_y}{dt}$

$$-\int dt = \int \frac{m\,dv_y}{mg + c_1 v_y} \quad \to \quad \begin{aligned} u &\equiv mg + c_1 v_y \\ du &= c_1\,dv_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -t + A = \frac{m}{c_1}\int \frac{du}{u} \Rightarrow -t + A = \ln|u|\frac{m}{c_1} \Rightarrow A - t = \frac{m}{c_1}\ln(mg + c_1 v_y)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{c_1}{m}(A-t)} = mg + c_1 v_y \Rightarrow \boxed{v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{e^{\frac{c_1}{m}(A-t)}}{c_1} - \frac{mg}{c_1}}$$

$$y(t) = \frac{e^{\frac{c_1}{m}A}}{c_1}\int e^{-\frac{c_1}{m}t}\,dt - \frac{mg}{c_1}t + B = \frac{e^{\frac{c_1}{m}A}}{c_1}\left(-\frac{m}{c_1}\right)e^{-\frac{c_1}{m}t} - \frac{mg}{c_1}t + B$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{m}{c_1^2}e^{-\frac{c_1}{m}(t-A)} - \frac{mg}{c_1}t + B}$$

→ Condições iniciais $\begin{cases} y(0) = h \quad \text{(altura)} \\ v_y(0) = -|v_0| \end{cases}$

$$\to -|v_0| = \frac{e^{\frac{c_1}{m}A}}{c_1} - \frac{mg}{c_1} \Rightarrow e^{\frac{c_1}{m}A} = mg - c_1|v_0|$$

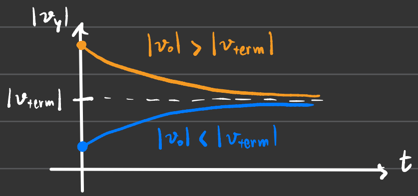
$$\boxed{v_y(t) = \left(\frac{mg}{c_1} - |v_0|\right)e^{-\frac{c_1}{m}t} - \frac{mg}{c_1}} \qquad \left\{\ t \to \infty:\ \overset{\text{Vel. terminal}}{\boxed{v_y(t) \to -\frac{mg}{c_1}}}\right.$$

$$\to h = -\frac{m}{c_1^2}e^{\frac{c_1}{m}A} + B \Rightarrow B = h + \frac{m}{c_1^2}(mg - c_1|v_0|)$$

Exercício:

$|v_{term}| = \frac{mg}{c_1}$

$\rightarrow \; |v_y(t)| = |v_{term}| + (|v_0| - |v_{term}|)\, e^{-\frac{c_1}{m}t}$




$\rightarrow \; c_1 \to 0$: $\quad e^{-\frac{c_1}{m}t} \approx 1 - \frac{c_1}{m}t$

$$v_y(t) = \left(\frac{mg}{c_1} - |v_0|\right)\left(1 - \frac{c_1}{m}t\right) - \frac{mg}{c_1} = \cancel{\frac{mg}{c_1}} - |v_0| - gt + \frac{c_1}{m}|v_0|t - \cancel{\frac{mg}{c_1}}$$

$$v_y(t) = -|v_0| - gt \quad //$$

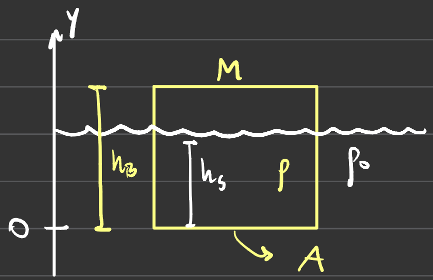
29/05/23

cilíndrico, retangular, ...

**3-7.** A body of uniform cross-sectional area $A = 1\ \text{cm}^2$ and of mass density $\rho = 0.8\ \text{g/cm}^3$ floats in a liquid of density $\rho_0 = 1\ \text{g/cm}^3$ and at equilibrium displaces a volume $V = 0.8\ \text{cm}^3$. Show that the period of small oscillations about the equilibrium position is given by

$$\tau = 2\pi\sqrt{V/gA}$$

where $g$ is the gravitational field strength. Determine the value of $\tau$.



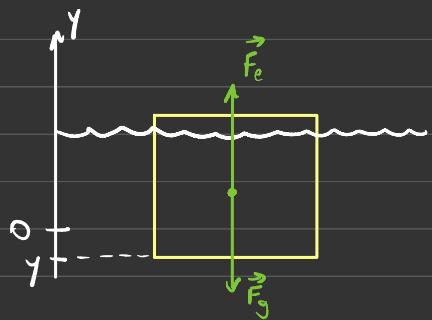

$2^a$ lei (equilíbrio):

$$F_{res,y} = -Mg + M_L g$$

$$F_{res,y} = -\rho A h_B g + \rho_0 A h_S g$$

$$F_{res,y} = 0 \Rightarrow \rho A h_B g = \rho_0 A h_S g$$

$$\boxed{h_B = \frac{\rho_0}{\rho} h_S}$$




fora do eq.    no eq.

$$-Mg + M_L g = M\ddot{y}$$

$$M_L = \rho_0 A (h_S - y) \quad \begin{cases} y < 0 \rightarrow M_L > M_{L\,eq.} \\ y > 0 \rightarrow M_L < M_{L\,eq.} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\rho A h_B g + \rho_0 A h_S g - \rho_0 A y g = \rho A h_B \ddot{y}$$

$$\cancel{-g} + \cancel{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{h_S}{h_B}g} - \frac{\rho_0 g y}{\rho h_B} = \ddot{y} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{\rho_0 g}{\rho h_B} y = 0}$$

$w_0^2$

$$\boxed{\frac{h_S}{h_B} = \frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}$$

$$w_0^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho h_B}$$

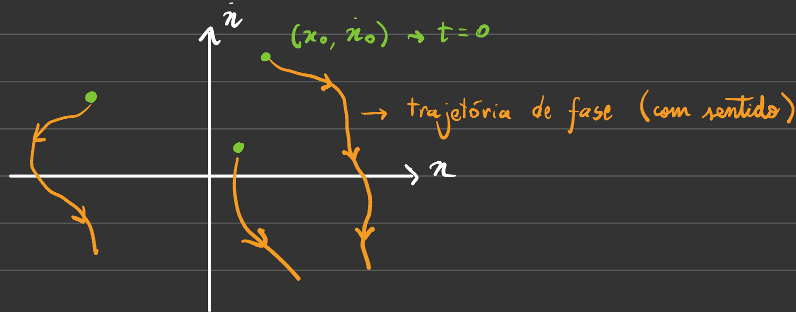
$$\hookrightarrow w_0^2 = \frac{Ag}{V}$$

$$\boxed{\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h_B}{\rho_0 g}}}$$

# Espaço de fase

→ Estado ou configuração do sistema: $(x, \dot{x})$ → espaço de coordenadas bidimensional

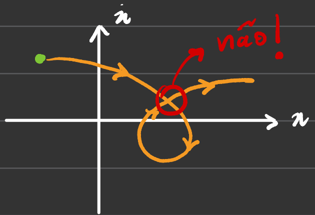
→ Representação bidimensional da dinâmica do sistema




→ O conjunto de todas as trajetórias define o retrato de fase

→ Espaço d-dimensional → espaço de fase 2d-dimensional

* Sistema autônomo: $\vec{F}_{res}$ não depende explicitamente do tempo




trajetórias não se cruzam em um sistema autônomo $\Big\}$ solução da ED é única

* Sistema não autônomo: $(x, \dot{x}, t)$

## * Oscilador linear:

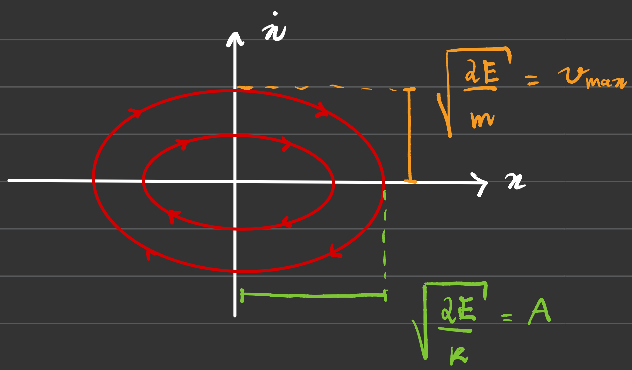
$$A^2 = \frac{2E}{K}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 \longrightarrow \dot{x}^2 = \frac{K}{m} A^2 - \frac{K}{m} x^2$$

elipse!

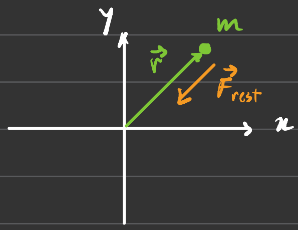
$$\rightarrow \dot{x}^2 + \frac{K}{m} x^2 = \frac{K}{m} A^2 \Rightarrow \frac{m}{KA^2} \dot{x}^2 + \frac{x^2}{A^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{m}{2E} \dot{x}^2 + \frac{Kx^2}{2E} = 1}$$

$$\rightarrow \text{Elipse: } \frac{\dot{x}^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \longrightarrow b = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad a = \sqrt{\frac{2E}{K}}$$



# * Oscilações lineares — duas dimensões

## * Isotrópico:




$$\boxed{\vec{F}_{rest} = -k\vec{r}}$$

↳ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

↳ $k_x = k_y$

ctes de fase

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Em } x: & -kx = m\ddot{x} \\ \text{Em } y: & -ky = m\ddot{y} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha) \\ y(t) = B\cos(\omega_0 t - \beta) \end{array}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

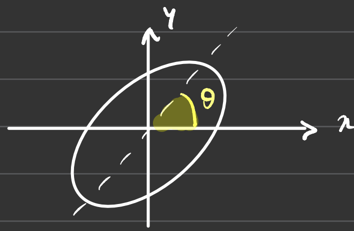
→ Diferença de fase: $\delta = \alpha - \beta$

$$\rightarrow y = B\cos(\omega_0 t - \alpha + \delta) = B\overbrace{\cos(\omega_0 t - \alpha)}^{x/A}\cos\delta - B\overbrace{\operatorname{sen}(\omega_0 t - \alpha)}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}}\operatorname{sen}\delta$$

$$\rightarrow y = \frac{B}{A}x\cos\delta - B\operatorname{sen}\delta\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

$$\rightarrow y^2 + \frac{B^2}{A^2}x^2\cos^2\delta - 2\frac{B}{A}yx\cos\delta = B^2\operatorname{sen}^2\delta\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

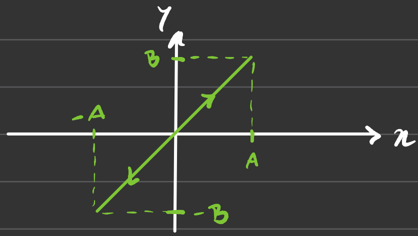
$$\boxed{A^2y^2 - 2AB\cos\delta\, xy + B^2x^2 = A^2B^2\operatorname{sen}^2\delta}$$



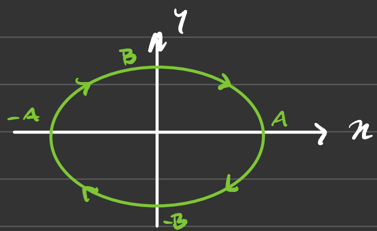
reta

$\delta = 0 : \quad A^2y^2 - 2ABxy + B^2x^2 = 0$

$$(Ay - Bx)^2 = 0 \Rightarrow Ay = Bx \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

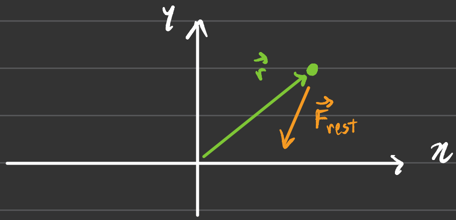



$\delta = \frac{\pi}{2} : \quad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \rightarrow \boxed{\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1}$



* Anisotrópico:

$$\boxed{\begin{aligned} F_{rest,x} &= -k_x x = m\ddot{x} \\ F_{rest,y} &= -k_y y = m\ddot{y} \end{aligned}}$$




$$\begin{cases} x(t) = A\cos(w_x t - \alpha), \\ y(t) = B\cos(w_y t - \beta) \end{cases} \quad \begin{aligned} w_x &= \sqrt{\frac{k_x}{m}} \\ w_y &= \sqrt{\frac{k_y}{m}} \end{aligned} \rightarrow \text{dois períodos}$$

→ Período em x: $\tau_x = \frac{2\pi}{w_x}$ → $x$ e $\dot{x}$ se repetem em $t = n_x \tau_x$ //

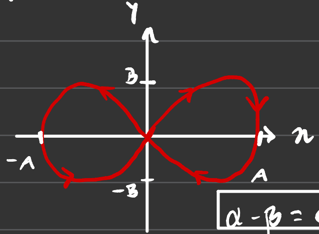
→ Período em y: $\tau_y = \frac{2\pi}{w_y}$ → $y$ e $\dot{y}$ se repetem em $t = n_y \tau_y$ //

→ O estado $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ do sistema se repete se $\boxed{t = n_x \tau_x = n_y \tau_y}$

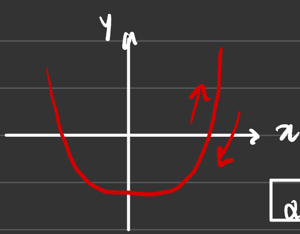
↳ Condição para movimento periódico: $n_x \frac{2\pi}{w_x} = n_y \frac{2\pi}{w_y}$

$$\boxed{\frac{w_x}{w_y} = \frac{n_x}{n_y}}$$

$\boxed{w_y = 2w_x}$ Curvas de Lissajous




$\boxed{\alpha - \beta = 0}$




$\boxed{\alpha - \beta = \pi/2}$

31/05/23

# Oscilações Lineares Amortecidas

≠ força restauradora

* Força de amortecimento: $F_{R,x} = -c_1 v_x = -c_1 \dot{x}, \quad c_1 > 0$
  - Trabalho negativo
  - Dissipa a energia mecânica

→ 2ª lei: $F_{res,x} = \underbrace{-kx}_{\text{elástica}} \underbrace{-c_1\dot{x}}_{\text{amort.}} = m\ddot{x}$

$\therefore$ ED: $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{c_1}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0}$

Definimos: $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}}$ $\boxed{\beta = \dfrac{c_1}{2m}}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \rightarrow r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ \\ r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{array}\right\}$$

→ $\beta^2 < \omega_0^2$: $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, $r_1 \neq r_2$ → Sub-amortecido

→ $\beta^2 = \omega_0^2$: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2$ → Criticamente amortecido

→ $\beta^2 > \omega_0^2$: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ → Sobre-amortecido

# * Subamortecido ($\beta^2 < \omega_0^2$):

→ $\beta^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \beta^2) \equiv -\omega_1^2$

→ $\left.\begin{aligned} r_1 &= -\beta + i\omega_1 \\ r_2 &= -\beta - i\omega_1 \end{aligned}\right\}$ $x(t) = C_1 e^{(-\beta+i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\beta+i\omega_1)t}$

$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_1 t}\right)$

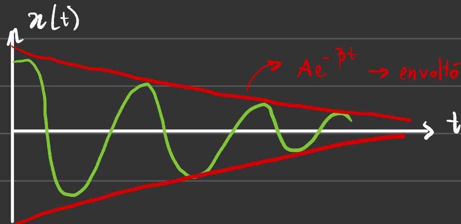
$\boxed{x(t) = A e^{-\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t - \delta)}$ → determinadas pelas c.i.

↳ Oscilação que decai com o tempo

→ $\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t - \delta) + A\omega_1 e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta)$

$t \to \infty$: $x(t) \to 0$

$\dot{x}(t) \to 0$




→ $\delta = -\pi/2 \Rightarrow x(0) = A$

→ $(x, \dot{x})$ nunca se repete → não periódico $\}$ $\boxed{\omega_1 = \frac{2\pi}{2T_1}}$ → intervalo entre dois cruzamentos consec. do eixo $x$

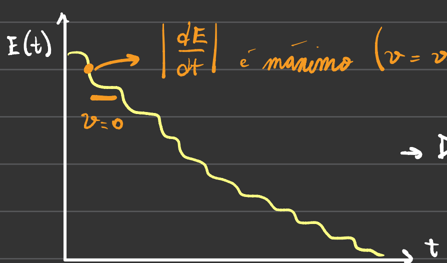
↳ Não podemos calcular $T$ com $\omega_1$

$\omega_1 < \omega_0$

"período"

→ Energia mecânica:

$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{E(t) = \frac{1}{2}A^2 e^{-2\beta t} F_{osc}(t)}$, $\frac{dE}{dt} \leq 0$




→ Derivada $\begin{cases} \text{máxima: partícula passa pela origem} \\ \text{zero: partícula passa pelos extremos} \end{cases}$

→ Espaço de fase:

$\rightarrow \beta^2 \ll \omega_0^2 \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_0$

$\rightarrow x(t) \approx A e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \delta)$

$\dot{x}(t) \approx A \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t - \delta)$

$\rightarrow x^2 = A^2 e^{-2\beta t}\left[1 - \cos^2(\omega_0 t - \delta)\right]$

$x^2 = A^2 e^{-2\beta t}\left[1 - \dfrac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_0^2 e^{-2\beta t}}\right] = A^2 e^{-2\beta t} - \dfrac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} \rightarrow \dfrac{k}{m}$

$\rightarrow x^2 + \dfrac{m}{k}\dot{x}^2 = A^2 e^{-2\beta t}$

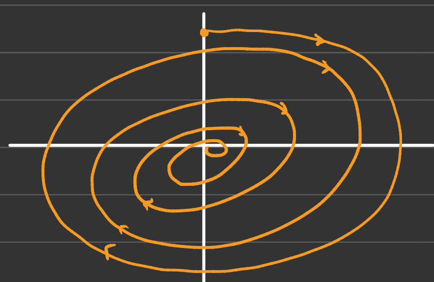
$\rightarrow E_0 = \dfrac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A^2 = \dfrac{2E_0}{k}$

↳ $(E$ p/ $\beta = 0)$

$x^2 + \dfrac{m}{k}\dot{x}^2 = \dfrac{2E_0}{k} e^{-2\beta t}$

$$\boxed{\dfrac{k}{2E_0 e^{-2\beta t}} x^2 + \dfrac{m}{2E_0 e^{-2\beta t}} \dot{x}^2 = 1}$$

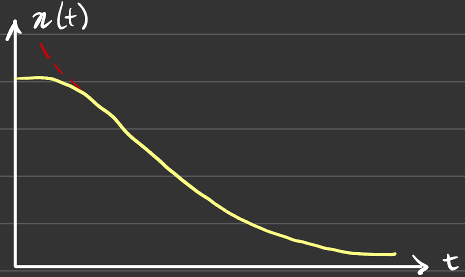
↳ Trajetória: elipse espiralando



* Amortecimento crítico $(\beta^2 = \omega_0^2)$

→ $r_1 = r_2 = -\beta$

→ $\boxed{x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t}}$ → não oscilatório




For a given set of initial conditions, a critically damped oscillator will approach equilibrium at a rate more rapid than that for either an overdamped or an underdamped oscillator.

# * Sobreamortecido ($\beta^2 > \omega_0^2$):

→ $\left.\begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \equiv -\beta+\omega_2 \\ r_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \equiv -\beta-\omega_2 \end{aligned}\right\}$ $\omega_2 \equiv \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} > 0$

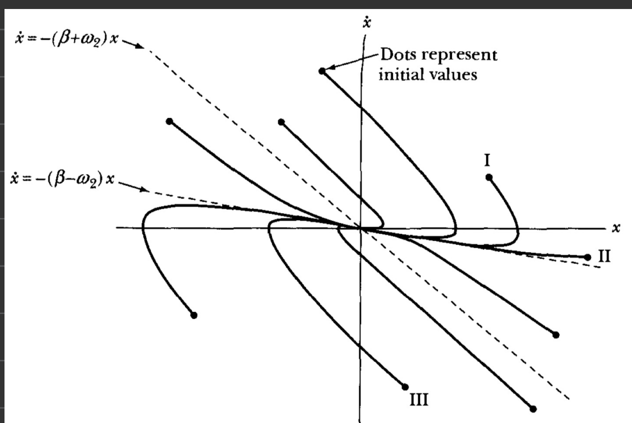
↪ não é frequência angular

→ $\boxed{x(t) = c_1 e^{(-\beta+\omega_2)t} + c_2 e^{-(\beta+\omega_2)t}}$

→ $\omega_2 = \beta\sqrt{1-\dfrac{\omega_0^2}{\beta^2}}$ $\begin{cases} \beta \gg 1: \ \omega_2 \simeq \beta \ \rightarrow \ 0 < \omega_2 < \beta \\ \beta \rightarrow \omega_0: \ \omega_2 \rightarrow 0 \end{cases}$

→ Espaço de fase: $t \gg 1 \rightarrow x(t) \approx c_1 e^{(\omega_2-\beta)t}$

$$\dot{x}(t) = c_1(\omega_2-\beta)e^{(\omega_2-\beta)t} = -\overbrace{(\beta-\omega_2)}^{>0}x$$




→ Caso I: $\dot{x} > 0$, $x > 0$


→ Caso II: $\dot{x} < 0$, $x > 0$


→ Caso III: $\dot{x} < -(\beta+\omega_2)x$, $x > 0$

→ Qual regime perde energia mais rápido?

$$F_{R,x} = -\beta \dot{x}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} k \cdot 2 x \dot{x} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

2ª lei: $m\ddot{x} + c_1 \dot{x} + kx = 0$

$$m\ddot{x} + kx = -c_1 \dot{x}$$

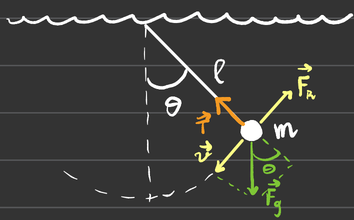
$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -c_1 \dot{x}^2} \leq 0$$

* No regime criticamente amortecido a energia é dissipada mais rapidamente

02/06/23

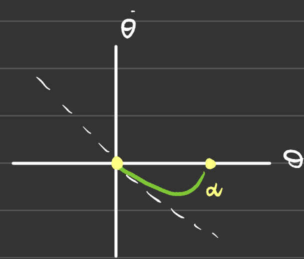
**EXEMPLO 3.3**

Considere um pêndulo de comprimento $\ell$ e um prumo de massa $m$ em sua extremidade (Figura 3.13) se movendo em óleo com $\theta$ decrescente. O prumo pesado efetua pequenas oscilações, porém o óleo retarda o movimento do prumo com força resistiva proporcional à velocidade com $F_{res} = 2m\sqrt{g/\ell}\,(\ell\dot{\theta})$. O prumo é inicialmente puxado para trás em $t = 0$ com $\theta = \alpha$ e $\dot{\theta} = 0$. Determine o deslocamento angular $\theta$ e a velocidade $\dot{\theta}$ como função do tempo. Desenhe o diagrama de fase se $\sqrt{g/\ell} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ e $\alpha = 10^{-2}$ rad.




$\theta > 0,\ \dot{\theta} > 0 \rightarrow$ anti-horário

$\theta < 0,\ \dot{\theta} < 0 \rightarrow$ horário




* Oscilações pequenas
* $t = 0 \rightarrow \theta(0) = \alpha$

$\dot{\theta}(0) = 0$

* Força de amortecimento: $|F_R| = 2m\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\ell\,|\dot{\theta}|$

* Variáveis lineares: $v = \ell\dot{\theta}$, $a = \ell\ddot{\theta}$

→ 2ª lei (Tangencial / angular): $-mg\,\mathrm{sen}\,\theta \underbrace{-\,2m}_{\dot{\theta}<0 \rightarrow >0}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\ell\dot{\theta} = m\ell\ddot{\theta}$

↳ $\ddot{\theta} + 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{g}{\ell}},\ \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

↳ $\theta \ll 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \mathcal{O}(\theta^5) \approx \theta$

↳ $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\beta^2 = \omega_0^2 \rightarrow$ criticamente amortecido

$r = -\beta$

$$\therefore \boxed{\theta(t) = (c_1 + c_2 t)\,e^{-\beta t}}$$

↳ Condições iniciais: $\dot{\theta}(t) = c_2 e^{-\beta t} - (c_1 + c_2 t)\,\beta e^{-\beta t}$ | $\theta(0) = c_1 = \alpha$

$\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow c_2 = \beta c_1 = \alpha\beta$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned}\theta(t) &= \alpha(1+\beta t)\,e^{-\beta t} \\ \dot{\theta}(t) &= -\alpha\beta^2 t\,e^{-\beta t}\end{aligned}}$$

# Força senoidal de impulsão

$$* \text{ 2ª lei: } -kx - c_1\dot{x} + \underbrace{F_0\cos(\omega t)}_{\text{força impulsiva}} = m\ddot{x} \qquad (\text{Amplitude: } F_0 > 0)$$

$\hookrightarrow \beta = \dfrac{c_1}{2m}, \quad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}, \quad A = \dfrac{F_0}{m}$

$\hookrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t) = f(t)$

* Se $x_H(t)$ é solução da homogênea associada, então

$$\ddot{x}_H + 2\beta\dot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0$$

* Supondo que $x_f(t)$ é uma solução da eq. com $f(t)$, então

$$x(t) = x_H(t) + \underline{x_f(t)}$$

$\hookrightarrow$ não depende de constantes arbitrárias

* Sol. particular $x_f(t)$: Proposta $\rightarrow x_f(t) = D\cos(\omega t - \delta)$

$\hookrightarrow \dot{x}_f = -D\omega\,\text{sen}(\omega t - \delta) = -D\omega[\text{sen}(\omega t)\cos\delta - \cos(\omega t)\,\text{sen}\,\delta]$

$\hookrightarrow \ddot{x}_f = -D\omega^2\cos(\omega t - \delta) = -D\omega^2[\cos(\omega t)\cos\delta + \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\delta]$

$\hookrightarrow -D\omega^2[\cos(\omega t)\cos\delta + \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\delta] - 2\beta D\omega[\text{sen}(\omega t)\cos\delta - \cos(\omega t)\,\text{sen}\,\delta] +$
$+ \omega_0^2 D[\cos(\omega t)\cos\delta + \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\delta] = A\cos(\omega t)$

$\Rightarrow [\omega^2 D\cos\delta + 2\beta\omega D\,\text{sen}\,\delta + \omega_0^2 D\cos\delta - A]\cos(\omega t) +$
$+ [-\omega^2 D\,\text{sen}\,\delta - 2\beta\omega D\cos\delta + \omega_0^2 D\,\text{sen}\,\delta] = 0$

$\Rightarrow A = (\omega_0^2 - \omega^2)D\cos\delta + 2\beta\omega D\,\text{sen}\,\delta$

$\cos\delta = \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)\,\text{sen}\,\delta}{2\beta\omega} \longrightarrow \boxed{\tan\delta = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$

$$\rightarrow \cos^2\delta = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\beta^2\omega^2}(1-\cos^2\delta)$$

$$\cos^2\delta\left[1+\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\beta^2\omega^2}\right] = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\beta^2\omega^2} \rightarrow \boxed{\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

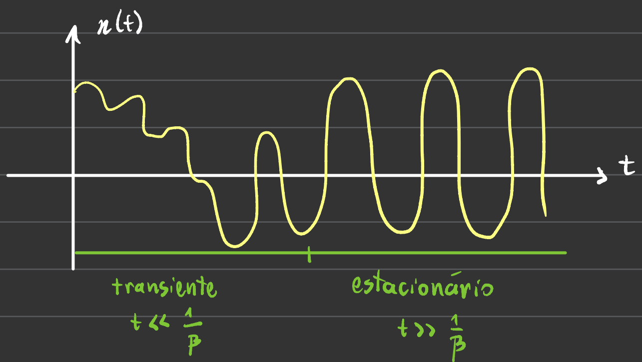
$$\rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\delta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

amplitude da força externa

$$\rightarrow A = D\left[\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\right] \Rightarrow \boxed{D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

$\rightarrow$ Solução geral: $\boxed{x(t) = x_H(t) + D\cos(\omega t-\delta)}$

* Regime estacionário:



05/06/23

# Forças senoidais de impulsão

→ 2ª lei: $-kx - c_1\dot{x} + F_0\cos(\omega t) = m\ddot{x}$

↓

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{c_1}{2m}$, $A = \frac{F_0}{m}$

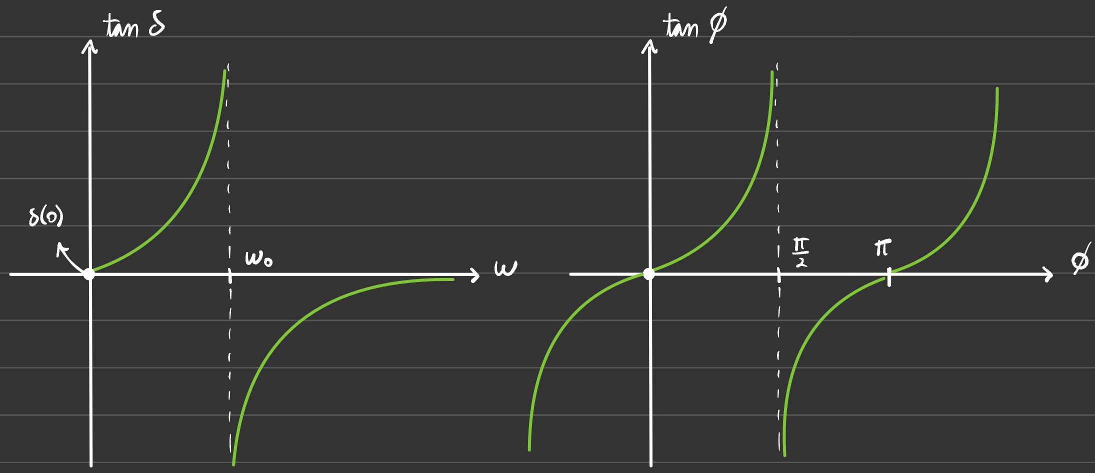
→ Solução geral: $\boxed{x(t) = \underbrace{x_H(t)} + D\cos(\omega t - \delta)}$

↳ solução da eq. homogênea associada $(A=0) \to e^{-\beta t}$

amplitude depende da frequência $\left\{ D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}} \right.$, $\tan\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

→ Regime estacionário: $t \gg 1/\beta$ → não depende das condições iniciais

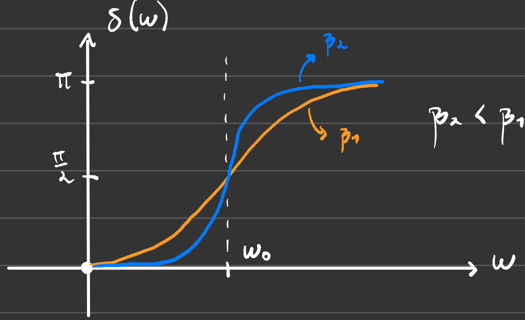
$$x(t) = D\cos(\omega t - \delta)$$




↳ $\omega \to 0$: $\delta(0) = 0$

$\omega \to \omega_0$: $\delta(\omega_0) = \frac{\pi}{2}$

$\omega \to \infty$: $\delta(\infty) = \pi$




$\beta_2 < \beta_1$

$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

→ Energia mecânica: $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{-c_1\dot{x}^2}_{\text{dissipação}} + \underbrace{F(t)\,\dot{x}}_{} \rightarrow \begin{cases} \vec{F} \parallel \vec{v}: + \text{en.} \\ \vec{F} \parallel -\vec{v}: - \text{en.} \end{cases}$$

(regime estacionário)

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow x(t) = D\cos(\omega t - \delta) \\ \dot{x}(t) = -D\omega\,\text{sen}(\omega t - \delta) \end{array}\right\} \quad \frac{dE}{dt} = -c_1 D^2\omega^2\,\text{sen}^2(\omega t - \delta) - D\omega F_0 \underbrace{\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t - \delta)}_{(*)}$$

$$(*) \begin{cases} \rightarrow \delta = 0 \text{ ou } \delta = \pi: \ \pm\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t - \delta) \rightarrow \text{oscila entre } -1 \text{ e } 1 \\ \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \ (\omega = \omega_0): \ \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega t) \rightarrow \text{sempre adiciona energia} \end{cases}$$

velocidade em fase com a força

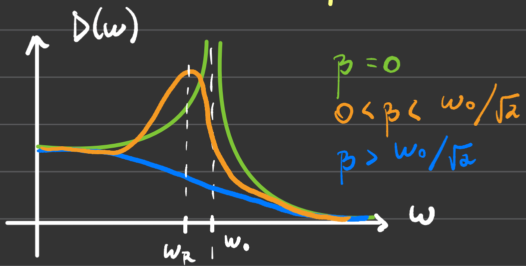
$$\rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow 0: \ D(\omega) \rightarrow A/\omega_0^2 \\ \omega \rightarrow \infty: \ D(\omega) \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow \text{para qual frequência a função tem um máximo?}$$

$$\rightarrow \left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = -\frac{A}{2}\left[(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + 4\beta^2\omega_R^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2(\omega_0^2 - \omega_R^2)(-2\omega_R) + 8\beta^2\omega_R\right] = 0$$

$$\Rightarrow {}^2\cancel{8}\beta^2 \cancel{\omega_R} = \cancel{4}\cancel{\omega_R}(\omega_0^2 - \omega_R^2) \Rightarrow \boxed{\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \neq \omega_0$$

Freq. de ressonância de $D(\omega)$

* $\beta = 0 \rightarrow \omega_R = \omega_0$ (não há dissipação $\Rightarrow D \rightarrow \infty$)
* $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \rightarrow$ sem ressonância
* $0 < \beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \rightarrow$ ressonância com dissipação




→ Energia média:

$$\begin{cases} U(t) = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K D^2 \cos^2(\omega t - \delta) \\ T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m D^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta) \end{cases}$$

$$\rightarrow \langle U \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{t'}^{t'+\tau} U(t)\,dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad t' \gg \frac{1}{\beta}$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} K D^2 \frac{1}{\tau} \int_{t'}^{t'+\tau} \cos^2(\omega t - \delta)\,dt = \frac{1}{2} K D^2 \frac{1}{\tau} \left[ \frac{-2\delta + 2\omega t + \operatorname{sen}(2\omega t - 2\delta)}{4\omega} \right]_{t'}^{t'+\tau}$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} K D^2 \Rightarrow \langle U \rangle \text{ é máximo em } \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\rightarrow \langle T\rangle = \frac{1}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} T(t)\,dt = \frac{1}{2} m D^2 \omega^2 \frac{1}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta)\,dt$$

$$\langle T\rangle = \frac{1}{4} m D^2 \omega^2$$

$$\hookrightarrow \langle T\rangle = \frac{1}{4} m A^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$\hookrightarrow \left.\frac{d\langle T\rangle}{dt}\right|_{\omega_T} = \frac{1}{4} m A^2 \underbrace{\left[\frac{2\omega_T}{(\omega_0^2-\omega_T^2)^2+4\beta^2\omega_T^2} - \frac{\omega_T^2\left[2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega_T)+8\beta^2\omega_T\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega_T^2)^2+4\beta^2\omega_T^2\right]^2}\right]}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2-\omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2(\omega_0^2-\omega_T^2) = 0$$

$\therefore$ $\omega_T = \omega_0 \rightarrow \langle T\rangle$ é máxima

* Duas frequências de ressonância
$$\begin{cases} \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} & \rightarrow \text{energia potencial} \\ \omega_T = \omega_0 & \rightarrow \text{energia cinética} \end{cases}$$

07/06/23

→ Variação de energia em oscilações forçadas

$$\frac{dE}{dt} = -\underbrace{2m\beta}^{c_1}\dot{x}^2 + \dot{x}F(t), \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad F(t) = F_0\cos(\omega t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = D\cos(\omega t - \delta) \\ \dot{x}(t) = -D\omega\,\text{sen}(\omega t - \delta) \end{array}\right\} \quad t \gg \frac{1}{\beta}$$

$$\rightarrow \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -2m\beta D^2\omega^2 \underbrace{\frac{1}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} \text{sen}^2(\omega t - \delta)\,dt}_{1/2} - D\omega F_0 \frac{1}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} \cos(\omega t)\,\overbrace{\text{sen}(\omega t - \delta)}^{\text{sen}(\omega t)\cos\delta - \cos(\omega t)\,\text{sen}\,\delta}\,dt$$

$$= -m\beta D^2\omega^2 + \frac{1}{2}D\omega F_0\,\text{sen}\,\delta \quad = 0$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\delta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = 2\beta\omega\frac{D}{A}, \quad A = \frac{F_0}{m}$$

$$\therefore \boxed{\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 0} \rightarrow \text{amplitude não estoura nem vai a zero}$$

# Força de impulsão arbitrária e periódica

→ $\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$, $F(t+\tau) = F(t)$

→ $$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)\right)$$

↳ $$a_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)dt, \quad b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)dt$$

→ Hipóteses adicionais: $\begin{cases} F(t) = F(-t) \Rightarrow b_n = 0 \\ \langle F(t)\rangle = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)$

→ Definimos o operador $\hat{L} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \Rightarrow \hat{L}\,x(t) = F(t)$

→ Sejam $\begin{cases} x_1(t) \to \text{solução para } F(t) = g_1(t) \Rightarrow \hat{L}\,x_1(t) = g_1(t) \\ x_2(t) \to \quad '' \quad '' \quad F(t) = g_2(t) \Rightarrow \hat{L}\,x_2(t) = g_2(t) \end{cases}$

Logo, $\hat{L}\left(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\right) = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t)$

→ Proposta de solução: $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t)$, onde $\hat{L}\,x_n(t) = g_n(t)$

↳ $\hat{L}\,x_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{L}\,x_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(t)$

→ Se $g_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)$, então $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t)$ é solução da ED, onde

$$\boxed{\hat{L}\,x_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)}$$

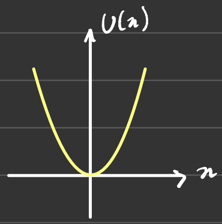
$$\rightarrow x_n(t) = \underbrace{x_H(t)}_{\text{independe de } n} + D_n \cos(\omega_n t - \delta_n), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{\tau}$$

→ Regime estacionário:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\omega_n t - \delta_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\beta^2 \omega_n^2}}} \rightarrow D_n = \frac{1}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

# Oscilações não lineares

Linear:




$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$F(x) = -kx$$

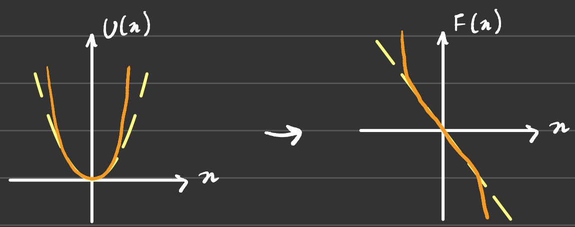
Não linear: suposições simples para manter a simetria:

↳ $U(x) = U(-x)$ → força restauradora

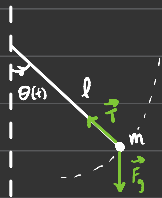
↳ $U(x) = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{4} \varepsilon x^4$, $\varepsilon \ll 1$ ⇒ $F(x) = -kx + \varepsilon x^3$

* Flexível: $\varepsilon > 0$


* Rígido: $\varepsilon < 0$



## * Pêndulo plano:




$\tau \rightarrow$ como depende da amplitude?

* Haste rígida ($m_H \ll m$) → permite ângulos grandes

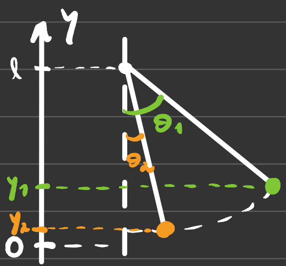
2ª lei: $-mg \operatorname{sen}\theta = m l \ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \omega = \sqrt{g/l}$

→ Energia mecânica:

Cinética: $T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2}$

Potencial gravitacional: $\Delta U = U_2(\theta_2) - U_1(\theta_1) = mg y_2 - mg y_1$

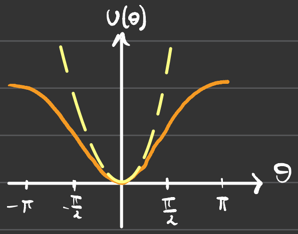


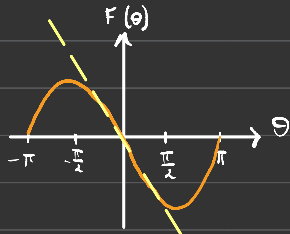

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = l - l\cos\theta_2 \\ y_1 = l - l\cos\theta_1 \end{array}\right\} \quad \Delta U = mgl(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

→ $\theta_2 = 0 \Rightarrow U_2 - U_1 = mgl(\cos\theta_1 - 1)$

→ Escolha: $\theta_2 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$

$\therefore \boxed{U(\theta) = mgl(1-\cos\theta)} \Rightarrow \boxed{F_{T,g}(\theta) = -mg \operatorname{sen}\theta}$



→ Suponha que o pêndulo oscila entre $[-\theta_0, \theta_0]$, $|\theta_0| < \pi$

↳ $\theta_0$ : amplitude

→ $$\boxed{E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)}$$

→ Quando $\theta(t) = \theta_0$ → $\dot{\theta} = 0$ ⇒ $E = mg\ell(1-\cos\theta_0)$ → cte no tempo (conservativo)

$$\cancel{m}g\ell(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\cancel{m}\ell^2\dot{\theta}^2 + \cancel{m}g\ell(1-\cos\theta)$$

$\times \frac{2}{\ell^2}$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0), \quad \omega_0^2 = g/\ell$$

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{2}\,\omega_0\left[\cos\theta - \cos\theta_0\right]^{\frac{1}{2}}$$

→ $\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$ ⇒ $\frac{d\theta}{dt} = \pm 2\omega_0\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

→ $$dt = \pm\frac{1}{2\omega_0}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

→ $$\frac{\tau}{4} = \int_0^{\frac{\tau}{4}} dt = -\frac{1}{2\omega_0}\int_{\theta_0}^{0}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$|\theta_0| < \pi$ por definição

$$\boxed{\tau = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\theta_0}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\theta}$$

Não linearidade introduz dependência do período com a amplitude

12/06/23

## * Pêndulo plano (continuação):

Período: $$\tau = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\theta_0}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

Energia mecânica: $$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

$\rightarrow K = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

$$\rightarrow z = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{K} \Rightarrow dz = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2K} d\theta = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}}{2K} d\theta = \frac{\sqrt{1-K^2z^2}}{2K} d\theta$$

$$\rightarrow \tau = \frac{2}{\omega_0}\int_0^1 \left[K^2 - K^2z^2\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{2K\,dz}{\sqrt{1-K^2z^2}} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{4}{\omega_0}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2z^2}}}$$

## * Teoria de perturbação:

$\rightarrow K = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, $|K| < 1 \rightarrow -1 < K < 1$

$\rightarrow f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$

$\hookrightarrow x = K^2z^2 \Rightarrow (1-K^2z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}K^2z^2 + \frac{3}{8}K^4z^4 + O(K^6)$

$$\rightarrow \tau = \frac{4}{\omega_0}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\left[1 + \frac{K^2z^2}{2} + \frac{3}{8}K^4z^4 + O(K^6)\right]$$

→ Truncando após o termo quadrático:

$$\tau \approx \frac{4}{\omega_0}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{2k^2}{\omega_0}\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{4}{\omega_0}\,\text{arcsen}(z)\Big|_0^1 + \frac{2k^2}{\omega_0}\cdot\frac{1}{2}\Big[\text{arcsen}(z) - z\sqrt{1-z^2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{4}{\omega_0}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2k^2}{\omega_0}\cdot\frac{\pi}{4}$$

Período para pequenas oscil. (MHS)

$$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{\pi k^2}{2\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{\pi\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{2\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{\pi\theta_0^2}{8\omega_0}$$

$$\therefore \boxed{\tau \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}$$

não pode depender de potências ímpares (invariante frente ao sinal/sentido da amplitude)

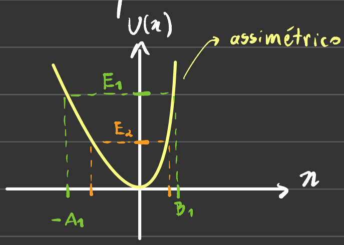
* Retrato de fase: pêndulo plano

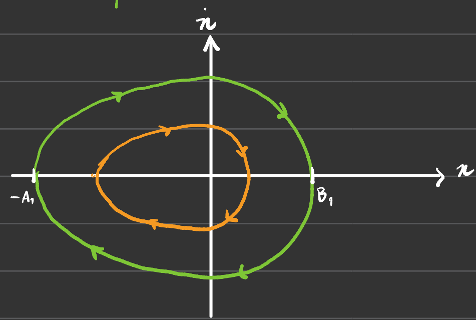
→ $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ → conservativo

↳ $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x))$ → $E \geq U(x)$

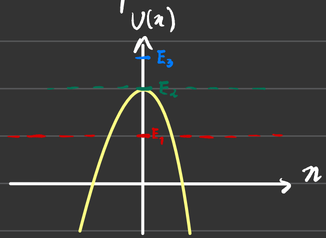
↳ $E = U(x)$: ponto de retorno

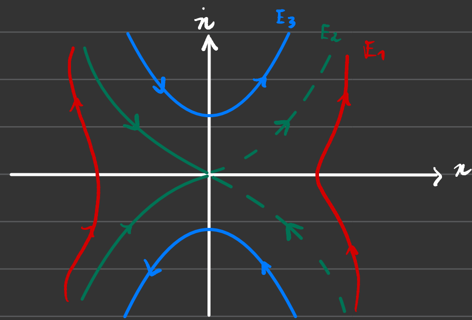
→ Ponto de equilíbrio estável:



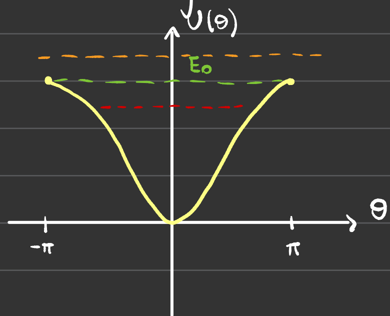



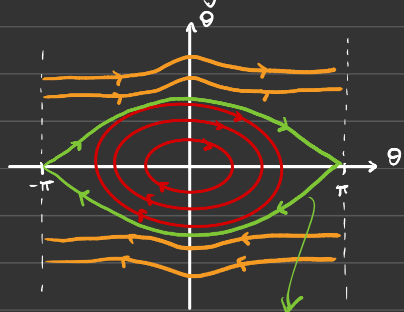
→ Ponto de equilíbrio instável:




→ $U(\theta) = mgl\,(1-\cos\theta)$, $U(\theta = \pm\pi) = 2mgl \equiv E_0$




elipses para $|\theta| \ll 1$

↑

$E < E_0$: curvas fechadas

$E > E_0$: revolução completa

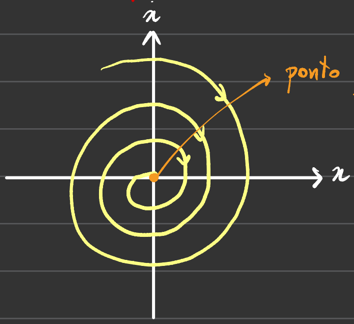
$E = E_0$: pêndulo chega em $\theta = |\pi|$ com $\dot{\theta} = 0$

separatriz → $\dot{\theta} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

↳ extrem. instável

↳ tempo infinito

## * Sistemas dissipativos e não lineares




ponto fixo → $\boxed{\text{atrator}}$

$t \to \infty$: $\dot{x} = x = 0$

### → Oscilador de van der Pol

→ Coeficiente de dissipação depende de $x$ e de $\dot{x}$

→ $\ddot{x} + 2\beta(x,\dot{x})\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

↳ $F_R = -\beta(x,\dot{x})\,\dot{x}$

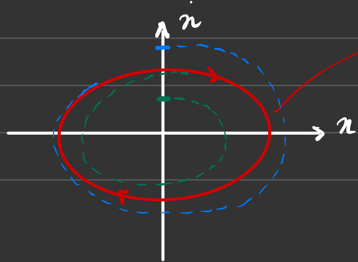
↳ $\beta(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{B^2} - \gamma^2\right)$, $A, B, \gamma > 0$

↳ $\beta > 0$: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{B^2} > \gamma^2$ → espirala para "dentro"

↳ $\beta < 0$: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{B^2} < \gamma^2$ → espirala para "fora"

↳ $\beta = 0$: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{B^2} = \gamma^2$ → não dissipa

apenas sist. não lineares




Ciclo limite: atrator não é ponto fixo

14/06/23

# Oscilador de Duffing

* Não linearidade → força restauradora

→ $U(x) = \frac{1}{2} k_0 x^2 + \frac{1}{4} k_0 \varepsilon x^4$, $k_0 > 0$, $\varepsilon > 0$

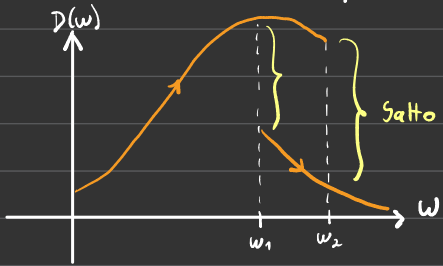
→ $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k_0 x - k_0 \varepsilon x^3$

↳ $F(x) = -k(x)x$, $k(x) = k_0(1+\varepsilon x^2)$

* Amortecimento + forçador periódico

→ 2ª lei: $m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_0 x + k_0 \varepsilon x^3 = F_0 \cos(\omega t)$

→ $\varepsilon \ll 1$: solução oscilatória com amplitude $D(\omega)$



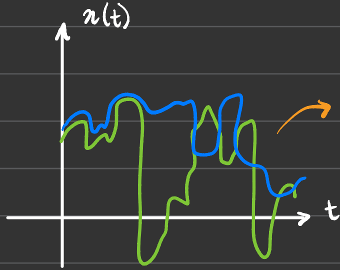

Para tempos longos, condições iniciais importam
↓
amplitude depende da história do sistema

1. Coexistência de soluções → não linearidade
2. Saltos
3. Histerese

# Caos

→ Movimento irregular e imprevisível

→ Edward Lorenz, 1963



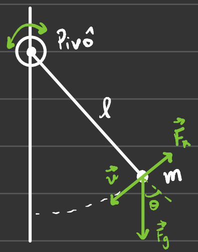

roundoff error

→ Imprevisível ≠ aleatório
↳ Grande sensibilidade às condições iniciais → "efeito borboleta"

* Teorema do sombreamento: ∃ condição inicial real arbitrariamente próxima da condição usada que corresponde à mesma trajetória calculada

→ Reação de Belousov - Zhabotinski
→ Convecção de Rayleigh - Bénard
→ Circuitos elétricos não lineares

# Pêndulo forçado




$\theta(t) \rightarrow$ posição angular

$F_{ext} \rightarrow$ forçador externo

↳ $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$

→ 2ª lei: $-mg \operatorname{sen}\theta - c_1\dot{\theta} + F_0\cos(\omega_0 t) = ml\ddot{\theta}$

↳ $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{c_1}{ml}\dfrac{d\theta}{dt} - \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta + \dfrac{F_0}{ml}\cos(\omega_D t)$, $\quad \omega_0^2 \equiv \dfrac{g}{l}$

↳ Tempo adimensional: $t' \equiv t\omega_0$

↳ $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt'}\dfrac{dt'}{dt} = \omega_0 \dfrac{d\theta}{dt'}$

↳ $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) = \omega_0 \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt'}\right) = \omega_0 \dfrac{d^2\theta}{dt'^2}\dfrac{dt'}{dt} = \omega_0^2 \dfrac{d^2\theta}{dt'^2}$

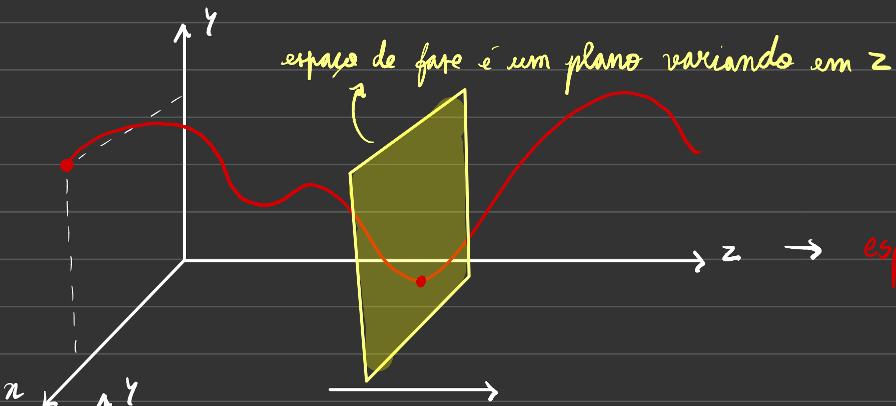
↳ $\omega_0^2 \dfrac{d^2\theta}{dt'^2} = \dfrac{-c_1}{ml} \cdot \omega_0 \dfrac{d\theta}{dt'} - \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta + \dfrac{F_0}{ml}\cos\left(\dfrac{\omega_D}{\omega_0} t'\right)$

↳ Definimos: $\theta \equiv x$, $c \equiv \dfrac{c_1}{ml\omega_0}$, $F \equiv \dfrac{F_0}{ml\omega_0}$, $\omega \equiv \dfrac{\omega_D}{\omega_0}$

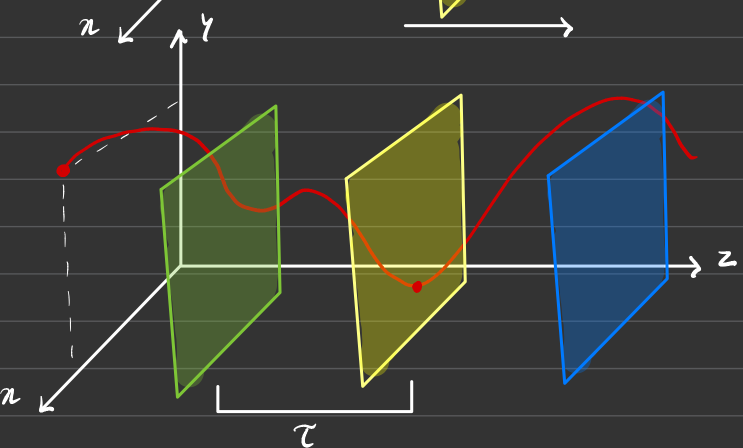
$\therefore \dfrac{d^2x}{dt'^2} = -c\dfrac{dx}{dt'} - \operatorname{sen} x + F\cos(\omega t')$

↳ Reescrevemos em um sistema de EDOs:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = -c\frac{dx}{dt'} - \operatorname{sen} x + F\cos(\omega t') \qquad \begin{cases} y = \dfrac{dx}{dt'} \to \text{velocidade angular} \\ \dfrac{dy}{dt'} = -cy - \operatorname{sen} x + F\cos(z) \\ z = \omega t' \to \text{tempo} \end{cases}$$




→ espaço de fases




→ Seção de Poincaré

↓

intervalos discretos e periódicos

* Dimensão do atrator no regime caótico: $2 < D < 3$ → fractal

↳ "Atratores estranhos"

16/06/23

# Mapas discretos

→ Tempo discreto: $n = 0, 1, 2, \dots$

→ $x_n \in \mathbb{R}$

→ Motivação:

1. Função que leva um ponto de uma seção de Poincaré a outra
2. Integração numérica: tempo é discretizado
3. Medidas físicas: feitas a tempo discreto

* Mapa discreto em uma dimensão: $\boxed{x_{n+1} = f(x_n)}$

## Mapa logístico

→ $f(x) = \alpha x(1-x)$, $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_{n+1} = \alpha x_n(1-x_n)}$

→ Condição inicial: $x_0$

↳ $x_1 = \alpha x_0 (1-x_0)$

↳ $x_2 = \alpha x_1 (1-x_1)$

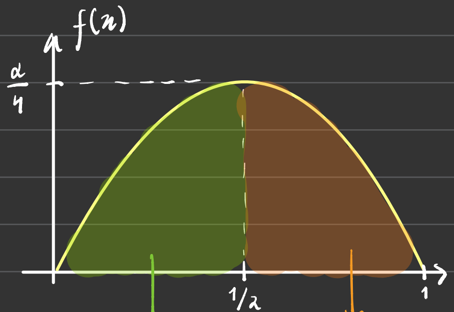
$\vdots$

→ Robert May: crescimento populacional

↳ $x_n \in [0,1]$ → Nº indivíduos na população / Nº máximo de indivíduos

↳ $\alpha > 0$ → "limitação" do meio (seca, chuva etc.)

↳ $\alpha \in (0,4]$ ⇒ $x_n \in [0,1]$




$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} \to \frac{df}{dx}$$

$\frac{df}{dx} > 0 \to$ população cresce $\qquad \frac{df}{dx} < 0 \to$ população diminui

* $\alpha < 3$: ponto fixo ($x_{n+1} = x_n$)

* $\alpha > 3$: atrator de período 2 ($x_{n+2} = x_n$)

$\alpha > \alpha_* = 3{,}5699\ldots \to$ Caos

→ Atrator de período N: $x_{n+N} = x_n$

→ Diagrama de bifurcação: $x_n \times \alpha$

↳ Todos os valores possíveis para $x$ em função de $\alpha$

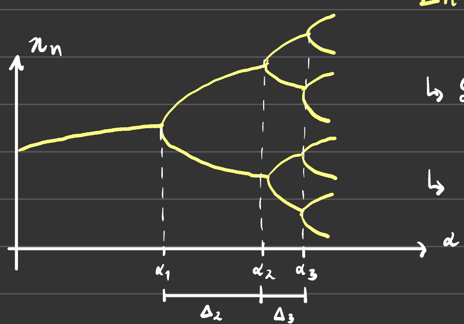
↳ "Rota para o caos": duplicação de período

* Mitchel Feigenbaum:

pontos de bifurcação

$$\Delta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}, \quad \delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

função crescente de $n$




↳ Distâncias entre bifurcações diminui

↳ $n \to \infty \Rightarrow \Delta_\infty = 0$ e $\boxed{\delta_\infty = 4{,}6692\ldots}$

Constante de Feigenbaum (universal)

→ 1982, Libchaber: convecção de fluidos aquecidos → resultado experimental

→ Duas trajetórias discretas
↳ Duas condições iniciais diferentes $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ y_{n+1} = f(y_n) \end{cases} \rightarrow |y_0 - x_0| = \varepsilon > 0$

→ Distância entre trajetórias: $d_n = |y_n - x_n|$, $d_0 = \varepsilon$

→ Hipótese: $d_{n+1} = \gamma d_n$

↳ $d_1 = \gamma d_0 = \gamma \varepsilon$

↳ $d_2 = \gamma d_1 = \gamma^2 \varepsilon$

⋮

↳ $d_n = \gamma^n \varepsilon = \varepsilon e^{n \ln \gamma}$

$$\boxed{d_n = \varepsilon e^{n\lambda}}$$

↳ $\lambda \equiv \ln \gamma$: Expoente de Lyapunov

* $\lambda > 0$: $d_n$ cresce → caos
* $\lambda < 0$: $d_n \to 0$ → sem caos

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_n)}{dx} \right|_{x = x_i}}$$

→ Mapa logístico: $f(x) = \alpha x (1 - x)$
$f'(x) = \alpha (1 - 2x)$