CÁLCULO DE INVERSOS MULTIPLICATIVOS

Com a construção:

		a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	$a_{n+1} = r_{n-1}$
D	r	r_0	r_1	r_2	...	r_{n-1}	$r_n = 1$	$r_{n+1} = 0$

Analisemos n par e n ímpar separadamente.

Para n par, o inverso multiplicativo é da forma (para n = 6):

$$r^{-1} = a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6 + a_0a_1a_2a_3a_4 + \cdots + a_0a_1a_2 + \cdots + a_0 + a_2 + a_4 + a_6$$

Vamos dividir tal expressão em agrupamentos:

Agrupamento 1: $a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6$

Agrupamento 2: $a_0a_1a_2a_3a_4$

Agrupamento 3: $a_0a_1a_2$

Agrupamento 4: $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$

Vamos especificar alguns nomes para facilitar a exposição do método; podemos, depois, altera-los: cada agrupamento possui termos e cada termo possui elementos.

Dado um n, seja $N_{ag}(n)$ o número de agrupamentos, onde $N_{ag}(n) = \frac{n+2}{2}$.

Dado um m, que indica um agrupamento, seja $E_t(m)$ o número de elementos dos termos de cada agrupamento, onde $E_t(m,n) = n - 2m + 3$.

O número de termos por agrupamento - S_m - está relacionado à soma sucessiva dos números naturais. Podemos nos apoiar no trabalho desenvolvido anteriormente e escrever:

$$S_m = \frac{1}{\gamma!}\sum_{i=1}^{\gamma} a_i m^i$$

Onde $\gamma = E_t(m,n)$ e a_i é dado pelo triângulo gama.

Os agrupamentos que aparecerão no cálculo do inverso multiplicativo são:

$$g_m = \sum_{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2k} \leq \alpha_{2k+1} < \cdots \leq \alpha_{E_t(m,n)} \leq \frac{n}{2}} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_{2\alpha_{E_t(m,n)}}$$

O inverso multiplicativo para n par fica:

$$r^{-1} = D - \sum_{m=1}^{N_{ag}(n)} g_m = D - \sum_{m=1}^{N_{ag}(n)} \sum_{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2k} \leq \alpha_{2k+1} < \cdots \leq \alpha_{E_t(m,n)} \leq \frac{n}{2}} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_{2\alpha_{E_t(m,n)}}$$

Para n ímpar, o inverso multiplicativo é da forma (para n = 5):

$$r^{-1} = a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_0 a_1 a_2 a_3 + \cdots + a_0 a_1 + \cdots + 1$$

Vamos dividir tal expressão em agrupamentos:

Agrupamento 1: $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

Agrupamento 2: $a_0 a_1 a_2 a_3$

Agrupamento 3: $a_0 a_1$

Dado um n, seja $N_{ag}(n)$ o número de agrupamentos, onde $N_{ag}(n) = \frac{n+1}{2}$.

Dado um m, que indica um agrupamento, seja $E_t(m,n)$ o número de elementos dos termos de cada agrupamento, onde $E_t(m,n) = n - 2m + 3$.

O número de termos por agrupamento - S_m - está relacionado à soma sucessiva dos números naturais. Podemos nos apoiar no trabalho desenvolvido anteriormente e escrever:

$$S_m = \frac{1}{\gamma!} \sum_{i=1}^{\gamma} a_i m^i$$

Os agrupamentos que aparecerão no cálculo do inverso multiplicativo são:

$$g_m = \sum_{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2k} \leq \alpha_{2k+1} < \cdots \leq 2\alpha_{E_t(m,n)} - 1 \leq \frac{n+1}{2}} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_{2\alpha_{E_t(m,n)}}$$

O inverso multiplicativo para n ímpar fica:

$$r^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{N_{ag}(n)} g_m = 1 +$$

$$\sum_{m=1}^{N_{ag}(n)} \sum_{0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2k} \le \alpha_{2k+1} < \cdots \le 2\alpha_{E_t(m,n)} - 1 \le \frac{n+1}{2}} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_{2\alpha_{E_t(m,n)}}$$

Exemplo. Exemplifiquemos com dois casos já conhecidos: a_4 e a_3.

Para a_4:

O número de agrupamentos é $N_{ag}(4) = \frac{4+2}{2} = 3$.

O número de elementos dos termos do agrupamento 1 é:

$$\gamma = E_t(1,4) = 4 - 2x1 + 3 = 5$$

O número de elementos dos termos do agrupamento 2 é:

$$\gamma = E_t(2,4) = 4 - 2x2 + 3 = 3$$

O número de elementos dos termos do agrupamento 3 é:

$$\gamma = E_t(3,4) = 4 - 2x3 + 3 = 1$$

O primeiro agrupamento fica:

$$g_1 = \sum_{0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \alpha_3 < \alpha_4 \le \alpha_5 < \alpha_6 \le \alpha_7 \le 3} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} a_{2\alpha_4 - 1} a_{2\alpha_5} a_{2\alpha_6 - 1} a_{2\alpha_7}$$

$$= a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$$

Definindo S_m para o primeiro agrupamento:

$$S_1 = \frac{1}{5!} \sum_{i=1}^{5} a_i (1)^i = \frac{1}{120} [24 \cdot 1 + 50 \cdot 1^2 + 35 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^4 + 1 \cdot 1^5] = 1$$

De fato, chegamos ao resultado esperado.

O segundo agrupamento fica:

$$g_2 = \sum_{0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \alpha_3 \le 3} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} = a_0 a_1 a_2 + a_0 a_1 a_4 + a_0 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4$$

Definindo S_m para o segundo agrupamento:

$$S_2 = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{3} a_i(2)^i = \frac{1}{6}[2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3] = 4$$

De fato, chegamos ao resultado esperado.

O terceiro agrupamento fica:

$$g_3 = \sum_{0 \leq \alpha_1 \leq 2} a_{2\alpha_1} = a_0 + a_2 + a_4$$

Definindo S_m para o terceiro agrupamento:

$$S_3 = \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{1} a_i(3)^i = \frac{1}{1}[1 \cdot 3] = 3$$

De fato, chegamos ao resultado esperado.

Para a_3:

O número de agrupamentos é $N_{ag}(3) = \frac{3+1}{2} = 2$.

O número de elementos dos termos do agrupamento 1 é:

$$\gamma = E_t(1,3) = 3 - 2x1 + 3 = 4$$

O número de elementos dos termos do agrupamento 2 é:

$$\gamma = E_t(2,3) = 3 - 2x2 + 3 = 2$$

O primeiro agrupamento fica:

$$g_1 = \sum_{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4 \leq 2} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} a_{2\alpha_3} a_{2\alpha_4 - 1} = a_0 a_1 a_2 a_3$$

Definindo S_m para o primeiro agrupamento:

$$S_1 = \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{4} a_i(1)^i = \frac{1}{24}[6 \cdot 1 + 11 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1^3 + 1 \cdot 1^4] = 1$$

De fato, chegamos ao resultado esperado.

O segundo agrupamento fica:

$$g_2 = \sum_{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2} a_{2\alpha_1} a_{2\alpha_2 - 1} = a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3$$

Definindo S_m para o segundo agrupamento:

$$S_2 = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{2} a_i(2)^i = \frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2] = 3$$

De fato, chegamos ao resultado esperado.

Para um trabalho manual, o conhecimento do número de termos por agrupamento é importante, pois podemos verificar se varremos todas as possibilidades do somatório e, além disso, completa a estrutura do trabalho: conhecemos o número de agrupamento, o número de termos e o número de elementos.

Note que $E_t(m, n)$ nos dá em qual soma sucessiva dos naturais devemos trabalhar (primeira soma, segunda soma, terceira soma, etc.) m nos dá o termo dessa soma.

Para termos com um mesmo número de elementos, o trabalho é sempre feito na mesma soma sucessiva dos naturais, isto é, o gama é igual para todos esses termos.