

O Problema das Cargas

Fernando Cézar Gonçalves Manso

Vinícius Guimarães de Oliveira

Wellington José Corrêa

Junho 2020

No presente manuscrito será analisado um sistema formado por dois corpos esféricos de raio r_0 , uniformemente eletrizados e cujos centros em $t = 0$ estão separados por uma distância d_0 . Para o estudo do sistema, serão utilizados princípios da mecânica newtoniana, do eletromagnetismo clássico e da teoria de equações diferenciais.

1 Considerações físicas sobre o sistema estudado

1.1 O Conceito de Carga Elétrica

A carga elétrica consiste numa propriedade dos corpos; boa parte dos livros-textos de física que tratam de eletromagnetismo, todavia, tomam “carga elétrica” e “corpo eletrizado” como sinônimos. Apesar da difusão de tal nomenclatura – que também será utilizada no decorrer deste trabalho –, vale salientar esse pequeno hiato entre termo e conceito.

1.2 Campo magnético gerado por cargas elétricas em movimento

A corrente elétrica é a grandeza física surgida a partir do movimento ordenado de cargas elétricas. Matematicamente, pode-se dizer que:

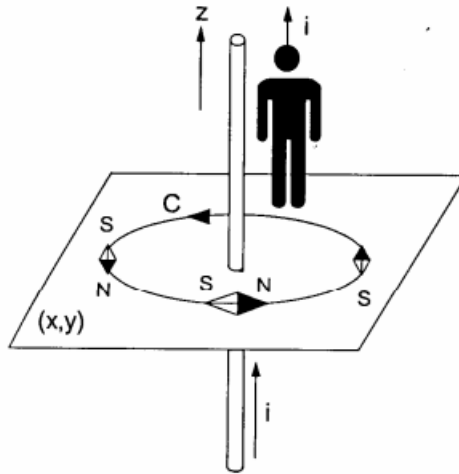
$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Hans Christian Oersted descobriu, em 1819, que correntes elétricas geravam campos magnéticos. Ampère, um ano depois, descobriu a relação entre essas grandezas:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = ki \quad (2)$$

Ou seja, as correntes elétricas dão origem a campos magnéticos contidos num plano perpendicular ao fio pelo qual passam as cargas, tal como é mostrado na figura abaixo:

Figura 1 - **Campo magnético gerado por corrente elétrica**



Fonte: Moysés, eletromagnetismo [1]

Ao considerar o movimento e a colisão das cargas elétricas do problema proposto, a influência mútua do campo magnético por elas gerado será desprezada.

1.3 A radiação eletromagnética das cargas e a força de radiação

A partir das equações de Maxwell (escritas abaixo na sua forma diferencial):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

É possível deduzir que cargas elétricas aceleradas emitem radiação e sofrem uma força de recoil, chamada força de radiação, cujo valor, para o caso não relativístico, é dado pela fórmula de Abraham-Lorentz:

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q}{6\pi c} \dot{\vec{a}} \quad (7)$$

Tal força será desprezada na análise do problema.

1.4 O tratamento pontual de corpos esféricos uniformemente carregados

O sistema proposto seria inteiramente analisável se as dimensões dos corpos carregados fossem desprezadas, todavia, a fim de obter melhor acordo com a realidade e estabelecer um critério de parada para a análise do sistema, convém considerar o raio dos corpos. Tal consideração não dificulta em nada o estudo do problema, visto que é possível "reduzir" a esfera a uma carga puntiforme, tal como será mostrado abaixo.

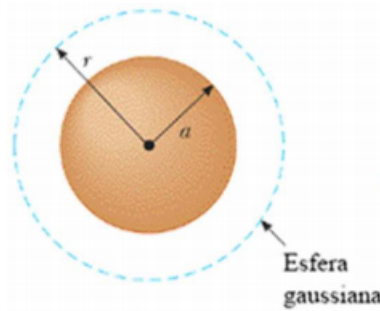
As equações de Maxwell podem ser escritas de duas maneiras distintas: diferencial e integral. A expressão (3) tem sua equivalente na forma integral:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (8)$$

Onde S é uma superfície tridimensional fechada - comumente chamada de superfície gaussiana - e q_{int} é a carga elétrica interior à gaussiana. Se há

simetria no corpo analisado (esférica, cilíndrica, etc.), o campo elétrico por ele gerado é facilmente calculado pela (8). Com efeito, dada uma esfera de raio a , uniformemente eletrizada, e tomando uma gaussiana esférica de raio r , tal como na figura:

Figura 2 - **Esfera uniformemente eletrizada e gaussiana de raio r .**



Fonte: Aula 02 - Eletromagnetismo [3].

Essa é uma situação de simetria esférica, então o campo elétrico é idêntico em todos os pontos da gaussiana. A partir de (8), pode-se escrever:

$$\|\vec{E}\|(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (9)$$

Isolando \vec{E} e substituindo na definição de campo elétrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, vem:

$$\|\vec{F}\| = \frac{qq_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (10)$$

Esta equação é exatamente a Lei de Coulomb, ou seja, a esfera uniformemente carregada pode ser “substituída” por uma carga puntiforme localizada em seu centro.

2 Modelagem do sistema físico

Sejam A e B dois corpos idênticos, perfeitamente esféricos com raio r_0 e uniformemente carregados com carga elétrica q . Despreza-se o atrito e o rolamento da esfera. Considerando um eixo com origem em A e orientado

no sentido de B, no instante $t = 0$, os centros das esferas estão separados por uma distância d_0 tal que $d_0 \gg r_0$. Note-se que a escolha do corpo a ser analisado é indiferente, visto que o sistema é inteiramente simétrico, isto é, os resultados diferirão a menos de um sinal.

Conforme visto na primeira parte do trabalho, os corpos se atraem tais como duas cargas elétricas; pode-se, portanto, utilizar a Lei de Coulomb. A força elétrica no corpo A devida ao corpo B é:

$$F_{A(B)} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d_0 - 2x(t))^2} \quad (11)$$

Por sua vez, a Segunda Lei de Newton diz que:

$$F = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (12)$$

Juntando (11) e (12):

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d_0 - 2x(t))^2} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (13)$$

Reescrevendo a equação, explicitando as condições iniciais e definindo:

$$\omega^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \quad (14)$$

Vem que:

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{\omega^2}{(d_0 - 2x(t))^2} = 0 \\ x(0) = 0 \\ \frac{dx(0)}{dt} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

3 Estudo matemático da equação diferencial modeladora

A equação diferencial (15) será analisada analiticamente e numericamente.

3.1 Solução analítica

Apesar de a equação diferencial encontrada não possuir solução analítica, é possível analisar as curvas trajetórias a ela relacionadas e delas retirar alguns significados físicos.

3.1.1 Sistema Autônomo

Seja o seguinte sistema de duas EDO's não lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (16)$$

Definição 3.1 Chama-se de sistema autônomo o sistema (16) em que as funções P e Q não dependem explicitamente da variável independente t .

Definição 3.2 Diz-se que um ponto de equilíbrio do sistema (16) é o par ordenado (x_e, y_e) donde $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} P(x_e, y_e) = 0 \\ Q(x_e, y_e) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

O sistema acima pode não ter solução analítica. Pode-se, no entanto, analisar não o comportamento das funções x e y em função de t , mas analisar o comportamento de y em função de x , ou seja, as trajetórias que os pontos (x, y) descrevem ao longo do tempo no plano de fases xy .

Considerando a equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = P\left(w, \frac{dw}{dt}\right) \quad (18)$$

Conforme foi visto, esta é uma equação autônoma, uma vez que P não é função de t . É possível reescrevê-la como um sistema autônomo. Com efeito, fazendo $y = \frac{dx}{dt}$, temos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = P(x, y) \end{cases} \quad (19)$$

Deste modo, como mencionado anteriormente, as trajetórias (x, y) podem ser obtidas a partir da resolução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{P(x, y)}{y}. \quad (20)$$

3.1.2 As curvas trajetórias relacionadas à equação (15)

Como dito anteriormente, apesar de a (15) não possuir solução analítica, é possível analisar suas curvas trajetórias. De fato, fazendo $v = \frac{dx}{dt}$, o sistema autônomo fica

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\omega^2}{(d_0 - 2x)^2} \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

As trajetórias serão obtidas pela solução de

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\omega^2}{v(d_0 - 2x)^2} \quad (22)$$

Note que a equação (22) é separável, logo,

$$v dv = \frac{\omega^2}{(d_0 - 2x)^2} dx, \quad (23)$$

logo, suas soluções são

$$v(x) = \pm \omega \sqrt{\frac{2x}{d_0(d_0 - 2x)}} \quad (24)$$

O sinal de + corresponde à velocidade do corpo A, enquanto que o sinal de menos corresponde ao corpo B. Note-se que escolhendo o sinal positivo para $v(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow d_0/2} v(x) = +\infty \quad (25)$$

Observa-se, todavia, que o centro do corpo A nunca chega em $x = \frac{d_0}{2}$, visto que seu raio não é nulo, o que leva a uma colisão das esferas em $x = \frac{d_0}{2} - r_0$. A equação (24) pode ser elegantemente obtida a partir da conservação de energia do sistema; antes, todavia, de se mostrar tal resultado, convém relembrar que a energia eletrostática armazenada num sistema com n cargas elétricas é

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (26)$$

Utilizando a conservação da energia do sistema entre $t = 0$ até uma posição qualquer $x \leq \frac{d_0}{2} - r_0$, vem que:

$$-\frac{kq^2}{d_0} = 2\frac{mv^2}{2} - \frac{kq^2}{d_0 - 2x} \quad (27)$$

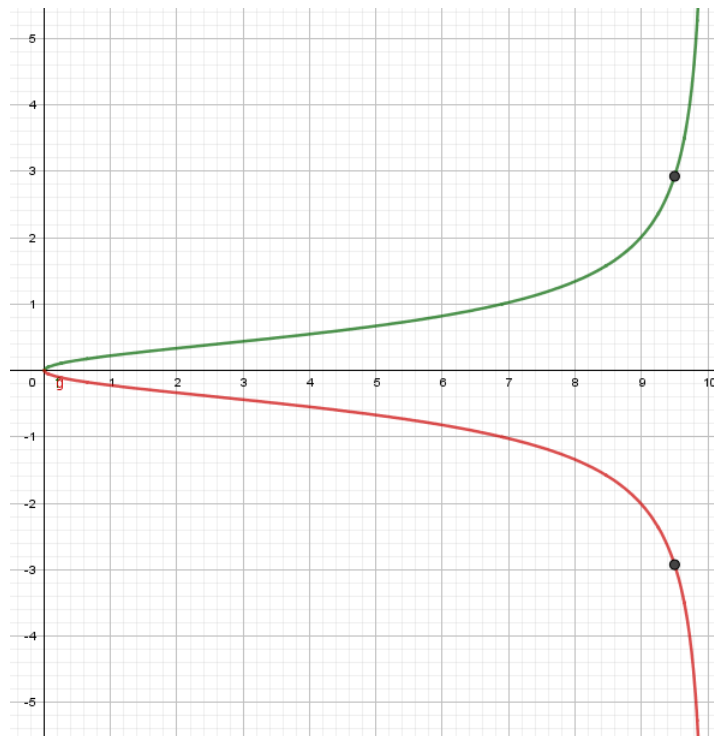
Isolando v , obtém-se

$$v(x) = \pm\omega\sqrt{\frac{2x}{d_0(d_0 - 2x)}}$$

Que é a igual à equação (24).

Agora, para fins de análise das curvas trajetórias, sejam $\omega^2 = 9N \cdot m^2 \cdot kg^{-1}$, $d_0 = 20m$ e $r_0 = 0,5m$. Plotando o gráfico de (24) (tanto a solução positiva, como a negativa) no Geogebra:

Figura 3 - **Curvas trajetórias**



Fonte: autor.

Quando os corpos colidem, isto é, quando $x = 9,5m$, a velocidade de ambos é, em módulo, $v(9,5) = 2.92m/s$.

3.2 Solução numérica

Será necessário apelar aos métodos numéricos, visto que não há solução numérica para a equação diferencial que modela o problema. Antes, todavia, convém relembrar alguns conceitos:

3.2.1 Equações Diferenciais de Ordem Superior

Na modelagem matemática de um problema, pode-se obter uma equação diferencial de ordem m , na seguinte forma:

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{m-1}) \quad (28)$$

com valores iniciais:

$$y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, y''(x_0) = \alpha_3, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = \alpha_m$$

Resolver esta equação diferencial consiste em determinar a função $y(x)$ que satisfaz (28).

A equação diferencial de ordem m dada em (28) pode ser escrita como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com valores iniciais

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (29)$$

para um dado número x_0 e um vetor Y_0 , considerando novas variáveis como segue:

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'_1(x) = y'(x) \\ y_3(x) = y'_2(x) = y''(x) \\ \vdots \\ y_m(x) = y'_{m-1}(x) = y^{(m-1)}(x) \end{cases}$$

Assim, escrevendo a equação diferencial (28) em termos das novas variáveis $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, chegando a:

$$y'_m(x) = y^{(m)}(x) = f(x, \underbrace{y_1(x)}_{y(x)}, \underbrace{y_2(x)}_{y'(x)}, \dots, \underbrace{y_m(x)}_{y^{(m-1)}(x)}) .$$

Com estas novas variáveis, pode-se escrever a equação (28) equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{m-1} = y_m \\ y'_m = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases} \quad (30)$$

e as condições iniciais:

$$\underbrace{y_1(x_0)}_{y(x_0)} = \alpha_1, \underbrace{y_2(x_0)}_{y'(x_0)} = \alpha_2, \underbrace{y_3(x_0)}_{y''(x_0)} = \alpha_3, \dots, \underbrace{y_m(x_0)}_{y^{(m-1)}(x_0)} = \alpha_m .$$

Por outro lado, adicionando a condição inicial $x(0) = 0$ ao sistema (21), pode-se resolver numericamente o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\omega^2}{(d_0 - 2x)^2} \\ \frac{dx(0)}{dt} = v(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

As soluções do sistema acima serão encontradas pelo método de Euler.

3.2.2 Método de Euler ou Método da Reta Tangente

Dada uma equação diferencial na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (32)$$

Dada a condição inicial $y(t_0) = y_0$, o passo h e o número de interações, o método de Euler resolve (32) numericamente:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h, n = 0, 1, 2, \dots$$

Quando há um sistema de equações diferenciais, por exemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (33)$$

Trabalha-se com vetores:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + h\vec{f}_n$$

Pode-se também escrever: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_n, x_n, y_n) \\ g(t_n, x_n, y_n) \end{pmatrix}$

4 Resolução de (31) e análise das soluções.

Agora que foram conhecidas as ferramentas matemáticas necessárias para o tratamento do problema, este pode finalmente ser resolvido. Em todos os casos que serão analisados, o passo adotado será $h = 0,0001$ e o método será parado quando $x \geq \frac{d_0}{2} - r_0$. Os cálculos serão realizados mediante um programa construído pelo autor na linguagem de programação Python. Os gráficos serão também construídos por meio de tal linguagem, a partir da utilização da biblioteca Matplotlib [5].

4.1 Soluções para alguns sistemas

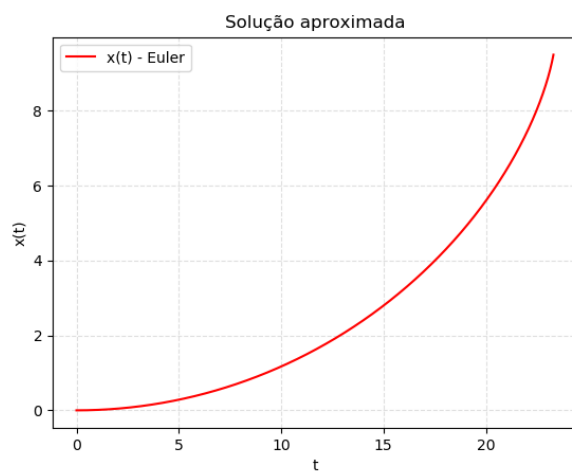
- Sistema 1. Tomando $\omega^2 = 9N \cdot m^2 \cdot kg^{-1}$, com $q = 10^{-4}C$; $m = 10kg$; $d_0 = 20m$; $r_0 = 0,5m$

Tabela 1 - Grandezas físicas relacionadas ao Sistema 1

i	t_i	x_i	$v_i = x'_i$	F
46607	4,66	0,25	0,11	0,24
93214	9,32	1,01	0,23	0,28
139821	13,9	2,39	0,38	0,39
186428	18,6	4,66	0,63	0,79
233035	23,3	9,50	2,92	90

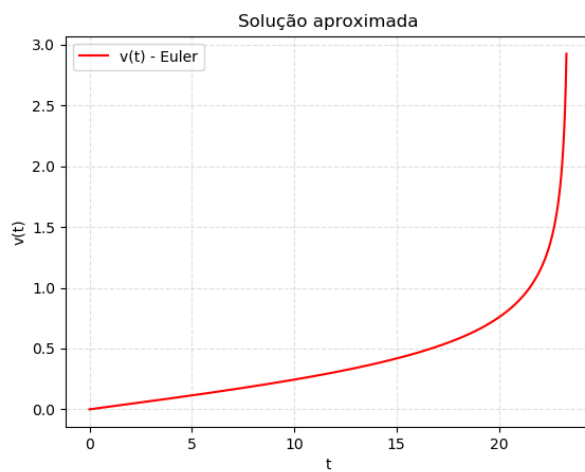
Fonte: autor.

Figura 4 - Sistema 1. Gráfico da posição em função do tempo.



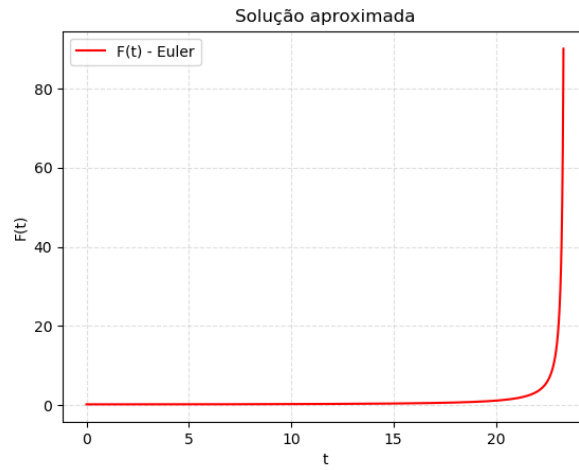
Fonte: autor.

Figura 5 - Sistema 1. Gráfico da velocidade em função do tempo.



Fonte: autor.

Figura 6 - Sistema 1. Gráfico da força em função do tempo.



Fonte: autor.

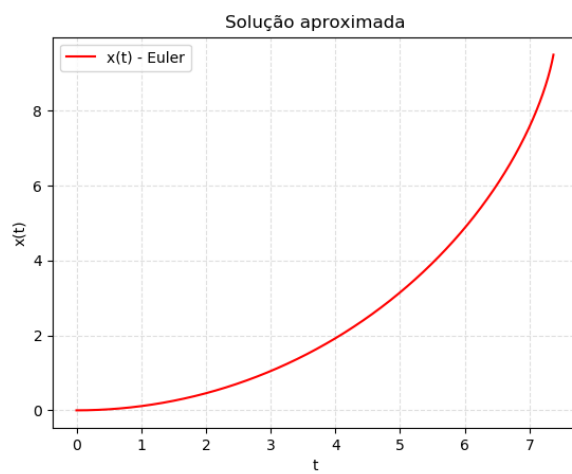
- Sistema 2. Tomando $\omega^2 = 90 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, com $q = 10^{-4} \text{ C}$; $m = 1 \text{ kg}$; $d_0 = 20 \text{ m}$; $r_0 = 0,5 \text{ m}$

Tabela 2 - Grandezas físicas relacionadas ao Sistema 2

i	t_i	x_i	$v_i = x'_i$	F
14739	1,47	0,25	0,34	0,24
29478	2,95	1,01	0,71	0,28
44216	4,42	2,39	1,19	0,39
58955	5,90	4,66	1,98	0,79
73694	7,37	9,50	9,24	90

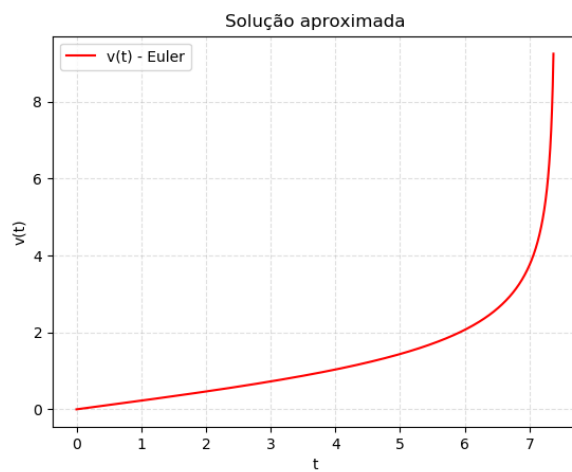
Fonte: autor.

Figura 7 - Sistema 2. Gráfico da posição em função do tempo.



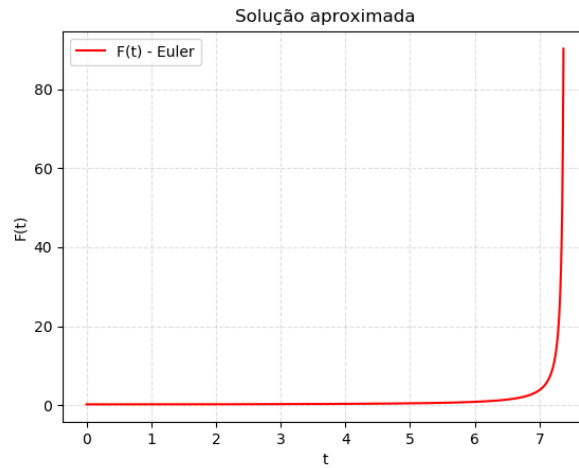
Fonte: autor.

Figura 8 - Sistema 2. Gráfico da velocidade em função do tempo.



Fonte: autor.

Figura 9 - Sistema 2. Gráfico da força em função do tempo.



Fonte: autor.

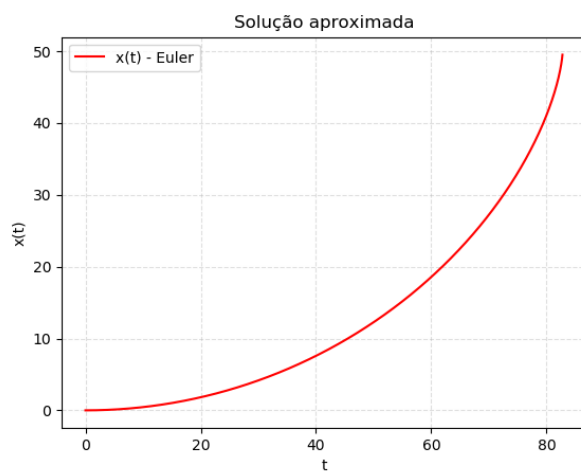
- Sistema 3. Tomando $\omega^2 = 90 N \cdot m^2 \cdot kg^{-1}$, com $q = 10^{-4} C$; $m = 1 kg$; $d_0 = 100 m$; $r_0 = 0,5 m$

Tabela 3 - Grandezas físicas relacionadas ao Sistema 3

i	t_i	x_i	$v_i = x'_i$	F
165507	16,6	1,24	0,15	0,009
331013	33,1	5,11	0,32	0,01
496520	49,7	12,1	0,54	0,02
662026	66,2	23,6	0,90	0,03
827533	82,8	49,5	9,43	90

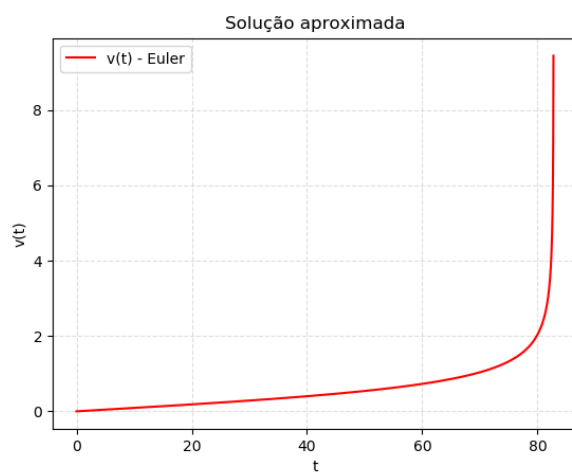
Fonte: autor.

Figura 10 - Sistema 3. Gráfico da posição em função do tempo.



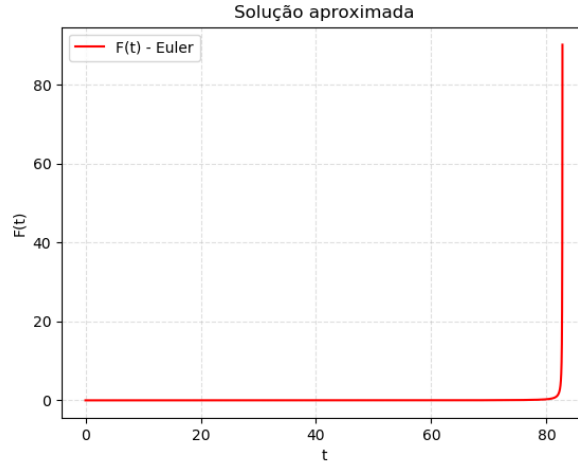
Fonte: autor.

Figura 11 - Sistema 3. Gráfico da velocidade em função do tempo.



Fonte: autor.

Figura 12 - Sistema 3. Gráfico da força em função do tempo.



Fonte: autor.

4.2 Análise dos resultados

4.2.1 Ajuste Exponencial da Posição pelo Método dos Mínimos Quadrados

É possível observar uma semelhança entre o gráfico da posição em função do tempo e o gráfico da função exponencial $f(x) = Ae^{Bx}$. Pode-se, portanto, aplicar o método dos mínimos quadrados a fim de se encontrarem os coeficientes A e B que levam à curva exponencial que melhor se adequa aos pontos encontrados pelo Método de Euler.

4.2.1.1 O Método dos Mínimos Quadrados

Dado um conjunto de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$, o método dos mínimos quadrados fornece a reta que melhor se adequa a esses pontos, isto é, define os parâmetros A e B da equação $y = A + Bx$:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta} \quad (34)$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta} \quad (35)$$

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2 \quad (36)$$

O método, todavia, não se restringe às grandezas relacionadas linearmente. É possível, por exemplo, encontrar A e B para $y = Ae^{Bx}$:

$$y = Ae^{Bx}$$

$$\ln(y) = \ln(Ae^{Bx})$$

$$\ln(y) = \ln(A) + Bx$$

Chamando $a = \ln(A)$ e $z = \ln(y)$, vem:

$$z = a + Bx \quad (37)$$

Para cada y_i é possível definir $z_i = \ln(y_i)$. Além disso, depois de os valores a e B terem sido encontrados pela aplicação do método, o valor de A fica definido como $A = e^a$.

4.2.1.2 Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para as Posições $x(t)$

Na aplicação do método dos mínimos quadrados aos três sistemas anteriormente estudados, foram utilizados os cinco valores das tabelas da subseção 4.1.

- Aplicação do método dos mínimos quadrados ao Sistema 1

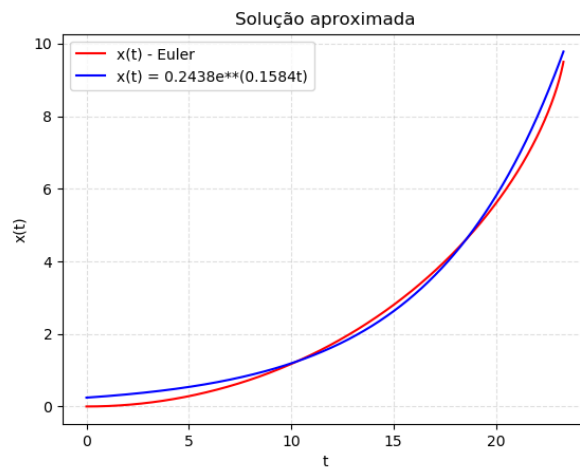
$$A = 0,2438$$

$$B = 0,1584$$

$$x(t) = 0,2438e^{0,1584t}$$

Comparando os gráficos:

Figura 13 - Sistema 1. Gráfico da posição em função do tempo. Método de Euler e ajuste pelo método dos mínimos quadrados



Fonte: autor.

- Aplicação do método dos mínimos quadrados ao Sistema 2

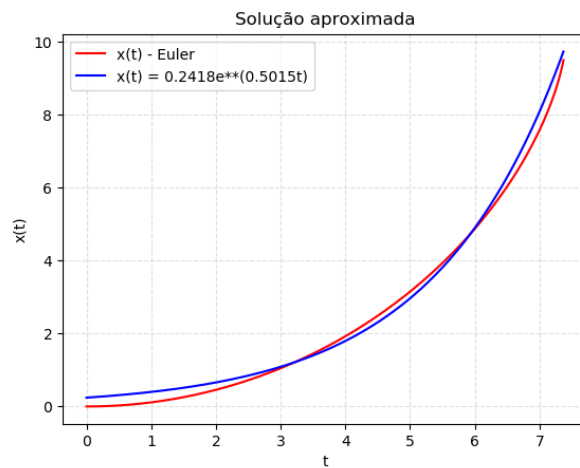
$$A = 0,2418$$

$$B = 0,5015$$

$$x(t) = 0,2418e^{0,5015t}$$

Comparando os gráficos:

Figura 14 - Sistema 2. Gráfico da posição em função do tempo. Método de Euler e ajuste pelo método dos mínimos quadrados



Fonte: autor.

- Aplicação do método dos mínimos quadrados ao Sistema 3

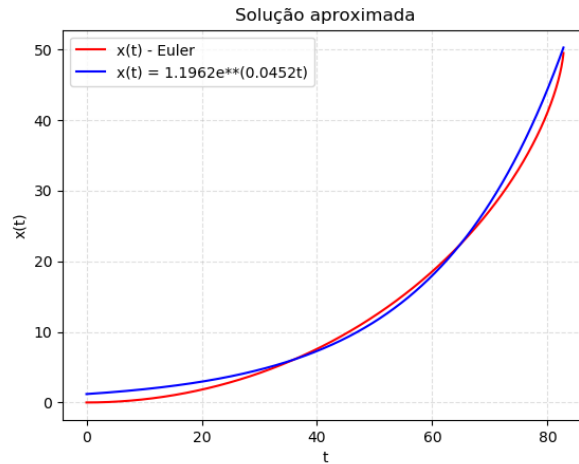
$$A = 1,1962$$

$$B = 0,0452$$

$$x(t) = 1,1962e^{0,0452t}$$

Comparando os gráficos:

Figura 15 - Sistema 3. Gráfico da posição em função do tempo. Método de Euler e ajuste pelo método dos mínimos quadrados



Fonte: autor.

Nos três casos analisados, verifica-se que as funções exponenciais encontradas a partir da aplicação do método dos mínimos quadrados se encaixam muito bem aos pontos encontrados pelo Método de Euler.

4.2.2 Análise da Velocidade

Em 3.1.2, foram estudadas as curvas trajetórias relacionadas à (15). A equação encontrada para essas curvas - (24) - fornece a velocidade em função da posição e decorre diretamente da conservação da energia do sistema. Serão comparadas, para cada sistema estudado na subseção 4.1, as velocidades previstas pela equação (24) e as velocidades encontradas pelo método de Euler.

- Velocidades para o Sistema 1

Tabela 4 - Sistema 1. Comparação de velocidades

x	v (Euler)	v (Equação)	Erro relativo (%)
0,25	0,11	0,11	0
1,01	0,23	0,22	4,5
2,39	0,38	0,38	0
4,66	0,63	0,63	0
9,50	2,92	2,92	0

Fonte: autor.

- Velocidades para o Sistema 2

Tabela 5 - Sistema 2. Comparação de velocidades

x	v (Euler)	v (Equação)	Erro relativo (%)
0,25	0,34	0,34	0
1,01	0,71	0,71	0
2,39	1,19	1,19	0
4,66	1,98	1,98	0
9,50	9,24	9,25	0,1

Fonte: autor.

- Velocidades para o Sistema 3

Tabela 6 - Sistema 3. Comparação de velocidades

x	v (Euler)	v (Equação)	Erro relativo (%)
1,24	0,15	0,15	0
5,11	0,32	0,32	0
12,1	0,54	0,54	0
23,6	0,90	0,90	0
49,5	9,43	9,44	0,1

Fonte: autor.

Nos três casos analisados, verifica-se a grande proximidade da solução exata em relação à numérica.

4.2.3 Análise da Força

Nos três sistemas analisados, a força elétrica tem o mesmo comportamento: mantém-se pequena para valores diminutos de x e cresce rapidamente quando $x \rightarrow \frac{d_0}{2} - r_0$. De fato, tal comportamento está de acordo com a equação (11).

4.2.4 Análise Energética

Entre as posições $x = 0$ e $x = \frac{d_0}{2} - r_0$, foi suposto que os corpos A e B se comportavam como cargas elétricas pontuais. Todavia, tal abordagem perde precisão conforme as esferas se aproximam, pois suas dimensões deixam de ser desprezíveis. Mesmo assim, os corpos continuarão a ser tratados como pontuais.

Feitas essas considerações e supondo que a colisão é elástica, pode-se utilizar a conservação da energia entre o momento exatamente anterior à colisão – isto é, quando $v(x) = v(\frac{d_0}{2} - r_0)$ – e o momento posterior à colisão no qual o corpo A chega novamente ao repouso:

$$-\frac{kq^2}{2r_0} + 2\frac{mv^2}{2} = -\frac{kq^2}{d_0 - 2x} \quad (38)$$

Note que:

$$v = v(\frac{d_0}{2} - r_0) = \omega \sqrt{\frac{d_0 - 2r_0}{2d_0r_0}} \quad (39)$$

Substituindo (39) em (38) e isolando x , conclui-se que $x = 0$, ou seja, o corpo A oscila entre as posições $x = 0$ e $x = \frac{d_0}{2} - r_0$, enquanto que o corpo B oscila entre $x = d_0$ e $x = \frac{d_0}{2} + r_0$. O período de oscilação é o dobro do intervalo de tempo necessário para o corpo se mover de $x = 0$ até $\frac{d_0}{2} - r_0$.

Também é possível escrever uma expressão para o período em função dos parâmetros A e B encontrados a partir da aplicação do método dos mínimos quadrados: basta substituir a expressão da posição $x(t) = Ae^{Bt}$ na equação (24) e isolar t

$$t = \frac{1}{B} \ln\left(\frac{v^2 d_0^2}{A(2\omega^2 + 2v^2 d_0)}\right)$$

Substituindo v pela (39), vem:

$$t = \frac{1}{B} \ln\left(\frac{\omega^2 d_0^2 (d_0 - 2r_0)}{A(4d_0 r_0 \omega^2 + 2d_0 \omega^2 (d_0 - 2r_0))}\right)$$

O período $\tau = 2t$, então:

$$\tau = \frac{2}{B} \ln\left(\frac{\omega^2 d_0^2 (d_0 - 2r_0)}{A(4d_0 r_0 \omega^2 + 2d_0 \omega^2 (d_0 - 2r_0))}\right) \quad (40)$$

Comparando os períodos dados pela (40) com o dobro dos intervalos de tempo previstos pelo método de Euler para a chegada dos corpos em $x = \frac{d_0}{2} - r_0$, vem:

Tabela 7 - Comparação de períodos

Sistema	$2t$	τ	Erro relativo (%)
1	46,2	46,2	0
2	14,6	14,6	0
3	165,6	164,7	0,5

Fonte: autor.

Novamente, verifica-se uma grande proximidade dos resultados.

5 Conclusão

O sistema analisado neste trabalho, apesar de aparentar simplicidade, mostra-se de difícil tratamento, visto que a sua equação diferencial modeladora – isto é, sua equação de movimento – é não linear, sendo necessária a utilização de um método numérico para a sua resolução. É ainda de se notar que tal dificuldade foi encontrada mesmo com inúmeras simplificações, tais como a igualdade da massa dos corpos e seus comportamentos sempre pontuais. Se tais simplificações não fossem feitas, o problema tornar-se-ia mais complexo do que já se mostrou; supondo, por exemplo, esferas com massas diferentes, seria necessário escrever uma equação de movimento para cada corpo e, ao final, ter-se-ia um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, não linear e acoplado. Evidentemente, outras considerações não levariam a tantas complicações, como, por exemplo, a presença de atrito e o consequente rolamento da esfera.

Além disso, o trabalho propiciou uma interface interessante entre a física, a matemática e a computação. O problema proposto é essencialmente físico e, de fato, foram utilizadas duas grandes leis de tal área do conhecimento: A Lei de Coulomb e a Segunda Lei de Newton. Todavia, ao se escrever a equação de movimento (15), verificou-se a necessidade de um tratamento numérico (método de Euler) para a sua resolução, sendo necessária a utilização de programas computacionais a fim de se obter uma solução consideravelmente precisa.

Ademais, no domínio da mecânica clássica, o sistema proposto traz ainda uma interessante analogia com a gravitação. De fato, a expressão matemática Lei da Gravitação Universal de Newton

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{R^2} \hat{r}$$

possui a mesma forma que a Lei de Coulomb. Então, se fossem colocados dois corpos maciços – isto é, com grande massa – em rota de colisão frontal, a análise de tal sistema seria idêntica à que foi realizada no decorrer deste escrito.

Este trabalho, portanto, pode ser pensado como um roteiro de análise de um problema aparentemente simples e esquecido, mas que, com um olhar mais acurado, mostra-se interessante e aberto a novas análises.

Referências

- [1] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física básica: eletromagnetismo. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.
- [2] GRIFFITHS, David Jeffrey. Introduction to electrodynamics. 3. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
- [3] ACUNA, Javier. Aula 02 - Eletromagnetismo. Disponível em: <http://professor.ufabc.edu.br/javier.acuna/disciplinas/eletromagneticos/aula02.exemplos.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2020.
- [4] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- [5] Matplotlib: Visualization with Python. Disponível em: <https://matplotlib.org/index.html>. Acesso em: 2. jun. 2020.
- [6] TAYLOR, John R. Introdução à análise de erros: o estudo de incertezas em medições físicas. Tradução de Waldir Leite Roque. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [7] JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E.; AZEVEDO F. S.; GUIDI, L. F.; KONZEN, P. H. A. (Org). Cálculo Numérico: um livro colaborativo versão Python. UFRGS, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf>. Acesso em: 6. jun. 2020.
- [8] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física básica: mecânica. 4ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.