Pesquisa Operacional

Prof. Sebastião Marcelo

Pesquisa Operacional

Um método cientifico/matemático estruturado para auxiliar na tomada de decisões.

Lida com problemas de como conduzir e coordenar certas operações em uma empresa.

Hoje possui aplicações em diversas áreas tais como esportes, indústria, transportes, telecomunicação, finanças, saúde, serviços públicos, operações militares, etc.

Pesquisa Operacional

Termo utilizado a partir de 1938 por alguns cientistas para descrever as análises de situações militares.

Surgiu na Segunda Guerra Mundial do resultado de estudos realizados para resolver problemas alocação de recursos escassos em operações militares.

Teve início com as forças armadas britânicas e depois pelos americanos.

Pesquisa Operacional

A indústria do pós guerra passou a utilizar a PO para resolver a complexidade crescente encontrada nas organizações .

Em 1948 no MIT (Massachusetts Institute of Technology) criou o primeiro curso formal de estudos em PO.

Com a popularização dos computadores e o uso de algumas técnicas como o método Simplex, por exemplo, houve um crescimento no uso da PO.

Pesquisa Operacional

Procura obter a melhor solução ou a chamada solução ótima para um determinado problema, do ponto de vista matemático.

Uma vez obtida uma solução torna-se necessário uma analise de viabilidade de sua implantação levando em conta as características do problema.

Pesquisa Operacional

Existe um processo de utilização em PO que:

- **Começa com a detecção de um problema,**
- **Passa pelo estágio de formulação de um modelo de resolução,**
- **E termina na fase da implementação.**

Processo de solução de um problema de Pesquisa Operacional

- **Definição da situação-problema:**
  - **Que a parte da empresa que é afetada pelo problema;**
  - **Quais as restrições a possíveis soluções;**
  - **Quais os objetivos.**
- **Construção do modelo do sistema:**
  - **Modelo matemático formado por um conjunto de símbolos relações matemáticas.**

Construção do modelo do sistema

- Cálculo da solução através do modelo matemático:
  - Solução ótima – a melhor solução;
- Implantação da solução e acompanhamento:
  - Pode ser preciso projetar essa implementação.

Modelo de Programação Linear

- **Uma das técnica mais utilizada na abordagem de problemas.**
- **Uma combinação de variáveis que podem ser medidas e que estejam relacionadas através de equações e/ou inequações lineares.**
- **Variáveis que devem ser maximizadas (lucro, retorno) ou minimizadas (custo, despesa).**

Modelo de Programação Linear

- O modelo de Programação Linear é composto por:
  - Função objetivo:

$$minimizar \quad C = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$maximizar \quad L = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

  - Restrições:

$$técnicas \quad \rightarrow \quad 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 10$$

$$\rightarrow \quad 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 20$$

$$de\ não\ negatividade \quad \rightarrow \quad x_1 \geq 0\ e\ x_2 \geq 0$$

onde x_1 e x_2 são variáveis de decisão.

Construção do modelo do sistema

- O conjunto de equações serve para medir a eficiência do sistema para cada solução proposta:
    - função objetivo.
- As equações e/ou inequações descrevem as limitações ou restrições do sistema.

Modelo de Programação Linear

Roteiro:

a) Quais as variáveis de decisão?

São grandezas que podem assumir diversos valores.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

A produção de uma unidade de um produto custa R$ 10,00.

- **então a fabricação de x_1 unidades custará:**

$$10 \cdot x_1$$

Modelo de Programação Linear

Roteiro:

a) Quais as variáveis de decisão?

Se o custo de fabricação de um outro produto for R$ 17,00.

- **então o custo de fabricar x_2 unidades será:**

$$17 \cdot x_2$$

O custo total de fabricar de fabricar x_1 de um produto e x_2 de um outro produto será:

$$10.x_1 + 17.x_2$$

Modelo de Programação Linear

Roteiro:

b) Qual o objetivo?

Identificar o objetivo da tomada de decisão,

- **maximização de lucro, receita, ... Ou,**
- **minimização de custo, perda, ...**

A função objetivo é a expressão que calcula o valor do objetivo em função das variáveis de decisão.

Modelo de Programação Linear

Roteiro:

c) Quais as restrições?

Cada restrição deve ser expressa como uma relação linear (igualdade ou desigualdade), normalmente com as variáveis de decisão.

Um problema de programação linear pode ter duas ou mais variáveis de decisão.

Exemplo 1

- Certa empresa fabrica dois produtos: P1 e P2.
- O lucro unitário de P1 é de R$ 1.000,00 e o lucro unitário de P2 é de R$ 1.800,00.
- A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P2.
- O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas.

Exemplo 1

A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2.

Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens?

Construa o modelo de programação linear para este caso.

Solução

a) Quais são as variáveis de decisão?

O que deve ser decidido é o plano de produção,

isto é,

quais as quantidades anuais que devem ser produzidas de: $P_1 \ e \ P_2$.

As variáveis de decisão são: $x_1 \ e \ x_2$.

$x_1 \rightarrow$ *quantidade anual a ser produzida de* P_1

$x_2 \rightarrow$ *quantidade anual a ser produzida de* P_2

Solução

b) Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o Lucro, que pode ser calculado como:

$$\textit{Lucro devido a } P_1 : \; 1.000 \cdot x_1$$

$$(\textit{lucro por unidade de } P_1 \times \textit{quantidade produzida de } P_1)$$

$$\textit{Lucro devido a } P_2 : \; 1.800 \cdot x_2$$

$$(\textit{lucro por unidade de } P_2 \times \textit{quantidade produzida de } P_2)$$

$$\textit{Objetivo}: \quad \textit{maximixar } L = 1.000 \cdot x_1 + 1.800 \cdot x_2$$

Solução

c) Quais as restrições?

Disponibilidades de horas para a produção:

horas ocupadas com a fabricação de P1:

$$20 \cdot x_1 \quad (uso\ por\ unidades \times quantidade\ produzida)$$

horas ocupadas com a fabricação de P2:

$$30 \cdot x_2 \quad (uso\ por\ unidades \times quantidade\ produzida)$$

Total em horas ocupadas na produção: *1.200 horas*

$$Restrição\ técnica: \ 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 \leq 1.200$$

Solução

Disponibilidades de mercado para os produtos:

$$\textit{Disponibilidade para } P_1 = 40 \textit{ unidades}$$

$$\textit{Quantidade produzida de } P_1 = x_1$$

$$\textit{Restrição técnica : } x_1 \leq 40$$

$$\textit{Disponibilidade para } P_2 = 30 \textit{ unidades}$$

$$\textit{Quantidade produzida de } P_2 = x_2$$

$$\textit{Restrição técnica : } x_2 \leq 30$$

Resumo do modelo

$$x_1 \rightarrow quantidade\ anual\ a\ ser\ produzida\ de\ P_1$$

$$x_2 \rightarrow quantidade\ anual\ a\ ser\ produzida\ de\ P_2$$

$$max \quad L = 1.000 \cdot x_1 + 1.800 \cdot x_2$$

Sujeito a :

$$restrições\ técnicas \begin{cases} 20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 \leq 1.200 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$restrições\ de\ não\ negatividade \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 2

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas.

A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia.

Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar.

Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Exemplo 2

Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Qual a quantidade diária de carnes e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível?

Cada unidade de carne custa $ 3,00 e cada unidade de ovo custa $ 2,50.

Construa o modelo de programação linear para este caso.

Solução

a) Quais são as variáveis de decisão?

Devemos decidir quais as quantidades que as pessoas devem consumir no dia de:

carnes e ovos

As variáveis de decisão são: x_1 e x_2.

$$x_1 \rightarrow \text{quantidade de carne a ser consumida no dia}$$

$$x_2 \rightarrow \text{quantidade de ovo a ser consumida no dia}$$

Solução

b) Qual o objetivo?

O objetivo é minimizar o Custo, que pode ser calculado como:

$$Custo\ devido\ a\ carne:\quad 3\cdot x_1$$

$$(custo\ \ por\ unidade \times quantidade\ a\ ser\ consumida\ de\ carne)$$

$$Custo\ devido\ ao\ ovo:\quad 2{,}5\cdot x_2$$

$$(custo\ \ por\ unidade \times quantidade\ a\ ser\ consumida\ de\ ovos)$$

$$Objetivo:\ \ minimizar\ \ C = 3\cdot x_1 \quad + 2{,}5\cdot x_2$$

Solução

c) Quais as restrições?

Necessidade de vitamina

vitamina na carne:

$$4 \cdot x_1 \quad (quantidade\ \ por\ unidades \times quantidade\ de\ carne)$$

vitamina no ovo:

$$8 \cdot x_2 \quad (quantidade\ \ por\ unidades \times quantidade\ de\ ovos)$$

Necessidade mínima: $32\ unidades$

$$Restrição\ técnica: \quad 4 \cdot x_1 \ + 8 \cdot x_2 \ \geq \ 32$$

Solução

c) Quais as restrições?

Necessidade de proteína:

proteína na carne:

$$6 \cdot x_1 \quad (\text{quantidade por unidades} \times \text{quantidade de carne})$$

proteína no ovo:

$$6 \cdot x_2 \quad (\text{quantidade por unidades} \times \text{quantidade de ovos})$$

Necessidade mínima: *36 unidades*

$$\text{Restrição técnica}: \; 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 36$$

Resumo do modelo – Exemplo 2

$x_1 \rightarrow$ *quantidade de carne a ser consumida no dia*

$x_2 \rightarrow$ *quantidade de ovo a ser consumida no dia*

$$\min C = 3 \cdot x_1 + 2{,}5 \cdot x_2$$

Sujeito a :

$$\text{restrições técnicas} \begin{cases} 4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 32 \\ 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 36 \end{cases}$$

$$\text{restrições de não negatividade} \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 3

Um alfaiate tem, disponíveis, os seguintes tecidos: 16 metros de algodão, 11 metros de seda e 15 metros de lã.

Para um terno são necessários 2 metros de algodão, 1 metro de seda e 1 metro de lã.

Para um vestido, são necessários 1 metro de algodão, 2 metros de seda e 3 metros de lã.

Exemplo 3

Se um terno é vendido por $ 300,00 e um vestido por $ 500,00, quantas peças de cada tipo o alfaiate deve fazer?

Montar o modelo de programação linear do sistema de produção do alfaiate.

Exemplo 4

Uma companhia de aluguel de caminhões possuí dois tipos desses veículos:

- **o tipo A, com 2 metros cúbicos de espaço refrigerado e 4 metros cúbicos de espaço não refrigerado e,**
- **o tipo B, com 3 metros cúbicos de espaço refrigerado e 3 metros cúbicos de espaço não refrigerado.**

Exemplo 4

Uma fábrica precisou transportar 90 metros cúbicos de produto refrigerado e 120 metros cúbicos de produto não refrigerado.

Quantos caminhões de cada tipo ela teve de alugar, de modo a minimizar o custo, sabendo que o aluguel do caminhão A é de \$ 0,30 por km e o do B é de \$ 0,40 por km.

Elabore o modelo de programação linear.

Exemplo 5

A indústria Alumilândia S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os 3 tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessuras fina, média ou grossa.

Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro.

Exemplo 5

Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas.

Devido à qualidade dos produtos da Alumilândia S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâmina.

A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diária de R$ 100.000,00 para a capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia.

Exemplo 5

O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para a produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas por dia.

Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível?

Elabore o modelo de programação linear.

Exemplo 6

Um pizzaiolo trabalha 8 horas por dia e faz 16 pizzas por hora, caso faça somente pizzas, e 9 calzones por hora, se fizer somente calzones.

Ele gasta 40 gramas de queijo para preparar uma pizza e 60 gramas de queijo para fazer um calzone.

Exemplo 6

Sabendo-se que o total disponível de queijo é de 5 quilogramas por dia, e que a pizza é vendida a R$ 18,00 e o calzone a R$ 22,00.

Quantas unidades de pizzas e calzones uma pizzaria com três pizzaiolos deve vender diariamente para maximizar a sua receita?

Construa o modelo de programação linear

Exemplo 7

Em uma fábrica, existem três recursos em quantidades limitadas, os quais impõem limites às quantidades que podem ser produzidas de dois produtos, *A* e *B*.

Existem 1.200 unidades disponíveis do recurso l, 400 unidades disponíveis do recurso 2 e 80 unidades disponíveis do recurso 3.

Por outro lado, o produto *A* proporciona um lucro unitário de R$ 100,00 contra R$ 300,00 do produto *B*.

Exemplo 7

Sabe-se também que:

1 unidade do produto *A* requer:	1 unidade do produto *B* requer:
20 unidades do recurso 1 4 unidades do recurso 2 Nenhuma unidade do recurso 3	20 unidades do recurso 1 20 unidades do recurso 2 4 unidades do recurso 3

Colocar o problema como um modelo de programação linear.

Exemplo 8

Uma pequena companhia fabrica dois produtos *1* e *2* e os donos dessa companhia pretendem vender tudo o que poderem produzir.

Cada produto requer certo tempo de produção nos três departamentos de fabricação, como indica o Quadro 1.

Atualmente, cada departamento tem uma quantidade fixa de homens-hora disponível por semana, como mostra o Quadro 2.

Exemplo 8

O problema é decidir quanto fabricar de cada produto para se fazer o melhor uso possível das instalações produtivas que têm seus limites.

Se fosse conhecido o lucro unitário, poderíamos maximizar o lucro.

Suponha, então, que o lucro unitário para o produto *1* seja de R$ 1,00 e para o produto *2* seja R$ 1,50.

Exemplo 8

Com efeito, então, a administração deve designar os recursos fixos (tempo de fabricação de cada departamento) de modo a otimizar a função objetivo (maximizar o lucro) e ainda satisfazer algumas outras condições definidas (não exceder a capacidade departamental de trabalho).

Quadro 1 – Tempo de fabricação por departamento

Produtos	Tempo de fabricação (horas)		
	Depto A	Depto B	Depto C
1	2	1	4
2	2	2	2

Quadro 2 – Limite de capacidade de Fabricação

Depto	Homens-hora/semana
A	160
B	220
C	280

Exemplo 9

A empresa Have Fun S/A produz uma bebida energética muito consumida pelos frequentadores de danceterias noturnas.

Dois dos componentes utilizados na preparação da bebida são soluções compradas de laboratórios terceirizados - solução Red e solução Blue - e que provêm dos principais ingredientes ativos dos energéticos: o extrato de guaraná e a cafeína.

Exemplo 9

A companhia quer saber quantas doses de 10 mililitros de cada solução deve incluir em cada lata da bebida, para satisfazer às exigências mínimas padronizadas de 48 gramas de extrato de guaraná e 12 gramas de cafeína e, ao mesmo tempo, minimizar o custo de produção.

Por acelerar o batimento cardíaco, a norma padrão também prescreve que a quantidade de cafeína seja de, no máximo, 20 gramas por lata.

Exemplo 9

Uma dose de solução Red custa R$ 0,06 e uma dose de solução Blue custa R$ 0,08.

Elaborar o modelo de programação linear.