Resolução de Sistemas Lineares

Introdução

Um sistema de equações lineares (sistema linear) é um conjunto de m equações com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da seguinte forma:

Os números a_{ij} são os *coeficientes* do sistema linear, e são fornecidos no problema. Os valores b_i são chamados *termos independentes*. Trataremos apenas de sistemas lineares em que $m=n$.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{matrix}$$

Uma representação matricial de um sistema linear:

$$[A]\cdot[X]=[B] \quad \text{ou}$$

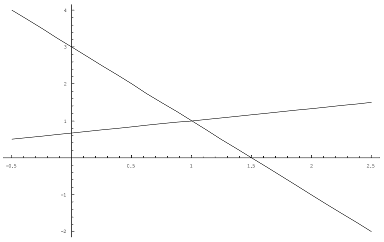
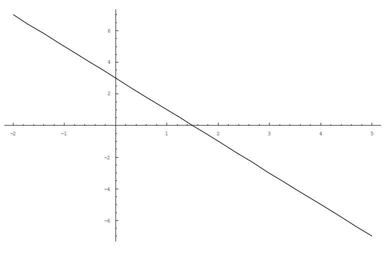
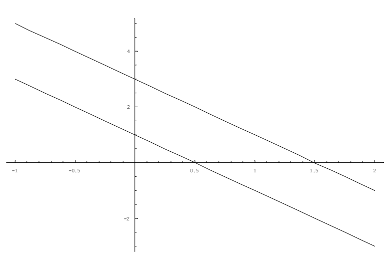
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz de Coeficientes   *Vetor das incógnitas ou vetor solução*   *Vetor das constantes*

Tipos de Sistema Linear

Um sistema linear pode ser classificado, quanto à sua solução em:

1. Sistema Possível Determinado: possui apenas uma solução;
2. Sistema Possível Indeterminado: possui infinitas soluções;
3. Sistema Impossível: não possui solução.

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

1. **Métodos Exatos ou Diretos:** Permitiriam a solução exata, se não houvesse erros de arredondamento, utilizando um número finito de operações;
2. **Métodos Iterativos:** Permitem obter a solução de um sistema, com uma determinada precisão, a partir de uma solução inicial, e através de um processo infinito convergente;

Sistemas Triangulares

Mostrar que a solução de sistemas triangulares é trivial por retrosubstituição

Retrosubstituição

O próximo passo consiste em resolver as equações a partir da última, uma vez que ela tem apenas uma variável.

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Utilizando o valor obtido para x_n resolve-se a penúltima equação, e assim sucessivamente. O procedimento de retrosubstituição pode ser representado pela fórmula

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \qquad \text{para} \quad i = n-1,\, n-2, \ldots,\, 1$$

e

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Implementar algoritmo (Cunha, pg. 31). Ressaltar custo computacional com conceito de FLOP.

Problemas:

- cancelamento subtrativo
- overflow
- divisão por zero

Sistemas Equivalentes

Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando têm as mesmas soluções, ou seja, toda solução do primeiro é também a solução do segundo e vice-versa.

Convém destacar que dois sistemas de equações equivalentes não têm que ter o mesmo número de equações porém, é necessário que tenham o mesmo número de incógnitas.

Critérios de Equivalência

Critério 1: Se multiplicarmos os membros de uma equação de um sistema por um número real diferente de zero, obtém-se outro sistema equivalente ao inicial.

$$\begin{array}{l} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} (eq_1=eq_1\times 3) \\ (eq_2=eq_2\times 2) \\ (eq_3=eq_3\times -4) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 12x_1+9x_2+3x_3=-3 \\ 4x_1-8x_2+4x_3=6 \\ 4x_1-8x_2-12x_3=-8 \end{array}$$

Critério 2: Se a uma equação de um sistema somarmos ou subtrairmos outra equação do mesmo sistema, obtemos outro sistema equivalente ao inicial.

$$\begin{array}{l} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array} \Rightarrow (eq_2=eq_2-eq_1) \Rightarrow \begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ -2x_1-7x_2+x_3=4 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array}$$

Critério 3: Se a uma equação de um sistema somarmos ou subtrairmos outra equação do mesmo, multiplicada por um número real diferente de zero, obtêm-se outro sistema equivalente.

$$\begin{array}{l} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} (eq_2=eq_2-eq_1\times 2) \\ (eq_3=eq_3\times -4) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-4 \\ -11x_2+3x_3=7 \\ -11x_2-13x_3=-7 \end{array}$$

Critério 4: Se em um sistema de equações lineares uma equação é proporcional a outra ou é combinação linear de outras, podemos retirá-la, e o sistema que obtemos é equivalente ao inicial.

a) Equações Proporcionais

$$\begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ 6x_1-12x_2+6x_3=9 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array} \Rightarrow \quad eq_3=eq_2\times 3 \quad \Rightarrow \begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array}$$

b) Equações Nulas

$$\begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ 0x_1-0x_2+0x_3=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array} \Rightarrow \quad eq_3 \text{ nula} \quad \Rightarrow \begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array}$$

c) Combinação Linear de Equações

$$\begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ 6x_1-x_2+3x_3=2 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array} \Rightarrow \quad eq_3=eq_2+eq_1 \quad \Rightarrow \begin{array}{c} 4x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=3 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \end{array}$$

Finalmente, se trocarmos a ordem das equações ou a ordem das variáveis de um sistema, o sistema obtido será igual ao anterior.

Método da Eliminação de Gauss

Um dos métodos mais populares para resolução de sistemas lineares é o Método da Eliminação de Gauss. O método funciona para resolver sistemas com n equações e n incógnitas

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}$$

O método consiste de duas etapas:

Eliminação Progressiva de Variáveis:

No primeiro passo, a primeira variável, x_1 é eliminada de todas as linhas abaixo da primeira linha. A primeira equação é selecionada como equação pivô. Assim, para eliminar x_1 na segunda equação, multiplicamos a primeira equação por $m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}$ obtendo

$$a_{21}x_1+\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2+\ldots+\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n=\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

Agora, esta equação pode ser subtraída da segunda equação produzindo

$$\left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2+\ldots+\left(a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n=b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

ou

$$eq_k=eq_k-m_{k1}*eq_1$$

Este procedimento de eliminação de x_1, é repetido para até a n -ésima equação, para reduzir o conjunto de equações para:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad +a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad +a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}$$

Este procedimento é repetido para as próximas equações, até que, após $n-1$ passos obtém-se um sistema triangular superior:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\
+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\
\vdots\quad&\ \ \vdots\\
a_{nn}x_n&=b_n
\end{aligned}
$$

Problemas

- Últimas equações são alteradas muitas vezes. Maior chance de erros numéricos;
- Necessidade de pivoteamento: erro do multiplicador é multiplicado por toda equação;

Programa

```
/* Seja um S.L. de ordem 'n'
*/
void eliminacaoGauss( double *A, double *b, uint n ) {
   /* para cada linha a partir da primeira */
   for (int i=0; i < n; ++i) {
      uint iPivo = encontraMax(A, i);
      if ( i != iPivo )
         trocaLinha( A, b, i, iPivo );

      for(int k=i+1; k < n; ++k) {
         double m = A[k][i] / A[i][i];
         A[k][i] = 0.0;
         for(int j=i+1; j < n; ++j)
            A[k][j] -= A[i][j] * m;
         b[k] -= b[i] * m;
      }
   }
}
```

Perguntas:

1. Por que um S.L. tem apenas uma ou infinitas soluções?
2. Quando um S.L. pode ter um nº finito maior que um de soluções?
3. Qual o custo computacional de verificar:
   a) Se existe equação nula?
   b) Se existe equação equivalente?
   c) Se existe equação linearmente dependente?

Pivotamento

- Exemplificar necessidade de pivotamento para diminuir o erro no cálculo do multiplicador. Cunha pg.37
- Pivotamento parcial e total
- Custo computacional
- Lembrar de pivotar também o vetor de termos independentes
- Para implementações eficientes, utilizar *lookup tables*

Sistemas k-Diagonais

- Simplificação da Eliminação de Gauss
- Menor custo de armazenamento (pode-se utilizar vetores)
- Algoritmo para solução de sistema tridiagonal
  - Importante para equações diferenciais (tridiagonal e pentadiagonal)
- Matrizes de banda: não necessariamente diagonais, mas possuem métodos específicos para solução por serem esparsos.

Sistemas mal-condicionados

Na teoria, se um sistema linear $Ax=b$ possui uma solução, então esta é única ou existem infinitas soluções. Na prática, quando resolvemo via computador, erros podem se acumular e a solução se afastar da solução verdadeira. Isto pode ser parcialmente sanado pelo Pivotamento e pelo Método do Refinamento.

O principal problema advém do fato de que muitas vezes os coeficientes e os termos independentes são retirados de medidas físicas ou de modelos aproximados. Para alguns sistemas, a solução pode depender sensivelmente dos coeficientes, a ponto de provocarem grandes alterações na solução final. Esses sistemas são chamados de **mal-condicionados.**

Consideremos o seguinte S.L.

$\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ 99\text{x}+100\text{y}=99.5 \end{Bmatrix}$ que tem solução exata: $x=0.5, y=0.5$.

Agora considere o sistema $\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ 99.4\text{x}+99.9\text{y}=99.2 \end{Bmatrix}$, com alterações de não mais do que 0.5% nos coeficientes (razoável para uma medida experimental). Sua solução única é $x=1.4, y=-0.4$, consideravelmente diferente da anterior (posicione a solução num gráfico).

A razão disto ocorrer é que as retas são quase paralelas, o que faz com que o ponto de interseção seja muito sensível aos coeficientes. O mesmo vale para dimensões maiores.

Matrizes de Hilbert

Asano pág. 32 e 33

Perguntas

- Como detetar sistemas mal-condicionados durante o método da Eliminação de Gauss?

Refinamento

A ideia é obter uma solução $\hat{x}$ de $Ax=b$, mesmo que não exata (por causa de erros de arredondamento), e depois melhorá-la.

Para melhorar $\hat{x}$, definimos a diferença $w=x-\hat{x}$ para a solução verdadeira x , e tentamos calcular w . Como $x=\hat{x}+w$ então:

$$b=Ax=A(\hat{x}+w) \quad ,$$

logo

$$Aw=b-A\hat{x}$$

Ou seja, a diferença w entre x e $\hat{x}$ é a solução de um outro sistema linear no qual os termos independentes são dados pelo *resíduo* $r=b-A\hat{x}$ e os coeficientes são os mesmos do sistema linear original.

O método pode ser implementado da seguinte maneira:

Asano pg. 33-35

1. Obter uma solução inicial $\hat{x}_0$;
2. Testar a solução obtida no sistema original calculando $A\hat{x}_0$ o *resíduo* $r=b-A\hat{x}_0$;
3. Agora queremos resolver o sistema $Aw=r$. Para tanto, todas transformações efetuadas no sistema original (troca de linhas, multiplicadores) devem ser aplicadas ao vetor r .
4. Obter a próxima solução $\hat{x}_1=\hat{x}_0+w$
5. Caso $\hat{x}_1$ não satisfaça o critério de parada, retornar ao passo 2.

É necessário incluir um critério de parada. Alternativas são:

1. A norma L^2 do resíduo: $\|r\|=\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2} < \epsilon$
2. A diferença entre as soluções em etapas subsequentes: $max(|\hat{x}_i-\hat{x_{i+1}}|) < \epsilon$

Fatoração LU

Dado um sistema linear $Ax=b$, na fatoração LU utilizamos $A=LU$ onde:

- L (low) é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária. A matriz L é formada pelos multiplicadores obtidos no método da eliminação de Gauss.

- U (upper) é uma matriz triangular superior. A matriz U é a matriz dos coeficientes obtida no método da Eliminação de Gauss.
- $[A]=[L][U]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \ell_{21} & 1 & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$
- $Ax=b \rightarrow LUx=b \rightarrow Lz=b, Ux=z$
- Todas trocas de linhas efetuadas na obtenção da matriz L devem ser armazenadas.

Vantagem da Fatoração LU

Situação em que precisamos resolver vários S.L. no qual a matriz A não muda, e só varia o vetor b .

- Dada uma matriz A , encontrar a inversa $B=A^{-1}$ tal que $AB=I=BA$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm}\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

Então

$$A\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ \vdots\\ x_{n1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ \vdots\\ x_{n2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\ \ldots,\quad A\begin{bmatrix}x_{1m}\\ x_{2m}\\ \vdots\\ x_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

- Exemplo: Encontre a inversa de $[A]=\begin{bmatrix}25 & 5 & 1\\ 64 & 8 & 1\\ 144 & 12 & 1\end{bmatrix}$

$$[A]=[L][U]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2.56 & 1 & 0\\ 5.76 & 3.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 5 & 1\\ 0 & -4.8 & -1.56\\ 0 & 0 & 0.7\end{bmatrix}$$

A solução de cada coluna requer dois passos:

Passo 1) Resolver [*L*] [*Z*] = [*C*] para encontrar [Z]

Passo 2) Resolver [*U*] [*X*] = [*Z*] para encontrar [X]

- Coluna 1:

Passo 1) $[L][Z]=[C]\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2.56 & 1 & 0\\ 5.76 & 3.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ => $[Z]=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2.56\\ 3.2\end{bmatrix}$

Passo 2) $\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix}$ => $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04762 \\ -0.9524 \\ 4.571 \end{bmatrix}$

- Coluna 2:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08333 \\ 1.417 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

- Coluna 3:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03571 \\ -0.4643 \\ 1.429 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa de A é: $[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04762 & -0.08333 & 0.03571 \\ -0.9524 & 1.417 & -0.4643 \\ 4.571 & -5.000 & 1.429 \end{bmatrix}$

Método de Jacobi

É um procedimento iterativo e de implementação mais simples do que os métodos de escalonamento. A ideia consiste em isolar, em cada equação, a variável que está na diagonal principal.

A partir de uma solução inicial, calcula-se o próximo valor de cada variável

Critério das linhas

Para garantir a convergência pelo método de Jacobi, o valor absoluto do termo na diagonal na linha i deve ser maior do que a soma dos valores absolutos de todos os outros termos na mesma linha, ou seja, a diagonal da matriz do S.L. deve ser dominante.

Seja:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$, então $\alpha = max(\alpha_i) < 1$

Critério de parada

- Norma do resíduo (erro real de cada **equação**) do sistema linear
  - Observe que o resíduo aponta o erro em cada equação, mas não em cada variável.
- Norma (p.ex. max) do erro aproximado das variáveis

Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel faz uso da ideia de que, no método de Jacobi, cada novo valor obtido é melhor do que seu antecessor. Assim, ele utiliza os valores já calculados na iteração atual.

Este método tem uma convergência mais rápida.

Critério de Sassenfeld

Para garantir a convergência neste método o critério das linhas pode ser relaxado da seguinte maneira. Seja uma linha i :

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$, então $\beta = max(\beta_i) < 1$

Exercícios

1. Explique como a inversa de uma matriz , pode ser obtida através da resolução de sistemas lineares.

   (a) Entre o método da Eliminação de Gauss e a decomposição LU, qual o mais indicado para este caso? Justifique.

2. Defina o que é um sistema linear bem condicionado (estável) e o que é um sistema linear mal condicionado.

3. Quando a decomposição LU é vantajosa computacionalmente se comparada ao Método da Eliminação de Gauss?

4. Considere a seguinte implementação para o método da Eliminação de Gauss:

```
/* Seja um S.L. de ordem 'n' */
int eliminacaoGauss( double **A, double *b, int n )
{
    for( int k=0; k < n; ++k ) {
       for( int i=k+1; i < n; ++i ) {
          double m = A[i][k] / A[k][k];
          A[i][k] = 0.0;
          for( int j=k+1; j < n; ++j )
             A[i][j] -= A[k][j] * m;
         b[i] -= b[k] * m;
      }
   }
   return 0;
}
```

Responda:
(a) Qual a razão de se efetuar um pivotamento parcial?
(b) Altere o código acima para efetuar o pivotamento parcial.

5. Dado o sistema linear $\begin{matrix} 0{,}003x_1+55{,}23x_2=58{,}12 \\ 6{,}239x_1-7{,}123x_2=47{,}23 \end{matrix}$, resolva-o:
   (a) Utilizando o método da eliminação de Gauss com apenas 4 dígitos significativos e truncamento.
   (b) Utilizando o método da eliminação de Gauss com pivotamento parcial e 4 dígitos significativos e truncamento
   (c) Explique a diferença nos resultados.
6. Dado o sistema linear $Ax=b$ onde $A=\begin{pmatrix} -3{,}2 & -5{,}0 & -4{,}0 \\ -3{,}0 & -2{,}9 & -2{,}7 \\ -1{,}5 & -0{,}4 & 1{,}1 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -4{,}4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$
   (a) Resolva utilizando o Método da Eliminação de Gauss com pivotamento parcial e aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos
   (b) Efetue uma etapa de refinamento da solução
7. Matrizes tridiagonais são aquelas em que apenas os elementos da diagonal principal, e os elementos das diagonais imediatamente acima e abaixo são não nulos

   $$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$ Matriz Tridiagonal

   Sistemas lineares com matrizes de coeficientes tridiagonais, ou **k**-diagonais, são bastante comuns na solução de problemas de computação científica.
   (a) Elabore uma estrutura de dados em linguagem C para armazenar um sistema linear com matriz de coeficientes tridiagonal, que seja eficiente para resolução pelo método de Gauss-Seidel;
   (b) Implemente o método de Gauss-Seidel para a resolução de um linear tridiagonal;
   (c) Amplie sua estrutura e implementação para resolver sistemas **k**-diagonais.
8. Responda às perguntas, justificando suas respostas:
   (a) Por que o pivotamento parcial é importante?
   (b) Qual o custo computacional de efetuar o pivotamento parcial?
   (c) Por que o método de Eliminação de Gauss não é seguro para solução de sistemas lineares?
   (d) Como podemos melhorar a solução do método de Eliminação de Gauss?
   (e) Qual o custo computacional (em notação O) para verificar se um sistema linear satisfaz o critério das linhas?

9. Seja um Sistema Linear de ordem n com matriz de coeficientes tridiagonal conforme especificado na questão 7), no qual os valores de $a_k = 1/h,\ b_k = -2/h,$ e $c_k = 1/h,$ onde $k = 1, 2, \ldots, n$ e $0 < h < 1$. Defina as estruturas de dados e implemente o método de Gauss-Seidel para resolver sistemas lineares deste tipo.