Exemplo 4.3

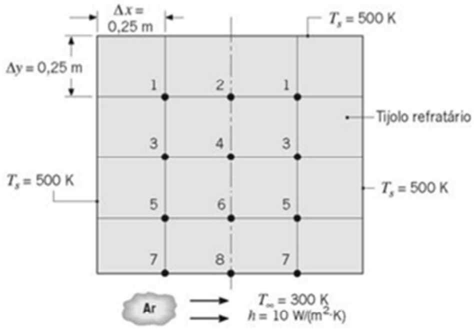
Um grande forno industrial é suportado por uma longa coluna de tijolos refratários, com 1 m por 1 m de lado. Durante a operação em regime estacionário, as condições são tais que três superfícies da coluna são mantidas a 500 K, enquanto a superfície restante é exposta a uma corrente de ar com $T_\infty = 300$ K e $h = 10$ W/(m²·K). Usando uma malha com $\Delta x = \Delta y = 0{,}25$ m, determine a distribuição de temperaturas bidimensional na coluna e a taxa de transferência de calor para a corrente de ar, por unidade de comprimento da coluna.

Solução

Dados: Dimensões e condições nas superfícies de uma coluna de sustentação.

Achar: Distribuição de temperaturas e taxa de transferência de calor por unidade de comprimento.

Esquema:



Considerações:

1. Condições de regime estacionário.
2. Condução bidimensional.
3. Propriedades constantes.
4. Ausência de geração interna.

Propriedades: Tabela A.3, tijolo refratário ($T \approx 478$ K): $k = 1$ W/(m·K).

Análise: A malha especificada possui 12 pontos nodais nos quais as temperaturas são desconhecidas. Contudo, devido à simetria do sistema, o número de incógnitas é reduzido para 8, pois as temperaturas dos pontos nodais localizados à esquerda da linha de simetria devem ser iguais às temperaturas dos pontos equivalentes localizados à direita.

Os nós 1, 3 e 5 são pontos interiores cujas equações de diferenças finitas podem ser deduzidas da Equação 4.29. Assim,

$$\text{Nó 1:}\quad T_2 + T_3 + 1000 - 4T_1 = 0$$

$$\text{Nó 3:}\quad T_1 + T_4 + T_5 + 500 - 4T_3 = 0$$

$$\text{Nó 5:}\quad T_3 + T_6 + T_7 + 500 - 4T_5 = 0$$

As equações para os pontos 2, 4 e 6 podem ser obtidas de maneira semelhante ou, como eles se encontram sobre a adiábata de simetria, pelo uso da Equação 4.42 com $h = 0$. Assim,

$$\text{Nó 2:}\quad 2T_1 + T_4 + 500 - 4T_2 = 0$$

$$\text{Nó 4:}\quad T_2 + 2T_3 + T_6 - 4T_4 = 0$$

$$\text{Nó 6:}\quad T_4 + 2T_5 + T_8 - 4T_6 = 0$$

A partir da Equação 4.42 e do fato de que $h\Delta x/k = 2{,}5$, tem-se também que

$$\text{Nó 7:}\quad 2T_5 + T_8 + 2000 - 9T_7 = 0$$

$$\text{Nó 8:}\quad 2T_6 + 2T_7 + 1500 - 9T_8 = 0$$

De posse das equações de diferenças finitas necessárias, uma solução por inversão de matrizes pode ser obtida ordenando-as do nó 1 ao nó 8, como segue:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
-4T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -1000 \\
2T_1 & + & -4T_2 & + & 0 & + & T_4 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -500 \\
T_1 & + & 0 & + & -4T_3 & + & T_4 & + & T_5 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -500 \\
0 & + & T_2 & + & 2T_3 & + & -4T_4 & + & 0 & + & T_6 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
0 & + & 0 & + & T_3 & + & 0 & + & -4T_5 & + & T_6 & + & T_7 & + & 0 & = & -500 \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & T_4 & + & 2T_5 & + & -4T_6 & + & 0 & + & T_8 & = & 0 \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 2T_5 & + & 0 & + & -9T_7 & + & T_8 & = & -2000 \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 2T_6 & + & 2T_7 & - & 9T_8 & = & -1500
\end{array}$$

Em notação matricial, de acordo com a Equação 4.48, essas equações têm a forma $[A][T] = [C]$, onde

$$[A] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1000 \\ -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ -2000 \\ -1500 \end{bmatrix}$$

Utilizando um algoritmo padrão para inversão de matrizes, é uma questão simples a determinação da inversa de $[A]$, $[A]^{-1}$, fornecendo

$$[T] = [A]^{-1}[C]$$

onde

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 489{,}30 \\ 485{,}15 \\ 472{,}07 \\ 462{,}01 \\ 436{,}95 \\ 418{,}74 \\ 356{,}99 \\ 339{,}05 \end{bmatrix} \text{K} \qquad \triangleleft$$

A taxa de transferência de calor da coluna para a corrente de ar pode ser calculada pela expressão

$$\left(\frac{q}{L}\right) = 2h\left[\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(T_s - T_\infty) + \Delta x\,(T_7 - T_\infty) + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)(T_8 - T_\infty)\right]$$

na qual o fator 2 do lado de fora dos colchetes tem origem na condição de simetria. Assim,

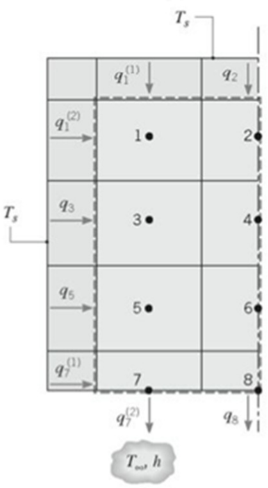
$$\left(\frac{q}{L}\right) = 2 \times 10\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K)}[(0{,}125\ \mathrm{m}\ (200\ \mathrm{K})$$

$$+ 0{,}25\ \mathrm{m}\ (56{,}99\ \mathrm{K}) + 0{,}125\ \mathrm{m}\ (39{,}05\ \mathrm{K})] = 883\ \mathrm{W/m}$$

◁

Comentários:

1. Para garantir a inexistência de erros na formulação das equações de diferenças finitas ou na execução de suas soluções, uma verificação deve ser efetuada no que se refere ao fato de os resultados satisfazerem a conservação de energia na rede nodal. Para condições de regime estacionário, a exigência dita que a taxa de entrada de energia deve ser igual à taxa de sua saída *para uma superfície de controle que circunda as regiões nodais cujas temperaturas foram determinadas*.



Para a meia-seção simétrica mostrada no esquema, tem-se que a condução para o interior das regiões nodais deve ser equilibrada pela convecção a partir destas regiões. Assim,

$$q_1^{(1)} + q_1^{(2)} + q_2 + q_3 + q_5 + q_7^{(1)} = q_7^{(2)} + q_8$$

A soma das taxas condutivas é, então,

$$\frac{q_{\mathrm{cond}}}{L} = k\left[\Delta x\frac{(T_s - T_1)}{\Delta y} + \Delta y\frac{(T_s - T_1)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{(T_s - T_2)}{\Delta y}\right.$$

$$\left. + \Delta y\frac{(T_s - T_3)}{\Delta x} + \Delta y\frac{(T_s - T_5)}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{(T_s - T_7)}{\Delta x}\right]$$

$$= 191{,}31\ \mathrm{W/m}$$

e a taxa convectiva é

$$\frac{q_{\mathrm{conv}}}{L} = h\left[\Delta x(T_7 - T_\infty) + \frac{\Delta x}{2}(T_8 - T_\infty)\right] = 191{,}29\ \mathrm{W/m}$$

A concordância entre as taxas condutiva e convectiva é excelente (dentro do erro de arredondamento), confirmando que não foram cometidos erros na formulação e na resolução das equações de diferenças finitas. Note que a transferência de calor por convecção em toda a superfície inferior (883 W/m) é obtida pela adição da taxa de transferência no nó da extremidade a 500 K (250 W/m) com a taxa nos nós interiores (191,3 W/m) e a sua multiplicação por 2 em função da simetria.

2. Embora as temperaturas calculadas satisfaçam às equações de diferenças finitas, elas não nos fornecem o campo de temperaturas exato. Lembre-se de que as equações são aproximações cuja precisão pode ser melhorada pela redução do tamanho da malha (aumentando-se o número de pontos nodais).

3. A distribuição de temperaturas também pode ser determinada pelo método iterativo de Gauss-Seidel. Com referência à organização das equações de diferenças finitas, fica evidente que a ordem já está caracterizada por uma dominância diagonal. Esse comportamento é típico das soluções por diferenças finitas de problemas de condução. Conseqüentemente, começamos pela etapa 2 e representamos as equações na forma explícita

$$T_1^{(k)} = 0{,}25T_2^{(k-1)} + 0{,}25T_3^{(k-1)} + 250$$
$$T_2^{(k)} = 0{,}50T_1^{(k)} + 0{,}25T_4^{(k-1)} + 125$$
$$T_3^{(k)} = 0{,}25T_1^{(k)} + 0{,}25T_4^{(k-1)} + 0{,}25T_5^{(k-1)} + 125$$
$$T_4^{(k)} = 0{,}25T_2^{(k)} + 0{,}50T_3^{(k)} + 0{,}25T_6^{(k-1)}$$
$$T_5^{(k)} = 0{,}25T_3^{(k)} + 0{,}25T_6^{(k-1)} + 0{,}25T_7^{(k-1)} + 125$$
$$T_6^{(k)} = 0{,}25T_4^{(k)} + 0{,}50T_5^{(k)} + 0{,}25T_8^{(k-1)}$$
$$T_7^{(k)} = 0{,}2222T_5^{(k)} + 0{,}1111T_8^{(k-1)} + 222{,}22$$
$$T_8^{(k)} = 0{,}2222T_6^{(k)} + 0{,}2222T_7^{(k)} + 166{,}67$$

Tendo as equações de diferenças finitas na forma requerida, o procedimento de iteração pode ser implementado com o auxílio de uma tabela que tem uma coluna para o número da iteração (etapa) e uma coluna para cada um dos nós identificada por T_i. Os cálculos são efetuados como segue:

1. Para cada nó, a estimativa para a temperatura inicial é inserida na linha para $k = 0$. Os valores são escolhidos de maneira racional, a fim de reduzir o número necessário de iterações.
2. Usando as N equações de diferenças finitas e os valores de T_i na primeira e segunda linhas, os novos valores de T_i são calculados para a primeira iteração ($k = 1$). Esses novos valores são inseridos na segunda linha.
3. Esse procedimento é repetido para calcular $T_i^{(k)}$ a partir dos valores anteriores de $T_i^{(k-1)}$ e dos valores atuais de $T_i^{(k)}$, até que a diferença de temperaturas entre duas iterações consecutivas satisfaça o critério estabelecido, $\varepsilon \leq 0{,}2$ K, em cada ponto nodal.

k	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
0	480	470	440	430	400	390	370	350
1	477,5	471,3	451,9	441,3	428,0	411,8	356,2	337,3
2	480,8	475,7	462,5	453,1	432,6	413,9	355,8	337,7
3	484,6	480,6	467,6	457,4	434,3	415,9	356,2	338,3
4	487,0	482,9	469,7	459,6	435,5	417,2	356,6	338,6
5	488,1	484,0	470,8	460,7	436,1	417,9	356,7	338,8
6	488,7	484,5	471,4	461,3	436,5	418,3	356,9	338,9
7	489,0	484,8	471,7	461,6	436,7	418,5	356,9	339,0
8	489,1	485,0	471,9	461,8	436,8	418,6	356,9	339,0