Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Programa Unificado de Bolsas de Estudo Para Apoio e Formação de Estudantes de Graduação (PUB-USP)

Cicloide: a trajetória que desafia a intuição

Bolsista: Vinícius Ferreira Rodrigues - **NºUSP** 11735362
Orientador: Prof. Esmerindo de Sousa Bernardes

Resumo

Neste relatório, apresentamos os resultados detalhados obtidos durante o estudo teórico inicial do projeto sobre o pêndulo tautócrono. A análise concentra-se nas propriedades geométricas e mecânicas da cicloide, utilizando o princípio da mínima ação para demonstrar suas características braquistócrona e tautócrona. Este estudo estabelece a base teórica necessária para as etapas experimentais futuras.

1 INTRODUÇÃO

O estudo da cicloide, uma curva notável tanto na matemática quanto na física, revela suas propriedades únicas: ser a trajetória de menor tempo (braquistócrona) e garantir um período de oscilação independente da amplitude (tautócrona). Este projeto explora a aplicação dessas propriedades no pêndulo tautócrono, que combina conceitos de mecânica, geometria e cálculo variacional.

O presente relatório descreve os resultados teóricos estudados durante o primeiro semestre do projeto. Esse estudo inclui demonstrações matemáticas e análises computacionais que sustentam as aplicações futuras, como a construção experimental e a utilização didática do pêndulo.

2 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA CICLOIDE

A cicloide é gerada pelo movimento de um ponto fixo em uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma linha reta. Suas equações paramétricas são:

$$x(t) = R(t - \sin t), \tag{1}$$

$$y(t) = R(1 - \cos t), \tag{2}$$

onde R é o raio da circunferência geradora.

Além de sua definição básica, analisamos suas propriedades geométricas, como:

- **Concavidade e tangentes:** A cicloide possui alternância entre concavidade e convexidade, o que é fundamental para o comportamento do pêndulo.
- **Comprimento de arco:** O comprimento de um arco completo da cicloide é $8R$, demonstrado pela integração direta das equações paramétricas.
- **Área sob um arco:** A área sob um arco é exatamente três vezes a área do círculo gerador, validada por cálculo integral.

Essas propriedades podem ser verificadas analiticamente, com auxílio de computação simbólica, e confirmadas por simulações computacionais.

3 DEMONSTRAÇÃO DA CURVA BRAQUISTÓCRONA

Uma das propriedades mais notáveis da cicloide é ser a curva **braquistócrona**, isto é, a trajetória de menor tempo sob a ação da gravidade entre dois pontos. Nesta seção, apresentamos a demonstração utilizando uma **abordagem invertida**, na qual consideramos x como função de y, ao invés de y como função de x. Essa mudança torna a equação de Euler-Lagrange mais simples e revela a cicloide de maneira direta.

3.1 Tempo de Percurso em uma Trajetória Arbitrária

Considere uma partícula de massa m, submetida unicamente à força gravitacional e deslizando ao longo de uma curva $y(x)$ sem atrito. O tempo total de percurso ao longo dessa curva pode ser escrito como

$$T = \int \frac{ds}{v}, \tag{3}$$

onde $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ é o elemento de arco (na forma usual, com $y' = \frac{dy}{dx}$) e $v = \sqrt{2gy}$ é a velocidade adquirida por conservação de energia mecânica.

Mudança de variável: Se, em vez de $y(x)$, passarmos a tratar x como função de y, de modo que $x = x(y)$, então o elemento de arco torna-se

$$ds \;=\; \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy,$$

e v continua sendo $v = \sqrt{2gy}$. Assim, o tempo de percurso (3) reescreve-se como

$$T \;=\; \int \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{2g\,y}}\; dy, \tag{4}$$

onde $x' = \frac{dx}{dy}$. É este funcional que desejamos minimizar.

3.2 Equação de Euler-Lagrange Simplificada

Definimos, então, a Lagrangeana em função de (x', y),

$$\mathcal{L}(x', y) \;=\; \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{2g\,y}}.$$

Note que $\mathcal{L}$ não depende explicitamente de x, apenas de x' e y. Nesse caso, a equação de Euler-Lagrange reduz-se a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \text{constante}.$$

Denotemos essa constante por C. Cálculos elementares fornecem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2g\,y}} \cdot \frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} \;=\; C.$$

Isolando x', obtemos

$$x' \;=\; \frac{dx}{dy} \;=\; \frac{C\,\sqrt{2g\,y}}{\sqrt{1\,-\,C^2\,2g\,y}}. \tag{5}$$

3.3 Integração e Forma Paramétrica

Para encontrar $x(y)$, basta integrar a expressão acima. Entretanto, a raiz no denominador sugere uma substituição trigonométrica que torna a integração mais simples se escrevermos

$$y(\theta) \;=\; R\,(1-\cos\theta).$$

O parâmetro R deve ser escolhido de modo a simplificar $1 - C^2\,2g\,y(\theta)$. Em particular, impõe-se, em geral,

$$C^2\,2g\,R \;=\; \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{1}{4\,C^2\,g}.$$

Dessa forma,

$$\sqrt{1 - C^2\,2g\,y(\theta)} \;=\; \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}.$$

Também ocorre que o integrando e o fator $\frac{dy}{d\theta} = R\sin\theta$ da mudança de variável se combinam de maneira que a integração se torna direta ao se reconhecer identidades como

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \;=\; \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

a qual surge facilmente ao multiplicar o numerador e denomidador dentro da raiz no lado direito da equação acima por $(1-\cos\theta)$. Ao final, chega-se a

$$\frac{dx}{d\theta} \;=\; R\,(1-\cos\theta),$$

e, portanto,

$$x(\theta) \;=\; R\,(\theta - \sin\theta) \;+\; (\text{constante de integração}).$$

Conclusão: Ajustando-se as constantes de forma que a partícula inicie em $(x,y) = (0,0)$, por exemplo, obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} x(\theta) &= R\,\big(\,\theta - \sin\theta\,\big), \\ y(\theta) &= R\,\big(1 - \cos\theta\big), \end{aligned} \qquad \text{com} \quad R = \frac{1}{4\,C^2\,g}.}$$

Esta curva, dada pelas equações paramétricas da **cicloide**, é a solução que minimiza o tempo de descida **— a braquistócrona**.

3.4 Propriedade Tautócrona

Além disso, demonstramos a *tautocronia* da cicloide mostrando que o *movimento* de uma partícula ao longo dela pode ser identificado com um *oscilador harmônico simples*, cujo período não depende da amplitude.

1. Energia Mecânica em Função de s

Considere uma partícula de massa m deslizando **sem atrito** sobre a cicloide, sob ação gravitacional. Seja s o *comprimento de arco* medido a partir do ponto mais baixo da curva (o ponto de mínimo y). A *velocidade escalar* da partícula pode ser denotada por $\dot{s}$, onde o ponto $\dot{}$ indica derivada em relação ao tempo t.

A *energia mecânica total* é dada por

$$E \;=\; \underbrace{\tfrac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2}_{\text{energia cinética}} \;+\; \underbrace{\big[-m\,g\,y(s)\big]}_{\text{energia potencial}}. \tag{6}$$

Aqui, $y(s)$ expressa a altitude do ponto em função de s. Para a *cicloide*, mostraremos que essa dependência é *quadrática* em s, de modo a obtermos a forma de um *oscilador harmônico*.

2. Expressando s em Função de y na Cicloide

Recordemos que a cicloide pode ser parametrizada como

$$\begin{cases} x(\theta) = R\,(\theta - \sin\theta), \\ y(\theta) = R\,\big(1 - \cos\theta\big). \end{cases}$$

Considere $s(\theta)$ como *o comprimento de arco* desde $\theta = 0$ (que corresponde ao ponto mais baixo da cicloide) até um valor genérico θ. Neste caso,

$$s \;=\; \int_0^{\theta} \sqrt{\left(\tfrac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{d\phi}\right)^2}\; d\phi.$$

Sabemos que

$$\frac{dx}{d\theta} = R\,\big(1 - \cos\theta\big), \quad \frac{dy}{d\theta} = R\,\sin\theta.$$

Assim,

$$\sqrt{\left(\tfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = R\,\sqrt{\big(1-\cos\theta\big)^2 + (\sin\theta)^2} = R\,\sqrt{2\,(1-\cos\theta)}\,.$$

Logo,

$$s(\theta) = R \int_0^{\theta} \sqrt{2\,(1-\cos\phi)}\; d\phi = 4R[1-\cos(\theta/2)].$$

$$s(\theta) = 4R\left[1 - \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\right]$$

Ao mesmo tempo,

$$\cos\theta = 1 - \tfrac{y}{R} \Rightarrow y(s) = 2R - \frac{(s-4R)^2}{8R}.$$

3. Forma de Oscilador Harmônico

Substituindo a relação $y(s)$ em (6), obtemos

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2 \;-\; 2\,m\,g\,R \;+\; \frac{mg}{8R}\,(s-4R)^2.$$

Definindo

$$\omega^2 \;=\; \frac{g}{4R},$$

temos

$$E \;+\; 2\,m\,g\,R = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\,m\,\omega^2\,(s-4R)^2,$$

que é precisamente a expressão da *energia total de um oscilador harmônico simples* de frequência angular ω.

4. Período Independente da Amplitude

Da teoria do *oscilador harmônico simples*, sabemos que *o período* de cada oscilação é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad\Longrightarrow\quad T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

o qual é **independente** da amplitude de oscilação.

Conclusão: Como a energia total (6) reduz-se à forma de um *oscilador harmônico* ao se observar que y cresce como s^2, o **período de oscilação** na cicloide **não depende** da amplitude inicial — característica fundamental da *propriedade tautócrona*. Em outras palavras, qualquer que seja a altura inicial de largada, a partícula executa oscilações em torno do ponto mais baixo com o *mesmo período*.

3.5 Verificação Computacional

Além das demonstrações analíticas, é possível empregar *ferramentas computacionais* para confirmar numericamente a forma braquistócrona da cicloide e compará-la com outras trajetórias. A seguir, ilustramos dois enfoques distintos:

1. Usando `Maple` e o Pacote `VariationalCalculus`

No `Maple`, podemos lançar mão do pacote `VariationalCalculus`, que inclui comandos para montar automaticamente a Equação de Euler–Lagrange. Supondo que escolhemos y como variável independente e buscamos $x(y)$, definimos:

```
with(VariationalCalculus):
g := 'g':  # Declarando g simbolicamente

# Lagrangeana em função de y e de diff(x(y), y):
L := sqrt(1 + diff(x(y), y)^2)/sqrt(2*g*y);

# Equacao de Euler-Lagrange:
EL_sol := EulerLagrange(L, y, x(y));

# O comando EulerLagrange retorna um sistema de equacoes,
# sendo EL_sol[2] o "núcleo" de dL/dx' - dL/dy = 0:
eq := EL_sol[2];

# Isolamos dx/dy:
sol_diff := isolate(eq, diff(x(y), y));

# Integramos a EDO para obter x(y):
sol_x := dsolve(sol_diff, x(y));
```

- O comando `EulerLagrange(L, y, x(y))` gera as expressões correspondentes à derivada parcial de L em relação a x' (isto é, $\frac{\partial L}{\partial x'}$) e a derivada parcial em relação a y;
- Em seguida, `isolate(eq, diff(x(y), y))` *resolve explicitamente* para $\frac{dx}{dy}$;
- Finalmente, `dsolve(...)` integra a equação diferencial resultante, fornecendo $x(y)$. Interpretando essa solução (e ajustando as constantes de integração aos pontos-limite do problema), *conclui-se* que ela corresponde à **cicloide**.

Esse procedimento confirma, de modo automatizado, que a curva minimizadora do tempo de descida (dada a Lagrangeana apropriada) é, de fato, a braquistócrona.

2. Usando `Python` para Comparar Diferentes Trajetórias

Outro método de verificação computacional envolve *simular numericamente* o tempo de descida em diversas curvas candidatas (reta, arco de círculo, parábola, cicloide). Abaixo, apresentamos um roteiro em Python que ilustra:

- *Cálculo* de cada curva no plano, partindo do ponto $(0, 0)$ até um ponto-alvo (x_2, y_2).

- *Integração numérica* do tempo de descida $T = \int \frac{ds}{v}$ via `scipy.integrate.quad`.
- *Comparação* dos valores de T para cada curva.

Código Python:

```
import numpy as np
from scipy.optimize import newton
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt

# Aceleração devido à gravidade (m/s²); ponto final
g = 9.81
x2, y2 = 1, 0.65

def cicloide(x2, y2, N=100):
    """Retorna pontos (x,y) da cicloide e tempo de viagem T."""
    # 1) Determina theta2 numericamente (Newton-Raphson), ajustando (x2,y2).
    def f(theta):
        return y2/x2 - (1-np.cos(theta))/(theta-np.sin(theta))
    theta2 = newton(f, np.pi/2)

    R = y2/(1 - np.cos(theta2))
    theta = np.linspace(0, theta2, N)
    x = R*(theta - np.sin(theta))
    y = R*(1 - np.cos(theta))

    # Tempo para a cicloide (solução conhecida: T = theta2*sqrt(R/g))
    T = theta2*np.sqrt(R/g)
    print(f"T(cicloide) = {T:.3f}")
    return x, y, T

def linear(x2, y2, N=100):
    """Reta entre (0,0) e (x2,y2)."""
    m = y2/x2
    x = np.linspace(0, x2, N)
    y = m*x
    # Fórmula deduzida: T(linear) ...
    T = np.sqrt(2*(1+m**2)/(g*m))*x2
    print(f"T(linear) = {T:.3f}")
    return x, y, T

def func(x, f, fp):
```

```
    return np.sqrt((1+fp(x)**2)/(2*g*f(x)))

def círculo(x2, y2, N=100):
    """Arco de círculo com tangente vertical em (0,0)."""
    r = (x2**2 + y2**2)/(2*x2)   # raio
    def f(x):  return np.sqrt(2*r*x - x**2)
    def fp(x): return (r - x)/f(x)
    x = np.linspace(0, x2, N)
    y = f(x)
    T = quad(func, 0, x2, args=(f, fp))[0]
    print(f"T(círculo) = {T:.3f}")
    return x, y, T

def parábola(x2, y2, N=100):
    """Arco de parábola com tangente vertical em (0,0)."""
    c = (y2/x2)**2
    def f(x):  return np.sqrt(c*x)
    def fp(x): return (c/2)/f(x)
    x = np.linspace(0, x2, N)
    y = f(x)
    T = quad(func, 0, x2, args=(f, fp))[0]
    print(f"T(parábola) = {T:.3f}")
    return x, y, T

fig, ax = plt.subplots()

for curve in ('cicloide', 'círculo', 'parábola', 'linear'):
    x, y, T = globals()[curve](x2, y2)
    ax.plot(x, y, lw=4, alpha=0.5, label=f'{curve}: {T:.3f} s')

ax.set_xlim(0,1)
ax.set_ylim(0.8, 0)  # inverte eixo y
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.legend()
plt.savefig('braquistocrona.png')
plt.show()
```

Discussão do Código:

- `cicloide(...)`: Usa Newton–Raphson para achar θ_2 que satisfaça (x_2, y_2) e gera a curva paramétrica $\big(x(\theta),\, y(\theta)\big)$. O tempo T é calculado pela fórmula $\theta_2\sqrt{\frac{R}{g}}$.

- `linear(...)`: Constrói a reta entre $(0,0)$ e (x_2, y_2) e aplica uma expressão analítica para o tempo (resultante da integração $\int \frac{ds}{v}$).
- `círculo(...)` e `parábola(...)`: Definem explicitamente $y = f(x)$, calculam $\frac{ds}{v}$ e integram numericamente (`quad`) no intervalo $[0, x_2]$.
- Ao final, *compara-se* o tempo obtido em cada curva, demonstrando que a **cicloide** de fato resulta no menor T.

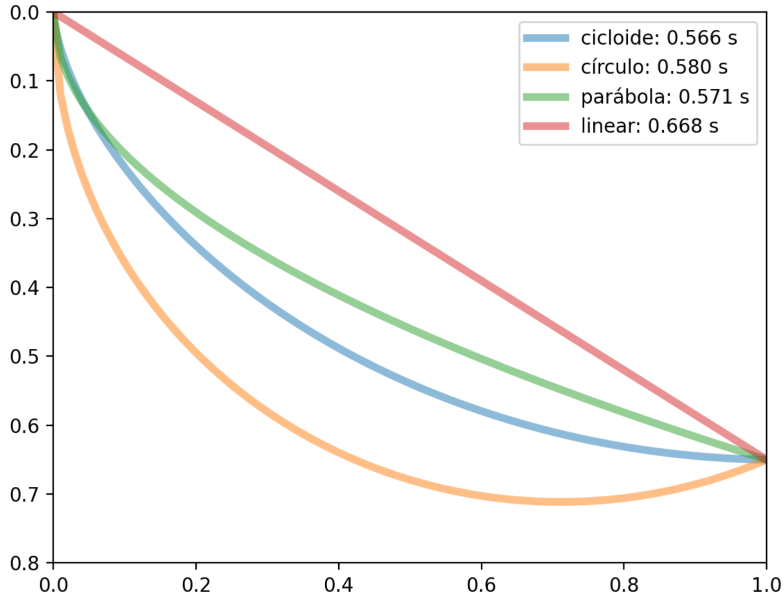

Figura 1: Comparação dos tempos de descida gerada em Python.

Conclusão: Tanto a abordagem via `Maple` (com a montagem direta da Equação de Euler–Lagrange) quanto o código `Python` (que compara numericamente diversas curvas) evidenciam a **braquistocronia** da cicloide. O **tempo de descida** via cicloide é consistentemente menor do que em outras trajetórias candidatas (reta, círculo, parábola), confirmando também, de maneira independente, a análise teórica desenvolvida neste relatório.

4 CONCLUSÕES E PRÓXIMOS PASSOS

Os resultados teóricos aqui apresentados demonstram de forma clara como a **cicloide** satisfaz tanto a condição de **braquistócrona** quanto a propriedade **tautócrona** sob a ação exclusiva da gravidade. O emprego de uma abordagem invertida (tomando x como função de y) permitiu simplificar a equação de Euler–Lagrange e conduzir à forma paramétrica que descreve a braquistócrona. Em seguida, por meio de uma análise energética detalhada, verificamos que o movimento sobre a cicloide pode ser interpretado como o de um *oscilador harmônico simples*, evidenciando que o período de oscilações não depende da amplitude inicial.

A *validação computacional* em Maple e Python serviu como suporte às demonstrações analíticas, permitindo:

- A confirmação numérica de que a cicloide minimiza o tempo de descida em comparação a outras curvas (como parábolas e arcos de circunferência);
- A verificação simbólica e a simulação do movimento, comprovando tanto a braquistocronia quanto a tautocronia da curva.

Como **próximos passos**, propõe-se:

- A **construção experimental** de um pêndulo ou trilho em formato de cicloide para observação prática de suas propriedades;
- A **calibração e medição** dos tempos de descida e dos períodos de oscilação, comparando-os com as previsões teóricas;
- O **desenvolvimento de material didático** para uso em cursos de Física e Matemática, ressaltando o valor histórico e conceitual da braquistócrona e da tautócrona;
- A **ampliação das simulações computacionais** para incluir efeitos não ideais (atrito, resistência do ar, etc.) e avaliar a robustez das conclusões nos contextos mais realistas.

Desta forma, tanto os fundamentos teóricos quanto os resultados numéricos consolidam o papel da cicloide como curva de interesse singular em Mecânica, abrindo perspectivas para melhorias na abrangência da verificação computacional, estudos experimentais e aplicações didáticas futuras.

REFERÊNCIAS

1. Eduardo Colli. "A Tautócrona". Instituto de Matemática e Estatística, USP.
2. G. Brousseau. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. Ática, 2008.
3. V. S. Kluth, S. A. Almouloud. "Transposição Didática em Chevallard". *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 2020.
4. *The Brachistochrone Problem.* Disponível em:

   https://scipython.com/blog/the-brachistochrone-problem/. Acesso em: 28 de dezembro de 2024.
5. Repositório GitHub do projeto. Disponível em: https://github.com/Vinicius-FR/Cicloide. Acesso em: 28 de dezembro de 2024.