

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Vinícius Ferreira Rodrigues**

**Simulações computacionais de trajetórias na presença de  
buracos negros em rotação**

**São Carlos**

**2024**



**Vinícius Ferreira Rodrigues**

**Simulações computacionais de trajetórias na presença de buracos negros em rotação**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física Computacional do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Bacharel em Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes

**São Carlos  
2024**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E  
PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S856m	<p>Rodrigues, Vinícius Ferreira Simulações computacionais de trajetórias na presença de buracos negros em rotação / Vinícius Ferreira Rodrigues ; orientador Esmerindo de Sousa Bernardes– São Carlos, 2024. 29 p.</p> <p>Trabalho de conclusão de curso – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2024.</p> <p>1. Buracos negros. 2. Rotação. 3. Computação algébrica. 4. Cálculo numérico. 5. Kerr. I. de-Sousa-Bernardes, Esmerindo, orient.. II. Título.</p>
-------	--

## RESUMO

RODRIGUES, V. F. **Simulações computacionais de trajetórias na presença de buracos negros em rotação.** 2024. 29p. Trabalho de conclusão de curso - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Este trabalho aborda a análise de trajetórias de partículas na presença de buracos negros rotativos, utilizando a métrica de Kerr e simulações computacionais. Foram investigadas as características da métrica de Kerr, incluindo a ergosfera e os horizontes de eventos, e como essas propriedades afetam as trajetórias de partículas com massa e fótons. A partir da aplicação de leis de conservação, como a conservação da energia, do momento angular, e da constante de Carter, foi possível simplificar e resolver as equações de movimento que descrevem as geodésicas neste espaço-tempo curvo. As simulações numéricas foram realizadas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, permitindo visualizar o comportamento das partículas em diferentes condições iniciais. Os resultados mostram a importância das simetrias ocultas na determinação das trajetórias e revelam fenômenos únicos em buracos negros em rotação, como o arrastamento de referenciais e a possibilidade de órbitas instáveis. Este estudo contribui para uma compreensão mais profunda da dinâmica de partículas em torno de buracos negros e da necessidade de desenvolver métodos computacionais algébricos e numéricos mais sofisticados para abrir caminho para futuras pesquisas em astrofísica relativística.

**Palavras-chave:** Buracos negros. Rotação. Computação algébrica. Cálculo numérico. Kerr.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	7
2	MÉTRICA DE KERR . . . . .	9
2.1	Definição da métrica . . . . .	9
2.2	Horizontes . . . . .	10
2.2.1	Horizonte de Eventos . . . . .	11
2.2.2	Ergosfera . . . . .	11
3	PRIMEIRAS LEIS DE CONSERVAÇÃO . . . . .	13
4	SIMETRIAS OCULTAS . . . . .	15
4.1	Abordagem via Tensores de Killing . . . . .	15
4.2	Abordagem via separação de variáveis . . . . .	17
5	TRAJETÓRIAS . . . . .	19
5.1	Órbitas circulares no plano equatorial . . . . .	19
5.2	Órbitas polares . . . . .	22
5.3	Queda livre . . . . .	23
5.4	Captura de partículas . . . . .	24
5.5	Trajetórias internas . . . . .	25
6	CONCLUSÃO . . . . .	27
	REFERÊNCIAS . . . . .	29





## 1 INTRODUÇÃO

Apesar das correções relativísticas feitas por Einstein ao modelo de gravitação universal proposto por Newton, as quais possibilitaram descobertas de diversos fenômenos físicos - como buracos negros -, a teoria clássica possui satisfatória correspondência até certa escala como aproximação em primeira ordem, o que não parece ser o caso de problemas de trajetórias ao redor de buracos negros. Contudo, uma análise sobre como simetrias e as leis de conservação associadas a elas facilitam a obtenção das órbitas newtonianas fornece um essencial embasamento para como será abordado o problema em questão neste trabalho, em que a análise de simetrias permitirá a simplificação da resolução das equações de movimento. Sobre simetrias, destacamos o Teorema de Noether, o qual é uma poderosa ferramenta que estabelece uma relação entre simetrias de um sistema físico e as leis de conservação associadas, como a invariância temporal de uma ação que leva à conservação da energia, enquanto a invariância espacial que leva a conservações de momento.

Neste trabalho, o Teorema de Noether pode ser usado como base para identificar e compreender as simetrias do sistema, o que nos motivou a derivar conservações relevantes. Isso não só nos ajudou a entender melhor o comportamento das partículas ao redor de buracos negros, mas também a simplificar nossas simulações computacionais. Já no contexto da Gravitação de Newton, percebemos a importância de encontrar leis de conservação ao notar que a conservação de energia, do momento angular e do vetor de Laplace-Runge-Lenz leva a uma obtenção bem mais simples das trajetórias possíveis. Este conhecimento sobre a relevância da busca de simetrias é fundamental para a análise posterior, em que a necessidade de buscar simetrias fica ainda mais urgente para a resolução das equações, enquanto que, no caso newtoniano, em termos de cálculo numérico, o uso das simetrias na simulação é apenas uma questão de escolha de parâmetros - energia e momento ao invés de componentes da velocidade inicial. Com isso, ficará evidente a necessidade de ferramentas computacionais não só para a integração numérica - para a qual usamos Python (1) -, mas também para as extensas manipulações algébricas envolvidas na obtenção de simetrias em Relatividade Geral, em que usamos a computação algébrica do software Maple (1).

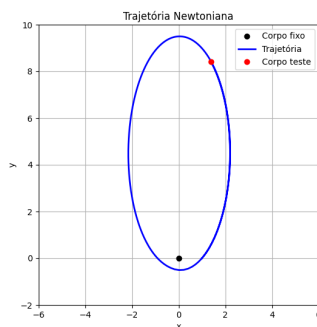


Figura 1 – Simulação newtoniana com método de Runge-Kutta de quarta ordem, com  $G = 1.0$ ,  $M = 1.0$ ,  $E = -0.1$ ,  $L = 0.975$ ,  $(r_0, \theta_0) = (1.0, 0.0)$ .  
Fonte: Elaboração própria.



## 2 MÉTRICA DE KERR

### 2.1 Definição da métrica

Determinar a trajetória de uma partícula na presença de um buraco negro rotativo envolve resolver as equações de movimento geodésico na métrica de Kerr (2), que descrevem a trajetória de uma partícula sob a influência da curvatura do espaço-tempo gerada pelo buraco negro que não translada, mas possui um certo momento angular. A métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist (3)  $(t, r, \theta, \phi)$  - uma coordenada temporal mais três espaciais, as quais vistas por um observador distante (cartesianas) com o eixo de rotação do buraco negro na direção  $z$  se tornam  $(\sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$  - para um buraco negro rotativo de massa  $M$  e momento angular  $J$  é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2R_s a r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

Onde escolhemos a assinatura  $(-+++)$  e:

$$\begin{cases} R_s = 2M ; a = J/M \\ \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta = r^2 - R_s r + a^2 \\ A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \end{cases}$$

Aqui, consideramos o sistema de unidades em que  $G = c = 1$ , constantes que podemos reintroduzir posteriormente por análise dimensional. Para obter as possíveis trajetórias de partículas se movendo nesse espaço-tempo em um dado sistema de coordenadas  $x^\mu$  e parametrizadas por um fator  $\lambda$ , usamos a lagrangiana  $L$  obtida a partir do elemento de linha  $ds^2$  que dá origem à equação das geodésicas:

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (2.2)$$

em que  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço-tempo de Kerr definido a partir de  $ds^2$  e  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  são os símbolos de Christoffel da métrica. Além disso, da Relatividade Restrita, sabemos que é necessário impor a normalização da quadrivelocidade  $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ :

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \bar{m} \quad (2.3)$$

Aqui definimos a quantidade  $\bar{m}$  que está associada à massa de repouso do objeto teste e, conseqüentemente, ao tipo de geodésica que queremos obter, isto é,

$\bar{m} = -1 \Rightarrow$  tipo tempo (objeto com massa não nula)

$\bar{m} = 0 \Rightarrow$  tipo luz ou “nula” (objeto com massa nula)

Contudo, antes de tentar resolver as quatro equações diferenciais de segunda ordem não-lineares acopladas que as equações das geodésicas geram, note que, além de tudo isso,  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  possui três índices, em que cada um pode assumir quatro valores (três coordenadas espaciais e uma temporal), resultando em 64 símbolos a serem calculados, o que não chega a ser um desafio perante a capacidade da computação algébrica. Entretanto, resolver as equações se torna um processo um tanto complicado mesmo utilizando métodos numéricos, pois para métodos como Runge-Kutta, por exemplo, é necessário que todas as equações sejam de primeira ordem e para integrar numericamente é necessário condições iniciais de todas as variáveis e, caso a equação envolva derivadas de derivadas, é necessário conhecer o valor inicial das derivadas, o que não é nada prático tendo em vista a necessidade de conhecermos a taxa de variação do tempo inicial, a qual, geralmente, não é conhecida. Ademais, partir para uso de apenas força bruta para a resolução deste problema não nos permite enxergar as simetrias e, conseqüentemente, as quantidades conservadas que surgem nesta métrica, isto é, conceitos fundamentais como energia e momento angular sequer seriam abordados durante a resolução.

Portanto, tal como utilizamos quantidades conservadas para deduzir mais facilmente as possíveis trajetórias no caso newtoniano, convém buscar tais quantidades para a métrica de Kerr. Vale ressaltar que o teorema de Noether e as órbitas newtonianas nos dão um indício do número de quantidades conservadas que podemos encontrar neste problema, já que lá estávamos em um espaço/métrica tridimensional e obtemos três quantidades conservadas. Logo, esperamos obter quatro quantidades conservadas em um problema físico quadridimensional. De fato, logo notaremos a conservação de energia e a do momento angular na direção do eixo de rotação do buraco negro devido à independência da métrica em relação ao tempo e à coordenada azimutal  $\phi$ , além da conservação da norma do quadrimomento (conservação da massa de repouso da partícula teste), isto é, temos apenas três leis de conservação das quatro esperadas, o que leva a crer que há uma quarta quantidade conservada oculta.

## 2.2 Horizontes

Para começar a abordagem das trajetórias em si, precisamos primeiro nos atentar a algumas regiões que delimitam o espaço onde analisamos as geodésicas, em que as superfícies que separam essas regiões são chamadas de horizontes.

### 2.2.1 Horizonte de Eventos

Na métrica de Schwarzschild ( $a = 0$ ), temos um termo  $(1 - R_s/r)^{-1}$  na componente  $g_{rr}$  da métrica, que claramente diverge em  $r = R_s$ , o que define o horizonte de eventos de um buraco negro estático. Já na métrica de Kerr, o que define esse horizonte, a partir do qual nem a própria luz consegue escapar, é o parâmetro  $\Delta = 0$  que faz surgir o mesmo efeito de divergir a componente radial da métrica. A condição mencionada gera dois possíveis valores para o raio do horizonte de eventos

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.4)$$

A equação acima mostra que há uma singularidade interna  $r_-$  e outra externa  $r_+$ , não havendo mais a singularidade  $r = 0$  que havia na métrica de Schwarzschild. Em adição, notamos que não há solução real para  $r$  se  $a > M$ , isto é, não há horizonte de eventos se o buraco negro rotaciona rápido o suficiente, gerando a chamada "singularidade nua". Contudo, acredita-se que tais buracos negros não ocorram no universo (2), pois as forças centrífugas seriam tão fortes que poderiam evitar o colapso gravitacional de uma estrela, não gerando um buraco negro. De fato, nunca uma singularidade nua foi detectada.

Para além da semelhança com o caso irrotacional, verificaremos a seguir a presença desse horizonte por meio da EDO temporal  $dt/d\lambda$ , a qual diverge conforme  $r \rightarrow r_{\pm}$ , o que significa que observadores distantes, aqueles que medem de fato as coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , enxergam a partícula teste se aproximando do horizonte, mas o tempo  $t_H$  em que a partícula de fato atravessa o horizonte se torna cada vez maior, fazendo com que o observador jamais veja este evento. Vale salientar que, no referencial da partícula, o evento de travessia dos pontos  $r = r_{\pm}$  acontece num tempo próprio finito  $\tau$  ( $\tau = \lambda$  quando  $\bar{m} \neq 0$ ), o que pode ser verificado ao integrar a geodésica radial  $dr/d\tau$  para obter  $\tau(r)$ . Ademais, focaremos em analisar, principalmente, a região  $r > r_+$ .

### 2.2.2 Ergosfera

Uma outra região importante na métrica de Kerr é a denominada ergosfera, a qual não é delimitada por uma singularidade, mas apresenta diversos fenômenos físicos relevantes. As superfícies das ergosferas são definidas por

$$g_{tt} = 0 \Rightarrow r_{E\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.5)$$

Dentro da ergosfera, acontecem diversos fenômenos físicos relevantes, como partículas com energia total negativa que geram o *Processo de Penrose* (4), o qual se relaciona com a Termodinâmica de buracos negros, além da superfície de *redshift infinito* (2) em  $r = r_{E+}$ . Todavia, neste trabalho não daremos ênfase nessas características.



### 3 PRIMEIRAS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Note que em um espaço plano (podendo ser n-dimensional, mas com uma métrica euclidiana) a velocidade permanece constante em todos os pontos da geodésica (caminho em linha reta no referencial da partícula). Numa tentativa de estender este conceito para outras métricas, podemos supor que, pelo menos em alguma direção designada por um vetor contravariante  $K^\mu$ , a velocidade covariante  $u_\mu$  deve permanecer constante:

$$\frac{d}{d\lambda}(K^\mu u_\mu) = \frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu} K^\mu u^\nu) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \quad (3.1)$$

Tal que  $\nabla_\mu K_\nu = \partial_\mu K_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda K_\lambda$  é a derivada covariante do vetor covariante  $K_\nu = g_{\mu\nu} K^\mu$  e à, direita, obtemos a chamada condição de Killing (5). Assim, vetores que satisfazem a relação acima são chamados de vetores de Killing, os quais nos fornecem quantidades conservadas  $K^\mu u_\mu$ . Adiante, da relação de Killing resulta o fato de que, se uma métrica  $g_{\mu\nu}$  não depende de uma certa coordenada  $x^\mu$ , existe um vetor de Killing de módulo constante na direção de  $x^\mu$ . Dessa maneira, como a métrica de Kerr não depende nem de  $t$  nem de  $\phi$ ,  $K^\mu = \delta_t^\mu$  e  $K^\mu = \delta_\phi^\mu$  são vetores de Killing, o que gera as seguintes quantidades conservadas

$$g_{\mu\nu} \delta_t^\nu u^\mu = \text{const.} \Rightarrow \delta_t^\nu u_\nu = u_t = g_{tt} u^t + g_{\phi t} u^\phi = \text{const.} \equiv -E, \quad (3.2)$$

$$g_{\mu\nu} \delta_\phi^\nu u^\mu = \text{const.} \Rightarrow \delta_\phi^\nu u_\nu = u_\phi = g_{\phi\phi} u^\phi + g_{\phi t} u^t = \text{const.} \equiv L_z, \quad (3.3)$$

resultando nas seguintes leis de conservação:

$$\left(1 - \frac{R_s r}{\Sigma}\right) \frac{dt}{d\lambda} + \frac{R_s a r \sin^2 \theta}{\Sigma} \frac{d\phi}{d\lambda} = E \quad (3.4)$$

$$\frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda} - \frac{R_s a r \sin^2 \theta}{\Sigma} \frac{dt}{d\lambda} = L_z \quad (3.5)$$

Aqui não definimos as constantes de movimento  $E$  e  $L_z$  arbitrariamente, pois essas possuem uma correspondência com energia e momento angular (por unidade de massa), respectivamente. Ao reintroduzir as constantes  $c$  e  $G$ , tal associação pode ser fundamentada ao tomarmos o caso de uma partícula com massa no limite de buraco negro irrotacional  $a \rightarrow 0$  e de pequenas velocidades, isto é,  $dt/d\lambda = dt/d\tau \rightarrow 1$ :

$$E \rightarrow c^2 - \frac{2GM}{r}; \quad L_z \rightarrow r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (3.6)$$

Assim, ao multiplicar pela massa, vemos claramente surgindo a energia de repouso  $mc^2$  e a energia potencial gravitacional  $-GMm/r$  (exceto por um fator 2) no que chamamos de energia, além de recairmos exatamente na expressão do momento angular (por unidade de massa) na direção  $z$  em coordenadas esféricas. Dessa forma, notamos que essas grandezas conservadas devem, de fato, ter dimensão de energia e momento angular por unidade de massa, ou seja, possuem um caráter de energia e momento angular na direção  $z$  para um espaço-tempo curvo na presença de um buraco negro girante, o qual distorce a métrica do espaço-tempo e, também, as equações que descrevem essas grandezas que aqui também são conservadas. Vale destacar ainda a perda de uma simetria em relação ao caso irrotacional. Quando o buraco negro não gira (métrica de Schwarzschild), o espaço é, evidentemente, esfericamente simétrico, não havendo um eixo preferencial, de forma que poderíamos escolher qualquer direção para chamarmos de  $z$  que, ainda assim, o momento angular naquela direção continuaria conservado, implicando que o momento angular total é conservado e que, conseqüentemente, movimentos no espaço de Schwarzschild são planos. Entretanto, quando o buraco negro gira em torno de um eixo, há um eixo preferencial para nosso sistema de coordenadas, que é justamente o adotado por este trabalho e é conhecido como sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist. Isso significa que não podemos considerar apenas movimentos planos (apesar de possíveis nesse espaço) e que apenas a componente  $z$  do momento angular se conserva.

Prosseguindo com a obtenção das equações de movimento, podemos isolar as derivadas em  $t$  e em  $\phi$  para obter as duas primeiras equações:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\Sigma (E \sin^2 \theta R_s a r + L_z \cos^2 \theta a^2 - L_z R_s r + L_z r^2)}{(\sin^2 \theta R_s^2 a^2 r^2 + A \cos^2 \theta a^2 - A R_s r + A r^2) \sin^2 \theta} \quad (3.7)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\Sigma (-L_z R_s a r + A E)}{\sin^2 \theta R_s^2 a^2 r^2 + A \cos^2 \theta a^2 - A R_s r + A r^2} \quad (3.8)$$

É importante ressaltar o quanto a grande utilidade da computação algébrica já começa a aparecer, ficando evidente pela quantidade de termos das expressões acima.



## 4 SIMETRIAS OCULTAS

Ainda esperamos encontrar outras duas leis de conservação e, conseqüentemente, duas equações de movimento, para  $dr/d\lambda$  e  $d\theta/d\lambda$  para conseguirmos resolver para todas as quatro coordenadas.

Além da normalização da quadrivelocidade já mencionada, há também uma simetria oculta que nos fornecerá uma quarta grandeza conservada e, conseqüentemente, as duas últimas das quatro equações para as geodésicas na métrica de Kerr. Essa grandeza, chamada de constante de Carter  $Q$  (6), foi descoberta em 1968 pelo físico australiano Brandon Carter ao verificar que a ação  $S$  dada pela equação de Hamilton-Jacobi associada a movimentos nessa métrica é separável. Essa simetria, porém, não é uma mera coincidência da métrica de Kerr, pois, posteriormente, os físicos Penrose e Walker (7) demonstraram que qualquer espaço-tempo do tipo D, segundo a classificação de Petrov (8), possui um tensor de Killing, o qual é a generalização dos vetores que definimos acima, além da própria métrica. O que caracteriza a métrica de Kerr como do tipo D é a presença de dois vetores nesse espaço cuja norma é zero, chamados de vetores nulos (8), abaixo já normalizados entre si ( $l^\mu n_\mu = -1$ ):

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right) ; n^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, -\frac{\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma} \right) \quad (4.1)$$

### 4.1 Abordagem via Tensores de Killing

Define-se um tensor de Killing de forma análoga à condição de simetrização de Killing que usamos para os seus vetores, apenas aumentando a ordem dos objetos  $K$ :

$$\nabla_{(\alpha} K_{\beta_1 \dots \beta_m)} = 0 \quad (4.2)$$

Para tensores de ordem 2, a relação acima se reduz a  $\nabla_\alpha K_{\mu\nu} + \nabla_\nu K_{\alpha\mu} + \nabla_\mu K_{\nu\alpha} = 0$ , os quais geram quantidades conservadas  $K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ . Então, fica evidente que a própria métrica, sendo um tensor de ordem 2, é um tensor de Killing, já que ela combinada com as quadrivelocidades multiplicadas gera a normalização da quadrivelocidade.

A partir daqui, a maioria das referências consultadas - como (2), (3), (4) e (8) - sugere a resolução da condição de Killing para um tensor de segunda ordem como mostrado acima e apenas mostram o resultado esperado. Contudo, ao tentarmos resolver a equação tanto pela biblioteca *Physics* quanto pela *Differential Geometry* do Maple, mesmo uma estação com 128 GB de memória RAM, processador AMD Ryzen Threadripper 3970X de 32 núcleos e 64 *threads* não foi capaz de finalizar os cálculos pelo volume de equações diferenciais a serem resolvidas sem antes fazer o programa parar de responder.

Feita a observação e dando continuidade, o tensor de Killing associado à constante de Carter foi obtido por Penrose posteriormente a descoberta de Carter e pode ser escrito como a seguir em função da simetrização  $l^{(\mu}n^{\nu)}$  dos vetores nulos normalizados:

$$K^{\mu\nu} = 2\Sigma l^{(\mu}n^{\nu)} + r^2 g^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

Agora, já tendo o tensor, conseguimos via Maple (1) checar sua validade para a métrica de Kerr por meio da condição de Killing e verificando que a grandeza conservada tem derivada zero em relação a  $\lambda$ . Então, a quantidade de Carter, a menos de algumas constantes,  $Q' = K^{\mu\nu}u_\mu u_\nu$  é obtida. Ao retomar as duas primeiras quantidades conservadas, podemos reescrever a quadrivelocidade covariante  $u_\mu = (u_t, u_r, u_\theta, u_\phi) = (-E, u_r, u_\theta, L_z)$ . Unindo a equação gerada pelo tensor de Carter e a normalização de  $u_\mu$ , obtemos um sistema de duas equações para  $u_r$  e  $u_\theta$ , os quais se relacionam com suas versões contravariantes  $dr/d\lambda = u_r/g_{rr}$  e  $d\theta/d\lambda = u_\theta/g_{\theta\theta}$ , respectivamente, resultando nas últimas duas equações de movimento necessárias para a integrabilidade das geodésicas:

$$\Sigma^2 \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 = Q - \cos^2 \theta \left[ -a^2 (\bar{m} + E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (4.4)$$

$$\Sigma^2 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 r^2 \left( r^2 + a^2 + \frac{R_s a^2}{r} \right) - 2R_s a E L_z r - L_z^2 r^2 \left( 1 - \frac{R_s}{r} \right) - \Delta (Q - \bar{m} r^2), \quad (4.5)$$

em que  $Q$  pode ser reescrito em função de apenas  $\theta$  da seguinte forma

$$Q = Q' - [(Ea - L_z)^2 - L_z^2] = u_\theta^2 + \cos^2 \theta \left( -a^2 (\bar{m} + E^2) + \left( \frac{L_z}{\sin \theta} \right)^2 \right), \quad (4.6)$$

Todavia, nesta etapa é necessário fazer uma observação crucial que não é feita em nenhuma das referências consultadas, exceto no artigo (9) de 2004 dos físicos S. V. Fuerst e K. Wu da University College London. A observação em questão é quanto ao fato de que as duas últimas equações obtidas são quadráticas nas derivadas, o que pode parecer pouco problemático, porém, ao levar em consideração métodos numéricos para solução de equações diferenciais, temos que lembrar que as equações são inseridas computacionalmente com a derivada já isolada e com potência um para que os próximos passos da função sejam calculados. Apenas para ilustrar, pelo método de diferenças finitas em primeira ordem,  $r$  seria calculado iterativamente de forma discreta na forma  $r(\lambda + \delta\lambda) = r(\lambda) + (dr/d\lambda)\delta\lambda$ . A grande problemática reside no fato de que, ao tirar a raiz quadrada de ambos os lados da equação, uma escolha de sinal deverá ser feita.

Isso faz com que as trajetórias obtidas na direção  $r$  apenas se afastem ou se aproximem (ou permaneçam constantes) e na direção  $\theta$  a partícula só poderia girar sempre

em um sentido, não havendo pontos inversão nessas duas direções, a menos que uma análise nas segundas derivadas seja feita constantemente para determinar em que momento deveria ser invertido o sinal das primeiras derivadas por meio dos pontos de inflexão. Vale adicionar ainda que as equações acima possuem funções dentro das raízes que podem ser negativas, o que acrescenta mais um grau de complexidade na análise e solução das equações.

Dessa forma, tentar fazer esse jogo de sinais se mostrou consideravelmente complicado e pouco preciso computacionalmente por causa do erro numérico que cresce com a ordem das derivadas tomadas, fazendo com que, inicialmente, tenhamos conseguido obter apenas pequenos trechos das geodésicas com boa precisão mesmo após várias tentativas, fracionando a integração em trechos e ajustando a quantidade e o tamanho dos passos de integração. Tal complicação não é enfatizada na maioria das principais bibliografias encontradas. Com isso, tomamos uma abordagem diferente ao utilizar o vetor covariante  $u_\mu$  da quadrivelocidade, em que não é necessário o uso de resultados previamente demonstrados e nem de tensores de Killing, fazendo com que as duas simetrias ocultas desta métrica apareçam naturalmente da própria normalização da quadrivelocidade e o problema das raízes nas equações diferenciais seja resolvido.

## 4.2 Abordagem via separação de variáveis

Aqui, partimos para uma abordagem semelhante àquela feita originalmente por Carter, a qual é mais intuitiva e nos leva às mesmas quantidades conservadas de forma mais direta e sem precisar do uso de tensores nem de passos algébricos excessivamente longos. Como feito anteriormente, com o auxílio do Maple, é possível expandir a normalização da quadrivelocidade a partir de  $u_\mu$  e, conseqüentemente, em termos das quantidades conservadas já obtidas. Fazendo o uso do inverso da métrica

$$g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = \bar{m} \Rightarrow u_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - (E^2 + \bar{m})a^2 \cos^2 \theta = - \left[ u_r^2 \Delta + \left( \frac{2EL_z R_s a r - L_z^2 a^2 - E^2 R_s a^2 r - E^2 a^2 r^2 - E^2 r^4}{\Delta} \right) - \bar{m} r^2 \right], \quad (4.7)$$

fica evidente que o Ansatz  $u_r = u_r(r)$  e  $u_\theta = u_\theta(\theta)$  já garante a completa integrabilidade das trajetórias, considerando que não são caóticas, por meio da separação de variáveis:

$$u_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - (E^2 + \bar{m})a^2 \cos^2 \theta = \kappa \quad (4.8)$$

$$u_r^2 \Delta + \left( \frac{2EL_z R_s a r - L_z^2 a^2 - E^2 R_s a^2 r - E^2 a^2 r^2 - E^2 r^4}{\Delta} \right) - \bar{m} r^2 = -\kappa, \quad (4.9)$$

em que  $\kappa$  é uma constante de separação. Perceba que a separação de variáveis feita acima, implica diretamente na separabilidade da ação  $S$  dada pela equação de Hamilton-Jacobi,

pois  $u_\mu = dS/dx^\mu$ , isto é, dizer que  $u_r$  só depende de  $r$  e  $u_\theta$  só depende de  $\theta$  é equivalente à abordagem feita por Carter, onde a ação foi separada na soma  $S = -Et + S_r(r) + S_\theta(\theta) + L_z\phi$ . Agora, encontramos duas novas quantidades conservadas não triviais, as tais simetrias ocultas, que são quadráticas em  $u_\mu$ , tal como obtido anteriormente via tensores de Killing de ordem dois. Em adição, é possível recuperar a constante de Carter ao simplesmente subtrair uma constante a  $\kappa$ :

$$\kappa - L_z^2 = u_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \cos^2 \theta - (E^2 + \bar{m})a^2 \cos^2 \theta = Q \quad (4.10)$$

Entretanto, a constante  $\kappa$  parece guardar um significado físico mais evidente do que  $Q$ , pois ao tomar novamente o limite de uma partícula com massa ao redor de um buraco negro irrotacional, obtemos:

$$\kappa = r^4 \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right], \quad (4.11)$$

que é exatamente o módulo ao quadrado do momento angular total da partícula teste nesse limite. Portanto, pode-se entender a origem dessa quarta simetria oculta como uma conservação do momento angular total do sistema, já que, voltando ao caso rotacional,  $\kappa$  possui dependência com  $a$ , o qual está associado ao momento angular do buraco negro.

Por fim, ao relacionar as quadravelocidades covariantes com suas versões contravariantes (equações 4.12 e 4.13) e derivar as expressões 4.8 e 4.9 em relação a  $\lambda$ , o que gera as EDOs 4.14 e 4.15, conseguimos contornar as dificuldades relacionadas às EDOs com raízes quadradas, tendo, então, um sistema de seis EDOs de primeira ordem:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{\Delta}{\Sigma} u_r \quad (4.12)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{\Sigma} u_\theta \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{d\lambda} = & \frac{\bar{m}r}{\Sigma} - \frac{(2r - R_s) u_r^2}{2\Sigma} \\ & - \frac{1}{2\Delta^2\Sigma} \left[ \left( 2EL_z R_s a - E^2 R_s a^2 - 2E^2 a^2 r - 4E^2 r^3 \right) \Delta \right. \\ & \left. - \left( 2EL_z R_s a r - L_z^2 a^2 - E^2 R_s a^2 r - E^2 a^2 r^2 - E^2 r^4 \right) (2r - R_s) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{du_\theta}{d\lambda} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\Sigma} \left( \frac{L_z^2}{\sin^4 \theta} - a^2 (E^2 + \bar{m}) \right) \quad (4.15)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\Sigma (E \sin^2 \theta R_s a r + L_z \cos^2 \theta a^2 - L_z R_s r + L_z r^2)}{(\sin^2 \theta R_s^2 a^2 r^2 + A \cos^2 \theta a^2 - A R_s r + A r^2) \sin^2 \theta} \quad (4.16)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\Sigma (-L_z R_s a r + A E)}{\sin^2 \theta R_s^2 a^2 r^2 + A \cos^2 \theta a^2 - A R_s r + A r^2} \quad (4.17)$$

## 5 TRAJETÓRIAS

Antes de partir para as simulações das trajetórias, é importante ressaltar algumas de suas características especiais que podem ser previstas ao analisar as EDOs obtidas:

- Em geral, as trajetórias na métrica de Kerr não são planas, mas um caso em que são acontece quando a partícula teste está no plano equatorial do buraco negro ( $\theta = \pi/2$ ) e sem velocidade na direção polar ( $u^\theta = 0$ );
- Mesmo que inicialmente a partícula não possua momento angular  $L_z = u_\theta = 0$ , ela tende a adquirir velocidade angular no sentido da rotação do buraco negro.

A integração numérica das EDOs foi feita via método de Runge-Kutta de quarta ordem implementado em Python 3.12.4, reduzindo automaticamente o tamanho do passo de integração conforme o crescimento da taxa de variação temporal  $dt/d\lambda$ , o que permite visualizar melhor a aproximação da partícula ao horizonte de eventos, e comparando os resultados obtidos por meio das seis EDOs (segunda abordagem) com os obtidos pelas quatro EDOs (primeira abordagem) para garantir consistência entre os métodos. Além disso, para ambas as abordagens, é necessário apenas fornecer como condições iniciais as posições  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ , já que, mesmo a segunda abordagem requerendo  $(u_{r_0}, u_{\theta_0})$ , basta fornecer os parâmetros  $E, L_z$  e  $Q$  para obter as condições iniciais das velocidades radial e polar, via equações 4.8, em função de  $r_0$  e  $\theta_0$ , respectivamente, o que facilita a comparação entre os dois resultados, em que obtivemos soluções  $(t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$  idênticas, como esperado. Ademais, adotamos  $h$  como o tamanho do passo de integração e  $N$  como o número total de passos. Já a *plotagem* das trajetórias foi feita em coordenadas de Boyer-Lindquist ao invés de cartesianas (10) por simplicidade na visualização.

### 5.1 Órbitas circulares no plano equatorial

Apesar de, em geral, as trajetórias nesta métrica não serem planas, é possível obter órbitas circulares no plano equatorial, mas para valores específicos de  $E, L_z$  e  $r$ . Para encontrar tal condição, podemos recorrer novamente à normalização da quadrivelocidade (eq. 4.5) escrita em termos de  $dr/d\lambda$  e de um potencial efetivo  $V_{ef}$  que só depende de  $r$ :

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{ef}(r) = 0 \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} \left[ 2\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{d}{dr}V_{ef}(r) \right] = 0 \quad (5.1)$$

Dessa forma, impor que o raio é constante ( $r = \text{const.}$ ) e que, consequentemente, a velocidade radial é constantemente nula ( $dr/d\lambda = d^2r/d\lambda^2 = 0$ ) implica em  $V_{ef} = dV_{ef}/dr = 0$ . Assim, temos um sistema de duas equações para  $E, L_z$  e  $r$ :

$$E^2 \left( r^2 + a^2 + \frac{R_s a^2}{r} \right) - \frac{2R_s a E L_z}{r} - L_z^2 \left( 1 - \frac{R_s}{r} \right) + \bar{m}(r^2 - R_s r + a^2) = 0 \quad (5.2)$$

$$E^2 \left( 2r - \frac{R_s a^2}{r^2} \right) + \frac{2R_s a E L_z}{r^2} - \frac{L_z^2 R_s}{r^2} + \bar{m}(2r - R_s) = 0 \quad (5.3)$$

### Partículas com massa

Para  $\bar{m} = -1$ , a solução do sistema (4) é dada por

$$E = \frac{r^2 - R_s r \pm a \sqrt{\frac{R_s r}{2}}}{r \left( r^2 - \frac{3}{2} R_s r \pm 2a \sqrt{\frac{R_s r}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} ; L_z = \frac{\pm \sqrt{\frac{R_s r}{2}} \left( r^2 \mp 2a \sqrt{\frac{R_s r}{2}} + a^2 \right)}{r \left( r^2 - \frac{3}{2} R_s r \pm 2a \sqrt{\frac{R_s r}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.4)$$

Aqui a escolha de sinal positivo implica em uma órbita circular no mesmo sentido (prógrada) da rotação do buraco negro e o sinal negativo, no sentido oposto (retrógrada). Vale ressaltar aqui que a raiz quadrada presente nos denominadores implica em uma restrição para  $r$ , a qual é algebricamente complicada, mas que evidencia duas propriedades:

- Órbitas circulares não são possíveis para certos intervalos de distância ao buraco negro, porém, em geral, é sempre possível para  $r^2 \gg a R_s$ ;
- Nem toda órbita circular no sentido da rotação do buraco negro possui uma órbita equivalente possível no sentido oposto, já que, para girar no sentido oposto, a partícula teria que vencer o arrasto sofrido pela rotação do buraco negro, tendo que ter certa energia cinética necessária para isso, que pode fazer a velocidade de rotação mínima necessária ultrapassar a velocidade da luz.

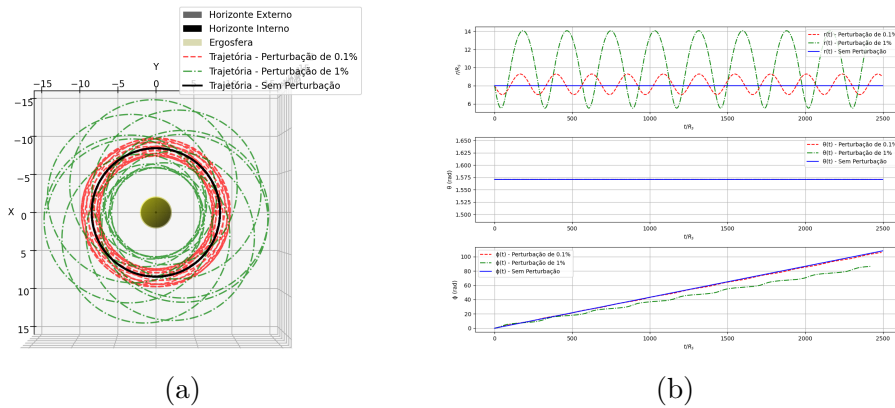


Figura 2 – (a) Simulação de órbitas circulares prógradas no plano equatorial, eixo de rotação saindo da folha, com e sem perturbação feitas com  $M = 1.0$ ,  $a = 0.5$ ,  $\bar{m} = -1$ ,  $r_0 = 2R_s$ ,  $h = 0.1$ ,  $N = 20000$ .  
(b) Gráficos de  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $\phi(t)$  da mesma órbita.

Fonte: Elaboração própria.

Na simulação feita acima, notamos a estabilidade da órbita circular de uma partícula com massa, em que, ao aplicar pequenas perturbações (0.1% e 1%) em  $E$  e  $L_z$ , a partícula continua em uma órbita “ligada”, oscilando em torno da órbita circular original.

### Fótons

Neste caso,  $\bar{m} = 0$  faz com que os termos indepententes de  $E$  e  $L_z$  se anulem no sistema de equações, fazendo com que não seja possível resolver para  $E$  e  $L_z$  em função de  $r$  separadamente dadas as condições de movimento circular, e sim apenas para a razão  $L_z/E$  que pode ser obtida da segunda equação do sistema:

$$\frac{L_z}{E} = -a \left( \frac{r + \frac{3R_s}{2}}{r - \frac{3R_s}{2}} \right). \quad (5.5)$$

Onde também é respeitada a mesma regra de sinais para órbitas prógradas e retrógradas. Agora, substituindo a equação acima na primeira do sistema, obtemos:

$$\left( r^2 - \frac{3R_s r}{2} \right)^2 - 2a^2 R_s r = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{3R_s r}{2} \pm 2a \sqrt{\frac{R_s r}{2}} = 0. \quad (5.6)$$

Ou seja, o resultado acima concorda com a segunda propriedade descrita para o caso com partícula, ressaltando ainda que raios de luz só conseguem orbitar um buraco negro girante em raios específicos dados pela igualdade acima. Já no caso em que o argumento da raiz é negativo, seria necessário mais do que a velocidade da luz para obter tal órbita.

Com isso, para simularmos órbitas circulares de um fóton nesta métrica, precisamos primeiro encontrar os valores de  $r$  que satisfazem a igualdade acima (aqui feito numericamente), depois escolher um valor de energia  $E$  do fóton e encontrar o momento angular  $L$  necessário para obter a órbita.

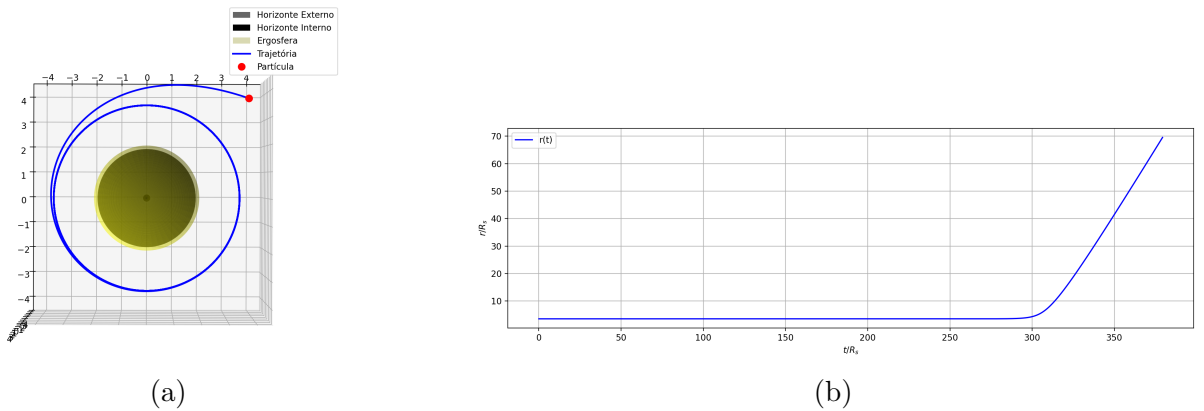


Figura 3 – (a) Simulação de uma órbita circular retrógrada no plano equatorial, eixo de rotação saindo da folha, feita com

$$M = 1.0, \quad a = 0.5, \quad \bar{m} = 0, \quad r_0 = 2R_s, \quad h = 0.01, \quad N = 20000.$$

(b) Gráfico de  $r(t)$  da mesma órbita.

Fonte: Elaboração própria.

Diferentemente do caso com massa, as órbitas circulares de fótons são instáveis, fazendo com que a própria imprecisão numérica seja suficiente para fazer a partícula sair da órbita após vários ciclos.

## 5.2 Órbitas polares

Agora, cabe analisar a possibilidade de órbitas de raio constante fora do plano equatorial na métrica de Kerr. Diferente da métrica de Schwarzschild, a componente azimutal das geodésicas dependem do ângulo polar  $\theta$ , fazendo com que, mesmo que a partícula comece com momento angular  $L_z$  nulo e girando no sentido de um polo a outro, surja um efeito de precessão por conta do arrasto no espaço-tempo gerado pela rotação do buraco negro, não sendo possível obter órbitas polares planas. É válido mencionar que se pode pensar em “anular” o arrastamento da órbita polar ao fornecer um momento angular  $L_z$  negativo o suficiente para contrabalancear a precessão, porém a velocidade angular de precessão  $d\phi/dt$  depende de  $\theta$ , ou seja, seria necessário uma força externa que ajustasse  $L_z$  para todo  $\theta$  de forma que  $d\phi/dt$  permanecesse constante. Então, o objetivo, nesta condição, é observar o efeito de arrastamento fora do plano equatorial.

Neste caso,  $\Sigma$  depende de  $\theta$  também, mas a condição de potencial efetivo nulo para órbitas circulares se mantém, pois  $dr/d\lambda = d^2r/d\lambda^2 = 0$ :

$$\Sigma^2 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{ef}(r) = 0 \Rightarrow V_{ef}(r) = 0 \quad (5.7)$$

$$2\Sigma \frac{d\Sigma}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2\Sigma^2 \frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{d}{dr} V_{ef}(r) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} V_{ef}(r) = 0 \quad (5.8)$$

Portanto, para  $L_z = 0$  e  $\bar{m} = -1$  (4):

$$E = \left[ \frac{r\Delta^2}{(r^2 + a^2) \left( r^3 - \frac{3}{2}R_s r^2 + a^2 r + \frac{1}{2}a^2 R_s \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

$$Q = \frac{R_s r^2 (r^4 + 2a^2 r^2 - 2R_s a^2 r + a^4)}{2(r^2 + a^2) \left( r^3 - \frac{3}{2}R_s r^2 + a^2 r + \frac{1}{2}a^2 R_s \right)} \quad (5.10)$$

Mais uma vez, órbitas com raio constante não são possíveis para todos os valores de  $r$  por conta da raiz quadrada e, analogamente ao caso anterior, é possível verificar que quando o denominador vai a zero, encontramos os raios das órbitas de fótons nessas condições.



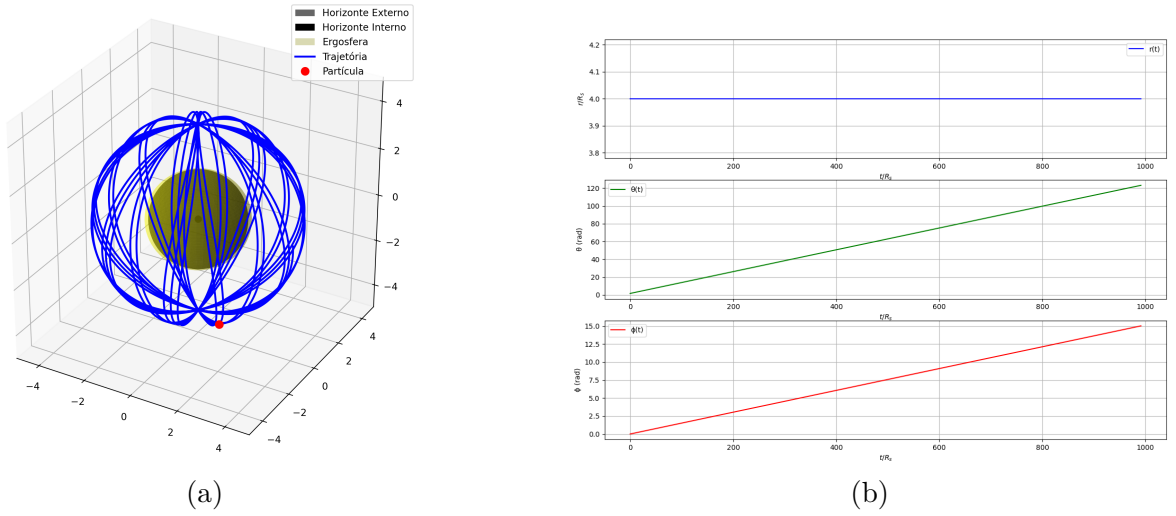


Figura 4 – (a) Simulação de uma órbita polar, eixo de rotação vertical para cima, feita com  $M = 1.0$ ,  $a = 0.5$ ,  $\bar{m} = -1$ ,  $r_0 = 2R_s$ ,  $h = 0.1$ ,  $N = 20000$ .  
 (b) Gráficos de  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $\phi(t)$  da mesma órbita.

Fonte: Elaboração própria.

Acima vemos o efeito de precessão gerado pelo arrasto do buraco negro sobre o espaço-tempo, fazendo com que, mesmo em uma órbita circular de polo a polo sem momento angular  $L_z$ , a partícula adquira velocidade angular  $d\phi/dt$ .

### 5.3 Queda livre

Outra trajetória importante a ser analisada é a queda livre, em que uma partícula com momento angular nulo  $L_z = Q = 0$  adquire velocidade angular ao longo de sua queda devido ao arrasto, mas aparenta nunca atravessar o horizonte de eventos para o observador distante. Adicionalmente, outros fenômenos acontecem nesta queda, como o fato de  $d\phi/d\lambda$  também divergir no horizonte de eventos de uma forma que, apesar de cair cada vez mais devagar, o observador vê a partícula girando quase em movimento circular uniforme, mas com uma lenta queda em uma espiral. Como comentado anteriormente, notamos que  $dr/d\lambda$  não diverge no horizonte de eventos neste movimento, o que pode ser visto na equação originária da normalização de  $u_\mu$ :

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_{r=r_+}^2 = \frac{E^2 r_+^2}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \left(r_+^2 + a^2 + \frac{R_s a^2}{r_+}\right). \quad (5.11)$$

Deste modo, podemos esperar que seja possível encontrar  $r(\lambda)$  na queda livre e inverter a relação para encontrar  $\lambda(r)$  para encontrar o tempo próprio que leva para atravessar o horizonte, comprovando que, de fato, no referencial da partícula, ela cai na singularidade em um tempo finito.

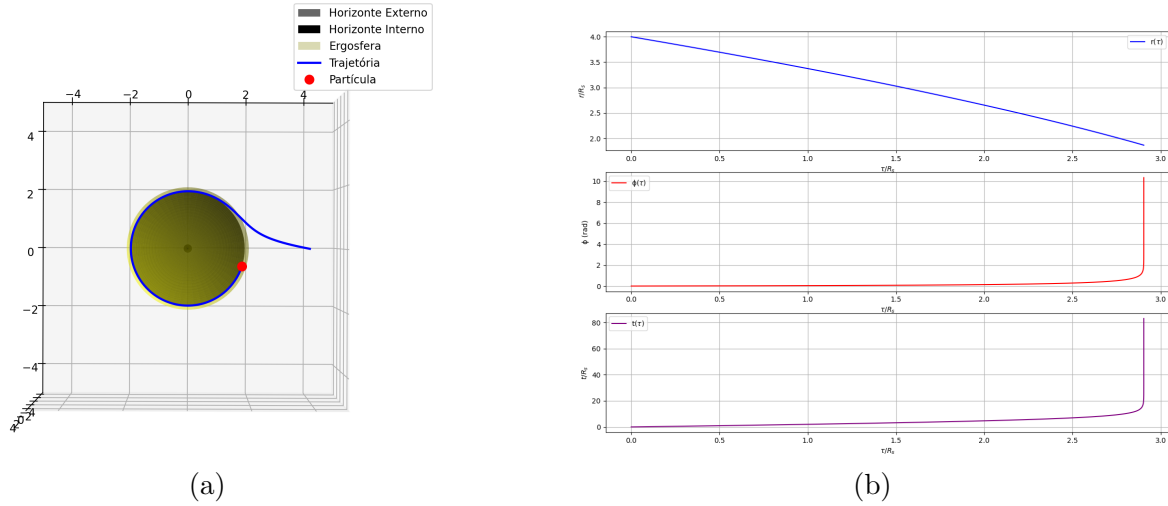


Figura 5 – (a) Simulação de uma queda livre, eixo de rotação saindo da folha, feita com  $M = 1.0$ ,  $a = 0.5$ ,  $\bar{m} = -1$ ,  $r_0 = 2R_s$ ,  $E \approx 0.919$ ,  $h = 0.001$ ,  $N = 20000$ .

(b) Gráficos de  $r(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$  e  $\phi(\tau)$  da mesma trajetória.

Fonte: Elaboração própria.

Novamente, a simulação apresenta o comportamento teórico esperado, onde é visível o ganho de velocidade angular, a divergência do tempo e da posição azimutal em função do tempo próprio  $\lambda = \tau$ , enquanto o tempo próprio em que a partícula atravessa o horizonte de eventos externos é finito (neste caso,  $\tau/R_s < 3.0$ ), evidenciando que a sensação de queda desacelerada em espiral ao se aproximar do horizonte é vista apenas pelo observador distante, ao passo que a partícula não sente o horizonte afetando sua queda.

## 5.4 Captura de partículas

Por meio das simulações, notamos também a possibilidade de captura de partículas, inclusive fótons, vindo de grandes distâncias por meio do arrasto gerado no espaço-tempo. Abaixo, temos uma das simulações feitas para visualizar da captura de fótons.

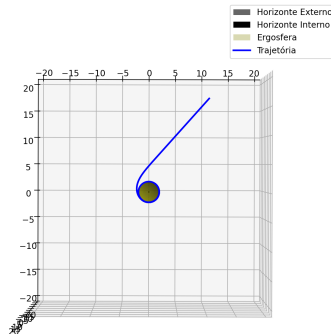


Figura 6 – Simulação de uma captura de fóton, eixo de rotação saindo da folha, com  $M = 1.0$ ,  $a = 0.5$ ,  $\bar{m} = 0$ ,  $r_0 = 10R_s$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\phi_0 = 1.0$ ,  $E \approx 0.976$ ,  $L_z = 3.0$ ,  $Q = 0$ ,  $h = 0.1$ ,  $N = 20000$ .

Fonte: Elaboração própria.

## 5.5 Trajetórias internas

Estudar o que acontece dentro do horizonte de eventos é bastante mais delicado por conta das singularidades em  $r = r_{\pm}$ , que fazem a parte temporal e azimutal divergirem, além de inverter o sinal do intervalo invariante, ou seja, invertendo a noção de espaço e tempo pela troca de sinal da métrica. Adicionalmente, além de não vermos o que ocorre dentro dos horizontes de eventos, também não podemos garantir que a métrica de Kerr é válida para essa região, pois não podemos assegurar que lá o tensor de energia-momento de Einstein é zero. Ainda assim, apesar de um estudo adicional focado em trajetórias internas ( $r < r_+$ ) ser necessário, é possível plotar algumas delas que começam dentro dos horizonte de eventos.

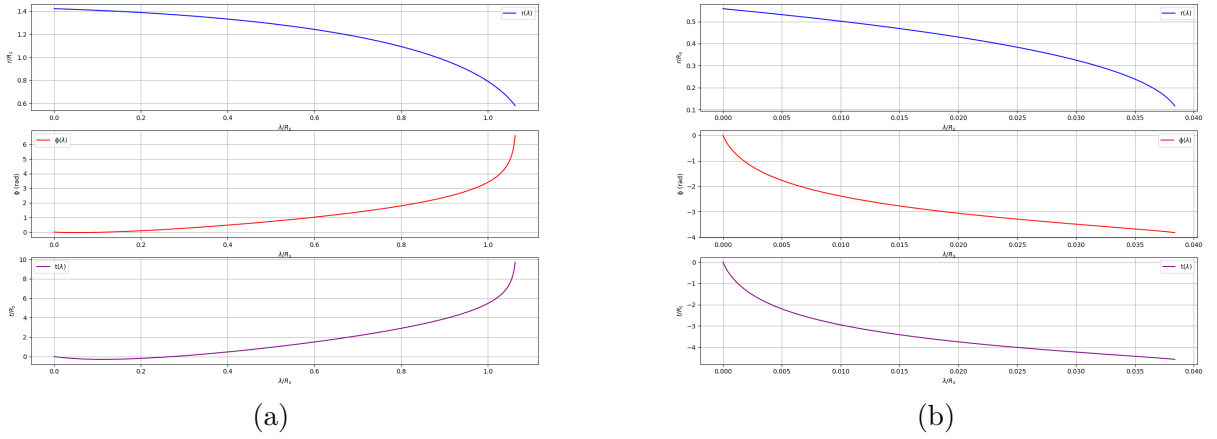


Figura 7 – (a) Gráficos de posição  $r(\lambda)$ ,  $\theta(\lambda)$  e  $\phi(\lambda)$  com  $M = 1.0$ ,  $a = 0.9$ ,  $\bar{m} = 0$ ,  $r_0 = 0.99r_+$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $E \approx 0.976$ ,  $L_z = 3.0$ ,  $Q = 0$ ,  $h = 0.001$ ,  $N = 1100$ .  
 (b) Gráficos de posição  $r(\lambda)$ ,  $\theta(\lambda)$  e  $\phi(\lambda)$  com  $M = 1.0$ ,  $a = 0.9$ ,  $\bar{m} = 0$ ,  $r_0 = 0.99r_-$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $E \approx 0.976$ ,  $L_z = 3.0$ ,  $Q = 0$ ,  $h = 0.0001$ ,  $N = 650$ .  
 Fonte: Elaboração própria.

A simulação acima foi feita pensando em ser algo como a continuação da trajetória anterior onde mostramos a captura de um fóton, mas agora iniciando um pouco dentro do horizonte externo ( $r_- < r < r_+$ ) na primeira imagem e depois um pouco dentro do horizonte interno ( $r < r_-$ ). Nesta situação, também alteramos o valor de  $a$  apenas para uma melhor visualização, devido ao tamanho do horizonte interno. É notável que o fóton tende a cair vertiginosamente em direção à origem, porém a passagem do tempo do observador ficou negativa em relação ao parâmetro  $\lambda$  (que seria o tempo próprio no caso  $\bar{m} = -1$ ), bem como a rotação azimutal também se inverteu, pois ela está atrelada à noção de tempo, a qual se torna bem mais complexa nessa região, por conta do termo cruzado  $d\phi dt$  na métrica de Kerr.



## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho realizou uma análise das trajetórias de partículas próximas a buracos negros rotativos, utilizando simulações computacionais baseadas na métrica de Kerr, dando ênfase à utilidade de métodos computacionais, como computação algébrica para o estudo de simetrias e métodos numéricos para a visualização de fenômenos. Através das simulações, foram observadas diferenças significativas na dinâmica das partículas em torno de buracos negros em rotação em relação aos casos newtoniano e de Schwarzschild, incluindo o fenômeno de arrastamento de referenciais, bem como a possibilidade de trajetórias complexas, outros horizontes e órbitas instáveis de fótons que parecem “quantizadas” em certos raios possíveis.

A aplicação das leis de conservação, como as do momento angular e da energia, foi fundamental para a análise do sistema e para a obtenção das equações de movimento. Analisando a métrica de Kerr, a simetria oculta representada pela constante de Carter revelou-se crucial para descrever as órbitas e para resolver as equações diferenciais de maneira computacionalmente eficiente e fisicamente coerente, além de evidenciar uma necessidade de obtenção dessas quantidades, principalmente, para a integração numérica em termos de implementação e velocidade, fatores que pouco dependiam das simetrias no caso newtoniano. Além disso, inspirado no site da referência (11), foi possível criar uma plataforma pública (10) para interação com as simulações deste trabalho de forma simplificada, mas incrementada e corrigida em relação à versão na qual nos inspiramos.

Com este trabalho, fica clara a necessidade de divulgação de métodos computacionais modernos para estudos cada vez mais avançados de objetos tão complexos como os buracos negros, os quais tornam o uso desses métodos indispensável para uma melhor compreensão e exploração de diversos fenômenos, como aquele por trás da origem do nome “buraco negro” (12). Em adição, notamos que o uso de tais ferramentas evidenciou e resolveu problemas sutis presentes na vasta maioria da literatura que aborda trajetórias em Relatividade Geral, em que calcular trajetórias é abordado como um simples exercício de resolver EDOs, escondendo os diversos meandros do cálculo, apresentando de forma pouco intuitiva a ordem dos passos a serem seguidos e fazendo poucas, ou nenhuma, referência ao caso fundamental bem compreendido, a Gravitação de Newton.

Por fim, os resultados obtidos, além de satisfatórios e coerentes, fornecem uma base sólida para investigações futuras sobre as interações de partículas em campos gravitacionais intensos, com potencial aplicação em estudos de termodinâmica de buracos negros (13), desenvolvimento de métodos computacionais algébricos mais eficientes para a obtenção de tensores de Killing, formação de sistemas estelares por meio de captura de partículas, geometria de espaços-tempos e ainda incluindo cargas (5) e campos eletromagnéticos, além de estudos mais complexos das trajetórias, principalmente, no interior dos horizontes.



## REFERÊNCIAS

- 1 BERNARDES, E.; RODRIGUES, V. **Repositório dos métodos computacionais do TCC**. 2024. <https://github.com/Vinicius-FR/Kerr-metric>. Acessado em: 26 out. 2024.
- 2 FROLOV, VALERI and ZELNIKOV, ANDREI. **Introduction to Black Hole Physics**. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- 3 CHANDRASEKHAR, S. **The mathematical theory of black holes**. Oxford: Clarendon Press, 1983. (The International series of monographs on physics, 69).
- 4 RAINE, D. and THOMAS, E. **Black Holes: An Introduction**. Singapore: Imperial College Press, 2009.
- 5 ZEE, A. **Einstein gravity in a nutshell**. Princeton: Princeton University Press, 2013.
- 6 CARTER, B. Global structure of the kerr family of gravitational fields. **Physical Review**, v. 174, n. 5, p. 1559–1571, 1968.
- 7 WALKER, M.; PENROSE, R. On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes. **Communications in Mathematical Physics**, v. 18, n. 4, p. 265–274, 1970.
- 8 O'NEILL, BARRETT. **The geometry of Kerr black holes**. Wellesley, MA: A.K. Peters, 1995.
- 9 FUERST, S. V.; WU, K. Radiation transfer of emission lines in curved space-time. **Astronomy and Astrophysics**, v. 424, p. 733–746, 2004.
- 10 BERNARDES, E.; RODRIGUES, V. **Plataforma autoral de simulações na métrica de Kerr em HTML e JavaScript**. 2024. <https://vinicius-fr.github.io/Kerr-metric/>. Acessado em: 02 nov. 2024.
- 11 NIEDDU, A. **Kerr Black Holes: A Visualization Project**. 2019. Accessed em: 2024-11-02. Disponível em: <https://alexnieddu.github.io/Kerr-Black-Holes/>.
- 12 MATSAS, G. and VANZELLA, D. **Buracos Negros: Rompendo os Limites da Ficção**. [S.l.: s.n.]: Editora Vieira e Lent, 2008.
- 13 BERGAMASCHI, T. T. **Sobre a natureza do problema da informação em buracos negros**. 2024. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Física)) — Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, Brasil, 2024. Acesso em: 28 out. 2024. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/76/76134/tde-21052024-083213/pt-br.php>.