

## Projeto – Desenho de filtro para sinal modulado de tempo discreto

**Objetivo:** Aplicar os conceitos estudados em sala de aula e descritos na bibliografia da disciplina para o desenho de um filtro discreto no tempo em ambiente computacional.

### Atividade

A atividade consiste em remover componentes indesejados de um sinal que foi recebido por um sistema de comunicação digital. Do lado do transmissor, o sinal é *modulado* para portar símbolos de informação. No receptor, o sinal é amostrado e depois *demodulado*. O sinal demodulado resultante contém algumas componentes indesejadas, o que indica a necessidade de aplicar um filtro antes de decodificar os símbolos de informação.

### Fundamentação teórica

O setor de engenharia de uma empresa de sistemas controladores de veículos autônomos é responsável pelo projeto de um **módulo controlador remoto** de um drone. Tal módulo é responsável por transmitir símbolos de informação  $X$  contendo comandos para controlar a direção do drone.

De forma simplificada, o módulo controlador é composto por sistemas específicos: i) Sistemas transmissor e receptor, ii) sistemas modulador e demodulador, e iii) sistema controlador. O sistema receptor é responsável por captar sinais, transmitidos pelo sistema transmissor, portando símbolos de informação  $X$  modulados por um sistema modulador, tendo como saída um sinal  $y[n]$  amostrado no tempo. O sistema demodulador é necessário para obter a estimativa  $\hat{X}$  de cada símbolo de informação transmitido. Por fim, o sistema controlador executa ações de controle da direção e velocidade do drone em função do símbolo de informação. A Figura 1 ilustra o esquemático simplificado deste módulo.

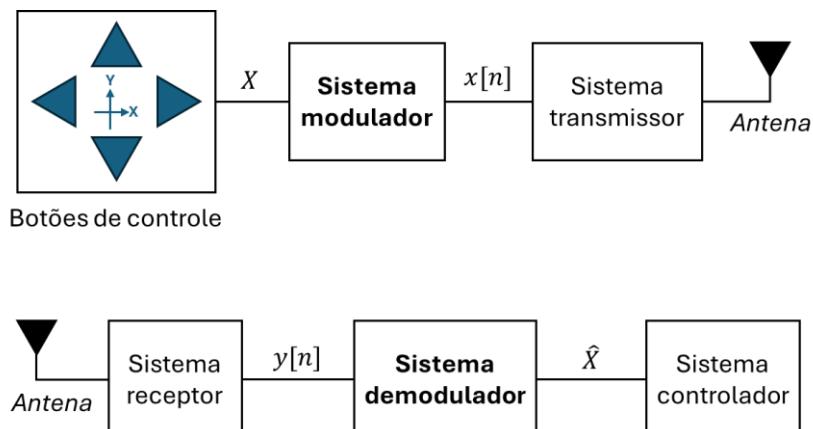


Figura 1. Esquemático simplificado do módulo controlador remoto de veículos autônomos.

O **sistema controlador** é programado para interpretar comandos de mudança de direção do drone no plano Cartesiano XY, assumindo que o drone mantém sua altura constante. A lógica por trás é simples: Em cada eixo do

plano Cartesiano o comando enviado ajusta a componente da velocidade por um fator pré-determinado  $\alpha$ , e o sentido da mudança determinado pelo símbolo de informação recebido  $\hat{X}$ .

Desta forma, dado um símbolo recebido e demodulado  $\hat{X}_n \in \mathcal{S}_{\text{4QAM}}$  no instante  $n \in \mathbb{Z}$ , as coordenadas  $c_x[n]$  e  $c_y[n]$  do drone nos eixos X e Y, respectivamente, são atualizadas seguindo as equações abaixo:

$$c_x[n + 1] = c_x[n] + \tau v_x[n],$$

$$c_y[n + 1] = c_y[n] + \tau v_y[n],$$

em que  $\tau$  é o intervalo de atualização, em segundos, da posição do drone,  $v_x[n]$  e  $v_y[n]$  são as componentes da velocidade do drone, em metros por segundo, nos eixos X e Y, respectivamente. As componentes da velocidade são atualizadas seguindo as equações abaixo:

$$v_x[n + 1] = v_x[n] + \alpha \operatorname{Re}[\hat{X}_n],$$

$$v_y[n + 1] = v_y[n] + \alpha \operatorname{Im}[\hat{X}_n],$$

em que  $\alpha$  é o fator que determina o passo de atualização da velocidade, e  $\operatorname{Re}[\cdot]$  e  $\operatorname{Im}[\cdot]$  são as partes real e imaginária de um número complexo. Assim, a parte real de  $\hat{X}_n$  contém o comando para atualizar a velocidade do drone no eixo X, enquanto sua parte imaginária atualiza a velocidade no eixo Y.

O **sistema modulador** opera de forma casada com um sistema demodulador. Tal sistema modulador é configurado para gerar símbolos de uma constelação da modulação digital 4-QAM (do Inglês *Quadrature Amplitude Modulation*), conforme figura abaixo:

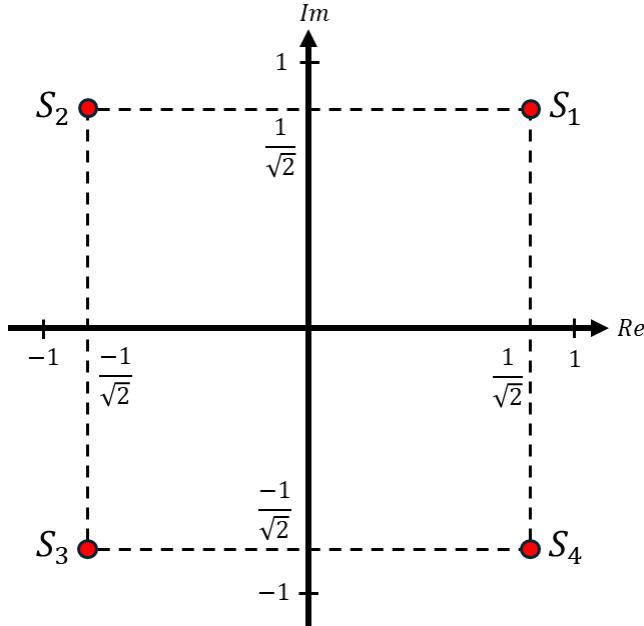


Figura 2. Ilustração da constelação de símbolos da modulação digital 4-QAM no plano complexo.

Um dado símbolo  $X \in \mathcal{S}_{\text{4QAM}}$ , em que  $\mathcal{S}_{\text{4QAM}} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ , da modulação 4-QAM porta dois bits de informação, se adequando perfeitamente à necessidade do módulo controlador remoto, que demanda dois possíveis comandos de ajuste para  $v_x[n]$  e outros dois possíveis comandos de ajuste para  $v_y[n]$ .

Antes da transmissão, o  $m$ -ésimo símbolo gerado  $X_m \in \mathcal{S}_{\text{4QAM}}$  precisa ser modulado em um sinal portador  $x_m[n]$  pelo sistema modulador. Este procedimento transforma o símbolo  $X_m$ , que é um número complexo dado por

$X_m = \text{Re}[X_m] + j\text{Im}[X_m]$ , em um sinal senoidal  $x_m[n]$ , portando as componentes real e imaginária de  $X_m$ , conforme a equação abaixo:

$$x_m[n] = \text{Re}[X_m]\sqrt{2} \cos(2\pi f_c T_s n) - \text{Im}[X_m]\sqrt{2} \sin(2\pi f_c T_s n), \quad N_0 \leq n < N_0 + N,$$

em que  $N$  é o número de amostras do intervalo do símbolo  $X_m$ ,  $N_0$  indica o instante de início do intervalo de  $X_m$ ,  $f_c$  é a frequência do sinal portador, e  $T_s$  é o período de amostragem do sinal portador. O período  $T_s$  é propositalmente definido como  $T_s = \frac{1}{Nf_c}$  para que o sinal tenha características periódicas. Então, efetivamente, o sinal  $x_m[n]$  pode ser reescrito como:

$$x_m[n] = \text{Re}[X_m]\sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - \text{Im}[X_m]\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

É importante destacar que  $x_m[n]$  porta duas informações, que são usadas para indicar dois comandos no sistema controlador, um para o eixo X e outro para o eixo Y. Além disso,  $x_m[n]$  tem propriedades trigonométricas importantes, por ser uma soma de duas senoides, permitindo o sistema demodulador separar as duas informações portadas.

A geração de uma sequência de  $N_s$  símbolos forma o sinal portador  $x[n]$  contendo  $N_s \cdot N$  amostras no tempo.

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N_s-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_m[k] \delta[n - (mN + k)], \quad 0 \leq n \leq N_s \cdot N - 1,$$

em que  $\delta[n]$  é a função impulso de tempo discreto. A Figura 3 abaixo ilustra o sinal portador  $x[n]$  formado por uma sequência de dois símbolos  $X_m = S_3$  e  $X_{m+1} = S_1$ , cada um com  $N = 21$  amostras.

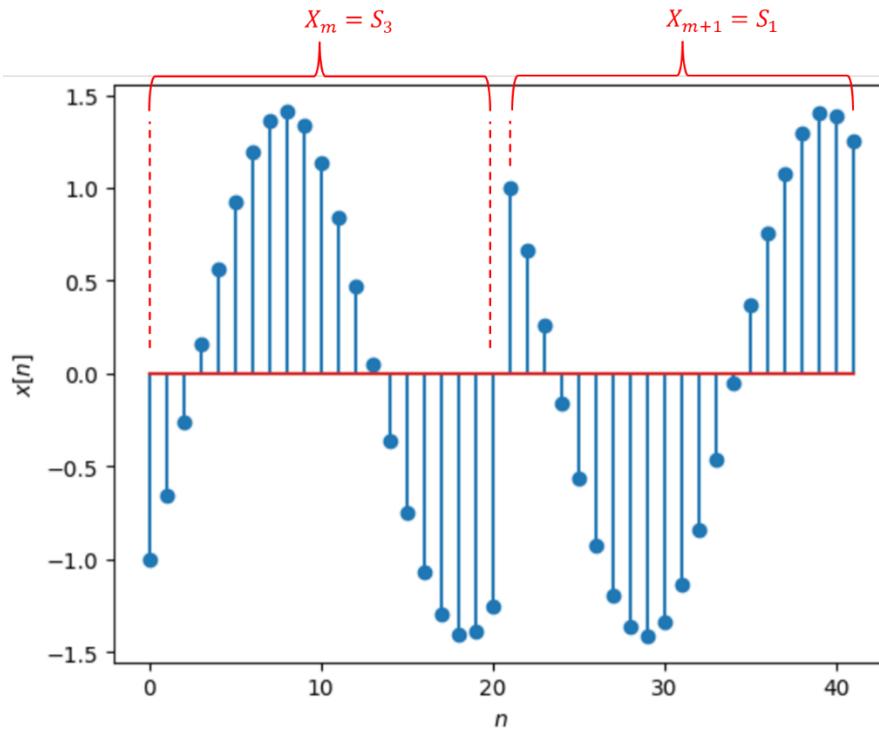


Figura 3. Exemplo ilustrativo do sinal  $x[n]$  formado por dois sinais portadores  $x_m[n]$  e  $x_{m+1}[n]$ , com  $N = 21$  amostras cada, em sequência, portando dois símbolos gerados  $X_m = S_3$  e  $X_{m+1} = S_1$ , respectivamente.

Assim, o sinal  $x[n]$  portando  $N_s$  símbolos é transmitido pelo sistema transmissor através do processo de reconstrução do sinal de tempo discreto para tempo contínuo, gerando o sinal  $x(t)$ .

O **sistema transmissor** opera de forma casada com um sistema receptor. Seu papel é transformar o sinal  $x[n]$  no sinal  $x(t)$ , de tempo contínuo, e transmiti-lo através do meio sem fio por uma antena operando em uma frequência

regulamentada e com potência ajustada para que o sinal  $y(t)$  recebido pelo sistema receptor tenha potência adequada.

O **sistema receptor**, após a recepção do sinal  $y(t)$ , faz o processo de amostragem para obter  $y[n]$  de tempo discreto, com período de amostragem  $T_s$ , de modo que  $y[n] = y(T_s n)$ ,  $\forall n$ . O sinal  $y[n]$  é, de forma simplificada, definido como:

$$y[n] = x[n] + z[n],$$

em que  $z[n]$  é um processo de ruído aleatório complexo do tipo “Gaussiano branco”, com média zero e potência menor que a potência de  $x[n]$ . É importante destacar que o ruído aditivo é inerente ao processo de recepção de sinal, sendo uma fonte natural de erros na demodulação de símbolos.

O **sistema demodulador** tem, por fim, o papel de obter estimativas dos símbolos de informação portados pelo sinal recebido  $y[n]$ . Este processo é feito em três etapas.

- Etapa 1: Nesta etapa, as propriedades trigonométricas de  $x[n]$  são exploradas de modo a decompor o sinal  $y[n]$  em duas componentes:  $y_R[n]$ , portando majoritariamente a parte real dos símbolos; e  $y_I[n]$ , portando majoritariamente a parte imaginária dos símbolos. Mais especificamente,

$$y_R[n] = \sqrt{2} \cos(2\pi f_c T_s n) y[n],$$

$$y_I[n] = -\sqrt{2} \sin(2\pi f_c T_s n) y[n].$$

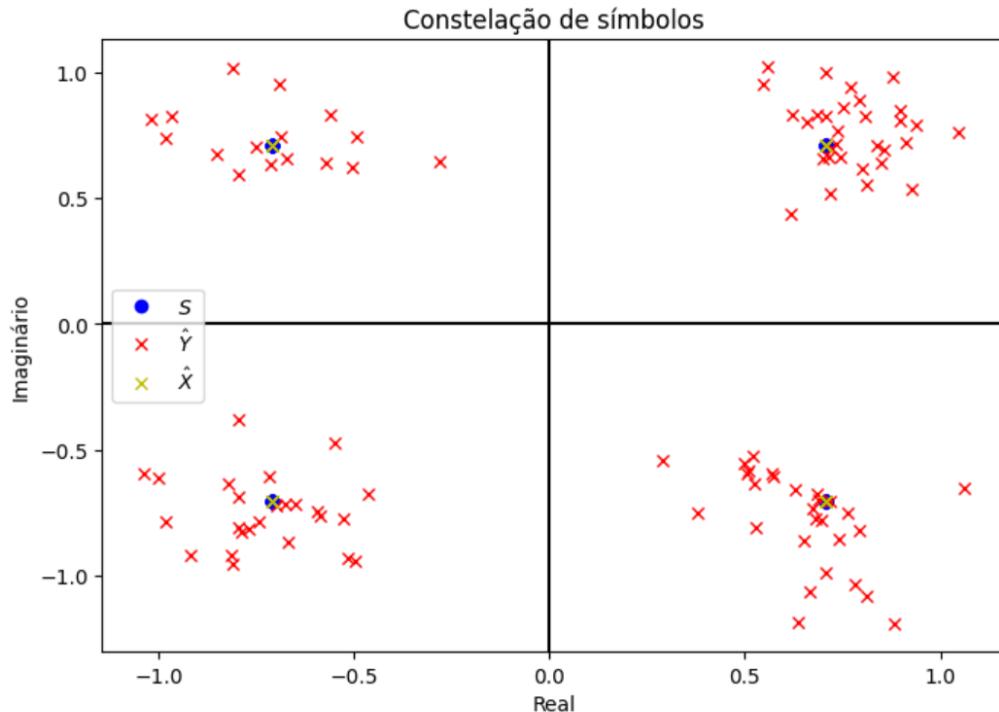
- Etapa 2: Esta etapa consiste em processar os sinais  $y_R[n]$  e  $y_I[n]$  de modo a obter as estimativas aproximadas  $\hat{Y}_m$  dos  $N_s$  símbolos transmitidos, assumindo o conhecimento de  $T_s$ ,  $N_s$ ,  $N$  e que  $x[n]$  e  $y[n]$  são temporalmente sincronizados.
- Etapa 3: Por fim, cada  $\hat{Y}_m$  é mapeado para o símbolo  $S \in \mathcal{S}_{4QAM}$  mais próximo, em termos da distância Euclidiana. Matematicamente,

$$\hat{X}_m = \min_{S \in \mathcal{S}_{4QAM}} |S - \hat{Y}_m|, \quad \forall m,$$

em que  $|\cdot|$  é a magnitude de um número complexo. A estimativa  $\hat{X}_m$  é então usada como entrada pelo sistema controlador para atualizar a velocidade do drone.

O comportamento esperado do sistema modulador é tal que haja uma “nuvem” de estimativas aproximadas de símbolos em torno de cada símbolo da constelação da modulação, como mostrado na Figura 4. O fenômeno da

“nuvem” é inerente ao processo de recepção devido ao ruído aditivo. Além disso, o processamento do sinal na **Etapa 2 do Sistema Demodulador** também pode inserir distorções, a depender de como o processamento é feito.



*Figura 4. Exemplo do mapeamento de símbolos recebidos em símbolos da constelação da modulação 4-QAM.*

## Descrição do problema

Após uma série de testes em laboratório, a equipe de engenharia responsável pelo **Sistema Demodulador** identificou o seguinte problema: As estimativas  $\hat{X}$  dos símbolos de informação estão com alta taxa de erro de símbolo SER. Por definição, a SER mede quantas vezes o símbolo demodulado  $\hat{X}$  foi diferente do símbolo transmitido  $X$  em uma sequência de  $N_s$  símbolos transmitidos. Matematicamente,  $SER = \frac{1}{N_s} \sum_{m=0}^{N_s-1} E_m$ , em que:

$$E_m = \begin{cases} 1 & \hat{X}_m \neq X_m, \\ 0 & \hat{X}_m = X_m. \end{cases}$$

É desejável que a SER seja a mais próxima possível de zero. Afinal, um erro de símbolo pode levar o sistema controlador a executar um comando errôneo.

Uma revisão técnica da **Etapa 2 do Sistema Demodulador** indicou que o processamento dos sinais  $y_R[n]$  e  $y_I[n]$  está inoperante, sendo necessário então o desenho de um novo sistema linear e invariante no tempo (LIT), de tempo discreto, que processe corretamente  $y_R[n]$  e  $y_I[n]$  e reduza a SER.

## Orientações

- A **Etapa 2 do Sistema Demodulador** pode ser composta por múltiplos sistemas LIT interconectados com o objetivo de obter a sequência de  $N_s$  símbolos  $\hat{Y}_m$ .
  - Se cabível, opte por sistemas com resposta ao impulso finita, prezando por uma solução simples, que atenda ao objetivo e esteja dentro do escopo da disciplina.
  - Baseado na fundamentação teórica, identifique o que deve ser filtrado de  $y_R[n]$  e  $y_I[n]$ , e escolha os sistemas LIT adequados para tal. Justifique todas as escolhas com a descrição matemática pertinente, o diagrama de blocos resultante, os gráficos relevantes no tempo e na frequência, etc.
  - Tudo deve ser documentado em um **Relatório Técnico**.
  - Para guiar o projeto dos sistemas LIT, é disponibilizado amostras de um sinal de referência  $y[n]$  com a especificação dos parâmetros  $N = 21$ ,  $N_s = 100$  e  $f_c = 1000$  Hz. Além disso, para validar o processamento da **Etapa 2**, considere que os símbolos portados pelo sinal de referência  $y[n]$  levam à coordenada final  $(87,5700, -273,7615)$  assumindo:
    - Coordenada inicial  $(0, 0)$ ;
    - Velocidade inicial  $v_x = 2$  e  $v_y = 2$ ;
    - $\tau = 1$  e  $\alpha = 0,5$ .
  - Mostre graficamente a trajetória do drone no plano XY em função das coordenadas calculadas a partir dos símbolos demodulados.
  - É necessário implementar um **Código em linguagem Python** para:
    - Carregar o arquivo CSV contendo o sinal e referência  $y[n]$  como um “NumPy Array”;
    - Executar as três etapas do Sistema Demodulador e calcular as coordenadas do drone a partir das equações de atualização das coordenadas.
- 

**Entrega:** 18/01/2026 via SIGAA (arquivo compactado com o relatório e o código em Python).

---