MS 512 - Análise Numérica 1 – 1° semestre/2004

Primeira Prova

1. (3 pontos) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$,

   a) encontre sua decomposição QR pelo método de Householder;

   b) mostre que d = $[1\ 2\ 3]^T$ não pertence a R(A);

   c) resolva o problema $\min_x \|Ax - d\|_2$ usando a decomposição QR do item (a);

   d) forneça o resíduo encontrado na solução do problema de quadrados mínimos do item (c).

2. (2 pontos) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,

   a) encontre seus valores singulares usando a matriz A^TA;

   b) observando, agora, que a matriz é simétrica, relacione os autovalores de A com os valores singulares da mesma matriz;

   c) considerando, ainda, que A é simétrica, indique qual relação existe entre as matrizes U e V da SVD de A.

3. (1,5 pontos) Dadas as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

   a) mostre que P é uma matriz de projeção ortogonal;

   b) mostre que P é a matriz de projeção ortogonal sobre N(A);

   c) indique qual matriz fornece a projeção ortogonal sobre $R(A^T)$.

4. (1,5 pontos) Seja A = USV^T a decomposição em valores singulares de uma matriz $A \in R^{n\times n}$ não singular.

   a) Mostre como escrever a inversa de A em função de U, S e V.

   b) Mostre como calcular o número de condição (na norma2) de A usando U, S e V.

5. (2 pontos) Para uma dada matriz A, escrevemos $A = QR$ e $A^T = \overline{Q}\overline{R}$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.7071 & -0.4082 \\ -0.5774 & 0 & 0.8165 \\ 0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -1.7321 & 0 & 1.7321 \\ 0 & 2.8284 & 5.6569 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} -0.2673 & 0.8729 & 0.4082 \\ -0.5345 & 0.2182 & -0.8165 \\ -0.8018 & -0.4364 & 0.4082 \end{bmatrix}, \overline{R} = \begin{bmatrix} -3.7417 & 0.5345 & -4.8107 \\ 0 & 1.3093 & -2.6186 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Indique o posto de A.

   b) Forneça uma base para N(A).

   c) Dado o vetor $b = [0.7071\ \ 0\ \ 0.7071]^T$, encontre uma solução qualquer para o sistema Ax = b.

   d) Descreva, usando os itens (b) e (c), todas as soluções do sistema Ax = b.