

# ME705 - Prova 1 - 26/04/2022

Profa. Mariana Rodrigues Motta

DE - UNICAMP

Coloque nome e RA.

Não é permitido o uso de celular como calculadora.

1. Você tem uma gaveta cheia de dados de 4, 6, 8, 12 e 20 lados. Você suspeita que eles são na proporção 1:2:10:2:1. Seu amigo escolhe um dado aleatoriamente e joga o dado duas vezes, obtendo o lado 5 ambas as vezes. Seja  $\theta$  a proporção de dados.

(a) Preencha a tabela abaixo:

lados	prior de $\theta$ não normalizada	verossilhança	posteriori de $\theta$ não normalizada	posteriori de $\theta$ normalizada
4		0		0
6				
8	10	$(1/8)^2$		
12				
20				
Total	16			

(b) Usando a tabela em (a), qual é a probabilidade de seu amigo ter escolhido o dado de 8 lados?

(c) Qual é a probabilidade de que na próxima jogada seja novamente o valor 5? Considere que a nova jogada é independente das duas anteriores. Para isso encontre a distribuição preditiva preenchendo a tabela abaixo.

lados	posteriori de $\theta$ normalizada	verossilhança para $x = 5$	preditiva
4	0	0	0
6		1/6	0.04058
8			
12			
20			
Total			

2. Rege a lenda que os alunos preferem inferência frequentista a Bayesiana. Uma professora do Departamento de Estatística escolhe uma amostra aleatória de 10 alunos da turma do ano de 2018 e pergunta a cada aluno qual a preferência. A professora começa com uma priori  $f(\theta) \sim \text{beta}(2, 2)$ , onde  $\theta$  é a proporção que prefere inferência Bayesiana.
- (a) Seja  $x_1$  o número de alunos na amostra que prefere inferência Bayesiana. Qual é a distribuição de probabilidade de  $x_1$ ?
  - (b) A não ser por uma constante de proporcionalidade  $c$ , encontre a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado que  $x_1 = 6$  e indique quem é  $c$ .
  - (c) Suponha que a média da distribuição a posteriori em (b) seja 0.57. Você fica a favor ou contra a hipótese da preferência ser por inferência Bayesiana? Justifique sua resposta.
  - (c) A professora decide obter outra amostra de 10 alunos e refaz a pesquisa. Seja  $x_2$  o número de alunos na segunda amostra que prefere inferência Bayesiana. Escreva detalhadamente a expressão para a probabilidade preditiva a posteriori de que a maioria ( $x_2 > 5$ ) dos alunos na segunda amostra prefere inferência Bayesiana. O resultado será uma integral com vários termos. Não se preocupe em calcular a integral, deixe indicada.

3. Suponha que Alice esteja sempre  $X$  minutos atrasada para a aula e  $X \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$ . Suponha que, a priori, saibamos que  $\theta$  é 15 minutos ou 45 minutos, ambos igualmente prováveis. Se Alice chega 10 minutos atrasada, qual é o valor mais provável de  $\theta$ ? E se ela tivesse chegado 30 minutos atrasada?

4. O tempo de espera do cliente (em horas) em um restaurante popular pode ser modelado como uma variável aleatória exponencial com parâmetro  $\lambda$ . Suponha que a priori  $\lambda(0, \infty)$  e tem função de densidade

$$f(\lambda) = \frac{1}{4!} \lambda^4 e^{-\lambda} \quad (1)$$

Suponha que observamos o tempo de espera de 5 clientes, dados por  $x_1 = 0.23$ ,  $x_2 = 0.80$ ,  $x_3 = 0.12$ ,  $x_4 = 0.35$ ,  $x_5 = 0.5$ , respectivamente. Calcule a função de densidade a posteriori de  $\lambda$ . Dica:  $\int_0^\infty y^{a-1} e^{-by} dy = \frac{(a-1)!}{b^a}$ .